Hámori Miklós

Arányok és talányok

Magyar Elektronikus Könyvtár

Tartalomjegyzék

Előszó **7**

1. Az arány fogalma **9**
Az arány fogalmának értelmezése . . . 9
Arány és összehasonlítás . . . 9
Arányosság a matematikában . . . 10
Az arány és arányosság többféle jelentése . . . 11
Az arány fogalmának történetisége . . . 12
A matematikai arányfogalom kialakulása . . . 13
Arány és tört az ókori matematikában . . . 14

2. Botrányok az arány körül **18**
Az összemérhetőség problémája . . . 18
A püthagoreusok számmisztikája . . . 20
Az euklideszi szerkesztésről . . . 21
A déloszi probléma vagy kockakétszerezés . . . 23
A kör kerülete és az átmérő viszonya . . . 24
A π számjegyei versformában . . . 26
A π véletlen módszeren alapuló meghatározása . . . 27

3. Arányos távolságok síkon és térben **29**
A hasonlóság fogalma . . . 29
Háromszögek és sokszögek hasonlósága . . . 33
A párhuzamos szelők és az arányos osztás . . . 34
A középarányosok . . . 36
Mértani középarányosok a derékszögű háromszögben . . . 37
A számtani és mértani közép kapcsolata . . . 38
Aritmetikai műveletek geometriai értelmezése . . . 38
A négyzetgyök euklideszi szerkesztése . . . 41
Területi és térfogati arányok . . . 41
Arkhimédész térfogati tétele . . . 42

4. Az aranymetszés **44**
Az aranymetszés fogalma 44
Az aranymetszés euklideszi szerkesztése 45
Tények, hitek, hiedelmek 46
Az ötszög 48
A szabályos ötszög geometriája 49

5. Öröklődő arányok **53**
Síkidomok egymásban és egymás körül 53
Szabályos sokszögek átlóival meghatározott alakzatok 55
A szabályos hatszög átlói 56
Hasonló alakzatok és a geometriai sorozat 57
A számtani sorozat mint függvény 60
A geometriai sorozat és az aranymetszés 60

6. Arányok és szögek **62**
Miben tévedett Kolumbusz? 62
Térképszerkesztés az ókorban 62
A trigonometria születése 63
Az aranyszög 66
Az aranyszög jelképrendszere 68

7. A Fibonacci-sorozat **70**
A Fibonacci-sorozat és az élő természet 70
A fák koronájának időbeli alakulása 71
A Fibonacci-sorozat és az aranymetszés 72
A Fibonacci-négyzetek 74
A Fibonacci-sorozat általánosítása 75

8. Arányok és spirálok **76**
A csigavonal 76
A síkbeli spirálgörbék matematikai leírása 77
Az arányosan növekvő sugarú spirál 77
A logaritmikus spirál 79
A logaritmikus spirál egyes pontjainak szerkesztése 80
A logaritmikus spirál és a téglalap 82
A logaritmikus spirál és az aranymetszés 83
A logaritmikus spirál érintője 84

9. Nevezetes arányok az élő természetben **86**
A levelek száma és elrendezése 86
A levéltengelyek iránya 87
A napraforgó tányérja és a fenyőtoboz 90
Fibonacci-sorozat és aranymetszés az élő természetben 91
Az exponenciális növekedés törvénye 92

Elméletek és hipotézisek 94

10. Épületek, arányok és mítoszok 96
Arányok az épületek méreteiben 96
Arányok és formák az ókori kultúrák építészetében 96
Az arány jelentősége az ókori görög és római építészetben 98
Antik templomok és lakóházak méretarányai 100
Korok, épületek, arányok 103

11. Képek és arányok 106
Az arány szerepe a képábrázolásban 106
Az emberi test arányai 107
Arány és esztétikum 108
Az aranymetszés esztétikája 109
Arány a művészetben és a valóság 110
Szerkezeti vonalak és befoglaló alakzatok 110
Arányok és reneszánsz alkotások 114
Változó korok, ismerős arányok 115
Arányok és szimmetriák 119

12. Perspektíva a művészetben 121
A tér és a sík ellentmondása 121
A geometriai perspektíva megjelenése 124
A perspektív ábrázolás törvényei 126
A kiterjesztett perspektíva 130

13. Arány és zene 131
Arányok a zenében 131
Hangmagasság és rezgésszám 131
A skálák felépítése 132
Skálák és hangközök 133
A pentaton hangkészlet és hangsor 134
Pentatónia és aranymetszés 136
A pitagoraszi zeneelmélet 137
A természetes skálák kromatikus bővítése 138
A temperált skála 138
Arányok a zenemű szerkezetében 139

Irodalom 142

Képek jegyzéke 145

Előszó

Egyfajta kalandozást kínál e kötet a matematika, az élő természet és a művészet egyes területein. Közöttük az arány fogalma teremt kapcsolatot, közös szálra fűzve a természetben megfigyelhető jelenségeket, az emberi kultúra által létrehozott művészi alkotásokat és elvont fogalmakat.

Az arány fogalma az emberiség története során fokozatosan alakult ki. Az arányosnak a harmonikussal, egyenletessel megegyező köznapi, általános értelmezése megelőzi annak matematikai, absztrakt fogalmát, jelentésváltozása párhuzamos a számfogalom fejlődésével. A matematikai arányfogalom ezen a fejlődésen keresztül éri el mai értelmét és jelentését.

Az ókori görög kultúra matematika területén elért eredményei az arány fogalmára támaszkodnak. A görög matematikai örökség arányra épülő fejezetei ma is a matematikai alapismeretek szerves részét alkotják.

Az élő természet jelenségeinek megfigyelése és rendszerezése a természet törvényeinek matematikai alakban való megfogalmazásához vezetett. E törvények nagy részének leírásában az arány fogalma jelentős szerepet játszik.

Arányok segítik az épületek, szobrok és képek alkotóját a valóság megragadásában, művészi törekvései megvalósításában. A zenében a hangok viszonya azok rezgésszámainak arányára vezethető vissza, de aránnyal találkozunk a ritmus, ütem, dallam, harmónia területén csakúgy, mint a teljes zenemű megkomponálásánál.

Mind az élő természetben, mind a művészetekben különleges arányokat is találunk. Amíg ezek kialakulásának okait nem ismerték, megjelenésükhöz misztikus jelentés tapadt. Sok esetben éppen ez ihlette az ókor monumentális épületeinek alkotóit, vagy a reneszánsz nagy művészeit remekműveik megalkotásában.

Az ókortól napjainkig egyes építményeken, művészi alkotásokon jól ismert, nevezetes arányok figyelhetők meg. Ezeknek az arányoknak régebbi korokban különleges jelentőséget tulajdonítottak, és megjelenésüket isteni eredetűnek tartották. Úgy vélték, hogy mivel ezek földöntúli eredete önmagában is esztétikai öröm forrása, az ezekben való gyönyörködés képessége sem földi eredetű. E tökéletes harmóniába vetett hit táplálta és inspirálta az ősi korok képkészítőit primitív rajzaik elkészítésében és a reneszánsz nagy mestereit csodálatos műveik megalkotásában.

Az újabb kori megfigyelések azt mutatták, hogy ilyen nevezetes arányok az élő természetben is találhatók. E párhuzam a racionálisan gondolkodó embert arra készteti, hogy e különös összeesés okait kutassa, és arra tudományosan magalapozott magyarázatot adjon.

A művészet és a tudomány édestestvérek; közös emlőből, az emberi szellemből táplálkoznak. Míg a művészet a világot az egyén szubjektív élményén átszűrve látja és láttatja, a tudomány a racionális gondolkodás lámpásával igyekszik bevilágítani a képzelet által teremtett sokszor misztikus és homályos bugyrokba.

E kötet azokból a természeti jelenségekből és művészeti alkotásokból gyűjt össze egy csokorra valót, melyekben az aránynak különleges szerepe van, vagy amelyek ilyen arányokat hordoznak. De nem elégszik meg ezek bemutatásával: egyik nem titkolt célja, hogy e különlegesnek vélt arányokhoz tapadó misztikus elemeket lefejtse, és ezek megjelenésének okait vizsgálja. A jelenségek bemutatásával és azok törvényszerűségeinek a feltárásával is azt kívánja elérni, hogy a különlegesnek tartott arányok megjelenésével kapcsolatos kérdésekre adandó válaszokat a tudomány mai állásának és saját világszemléletének megfelelően maga az Olvasó fogalmazhassa meg. Ennek megalapozását segíti azoknak az aránnyal kapcsolatos matematikai ismereteknek a felfrissítése, melyek a könyv későbbi fejezeteinek a megértését is megkönnyítik.

Az élő természet egyes jelenségeinek bemutatása a könyv alapvető mondanivalójának megalapozását teszi lehetővé. Nem az arányokhoz keresi a természeti jelenségeket, hanem az arány fogalmának segítségével közelít azok leírásához és megértéséhez. Az arány fogalmának megalkotása ebből a szempontból különösen alkalmas eszköznek bizonyul.

A művészetekkel kapcsolatos fejezetek azokat az ismeretelemeket érintik, melyek az arány művészetekben való megjelenésének felismerésében játszanak szerepet. E fejezetek nem törekednek teljességre, csupán az arány művészetekben betöltött szerepének megértéséhez jelentenek fogódzót. Hasonlóan ne várjon explicit választ az Olvasó azokra az ősidőktől fogva feltett kérdésekre, melyek a természet és a művészet viszonyára vonatkoznak. E kötet a kérdéskörrel foglalkozó néhány művészetpszichológiai irányzat megemlítésén túl többre nem vállalkozhat.

Az egyes fejezetek összeállítását az a szándék vezérelte, hogy azok egymásra épülve, a későbbi fejezeteket megalapozzák. Ez azonban csak olyan laza kapcsolatot jelent, mely az egyes részek, fejezetek önálló olvasását és megértését is lehetővé teszi. A kalandozás során számos kultúrtörténeti érdekesség is napfényre kerül, melyek, ha ismertek is, itt más megvilágítást nyernek.

A könyv egyúttal a matematikai ismeretterjesztés céljait is szolgálja. A kötet e nézőpontból az aránnyal kapcsolatos matematikai fogalmak és problémák olyan ismertetésének tekinthető, mely mondanivalóját az élő természetből és a művészetekből vett példák bemutatásával teszi színesebbé.

Budapest, 1993. május hó

A szerző

1. Az arány fogalma

Az arány fogalmának többféle értelmezése – Arány és arányosság mint kapcsolat és norma – Arány és mérés, összemérhetőség – Arányfogalom az ókori kultúrákban – Arányok és törtek a babiloni, egyiptomi és az ókori görög matematikában – Hórusz szeme, a püthagoreusok számmisztikája

Az arány fogalmának értelmezése

Az *arány* szóval kapcsolatban többnyire az aránypár, az egyenes és a fordított arányosság, valamint az ezekkel kapcsolatos iskolai emlékeink elevenednek fel. De mit kezdjünk az olyan kifejezésekkel, mint a gyermek *arányosan fejlődik,* a bíróság egy ügyben *aránytalanul* enyhe ítéletet hozott, a csapat *nagy arányú* győzelmet aratott, vagy egy épület méretei *arányosak*? A fenti példák azt mutatják, hogy az *arány* és *arányos* fogalmakat azok matematikai jelentésén túl sokkal tágabb értelemben is használjuk.

Az arány fogalma matematikai értelemben – minden matematikai fogalomhoz hasonlóan – absztrakció eredménye. De miként magukhoz a számokhoz is absztrakcióval jutunk, elvonatkoztatva attól, hogy három almáról vagy három lóról van szó, arányon matematikai értelemben két szám hányadosát értjük, nem vizsgálva, hogy a számok mire vonatkoznak. Mivel az osztás eredményét számnak tekintjük, ennek megfelelően az arány maga is szám.

Az arány fogalmának tágabb és absztrakt, matematikai értelmezését, illetve ezek megkülönböztetését jól tükrözik a latin eredetű *proportio* és *ratio* szavak, melyek valamilyen formában a legtöbb nyugati nyelvben ma is megtalálhatók.

Arány és összehasonlítás

Az arány alapja az *összehasonlítás.* De összehasonlításon alapszik a *mérés* is: a mérés és az arány között szoros kapcsolat van. Ha két dolog összehasonlításának eredményeként csak azt állapíthatjuk meg, hogy azok valamely szempontból azonos tulajdonságúak, vagy sem, az összehasonlítás eredménye a *csoportosítás.*

Az összehasonlítás ettől eltérő formája annak a megállapítása, hogy két dolog közül az egyik nagyobb vagy kisebb, nehezebb vagy könnyebb, több vagy kevesebb, mint a másik. A dolgok valamilyen tulajdonságára vonatkozó viszony, rangsor felállítása vezet azok adott szempont szerinti *rendezéséhez.* Ilyen szempont lehet a testmagasság, egy sportág bajnoki táblázatán elért helyezés, vagy akár az iskolai teljesítmény.

Minőségileg magasabb szintet jelent az összehasonlítás eredményének számokkal való kifejezése. Ennek során megállapíthatjuk azt, hogy az egyik mennyiség *mennyivel* különbözik a másiktól, vagy azt, hogy *hányszorosa* a másiknak.

Az összehasonlítás utóbbi formája vezet az arány *matematikai* fogalmához. Az összehasonlítási művelet sokszor közvetlenül is elvégezhető, a gyakorlat számára azonban hatékonyabb módszert jelent, ha olyan mennyiséget (távolságot, súlyt stb.) keresünk, mely mindkettőre (egész számszor) rámérhető, és ezt *egységnek* tekintjük. Azt a számot, mely megmutatja, hogy a mérendő dolog az egységül választott mennyiségnek hányszorosa, nevezzük *mérőszámnak.*

A *mérőszám* maga is arány: az egységhez való viszony. Két, azonos mértékkel mérhető dolog összehasonlításának eredménye a megfelelő mérőszámok *aránya,* vagy hányadosa. Ily módon az arány egy törtszámmal fejezhető ki, beleértve azt az esetet is, amikor a tört nevezője 1. A számlálás is mérésnek tekinthető, melynek eredménye természetes egész szám. Az ilyen számok aránya, ha az arány második tagja nem zérus – mindig racionális szám.

A fentiekből következik, hogy az arány fogalma szigorúan matematikai értelemben véve csak olyan dolgokra értelmezhető, melyek mérőszámai ugyanahhoz a skálához tartoznak (azonos egységgel mérhetők), és a skálának van kezdőpontja.

Arányosság a matematikában

Az *arányosság* matematikai értelmezése a matematikai arányfogalomra épül, és két mérhető (arányszámmal jellemezhető) dolog viszonyára vonatkozik. *Egyenes arányosság* van két mennyiség között, ha azok megfelelő értékpárjainak hányadosa állandó. Ez azt jelenti, hogy az egyik mennyiség kétszeresére, háromszorosára való növekedése esetén a másik mennyiség megfelelő értékei is kétszeresre, háromszorosra nőnek.

Ha a két mennyiség egymásnak megfelelő mérőszámai x_1, $x_2, \ldots, x_n$ és y_1, $y_2, \ldots, y_n$, továbbá a egy állandó szám, akkor

$$y_1 = ax_1, \qquad y_2 = ax_2, \ldots, y_n = ax_n.$$

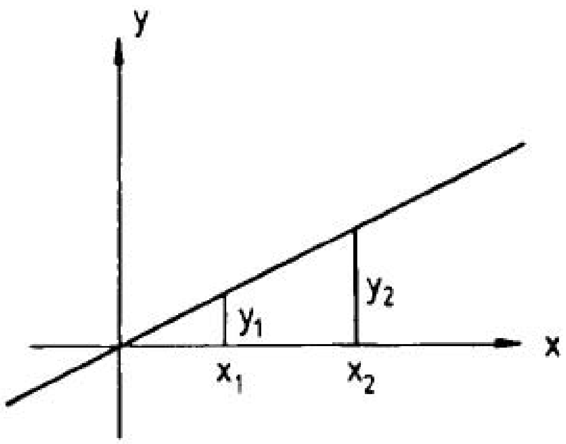
Az x-nek, illetve y-nak megfelelő értékek az

$$y = ax$$

függvényt határozzák meg. Ennek a függvénynek a képe derékszögű koordinátarendszerben a koordinátarendszer kezdőpontján, vagy *origóján* átmenő egyenes (1.1 ábra).

Fordított arányosságnak nevezzük azt a függvénykapcsolatot, melyben a két összetartozó érték szorzata állandó. Ahányszorosára nő az egyik mennyiség értéke, annyiad részére csökken a másik: $xy = a$, vagy ebből y-t kifejezve:

$$y = \frac{a}{x}.$$



1.1 ábra

Ha különböző alapterületű edényekbe azonos mennyiségű folyadékot öntünk, azokban a folyadék szintje különböző magasságban lesz. Kétszer, háromszor nagyobb alapterületű edényben ugyanaz a folyadékmennyiség az eredeti magasság felének, harmadának megfelelő szintet foglalja el. Azt mondjuk, hogy az edény alapterülete és a folyadékszint magassága között *fordított arányosság* van.

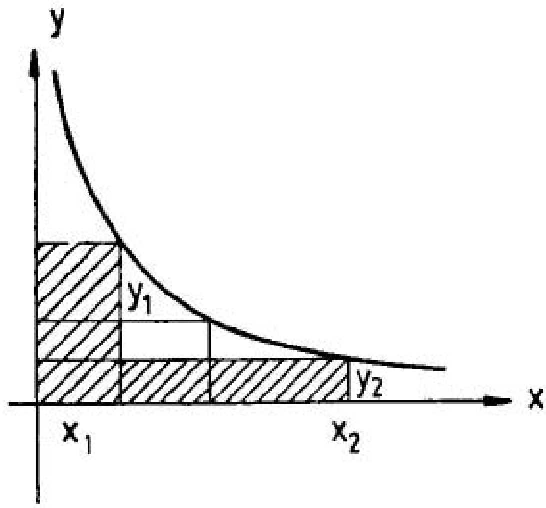
A fordított arányosságot kifejező függvényt derékszögű koordinátarendszerben egyenlő oldalú hiperbola ábrázolja (1.2 ábra).

Az arány és arányosság többféle jelentése

Az arány, arányos fogalmakat tágabb értelemben az *egyenletes*, *harmonikus*, *igazságos* fogalmak szinonimájaként használják. Az *arányos* szó ilyen értelmezése a fogalom nem mérhető dolgokra való kiterjesztése. Amikor egy sportversenyen az arany, ezüst, illetve bronzérmeket a helyezéseknek megfelelően osztják ki, a díjakat a teljesítménnyel *arányosnak* mondjuk. Amikor a vétség nagyságával arányos büntetésről beszélünk, az *arányos* jelzővel annak *igazságos* voltát akarjuk kifejezni. Ezekben az esetekben az arányosság csupán azt jelenti, hogy két dolog közül az egyiknek valamely rangskálán való elhelyezkedése összhangban van a másik dolog egy másfajta skálán való helyzetével.

Az *aránylag* kifejezést sokszor a *viszonylag* szóval azonos értelemben használjuk. Az aránylag, viszonylag szavak valamilyen elképzelt normával való összehasonlítást fejeznek ki. Arányos fejlődésen egyenletes, minden irányú, kiegyensúlyozott fejlődést értünk.

Az *arány, arányos* szavak művészi, esztétikai értelemben azt fejezik ki, hogy az, amire vonatkoznak – műalkotás, vagy a természetes valóság része – olyan, *amilyennek lennie kell*, vagyis a részek egymáshoz és az egészhez való viszonya egy valóságos vagy elképzelt (ideális) rendszernek megfelel. Az arány fogalma ilyen értelemben vonatkozhat művészeti alkotás *térbeli* (képzőművészet), vagy *időbeli* (zeneművészet) viszonyaira, elrendezésére.



1.2 ábra

Az arány fogalmának történetisége

Az arány fogalma szinte egyidős az emberi kultúrával; tartalma azonban folyamatosan változik és minden korban a kultúra adott szintjét tükrözi. Ez a jelentésváltozás napjainkig nyomon követhető. Az őskori ember primitív barlangrajzain kifejezésre jutó arányérzékeléstől a matematikai arányfogalom kikristályosodásáig vezető út szervesen illeszkedik a számfogalom kialakulásának és fejlődésének folyamatába.

Az aránynak szerepe volt a szerzett javak elosztásában: a nehezen megszerzett élelmet nem egyenlően osztották el. Az idősek és a gyerekek nem ugyanúgy részesedtek belőle, mint a vadászok vagy harcosok. Az osztozkodási művelet a későbbi idők során az arányos osztás kérdésének megfogalmazásához vezetett.

Az ókori Görögországban az aránynak és az arányosságnak nagy jelentőséget tulajdonítottak. Az arány fogalmának általános értelmezése szerint arányosnak mondták azt, ami egyenletes, méltányos, mértékletes, valódi. *Arisztotelész* és *Platón* azt tanították, hogy az arányosság a *szépség* elengedhetetlen kritériuma. Mivel a szépség szorosan kapcsolódik az erkölcsi jó fogalmához, az ókori görög társadalomban az arányosságot etikai kategóriának tekintették.

E tanítás szerint az arányok helyes megválasztása jelenti a *harmóniát,* ez pedig a helyes élet alapja, mely nem csupán a testi méretekre vonatkozik, hanem a teljes emberi életre. Ezt fejezi ki test és lélek harmonikus egységét hangsúlyozó görög életeszmény, a *kalokagatheia.*

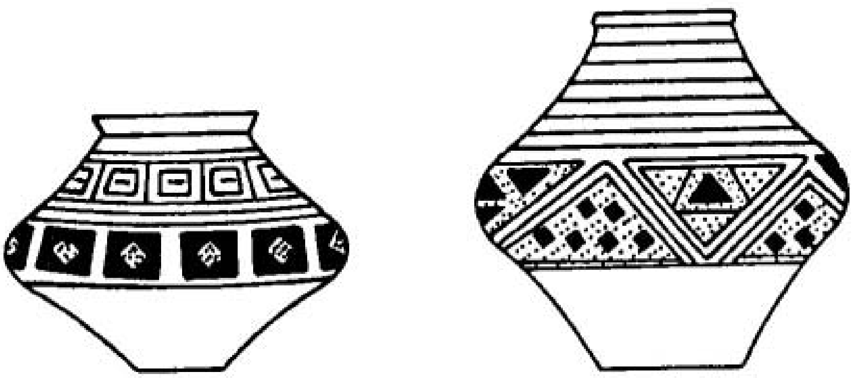
Az i. e. IV. században élt görög származású orvos, *Galénosz* szerint az egészséget a testben a meleg és a hideg, a szárazság és a nedvesség helyes arányok szerinti megoszlása jelenti. *Polükleitosz*, a nagy görög szobrász *Kánon* néven ismert értekezésében rögzítette az emberi test egyes részeinek ideális arányát, és ennek alapján mintázta meg szobrait.

Vitruvius, az i. e. I. században élt híres római építész a művészi alkotás lényeges elemének tekintette az épületek egyes részeinek méretei között fennálló helyes arányt. A középkor nagy művésze és sokoldalú tudósa, *Leonardo da Vinci* különösen nagy jelentőséget tulajdonított az aránynak, és ezt művészi alkotásaiban is érvényre juttatta.

Az arány fogalmához ideológiai jelentés is tapadt. Az arány fogalmára épült a *püthagoreusok* számmisztikája, amely a számoknak és arányoknak földöntúli értelmet, titokzatos jelentést tulajdonított. A középkorban élt matematikus és művész, Luca Pacioli *Az isteni arány* című munkájában, melyhez Leonardo da Vinci készített illusztrációkat, szintén az arány nem emberi eredetét hirdette. A középkor alkimistái az anyagok, az alkotórészek megfelelő arányában látták a bölcsek kövét, és vélték megtalálni az aranycsinálás titkát.

A matematikai arányfogalom kialakulása

Az ősi kultúrák fennmaradt emlékei arról tanúskodnak, hogy az *egybevágóság* és *hasonlóság* fogalmát már a csiszolt kőkorszak (neolit) embere is ismerte. Egyes bronzkori és korai vaskorból származó edények díszítő ábrái (1.3 ábra) a geometriai alakzatok tudatos alkalmazásáról árulkodnak. Egy díszítőelem, vagy ábra azonos méretű másolása, ismétlése az egybevágóság alapja, az ugyanolyan alakú, de különböző méretű alakok, formák megjelenése a hasonlóság fogalmának felismerésére utal.



1.3 ábra

Az arány számokkal való kifejezése a számfogalom kialakulásával vált lehetővé, és értelmezése hatással volt annak további fejlődésére. Ez a folyamat a különböző kultúrákban más és más módon ment végbe, és végső soron a törtnek számként való értelmezéséhez vezetett. Magának a számnak az absztrakcióját is megelőzte a megnevezett szám (3 alma, 2 ló stb.) megjelenése, amit a számfogalom kialakulásával kapcsolatos modern gyermeklélektani kísérletek is megerősítenek.

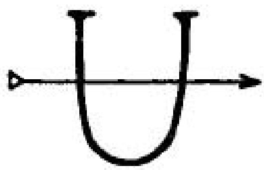
A matematikai arányfogalom kialakulásában döntő szerepe volt annak, hogy a *mennyivel* nagyobb? kérdésfeltevés mellett a *hányszorosa?* kérdése is megfogalmazódott. A *szorzás* művelete mint az összeadás ismétlése absztrakció eredménye. Ugyanígy az osztás ismételt kivonás: az osztásnak a szorzási művelet inverzeként való értelmezése azonban már fejlett absztrakciós készséget feltételez.

A legősibb kultúrákban a törtek mint az egész valamely részei jelentek meg, és csak a későbbi időkben jelentették két egész szám hányadosát. Az egész törtrészei közül először az $\frac{1}{2}$ fogalma alakult ki. Erre utal az a tény is, hogy a legtöbb nyelvben a felet kifejező törtre külön szót használnak; a fél a rómaiaknál *semis,* az angoloknál *half,* a németeknél *halb,* míg a többi törtet a számlálóban és a nevezőben lévő számok segítségével fejezik ki (pl. háromnegyed németül *dreiviertel* stb.). A magyar nyelv $\frac{1}{2}$-nek megfelelő *fél* szava finnugor eredetű, az *egyketted* szó nyelvújításkori nyelvi képződmény.

Arány és tört az ókori matematikában

A babiloniak már az időszámítás kezdete előtti III. évezredben ismerték az arány matematikai fogalmát. Az ókori Babilon területén végzett ásatások során előkerült agyagcserepeken már olyan táblázatok találhatók, amelyek a sokszög területe és oldalainak négyzete közti arányok ismeretéről árulkodnak. A szabályos hatszög és a kör területe közötti arány értékét $0,96$-nak vették, amiből a π értékére $3,125$ adódik. Ez a pontosság az akkori gyakorlati igényeknek nagyon jól megfelelt.

A térfogat mérésére agyagedényeket használtak. Ha egy ilyen edény nem telt meg, kisebb edényeket vettek igénybe, vagy az eredeti edényt csak annak feléig vagy harmadáig töltötték meg. Erre utal a sumér korszakból származó, a *fél* jelölésére használt jel is (1.4 ábra).



1.4 ábra

Az egyiptomiak ismerték az arány és a tört fogalmát. A törtszámok írásában megkülönböztették azokat a természetes törteket, melyek kialakulása régebbi időkre tehető. Ezek az $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ és az $\frac{1}{3}$, valamint a $\frac{3}{4}$ és az $\frac{1}{4}$, melyeknek külön jelük volt. Általában olyan törtekkel számoltak, amelyek számlálója 1, nevezője pedig egész szám volt. Minden más törtnek az értékét az ilyen reciprok – vagy törzstörtekkel ($\frac{1}{6}$, $\frac{1}{12}$ stb.) fejezték ki. A törzstörteket a *hieratikus* írásban – mely a *hieroglif* írással szemben már betűknek megfelelő jeleket is tartalmazott – a nevezőt jelentő szám fölé rajzolt ponttal jelölték.

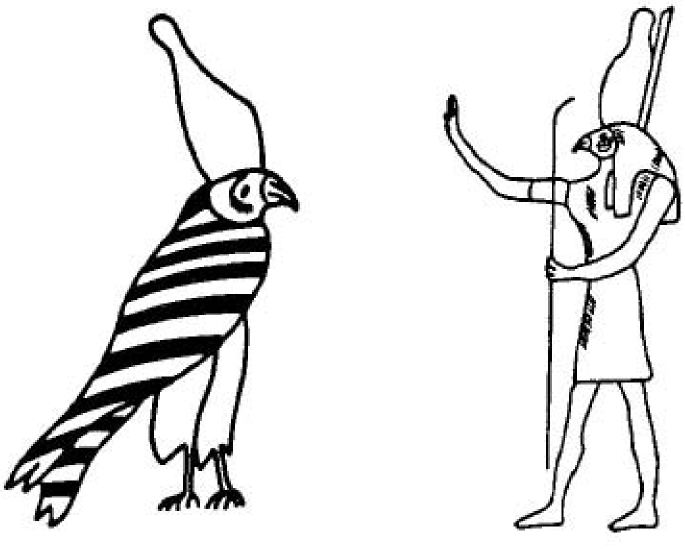
A gyakorlati életben gyakran használt $\frac{2}{3}$ törtet például törzstörtekkel a következő módon állították elő:

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}.$$

Valamely meghatározott gabonamennyiség *felezéssel* kapott törtrészeinek jelölésére külön jeleket használtak, melyeket Hórusz, a sólyomfejű isten szemének egyes részeivel jelöltek. Az így kapott részek olyan törzstörteknek feleltek meg, melyek nevezőjében csak kettő hatványai szerepeltek.

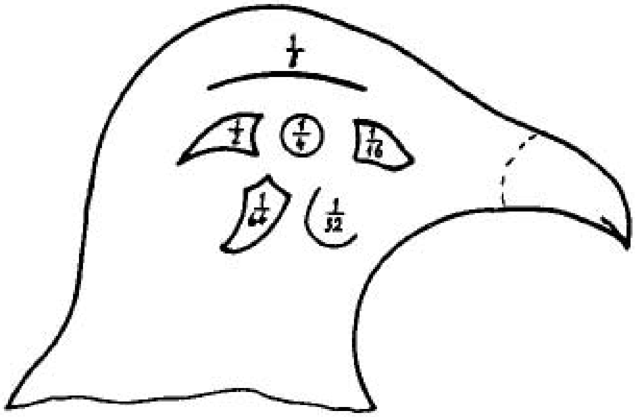
E jelölés mitológiai háttere az egyiptomi naptárszámítással kapcsolatos. Mivel az egyiptomiak a hónapokat 30 naposnak vették, az évet pedig 12 hónapból állónak tekintették, az év hosszára 360 nap adódott. Ezzel szemben egyes periodikusan ismétlődő csillagászati jelenségek megfigyelése alapján azt találták, hogy az év 365 napból áll.

A fennmaradó öt napot egy-egy isten ünneplésének szenteltek. Ezek között volt *Ozirisz,* az alvilág és a termékenység istene, *Izisz,* a természet anyja, az elemek úrnője, és *Széth,* akit a gonosz erők isteneként tartottak számon. Ozirisz, Izisz és Széth testvérek voltak. Széth gyűlölte Oziriszt, akit Izisz, aki egyúttal Ozirisz felesége is volt, védelmezett. Széth ármányos módon végül megölte Oziriszt, és feldarabolt testét a Nílusba szórta. *Ré,* a Napisten parancsára *Anubisz,* a sakálisten leszállt a földre, és a testrészeket összeillesztette. Ozirisz Izisz leheletére újjáéledt, és ebből a poszthumusz egyesülésből született *Hórusz,* a harcos sólyomisten (1.5 ábra).



1.5 ábra

Izisz, Széth bosszújától félve a Nílus mocsaraiban bujkálva nevelte fel gyermekét, aki felnőve párviadalban legyőzte Széthet. E harc során Széthnek sikerült Hórusz egyik szemét darabokra tépnie: a szétmarcangolt szem darabjai (részei) jelentik a kérdéses törtrészeket, illetve törteket (1.6 ábra). Az egyiptomi mitológia szerint Hórusz szeme – mivel az istenek számára nincs lehetetlen –, az idők során ismét egybeforrt. Hórusz, a királyi hatalmat jelképező, a gonosz felett győzedelmeskedő isten emlékét a kereszténység sárkányölő *Szent György* alakjában őrzi.



1.6 ábra

De térjünk vissza a törzstörtekhez. Az egyiptomiak a gyakorlatban felmerülő számítási feladataik megoldását olyan törzstörtekkel való műveletek segítségével végezték el, melyek nevezőjében 2 hatványok szerepeltek. Ennek oka abban a számolási technikában rejlik, mely a szorzást és az osztást a kettőzésre és a felezésre vezeti vissza. A 19 : 8 osztást például a kettő hatványú törzstörtek segítségével oly módon végezték el, hogy első lépésként a kettő hatványait tartalmazó táblázatból megnézték, hogy 8-nak hányszorosa kisebb még 19-nél. Mivel $(8 \cdot 2 = 16)$, ez a szám 2, a hányados egész része. A maradék $\frac{3}{8}$, de ez felbontható az $\frac{1}{4}$ és az $\frac{1}{8}$ törzstörtek összegére. Az eredmény:

$$19 : 8 = 2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}.$$

A fenti példa a felfedezőjéről elnevezett *Rhind-papiruszon* szerepel, melynek keletkezését az időszámítás előtti 2000 év körüli időre teszik. Az iratot szerzőjéről, III. Amenemhat fáraó írnokáról *Ahmesz-papirusz* néven is említik.

Az egyiptomi számolómesterek matematikai ismeretei általában nem terjedtek tovább a gyakorlati számítási feladatok megoldási módszereinek alkalmazásán; általános törvényszerűségek megállapításának a jelentőségét nem ismerték fel. Azt azonban már tudták, hogy a tört értéke nem más, mint maga az *arány.*

A görögöknél, mint az ókorban élt legtöbb népnél, a mérés elsősorban a távolságméréshez kapcsolódott. Ennek következménye, hogy a matematika alapvető problémái – így az aránnyal kapcsolatos kérdések is – geometriai formában jelentkeztek. Erre utal maga a geometria szó eredete is: a görög *geo* szó magyar jelentése *föld.*

A görögök csak az egészeket tekintették számoknak, a törtszám fogalmát az arány fogalmával helyettesítették. A törtszámok helyett az arány fogalmát használta *Eudoxosz*, az i. e. IV. században élt nagy görög matematikus is, az arányok elméletének megalkotója. Eudoxosz azzal, hogy bármely arányt az azt közrefogó racionális arányok segítségével adott meg, az arány fogalmát olyan általánosan határozta meg, mely már minden valós számra érvényes.

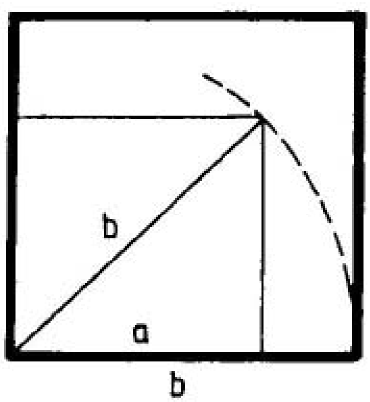
A tört, mint szám absztrakt értelmezése a számfogalom mai értelmezéséhez hasonlóan csak a későbbi korok terméke. A törtekkel való műveletek mai formájukban pedig csupán a XVII. században alakultak ki.

2. Botrányok az arány körül

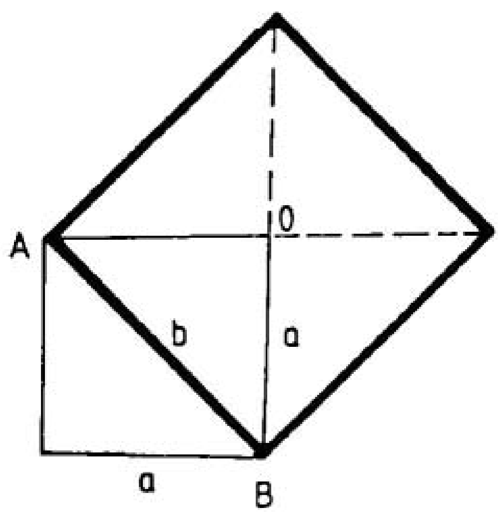
Az összemérhetőség és az irracionális számok – A püthagoreusok számelmélete és számmisztikája – Az ókori matematika klasszikus problémái: a déloszi oltárkő megkétszerezése és a kör négyszögesítése – A π közelítő meghatározása a hindu, a babiloni és az egyiptomi matematikában – A π előállítása végtelen sor alakjában, tűdobálással és versformában.

Az összemérhetőség problémája

Mekkora annak a négyzetnek az oldala, melynek területe egy adott négyzet területének a kétszerese? (2.1 ábra). Már *Platón* is felismerte, hogy a kérdés megoldása a távolságok összemérhetőségének vizsgálatára vezet. Két távolságot akkor nevezünk összemérhetőnek, ha van olyan közös távolság, mely mindkettőre egész számszor felmérhető.



2.1 ábra



2.2 ábra

A 2.2 ábráról leolvasható, hogy a négyzet átlójának megfelelő oldalhosszúságú négyzet területe kétszerese a négyzet területének. Ugyanis, ha az OAB háromszög területét t-vel jelöljük, az a oldalú négyzet területe $2t$, a b oldalú négyzeté $4t$. A probléma lényegében úgy fogalmazható, hogy van-e olyan szám, mellyel az a és b oldalú négyzet oldalainak aránya kifejezhető?

Tegyük fel, hogy ez az arány két szám hányadosaként előállítható. Mivel az a oldalú négyzet területe $a \cdot a$, a b oldalúé $b \cdot b$, így $b \cdot b = 2 \cdot a \cdot a$, mai jelöléssel: $b^2 = 2a^2$.

Ha a két távolság legnagyobb közös mérőszáma x és $a = m \cdot x$, továbbá $b = n \cdot x$, akkor a két négyzet területének aránya

$$\frac{n \cdot x \cdot n \cdot x}{m \cdot x \cdot m \cdot x} = 2,$$

amiből x^2-tel egyszerűsítve, $n \cdot n = 2 \cdot m \cdot m$, illetve $n^2 = 2m^2$.

Az m és n számok közül csak az egyik lehet páros, mert x lévén a legnagyobb közös mérőszám, (ami nem más, mint az a és b számok legnagyobb közös osztója), m-nek és n-nek az 1-en kívül más közös osztója nem lehet (relatív prímek).

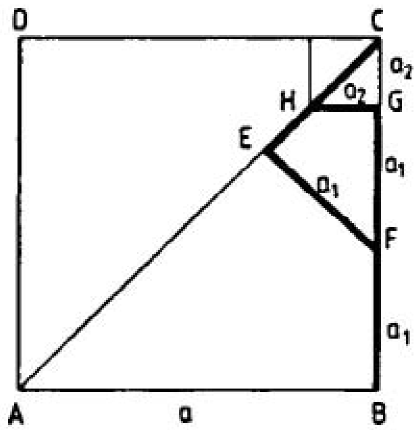
Tegyük fel, hogy n páros. Ekkor az $n \cdot n$ szorzatban (n^2-ben) a 2 szám páros számszor fordul elő, a jobb oldalon pedig csak egyszer, ami nyilvánvaló ellentmondás. Ha n páratlan, akkor – mivel páratlan szám négyzete is páratlan, és a jobb oldali szám páros – ismét ellentmondáshoz jutunk.

A két terület aránya tehát nem írható fel két tört hányadosaként, vagyis az akkori számfogalom szerint nem lehet szám.

Az így kapott arányt megnevezhetetlen, *irracionális* aránynak nevezték. Az ezt kifejező szám mai jelöléssel: $\sqrt{2}$. A négyzetgyökjel és az irracionális szám pontos fogalma azonban már az újkori matematika terméke. A gyökjel a latin radix (gyökér) szó rövidítése, és csak a XVIII. században honosodott meg először Európában, majd ezt követően az egész világon.

Az összemérhetőség a görögöknél a következő geometriai alakban is jelentkezett: keresték azt a közös távolságot, mely a négyzet oldalára, illetve átlójára véges számszor felmérhető. A két távolság aránya a két mérőszám arányának felel meg. Tekintsük a 2.3 ábrán levő négyzetet, melynek csúcspontjai A, B, C, D, és oldala $AB = a$. Ha a négyzet AC átlójára rámérjük az a oldalt, ($AE = AB$), az átló és az oldal különbsége, $CE = AC - AE = a_1$. Az E pontból az AC átlóra emelt merőleges a BC oldalt annak F pontjában metszi. Mivel az CEF háromszög egyenlőszárú, $EF = CE = a_1$.

Az a_1 oldalú négyzet átlója CF, erre felmérve a_1-et, $CF - FG = CG$, a maradék, $CG = a_2$. Ha a G ponton átmenő, a BC egyenesre húzott merőleges AC átlóval való metszéspontja H, a kapott CH szakasz a $CG = GH = a_2$ oldalú négyzet átlója. Ha az eljárást folytatjuk, és az a_2 oldalú négyzet oldalát az átlóra ismét felmérjük, az eredeti problémának megfelelő (ahhoz hasonló) szituációt kapunk. Mivel az eljárás így vég nélkül folytatható, nincs olyan közös távolság, mely mindkét szakaszra véges sokszor felmérhető, a két távolság aránya nem fejezhető ki két szám arányával vagy hányadosával, vagyis nem (racionális) szám.



2.3 ábra

A püthagoreusok számmisztikája

Az irracionális számok felfedezése valóságos botrányt jelentett nemcsak a korabeli matematikai világ számára, hanem a pitagoraszi számmisztikára épülő filozófiai világképre is. *Püthagorasz* a Görögországhoz tartozó *Számosz* szigetén született, matematikai és filozófiai munkássága az i. e. VI. századra tehető. Elsősorban a matematikában elért eredményeiről ismerjük, de foglalkozott fizikával, csillagászattal, valamint a vallással kapcsolatos filozófiai kérdésekkel is. A Püthagorasz nevével fémjelzett mozgalom tagjai, a püthagoreusok a számok harmóniájában látták a világ teremtésének és fennmaradásának lényegét, és ennek megfelelően a matematikában való elmélyedést vallási kötelezettségként fogták fel.

A püthagoreusok tanítása szerint a dolgok közötti *harmónia* az a rendező elv, mely mind a számok közötti kapcsolatokban, mind a zenében megtalálható, és amely csak egész számok viszonyaival fejezhető ki.

A püthagoreusok számnak csak az egész számokat tekintették. Mivel az egész számokhoz az egységtől elindulva számlálással lehet eljutni, minden számot az egységre vezettek vissza, hasonlóan ahhoz, ahogy a világot a teremtés egységbe foglalja.

A számokat nemek szerint is megkülönböztették: a párosakat női jellegűeknek, a páratlanokat hím természetűeknek tekintették. Az *egység* mindkét tulajdonság hordozója, *hímnős.*

Tökéletes számoknak nevezték azokat a számokat, melyek egyenlők osztóik összegével (az 1-et is beleértve, de a számot önmagát nem). Ilyen tökéletes szám például a 6, melynek osztói az 1, 2, 3 számok, és ezek összege: $1+2+3=6$. *Barátságos* számoknak nevezték azokat a számpárokat, melyek közül az egyik osztóinak száma éppen a másik számmal egyenlő. A püthagoreusok ismerték a számtani, a mértani és a harmonikus közép fogalmát, a folytonos arányt és az aranymetszést.

A zenei hangoknál a húrok hosszának és ezek arányainak vizsgálata a püthagoreusok matematikai tevékenységéhez tartozott, és az arány matematikai fogalmának kialakulásával kapcsolatos. A pitagoraszi hangzatoknál a húrhosszak aránya két egész szám hányadosa, legegyszerűbb esetekben 2 : 1; 3 : 2 és 4 : 3. A püthagoreusok azon felfedezése, hogy a konszonáns hangközök a kis egész számok viszonyával jellemezhetők, vezetett a hangtan alapjainak lerakásához.

Mivel az első 4 egész szám aránya a pitagoraszi szimfóniákra jellemző, és ezek összege 10, ez már magában is a természet harmóniáját fejezi ki. Ennek egyik bizonyítékát abban látták, hogy ennyi a szférák száma is: *Univerzum, Szaturnusz, Jupiter, Mars, Nap, Vénusz, Merkúr, Hold, Föld és Ellenföld.* Ezeknek a kozmikus vonatkozású elképzeléseknek alapja az a hiedelem, mely szerint a világ harmonikus felépítése teszi lehetővé, hogy *Orfeusz* lantjának hangjaira élők és holtak rezonáljanak.

Az *irracionális* számok felfedezése valóban nagy megrázkódtatást jelentett az akkori világképre, amit az is bizonyít, hogy ezt sokáig titokként kezelték. E titok megsértéséért Hipparkhoszt (kb. i. e. 450) ki is zárták a püthagoreusok szövetségéből. Úgy tűnik, már az antik világban sem volt szokatlan az a gyakorlat, mely az ideológiák védelmében a valóságos tények elkendőzését adminisztratív eszközök alkalmazásával is megengedhetőnek tartotta.

Az euklideszi szerkesztésről

Milyen kapcsolat van a geometriai szerkesztés és az arány fogalma között? A kérdés megválaszolásához először is azt kell tisztázni, hogy mit értünk szerkesztésen.

A szerkesztés fogalmával kapcsolatban meg kell különböztetnünk a gyakorlat számára kielégítő szerkesztési eljárásokat az *euklideszi* értelemben vett szerkesztéstől. Ha egy egyeneshez adott távolságban egy párhuzamos egyenest akarunk húzni, akkor azt a gyakorlatban egy vonalzónak egy másik vonalzó élén való csúsztatásával végezhetjük a legegyszerűbben (2.4 ábra). Ez a szerkesztési eljárás a gyakorlati követelményeknek többnyire megfelel, de nem nevezhető euklideszi értelemben szerkesztésnek. Ezzel a módszerrel például nem lehet egy szakaszt megfelezni, vagy azt adott arányban felosztani.

Eukleidész csak azt az eljárást tekintette geometriai szerkesztésnek, mely a síkban lévő pontokra, egyenesekre és körökre vonatkozik, és a következő megengedett lépések véges számú kombinációjából áll:

– két ponton át egyenes előállítása,

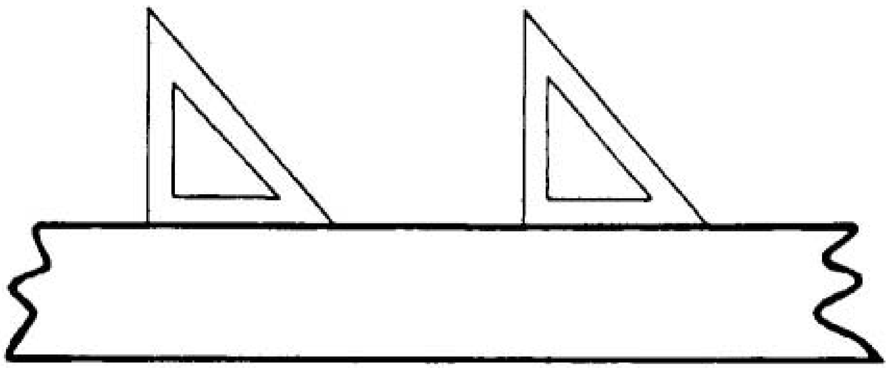
– két pont távolságának körzőnyílásba vétele, és ezzel

– megadott (vagy szerkesztett) pontból körív rajzolása,

– két egyenes metszéspontjának kijelölése,

– két kör metszéspontjának kijelölése,

– egyenes és kör metszéspontjának kijelölése.

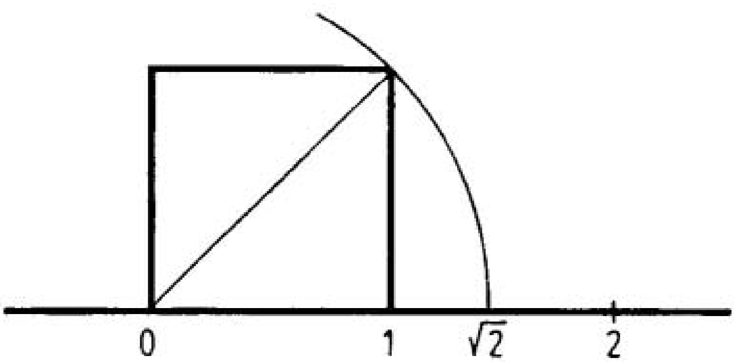


2.4 ábra

A szerkesztési eljárás ilyen módon való leszűkítése kizárja a vonalzók *csúsztatását* és a hozzá hasonló, gyakorlatban sokszor alkalmazott rajzolási módokat.

Az ilyen szerkesztési lépésekből álló eljárás az egyenes és körvonal előállításán túl mindig egy konkrét távolságot (szakaszt), illetve pontot határoz meg. Segítségével mindig megszerkeszthetők a két egész szám hányadosával előállítható *arányok*, meghatározható (szerkeszthető) egy szakaszt adott arányban osztó pont, illetve adott egységnyi távolság mellett az aránnyal kifejezett racionális számnak megfelelő távolság.

Euklideszi szerkesztéssel azonban olyan arányokat is elő lehetett állítani, melyek nem voltak két egész szám hányadosaként felírhatók, vagyis melyeknek nem felelt meg *racionális* szám. Ilyen például a négyzet átlója és oldala közötti arány (2.5 ábra), melynek a $\sqrt{2}$ irracionális szám felel meg. Ez a tény, mely az ókori matematika egyik nagy forradalmát elindította, a későbbi korok matematikusait arra ösztönözte, hogy megvizsgálják, mely irracionális számoknak megfelelő szakaszok szerkeszthetők meg euklideszi módon.

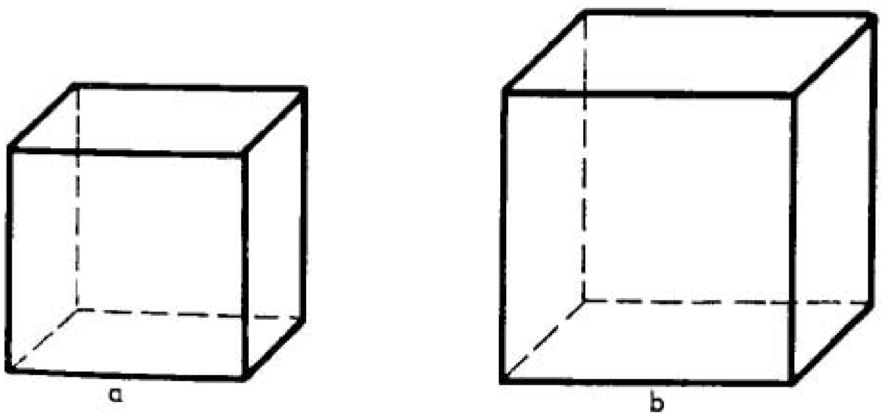


2.5 ábra

A déloszi probléma vagy kockakétszerezés

A *kockakétszerezés* az ókor egyik legrégebbről ismert híres matematikai problémája, melynek felmerüléséhez vallási legenda fűződik. Az időszámítás előtti IV. században az ókori Görögország egyes vidékein pestisjárvány pusztított. A görögök Apollón híres jóshelyéhez, a déloszi jóshelyhez fordultak segítségért. A jóshely papnője azt a tanácsot adta, hogy az istenek kegyeinek megnyerésére a déloszi szentély kocka alakú oltárkövét nagyobbítsák meg oly módon, hogy annak térfogata az eredeti oltárkő térfogatának kétszerese legyen.

A görögök az oltárkövet először úgy akarták megkettőzni, hogy még egy ugyanolyan térfogatú kocka alakú követ helyeztek mellé. Ez azonban nem vezetett eredményre, a járvány nem szűnt meg. Az oltárt olyan módon kellett megkettőzni, hogy az oltárkő továbbra is kocka alakú maradjon (2.6 ábra). Ez azonban nem járt sikerrel: a kétszeres térfogatú kocka élét körzővel és vonalzóval ugyanis nem lehet megszerkeszteni.



2.6 ábra

A probléma lényege a következő: Ha az eredeti kocka élét a-val, az új kockáét b-vel jelöljük, fenn kell állnia a $b^3 = 2a^3$ összefüggésnek, amiből b-t kifejezve:

$$b = \sqrt[3]{2}.$$

A görögök egy szakaszt akkor tekintettek meghatározottnak (számnak), ha azt euklideszi szerkesztéssel elő tudták állítani. Így a feladat a $\sqrt[3]{2}$ euklideszi szerkesztéssel történő előállítását kívánta.

A probléma megoldására, mely egyes források szerint már a babiloniaknál is felmerült, számos kísérlet eredményeként több közelítő megoldás született. Ezek egyik legrégebbike *Hippokrátész* görög matematikus nevéhez fűződik, aki a feladat megoldásával kapcsolatban a következő meggondolásból indult ki:

Ha egy négyzet területét megkettőzzük, a kétszeres területű négyzet oldala az eredeti négyzet átlója lesz: $x^2 = 2a^2$, amelyből felírható az $a : x = x : 2a$ aránypár.

Ez azt jelenti, hogy x az a és a $2a$ szakaszok mértani középarányosa. Hippokrátész gondolatmenete szerint az $x = 2a$ egyenlőség két, egymáshoz kapcsolódó aránypárra bontható fel:

$$a : x = x : y = y : 2a,$$

melyből x az a és y szakaszok, y az x és $2a$ szakaszok mértani középarányosa. Ebből következik, hogy

$$x^2 = ay, \quad \text{és} \quad y^2 = 2ax.$$

Hippokrátész okoskodása azonban nem vitt közelebb a probléma megoldásához: a két mértani közép külön-külön megszerkeszthető, azonban az arányok összekapcsolásához tartozó szakasz euklideszi értelemben vett szerkesztési eljárással így sem volt előállítható.

A probléma az ókor és a középkor folyamán a matematikusokat és amatőröket továbbra sem hagyta nyugodni. Számos sikertelen próbálkozás után a kérdésre a XIX. század matematikai eredményei tettek pontot. Bebizonyították ugyanis, hogy az ilyen típusú harmadfokú irracionalitások körzővel és vonalzóval való (euklideszi) szerkesztése elvileg nem lehetséges.

A kör kerülete és az átmérő viszonya

Már a legrégibb időkben felmerült a kérdés, hogy a kör kerülete hányszorosa az átmérőnek, illetve a sugárnak. Ezzel egyenértékű az a kérdésfeltevés, hogy mekkora a kör és az átmérővel, mint oldallal rajzolt négyzet területének aránya. Az utóbbi úgy is megfogalmazható, hogy mekkora annak a négyzetnek az oldala, melynek területe egyenlő egy kör területével. Ezt a feladatot nevezik a *kör négyszögesítésének.* A probléma eredete az ókorba nyúlik vissza, és a megoldására adott válaszok a korabeli matematika fejlettségi szintjéről árulkodnak.

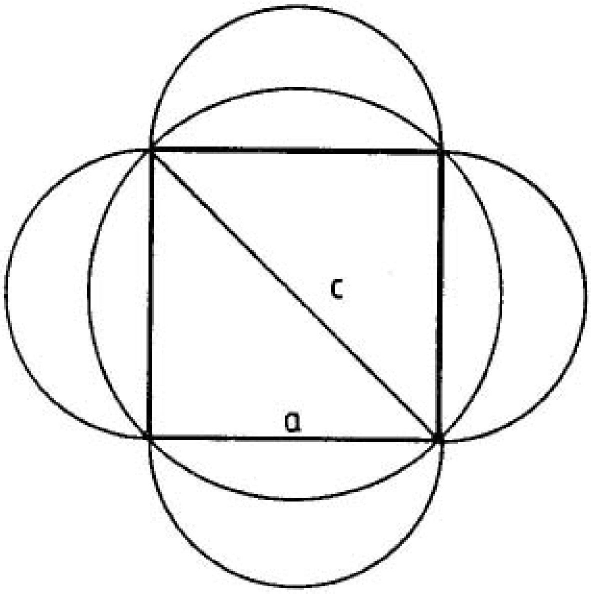
A 4000 éves, sumér forrásokra támaszkodó *Ahmesz-papírusz* leírása szerint a kör területének kiszámítását olyan négyzet területének meghatározására vezették vissza, melynek oldalhosszúsága a kör átmérőjének $\frac{8}{9}$-ed része. Ebből a kör területére

$$t = \left(\frac{8}{9}d\right)^2 = \frac{64}{81}d^2$$

adódik. Tekintve, hogy $d = 2r$, $t = 4 \cdot \frac{64}{81} \cdot r^2$, ahonnan $\frac{t}{r^2} = \frac{256}{81} \approx 3,16$.

A babiloniak gyakorlati számolók voltak, és megelégedtek azzal az eredménnyel, mely a kör kerületét a körbe írt szabályos hatszög oldalának hosszával közelítette. Így a π értékére 3 adódott, ami igencsak durva közelítés. Hasonló számolási módról tanúskodnak a korabeli hinduk gyakorlati számítási eredményeit tartalmazó emlékek: az oltárok, egyéb kultikus tárgyak és építmények méreteire vonatkozó előírások a kör kerületének meghatározására ennek az aránynak megfelelő értéket adják meg.

A problémák elvi megoldására való törekvés a görög szellem terméke. *Hippokrátész* már olyan, az euklideszi elveken alapuló négyzet szerkesztését ismerteti, melynek területe egyenlő a négyzet oldalaira szerkesztett félkörívek által határolt „holdacskák” területeinek összegével (2.7 ábra).



2.7 ábra

Ezt a következő módon láthatjuk be: Ha a négyzet oldala a, a holdacskák külső íveivel határolt síkidom területe a négyzet területének és négy $\frac{a}{2}$ sugarú félkör területének összege: $t_1 = a^2 + \frac{a^2\pi}{2}$. A holdacskák területe a teljes síkidom és a belső kör területének különbsége lesz. A belső kör területe, $t_2 = \frac{d^2\pi}{4}$, ahol d a négyzet átlója.

Mivel azonban $d^2 = 2a^2$, így $t_2 = \frac{a^2\pi}{2}$, és a holdacskák területeinek összege a két terület különbsége:

$$t_1 - t_2 = a^2.$$

Hippokrátész felhasználta a Pitagorasz-tételt, ami arra enged következtetni, hogy ismerte a derékszögű háromszög oldalai közötti összefüggést.

Arkhimédész a kör kerületét a körbe és a kör körül írt szabályos sokszögek kerületeivel két oldalról közelítette. Mivel a sokszögek oldalszámának a növelésével a beírt sokszögek kerületei növekednek, a körülírtaké csökkennek, a két sorozat számértékei közrefogják a kör kerületét. Arkhimédész a beírt kilencvenhatszög kerületére $\frac{283}{71}$ értéket, a körülírtéra $\frac{22}{7}$ értéket kapott, így a π értékét $\frac{283}{71} < \pi < \frac{22}{7}$ számokkal közelítette, ami három tizedesjegyre kiszámítva $3,142$-nek felel meg, és a π értékének 3 tizedesre kerekített megközelítését jelenti. Arkhimédész közelítési módszerének gondolata vezetett a XVII. században az integrálszámítás megalkotásához.

A hindu matematika VI. században élt művelője, *Árjabhata*, akinek a neve elsősorban a helyiértékes számrendszer kialakulásával, és a 0, mint helypótló jel bevezetésével kapcsolatban vált ismertté, a π értékét szintén sokszögekkel való közelítés segítségével határozta meg. A szabályos 384 szög oldalai hosszának kiszámításából π értékére $3,1416$ értéket kapott.

Az arab matematika számára a kör kerületének és átmérőjének viszonya elsősorban a hajózás gyakorlati szempontjából volt fontos. A fennmaradt emlékek arról tanúskodnak, hogy *al Dzsamirja* arab matematikus és csillagász a π-vel, mint $3,14$ értékkel számolt.

Leonardo Pisano, a középkor jeles matematikusa, aki *Fibonacci* néven vált ismertté és akinek a nevével később még többször találkozunk, π értékét a $\frac{865}{275}$ tört alapján számítva $3,1454$-nek vette.

A földrajzi felfedezések, a hajózás, a térképkészítés a π értékének mind nagyobb pontosságú meghatározását követelte. A holland származású metzi mérnök, *Metius* a π értékét már 6 tizedes pontossággal adta meg, *Viète* francia matematikus Archimédész módszerével 393216 oldalú sokszög alapján kilenc tizedesjegy pontosságot ért el. *Ludolf van Ceulen* (1540–1610) holland matematikus a π értékét 35 tizedesjegy pontossággal határozta meg; ő a π névadója; a π-t Ludolf féle számnak is nevezik. Ez a 35 jegy a következő:

$\pi \approx 3,\ 14159\ 26535\ 89793\ 23846\ 26433\ 83279\ 50288$

Míg a π értékének előző meghatározásai annak közelítő értékeit jelentették, az analízis területén elért eredmények során lehetővé vált a π értékének olyan végtelen sorok segítségével való előállítása, melyek azt elvileg tetszőleges pontossággal adják meg. *Wallis* 1655-ben $\frac{\pi}{2}$ meghatározására a következő végtelen szorzatot találta:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \ldots,$$

míg *Leibniz* a π értékét következő váltakozó előjelű végtelen sorral határozta meg:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} \ldots$$

A Leibniz féle sor esetén nagyon sok tagot kell figyelembe venni megadott pontosság eléréséhez; azt mondjuk, hogy a sor nagyon lassan *konvergál*. A modern matematika numerikus módszereire támaszkodva elektronikus számítógépek segítségével a π értéke akár több tízezer jegy pontossággal is meghatározható.

A π számjegyei versformában

Kultúrtörténeti érdekességként tarthatjuk számon az úgynevezett π verseket. Ezek többnyire szó- vagy betűjátékok, illetve olyan szófüzérek, amelyek szavai rendre annyi betűből állnak, mint a π megfelelő számjegyei. Ilyen például a *Szász Pál* magyar matematikustól származó vers is, melynek szavai a π első harminc jegyét tartalmazzák:

Nem a régi s durva közelítés,
Mi szótól szóig így kijön,
Betűket számlálva Ludolph eredménye már.
Ha itt végezzük húsz jegyen,
De rendre kijő még tíz pontosan,
Azt is bízvást ígérhetem.

Decerf francia matematikus a Le Sphinx 1932. évi III. számában a nullákat 10 betűs szavaknak tekintve, olyan 126 tizedesjegyből álló verset publikált, melyben mindvégig Arkhimédész kiválóságát dicsőíti. Angol nyelven írt, 12 tizedesjegyet tartalmazó π vers a következő:

See, I have a rhyme, assisting my feeble brain
Its tasks offtimes resisting.

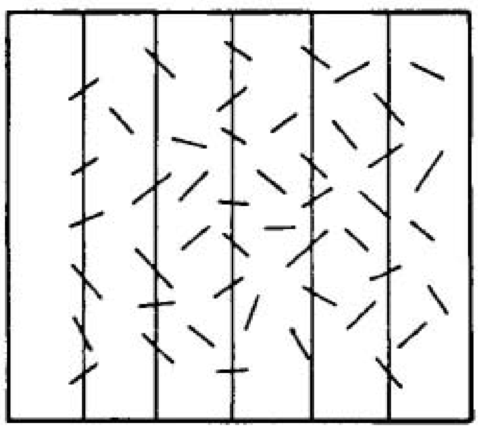
A vers magyar fordítása, amely szintén eleget tesz a π vers követelményeinek:

Itt e vers, s dolga végeztére ez segíti agyam,
Aki attól gyakorta húzódozik.

A π véletlen módszeren alapuló meghatározása

Buffon (George Louis Leclerce 1707–1788) francia matematikus a π értékét a valószínűség-számításra alapozott geometriai módszerrel a következő módon határozta meg: Egy vízszintesen elhelyezett síklapon egymástól egyenlő d távolságokban párhuzamos egyenes vonalakat rajzolt, majd a síklapra véletlen módon azonos l hosszúságú tűket dobált (2.8 ábra). Bebizonyította, hogy ha a tűk hossza kisebb, mint a vonalak távolsága, továbbá a vonalakra eső tűk, és az összes dobott tűk számának hányadosa k, akkor a π számértéke a következő összefüggés alapján határozható meg:

$$\pi \approx \frac{2l}{kd}.$$



2.8 ábra

Smith angol matematikus 1885-ben 3200 tűvel végzett kísérlete eredményeként a π számértékére $3,1555$ közelítő értéket kapott. Buffon tűdobálási kísérlete a valószínűség-számítás geometriai módszerének megalapozását jelentős mértékben előmozdította.

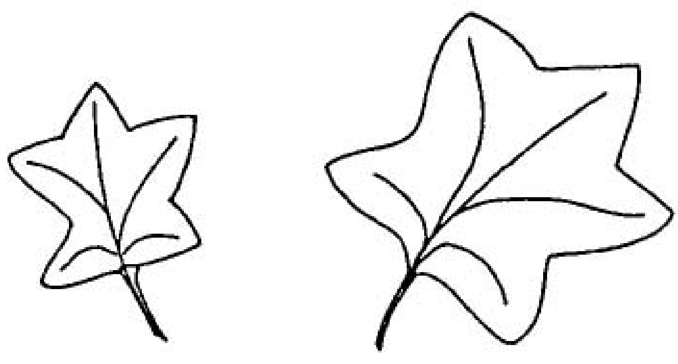
A kör négyszögesítésének problémájára, akárcsak a kocka kétszerezésére, azóta pont került. *Lambert* a XVIII. században bebizonyította, hogy a π irracionális szám, *Lindemann* 1882-ben pedig azt is, hogy nem algebrai szám, vagyis nem lehet algebrai egyenlet gyöke. (Az ilyen számokat *transzcendens* számoknak nevezzük). Ez pedig azt jelenti, hogy a π-nek megfelelő szakasz körzővel és vonalzóval elvileg nem szerkeszthető meg.

3. Arányos távolságok síkon és térben

A hasonlóság fogalma, hasonlósági transzformáció – A párhuzamos szelők és az arányos osztás – Aritmetikai műveletek a geometriában – A középarányosok – Arányos távolságok a derékszögű háromszögben – A számtani és mértani közép kapcsolata – Területi és térfogati arányok – Arkhimédész térfogati tétele

A hasonlóság fogalma

Az ősi kultúrák állat- és emberábrázolásai, a barlangrajzok figurái, a gyermekek játékmodelljei a valóságos alakok, tárgyak nagyított vagy kicsinyített másai. A növények, fák levelei ugyanannak a mintának arányosan módosított változatai (3.1 ábra). A távolban levő tárgyak látszólagos méretei a távolságtól függően változnak, arányaik azonban változatlanul megmaradnak.



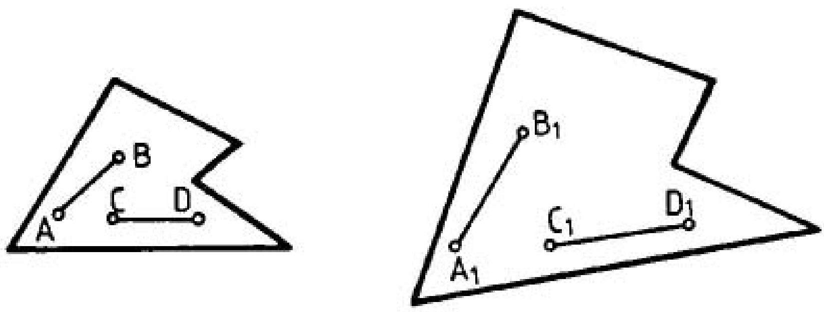
3.1 ábra

Az arányos méretváltozásra épül a *hasonlóság* matematikai fogalma: Két (síkbeli vagy térbeli) alakzat hasonló, ha a megfelelő pontjaikat összekötő szakaszok aránya megegyezik. Ez azt jelenti, hogy az egyiken felvett bármely két pont távolsága a másik alakzat megfelelő pontjai közötti távolságnak ugyanannyiszorosa (3.2 ábra). Ha az egyik alakzat A, B, C, D pontjainak egy másik alakzat A_1, B_1, C_1 és D_1 pontjai felelnek meg, akkor

$$AB : A_1B_1 = CD : C_1D_1.$$

A fenti, két arány egyenlőségét kifejező aránypár már a *püthagoreusok* hangközökkel kapcsolatos vizsgálódásainál is szerepel, és a hangközök, illetve a húrhosszak viszonyának, *arányának* egyenlőségét fejezi ki. Az így kapott aránypár neve a görögöknél *ana logon,* arányok egyenlősége. Ennek öröksége a legtöbb európai nyelvben megtalálható *analógia* szó, mely két dolog valamilyen szempontból való hasonlóságát fejezi ki.

A hasonlóságot értelmezhetjük mint leképezést, *(transzformációt)* amely a hasonló alakzatok közötti kapcsolatot meghatározza. Erre a szemléletre alapozva vizsgáljuk a hasonlóság matematikai törvényszerűségeit.



3.2 ábra

A hasonlóság a definíció szerint olyan leképezés, mely bármely AB szakaszhoz olyan A_1B_1 szakaszt rendel, melyre $A_1B_1 = \lambda \cdot AB$, vagy ami ugyanazt jelenti, bármely szakasz és képe közötti arány állandó. A λ állandó a hasonlósági arány.

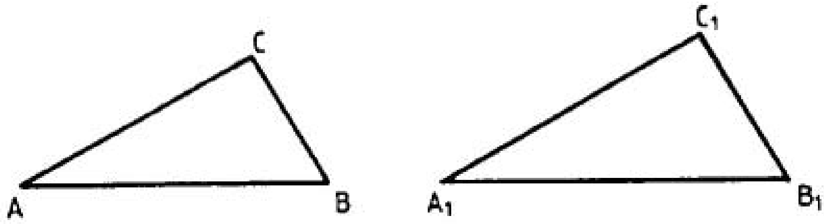
A hasonlóság további vizsgálatában néhány meghatározásra támaszkodunk, melyeket *alaptételként* fogadunk el. Ezek a következők:

1. Ha az ABC és a $A_1B_1C_1$ háromszögek oldalaira (3.3 ábra)

$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{A_1C_1}{AC} = \lambda,$$

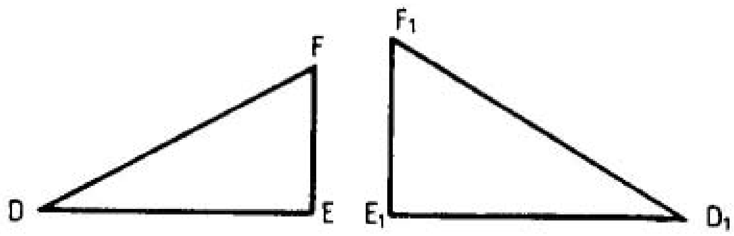
akkor létezik egy és csakis egy olyan *hasonlóság,* mely az ABC háromszöghöz az $A_1B_1C_1$ háromszöget rendeli. Ez a hozzárendelés a hasonlóságot egyértelműen meghatározza.

2. A hasonlóság *szögtartó* (a megfelelő csúcsokhoz tartozó szögek megegyeznek), és *egyenestartó,* ami azt jelenti, hogy ha P, Q, és R egy egyenes pontjai, akkor ezek P_1, Q_1 és R_1 képei is egy egyenesen vannak.



3.3 ábra

3. Egy háromszöghöz hasonló háromszögek vagy megtartják irányításukat, vagy ellenkező irányításúak lesznek: az ABC és $A_1B_1C_1$ hasonló háromszögek azonos (3.3 ábra), a DEF és az $E_1D_1F_1$ háromszögek (3.4 ábra) ellenkező körüljárásúak.



3.4 ábra

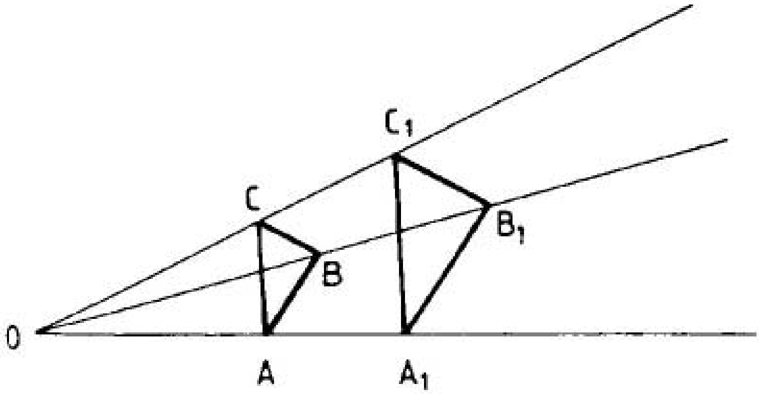
A hasonlósági transzformáció fontos esete a *középpontos hasonlóság*, amelynél a megfelelő pontpárokat összekötő egyenesek egy ponton mennek át (3.5 ábra). Ez a pont a transzformáció középpontja (O), vagy más elnevezéssel *hasonlósági pont.* A középpontos hasonlóságnál λ értékét pozitívnak tekintjük, ha a transzformáció O középpontja az egymásnak megfelelő pontok ugyanazon oldalán van (3.5 *a* ábra), és negatívnak, ha azokat elválasztja (3.5 *b* ábra). Ha $|\lambda| > 1$, középpontos nagyításról, $|\lambda| < 1$ esetében pedig középpontos kicsinyítésről beszélünk.

A hasonlóság szögtartási tulajdonságából következik, hogy a két középpontosan hasonló alakzat megfelelő oldalai párhuzamosak, vagy ($\lambda = 1$ esetén) egybeesnek. Az ilyen háromszögekre azt mondjuk, hogy *egyállásúak.*

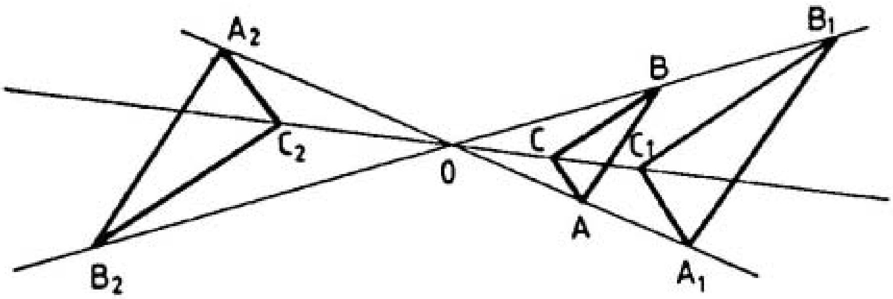
A középpontos hasonlóság irányítástartó.

Ha $\lambda = 1$, a hasonlóság speciális eseteként az egybevágósághoz jutunk. Ekkor az egyállású háromszögek megfelelő pontjain átmenő egyenesek párhuzamosak lesznek, a transzformáció a párhuzamos eltolásnak (3.6 ábra) felel meg. Ha $\lambda = -1$, az O pontra vonatkozó középpontos tükrözést kapjuk (3.7 ábra).

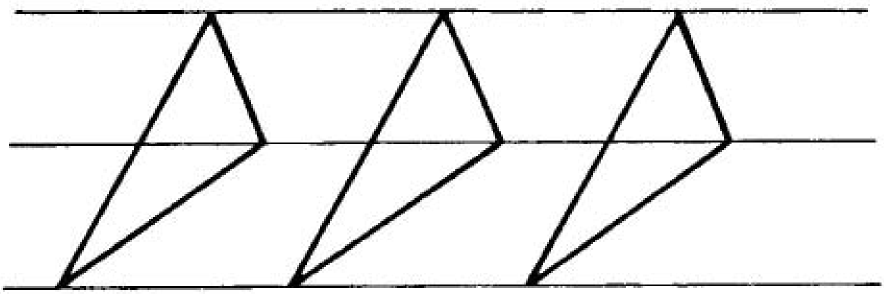
A hasonlóság egyértelműségéből következik, hogy minden olyan $A^*B^*C^*$ háromszög, mely egybevágó az ABC háromszöghöz hasonló $A_1B_1C_1$ háromszöggel, szintén hasonló



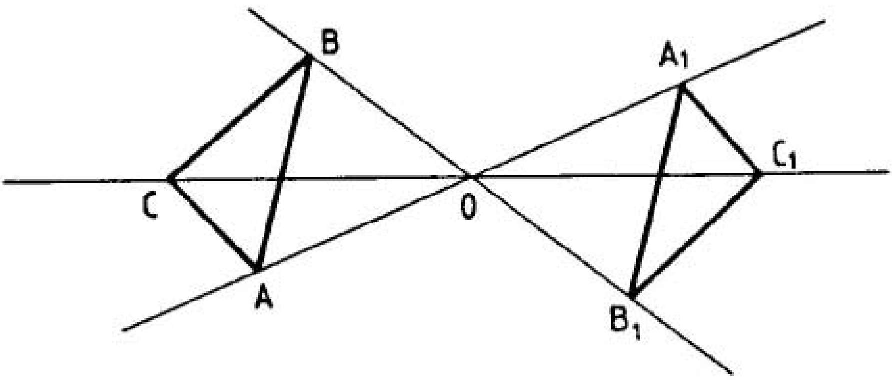
3.5 *a* ábra



3.5 *b* ábra



3.6 ábra

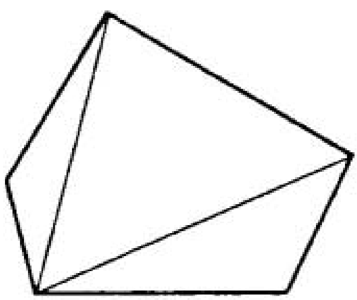


3.7 ábra

lesz az *ABC* háromszöghöz. Ez azt jelenti, hogy bármely hasonlóság előállítható egy középpontos hasonlóság és egy egybevágóság segítségével. Mivel az egybevágó alakzatok megegyező vagy ellentétes irányításúak lehetnek, a hasonló háromszögek kétféle irányítása is erre vezethető vissza.

Háromszögek és sokszögek hasonlósága

Két síkbeli alakzat hasonló, ha hasonlósági transzformációval egymásba átvihetők. Mivel az egyenes vonalakkal határolt síkidomok (sokszögek) átlókkal mindig háromszögekre bonthatók, ezért a sokszögek hasonlóságának vizsgálata a háromszögek hasonlóságára vezethető vissza (3.8 ábra). A háromszögek hasonlóságának eldöntésére a háromszögek egybevágósági kritériumaira támaszkodhatunk, azonban a szakaszok egyenlősége helyett azok arányainak megegyezését követeljük meg.



3.8 ábra

Ennek megfelelően fogalmazhatók meg a háromszögek hasonlóságának alapesetei: Két háromszöget hasonlónak mondunk, ha megegyeznek

a) megfelelő oldalaik arányában,

b) két–két oldaluk arányában és a közbezárt szögükben,

c) két–két oldaluk arányában és a nagyobb oldallal szemközti szögükben,

d) két–két szögükben (két szög egyezéséből a harmadik szög egyenlősége is következik).

Azok az alakzatok, melyek egyetlen adattal meghatározhatók, hasonlók. Így a síkban minden kör hasonló és a hasonlóság arányát éppen a sugarak aránya határozza meg. Ugyanígy hasonló minden négyzet, minden szabályos háromszög és minden szabályos, ugyanolyan oldalszámú sokszög is. A térben hasonló minden gömb, minden kocka, és minden azonos lapszámú szabályos test.

A párhuzamos szelők és az arányos osztás

Ha egy szög szárait párhuzamos egyenesekkel metsszük, akkor az egyik száron keletkező szakaszok aránya megegyezik a másik száron kapott szakaszok arányával. E *párhuzamos szelők tétele* néven ismert összefüggés vonatkozik mind a metszéspontok közötti szakaszokra, mind pedig az egyes metszeteknek a szög csúcsától mért távolságaira.

Tekintsük az e_1 és e_2 egyenesek által bezárt hegyesszöget, és messük ennek szárait párhuzamos egyenesekkel! Jelölje a szög csúcspontját O, és legyenek a párhuzamos egyeneseknek a szög száraival alkotott metszéspontjai A_1, B_1, C_1, illetve A_2, B_2 és C_2 (3.9 ábra).

Az egyes szögszárakon kapott metszetekre fennáll, hogy

$$A_1B_1 : B_1C_1 = A_2B_2 : B_2C_2.$$

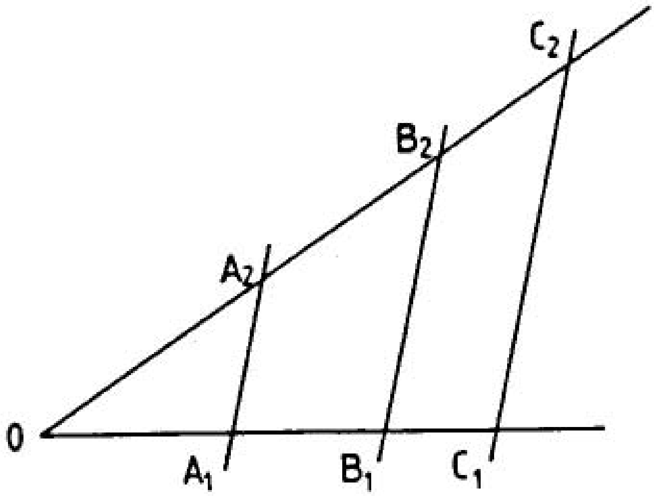
A tétel helyessége a háromszögek hasonlóságára vonatkozó összefüggésekből, illetve a hasonlóság definíciójából következik.

Ugyanis, ha az A_2 és B_2 metszéspontokon át az e_1 szögszárral párhuzamosokat húzunk (3.10 ábra), a kapott, vonalkázással jelölt háromszögek szögei megegyeznek, és így azok hasonlók. A hasonló háromszögek megfelelő oldalainak arányait felírva éppen a fenti összefüggéseket kapjuk.

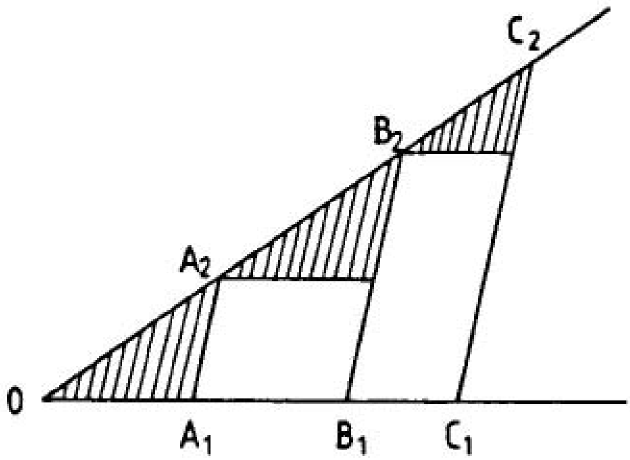
Az ábráról az is leolvasható, hogy az OA_1A_2, az OB_1B_2 és az OC_1C_2 háromszögek is hasonlók, vagyis a szög szárait metsző párhuzamosokból kimetszett szakaszok aránya is megegyezik a szög szárain kapott, a csúcstól számított metszetek arányával:

$$A_1A_2 : B_1B_2 = OA_1 : OB_1 = OA_2 : OB_2.$$

A tétel megfordítása csak a szög csúcsától számított távolságokat jelentő metszetekre érvényes. Ebben az esetben igaz, hogy ha a szög szárain olyan pontokat veszünk fel, melyek csúcstól számított távolságainak aránya megegyezik, akkor az ezeken átmenő egyenesek párhuzamosak lesznek.



3.9 ábra

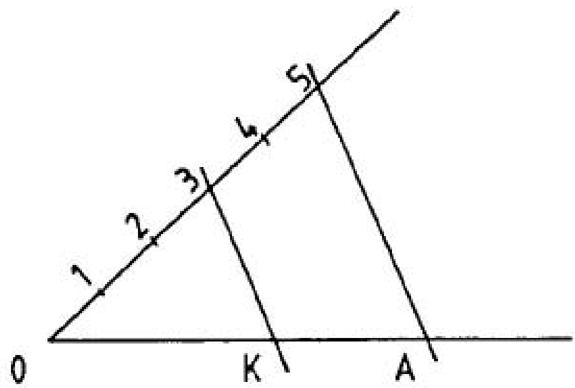


3.10 ábra

A párhuzamos szelők tételének egyik fontos alkalmazása valamely szakasz adott arányban való osztásához (arányos osztásához) tartozó osztópont megszerkesztése.

Az arányos osztás – amint a neve is mutatja – adott mennyiség (szakasz) adott aránynak megfelelő részekre való felosztását jelenti. Valamely a mennyiség $m : n$ arányban való felosztásának eredményeként az adott mennyiség $m+n$-ed részének m-szeresét, illetve n-szeresét kapjuk.

Valamely szakasz adott arányban való felosztásához tartozó osztópont a párhuzamos szelők tétele alapján szerkeszthető meg. A 3.11 ábra az OA szakasz $3:2$ arányban való osztását mutatja. A szerkesztés lényege, hogy az O ponton át az OA szakaszt tartalmazó egyenessel tetszőleges szöget bezáró másik egyenest szerkesztünk, majd az O pontból kiindulva erre tetszőlegesen választott, egyenlő hosszúságú szakaszokat mérünk fel. Ha az $m+n$-edik szakasz végpontját az A ponttal összekötő egyenessel az m-edik osztóponton át párhuzamos egyenest szerkesztünk, ez az AB egyenest olyan K pontban metszi, mely az AB szakaszt $m:n$ arányban osztja.



3.11 ábra

A középarányosok

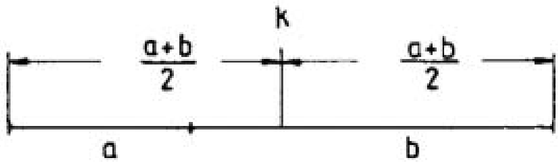
Két pozitív szám számtani középarányosa vagy *számtani közepe* az a szám, amely annyival nagyobb a kisebb számnál, mint amennyivel kisebb a nagyobbnál. Ha a két szám a és b, és $a<b$, akkor k-val jelölve a számtani közepüket, fennáll, hogy $k-a=b-k$, ahonnan

$$k=\frac{a+b}{2}.$$

Az is belátható, hogy a számtani középnek az adott számoktól való eltérése éppen a két szám különbségének a fele (3.12 ábra). Ha a két szám egyenlő,

$$b=a, \quad \text{és} \quad k=\frac{a+a}{2}=a.$$

A számtani középarányos elnevezés régebbi szóhasználat öröksége, és arra utal, hogy két különbség egyenlőségi jellel való összekapcsolását valamikor számtani aránynak is nevezték.



3.12 ábra

A számtani közép fogalma több számra is kiterjeszthető: az $a_1, a_2, \ldots a_n$ számok számtani közepén a számok összegének n-ed részét értjük:

$$K = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}.$$

Két pozitív szám mértani középarányosa, vagy *mértani közepe* annyiszorosa az egyik számnak, ahányadrésze a másiknak.

A mértani közepet r-rel jelölve: $\frac{b}{r} = \frac{r}{a}$ ahonnan $r^2 = a.b$, vagy

$$r = \sqrt{ab}.$$

A mértani közép is értelmezhető több pozitív számra: n pozitív szám mértani közepén a számok szorzatából vont n-edik gyököt értjük:

$$r = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}.$$

Két pozitív szám harmonikus közepe a számok reciprokai számtani közepének a reciprok értéke:

$$h = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}},$$

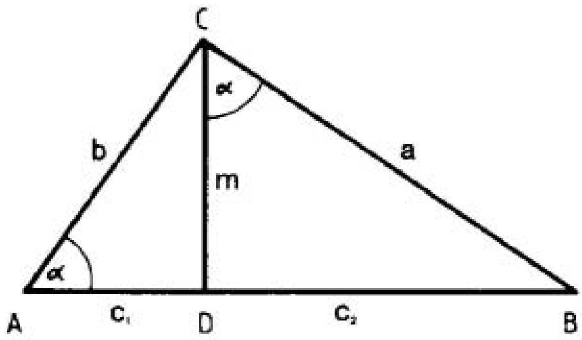
vagy egyszerűbb alakban:

$$h = \frac{2ab}{a+b}.$$

Mértani középarányosok a derékszögű háromszögben

Már az ókori matematikusok munkáiban is megtalálhatók azok az összefüggések, melyek a derékszögű háromszögben megfogalmazható mértani középértékekkel kapcsolatosak. A 3.13 ábráról leolvasható, hogy az ABC derékszögű háromszög derékszöghöz tartozó C csúcspontjából az AB átfogóra bocsátott CD merőleges a háromszöget két olyan újabb derékszögű háromszögre bontja, melyek egymáshoz, és az eredetihez is hasonlók. Ez belátható annak a felismerésnek az alapján, hogy mindhárom háromszögben található egy derékszög, és az egyik hegyesszögükben is megegyeznek.

Ha a befogókat a és b, a magasságot m, az átfogó metszeteit c_1, illetve c_2 jelöli, a háromszögek hasonlóságára vonatkozó összefüggések alapján a következő folytonos arányokat írhatjuk fel:



3.13 ábra

$$\begin{aligned} c_1 : m = m : c_2, &\qquad \text{és} \qquad m^2 = c_1 c_2, \\ c_1 : b \;=\; b : c, &\qquad \text{ebből} \qquad b^2 = c_1 c, \\ c_2 : a \;=\; a : c, &\qquad \text{ebből} \qquad a^2 = c_2 c. \end{aligned}$$

Az első összefüggés azt fejezi ki, hogy a derékszögű háromszögben az átfogóhoz tartozó magasság mértani közép az átfogó metszetei között. A másik két összefüggés szerint a befogók mértani középarányosak az egész átfogó és a kérdéses befogónak az átfogón való vetülete között. Ha az utóbbi két egyenlet megfelelő oldalait összeadjuk, figyelembe véve, hogy $c_1 + c_2 = c$, Püthagorasz ismert tételének újabb bizonyításához jutunk.

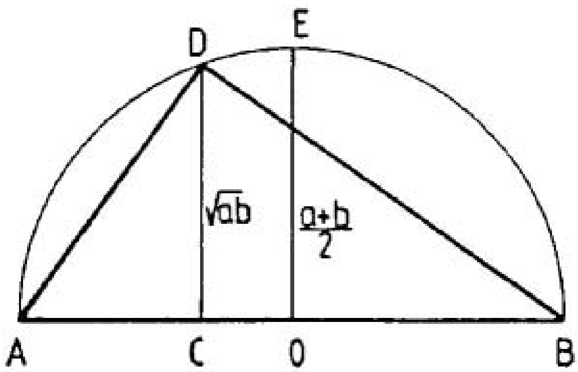
A számtani és mértani közép kapcsolata

Két pozitív szám számtani és mértani középarányosa közötti kapcsolatot jól illusztrálja a 3.14 ábra. Ha az a és b pozitív számok összegének megfelelő AB szakasz, mint átmérő fölé kört rajzolunk, ennek OE sugara a két szám számtani középarányosa. A két szakasz közös C pontjában az AB átfogóra emelt merőleges a kört D pontban metszi. Thálész tétele értelmében a kapott ADC háromszög derékszögű, melynek az átfogóhoz tartozó magassága CD szakasz. Ennek hossza a magasságra vonatkozó arányossági tétel szerint a két szám mértani közepe.

Ez a szakasz egyúttal a kör AB átmérőjére emelt merőleges húr fele, ez pedig nem lehet nagyobb, mint a kör sugara. Egyenlőség akkor áll fenn, ha a két szakasz hossza (a két pozitív szám) megegyezik, vagyis ha $a = b$.

Aritmetikai műveletek geometriai értelmezése

Az aritmetikai műveletek geometriai értelmezése, a koordinátarendszer megalkotása Descartes francia filozófus és matematikus nevéhez fűződik. Az aritmetika és a geometria



3.14 ábra

összekapcsolásának alapgondolata azonban már az ókori görög matematikus, Apollóniosz műveiben is megtalálható. Mivel a szakaszok hosszának pozitív mérőszámokat feleltünk meg, az aritmetikai műveleteket itt pozitív számokra értelmezzük.

A négy alapművelet közül az *összeadás*nak megfelelő szerkesztési eljárás egyszerűen a mérőszámoknak megfelelő hosszúságú szakaszok egymás utáni felmérését, a *kivonás* a szakaszok hosszának a különbségét, illetve ennek előállítását jelenti.

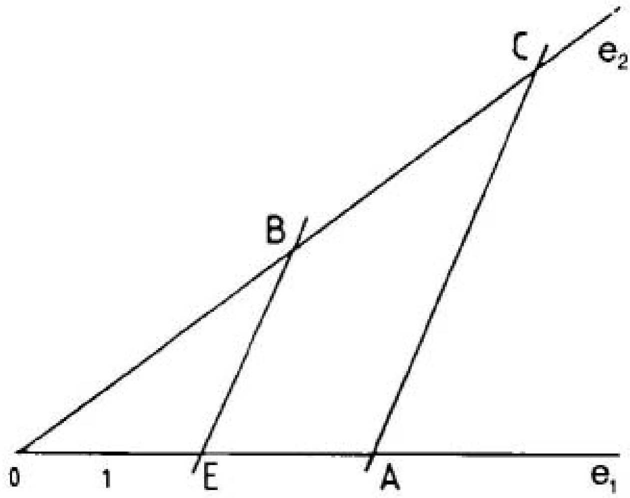
A *szorzás* és az *osztás* eredményeként kapott szorzatnak, illetve hányadosnak (pontosabban ezek mérőszámainak) megfelelő hosszúságú szakaszok előállítása a párhuzamos szelők tételére támaszkodó *negyedik arányos* szerkesztésére vezethető vissza. Ennek segítségével – az egységnyi hosszúságú szakasz ismeretében – bármely két szakasz mérőszáma szorzatának és hányadosának megfelelő szakasz a fenti értelemben körzővel és vonalzóval megszerkeszthető. A szerkesztés elvi hátterét a 3.15 ábra mutatja:

Vegyünk fel két egymást O pontban metsző e_1 és e_2 egyenest. Jelölje az e_1 egyenesen az O ponttól felvett egységnyi távolság végpontját E, az a távolságét A. Mérjük fel az e_2 egyenesre az $OB = b$ távolságot, és szerkesszük meg az EB egyenest. Húzzunk az A ponton keresztül ezzel párhuzamost, mely az e_2 egyenest C pontban metszi. A párhuzamos szelők tétele szerint

$$OA : OE = OC : OB,$$

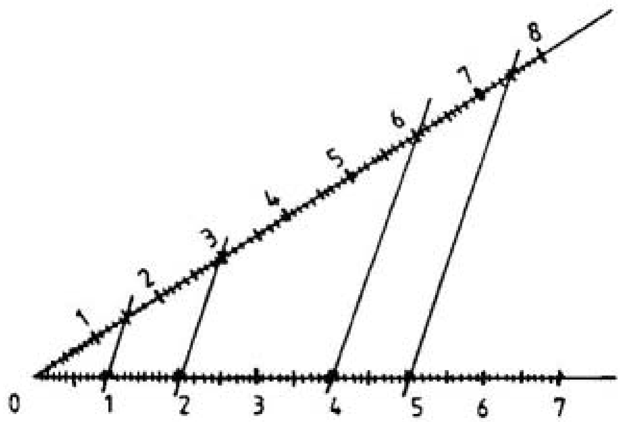
vagy $a : 1 = c : b$, ahonnan $c = ab$. Az ábráról a $b = \frac{c}{a}$ hányados előállítása is leolvasható. Ha az e_2 egyenesre a c távolságnak megfelelő OC szakaszt mérjük fel, az AC egyenessel párhuzamos EB az e_2 egyenest éppen a keresett hányadosnak megfelelő OB szakasz B végpontjában metszi.

Ha az O pontból kiinduló sugarakat számegyeneseknek tekintjük, és azokat megfelelő pontosságú beosztással látjuk el (skálázzuk), a műveletek a beosztásnak megfelelő pontossággal végezhetők (3.16 ábra). Az így készített ábrák *(nomogramok)* segítségével egyszerű műveletekből álló numerikus számítások közelítő értékeinek gyors meghatározására alkalmazhatók különösen olyan esetekben, amikor egy műveletet sokszor kell megismételni úgy, hogy abban valamelyik tényező változatlan marad. A párhuzamos egyenesek



3.15 ábra

szerkesztését a gyakorlatban a vonalzók egymáson való csúsztatásával helyettesítik. Az elektronikus kalkulátorok széleskörű elterjedésével azonban a módszer jelentősége csökkent, és ma már legfeljebb speciális célfeladatok megoldása során használják.



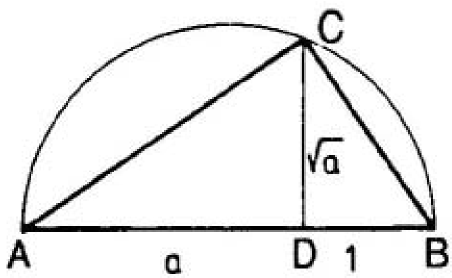
3.16 ábra

A szorzási műveletnek a párhuzamos szelők tételére alapozott ismételt alkalmazásával egy adott szakasz tetszőleges hatványának megfelelő szakasz is megszerkeszthető.

A négyzetgyök euklideszi szerkesztése

A $\sqrt{2}$-nek megfelelő szakasz hossza az egységnyi hosszúságú négyzet átlója. Tetszőleges hosszúságú szakasz négyzetgyökének a megszerkesztése arra az előzőekben említett tételre támaszkodik, mely szerint a derékszögű háromszögben az átfogóhoz tartozó magasság mértani középarányosa az átfogó metszeteinek.

Valamely pozitív a szám négyzetgyökének megfelelő szakaszt legegyszerűbben úgy szerkeszthetjük meg, hogy egy egyenesen felvett A pontból kiindulva felmérjük az a, majd ennek D végpontjából az egységnyi hosszúságú szakaszt, melynek másik végpontja B (3.17 ábra). Ha a két szakasz összegének megfelelő AB szakasz, mint átmérő fölé Thálész-kört szerkesztünk, és a két szakasz közös D pontjában az AB egyenesre merőlegest állítunk, ennek a körrel alkotott C metszéspontjához tartozó CD szakasz az a és az 1 hosszúságú szakaszok mértani közepe, és ennek hossza éppen $\sqrt{a \cdot 1} = \sqrt{a}$ szakasznak felel meg.



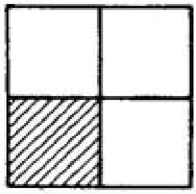
3.17 ábra

Ha az a hosszúságú szakasz helyére annak négyzetgyöke kerül, a kapott derékszögű háromszög magassága az a hosszúságú szakasz által reprezentált szám negyedik gyökének felel meg. Az eljárás analógiájára tetszőleges pozitív szám minden olyan gyökének megfelelő szakasz megszerkeszthető, melynek gyökkitevője kettőnek valamilyen hatványa.

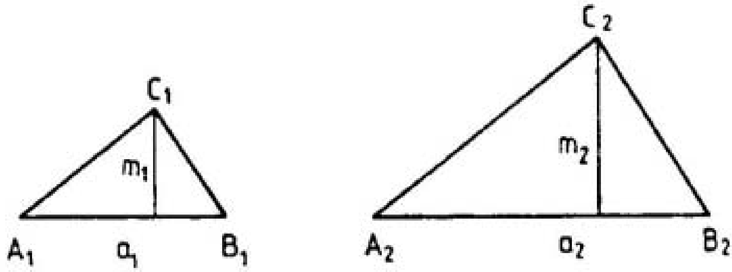
A fentiek alapján mondhatjuk, hogy körzővel és vonalzóval (euklideszi értelemben) minden olyan pozitív számokból álló kifejezésnek megfelelő szakasz megszerkeszthető, mely a négy alapművelet és a négyzetgyökvonás véges számú kombinációjával állítható elő.

Területi és térfogati arányok

Ha egy négyzet oldalainak hosszát megkétszerezzük, az új négyzet területe az eredetinek négyszerese lesz (3.18 ábra). Általánosan is igaz, hogy a hasonló idomok területeinek aránya a lineáris méretek négyzeteinek arányával egyenlő. Az állítás helyességét elegendő háromszögekre bizonyítani, mivel minden egyenesvonalú síkidom felbontható háromszögekre, a görbevonalúak pedig ilyenekkel közelíthetők (3.19 ábra).



3.18 ábra



3.19 ábra

Legyenek az A_1, B_1, C_1 és A_2, B_2, C_2 háromszögek hasonlók. Ekkor a megfelelő pontjaikat összekötő szakaszok arányai megegyeznek: $\frac{a_1}{a_2} = \frac{m_1}{m_2}$, a területek aránya pedig

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{m_1}{m_2}.$$

Mivel azonban $m_1 : m_2 = a_1 : a_2$, a kapott arány

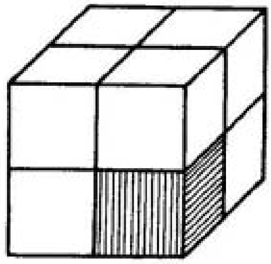
$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{a_1^2}{a_2^2} = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2.$$

A térbeli hasonló alakzatok térfogatának aránya a lineáris méreteik arányának köbével lesz egyenlő. A kétszeres oldalhosszúságú kocka térfogata az eredeti térfogat nyolcszorosa (3.20 ábra), és a kétszeres térfogatú kocka oldalhosszúsága – az $b^3 = 2a^3$ egyenlőségből következően – az eredetiének köbgyök kettőszöröse:

$$b = a \cdot \sqrt[3]{2}.$$

Arkhimédész térfogati tétele

Arkhimédésztől származik a következő, térfogati arányokra vonatkozó tétel: Ha egy olyan egyenes hengerbe, melynek a magassága a megegyezik az alaplap körének átmérőjével, a



3.20 ábra

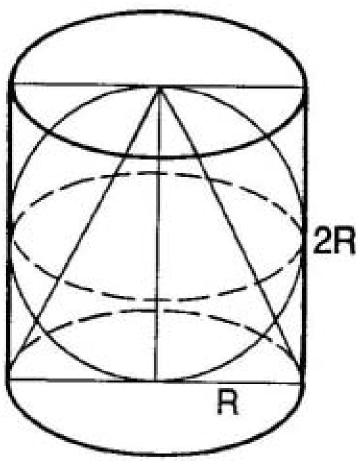
henger palástját és az alaplapot érintő gömböt, valamint az hengerrel azonos alapú egyenlő magasságú kúpot írunk, a három test térfogatának aránya az első három pozitív egész szám viszonyával fejezhető ki:

$$V_1 : V_2 : V_3 = 3 : 2 : 1,$$

ahol V_1 a henger, V_2 a gömb és V_3 a kúp térfogata. A felírt összefüggés helyessége a következő módon látható be: Legyen a henger alapkörének sugara R, magassága $2R$. (3.21 ábra). Ekkor

$$\begin{aligned} V_1 &= R^2 \cdot \pi \cdot 2R = 2R^3 \cdot \pi, \\ V_2 &= \tfrac{4R^3 \cdot \pi}{3}, \\ V_3 &= \tfrac{R^2 \cdot \pi \cdot 2R}{3}. \end{aligned}$$

Ha V_1-et $\frac{6R^3 \cdot \pi}{3}$ alakban, V_3-mat $\frac{2R^3\pi}{3}$ alakban írjuk, azonnal belátható, hogy a három térfogat aránya 6 : 4 : 2, ami megegyezik a tételben szereplő 3 : 2 : 1 aránnyal.



3.21 ábra

4. Az aranymetszés

Az aranymetszés: tények és hiedelmek – Az aranymetszés mint folytonos arány – A szabályos ötszög geometriája, különös tulajdonságai és euklideszi szerkesztése – Az ötszög mint szimbólum: a püthagoreusok, a szabadkőművesek és a boszorkányok jele – A szabályos ötszög és tízszög szerkesztése

Az aranymetszés fogalma

Az ókori görög templomok és a méreteikben rejlő arányok tökéletes harmóniát sugároznak. Az ókori építészet számos, a ma emberét is csodálatba ejtő építményén az aranymetszésnek megfelelő arányok fedezhetők fel. Aranymetszési arányok találhatók számos ókori emléktárgyon, a középkor és a reneszánsz nagy mestereinek képzőművészeti alkotásain, és szerephez jutnak a későbbi korok művészetében is. De ugyanezek az arányok találhatók egyes csigafajták görbületeinek egymáshoz való viszonyaiban, a fák és növények leveinek méreteiben, egyes virágok szirmainak elhelyezkedésében is.

*Aranymetszés*nek nevezik egy szakasz két olyan részre való felosztását, melyek közül a kisebb (rövidebb) szakasz hossza úgy aránylik a nagyobbikhoz, mint az az egészhez. Másképp fogalmazva: a hosszabb szakasz mértani középarányos a rövidebb szakasz és az egész távolság között.

4.1 ábra

Jelölje az aranymetszési arány szerint felosztandó AB szakasz hosszát a (4.1 ábra), és legyen C az aranymetszésnek megfelelő olyan osztópont, melyre az $AC = x$ a hosszabb, CB pedig a rövidebb szakasz. Ekkor a következő, folytonos aránypárt írhatjuk fel:

$$(a-x) : x = x : a,$$

ahonnan $x^2 = a(a-x)$, vagy $x^2 = a^2 - ax$. Az egyenlet x változó szerint rendezett redukált alakja

$$x^2 + ax - a^2 = 0.$$

Az egyenlet pozitív gyöke:

$$x = \frac{a(\sqrt{5}-1)}{2} \approx 0,618034a.$$

Az egyenlet mindkét oldalát a-val osztva: $\frac{x}{a} \approx 0,61803 = h$, ahol h az *aranymetszési hányados.* A kapott eredmény szerint az aranymetszésnél kapott hosszabbik rész a felosztandó szakasznak közelítőleg $0,618$-szerese, a rövidebb pedig $1-0,618 \approx 0,382$-szerese.

Ha az aranymetszést meghatározó folytonos aránypárt hányados alakban írjuk, az $\frac{a-x}{x} = \frac{x}{a}$ egyenletet kapjuk. Az egyenlőségjel bal oldalán levő kifejezésben az osztást tagonként elvégezve, az $\frac{a}{x} - 1 = \frac{x}{a}$ összefüggéshez jutunk, amit – az $\frac{x}{a}$ arányt h-val jelölve,

$$\frac{1}{h} = 1 + h$$

alakban írhatunk.

Az $\frac{x}{a} = h$ egyenlőség mindkét oldalának reciprokát véve, az $\frac{a}{x} = \frac{1}{h} \approx 1,618$ összefüggést kapjuk, ami azt jelenti, hogy a teljes felosztandó szakasz a hosszabbik metszetnek közelítően az $1,618\ldots$-szerese.

Vegyük észre, hogy az $\frac{1}{h}$, az 1 és a h értékek közül a középső a két mellette állónak mértani közepe, vagyis az $\frac{1}{h}$, 1 és h értékek mértani sorozatot alkotnak, melynek hányadosa h. Mivel h értéke 1-nél kisebb, a sorozat csökkenő. Ha a tagok sorrendjét megfordítjuk, és az $\frac{1}{h} \approx 1,618$ értéket q-val jelöljük, az $\frac{1}{q}, 1, q$ értékekből álló növekedő mértani sorozathoz jutunk. Az így nyert mértani sorozat nevezetes tulajdonsága, hogy a harmadik tagtól kezdve minden tag az előző kettő összege:

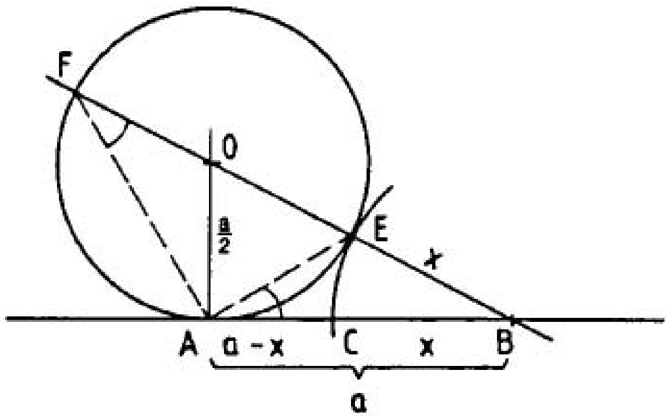
$$\frac{1}{q} + 1 = q.$$

Az aranymetszés euklideszi szerkesztése

Valamely adott szakasz aranymetszésnek megfelelő osztópontjának körzővel és vonalzóval való szerkesztése már az ókorban ismert volt. A szerkesztés egyik változata azon a már akkor ismert tételen nyugszik, mely szerint a körhöz külső pontból húzott érintőszakasz mértani közepe a ponton átmenő szelő körrel alkotott metszeteinek (4.2 ábra).

Szerkesszük meg adott $AB = a$ hosszúságú szakasznak azt a belső C pontját, mely a szakaszt az aranymetszésnek megfelelő arányban osztja! A szerkesztés első lépéseként vegyünk fel egy, az A ponton átmenő, az AB egyenesre merőlegest egyenest, és mérjünk fel erre az A pontból kiindulva $AO = \frac{a}{2}$ távolságot. Ennek O végpontjából, mint középpontból szerkesszünk $\frac{a}{2}$ sugarú kört.

E körnek az A ponthoz tartozó érintője az AB egyenes lesz. Szerkesszük meg az O és B pontokon átmenő egyenest; ennek a körrel való metszéspontjai E és F pontok. Az A pontot az E és az F pontokkal összekötve, a BAE és BAF háromszögeket kapjuk. Mivel a két háromszög B csúcsnál levő szöge közös, továbbá a BAE és BFA szögek az AE ívhez tartozó kerületi szögek, és így egyenlők, a kapott háromszögek hasonlók. Ha a BE szakasz



4.2 ábra

hosszát x-szel jelöljük, BF szakasz hossza $x+a$ lesz. A hasonlóságból a megfelelő oldalak arányát felírva:

$$\frac{x}{a} = \frac{a}{x+a}, \quad \text{amiből} \quad a^2 = x(x+a).$$

A szorzást evégezve: $a^2 = x^2 + ax$.

Ha az egyenletet x fogyó hatványai szerint rendezzük és a-t kiemeljük, a következő összefüggéshez jutunk:

$$x^2 = a(a-x).$$

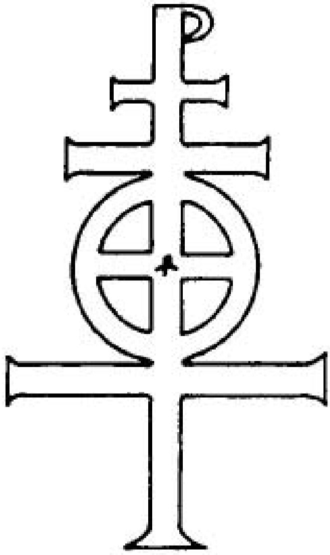
Ez az egyenlőség éppen azt fejezi ki, hogy az x hosszúságú BE szakasz mértani középarányos a teljes AB szakasz, és annak rövidebb metszete között. Ha a BE szakaszt a B pontból AB-re rámérjük, a kapott C pont az AB szakaszt éppen aranymetszés szerint osztja.

Tények, hitek, hiedelmek

Az aranymetszést már az ókorban ismerték, és misztikus jelentések hordozójának, isteni eredetűnek tartották. Nem meglepő tehát, ha gyakran találkozunk vele különböző vallásos tárgyú képeken, a vallással összefüggő tárgyak, eszközök, épületek méreteinek arányaiban. Az aranymetszés ismerete és alkalmazása az egész Római Birodalomban elterjedt, és hatása kimutatható a korai kereszténység jelképeinek kialakulásában is.

Az 4.3 ábra a korai keresztény időből (3. sz.) származó Krisztus-monogrammal egyesített, az életet jelképező *ankh-keresztet* ábrázol. A kereszt jelét az ókori Egyiptomban a kereszténység megjelenése előtt az élet jelképeként tisztelték; az egyesített jelkép a kereszténységnek a korabeli vallásokkal és kultuszokkal való összefonódására utal.

A kereszten az aranymetszési arány több helyen is megtalálható. A két alsó keresztgerenda a keresztoszlop magasságának hosszabb, illetve rövidebb aranymetszete. A két keresztgerenda együttes hossza megegyezik az oszlop magasságával, a kör középpontja az



4.3 ábra

oszlopnak a talpponttól a legfelső gerendáig terjedő távolságát aranymetszésben osztja. A legfelső keresztgerenda középpontja a középső keresztgerenda alsó élétől a kereszt csúcsáig mért távolságnak, a *P* betű felső görbülete a betű teljes hosszának aranymetszete.

A kereszt rajza az V. századból származó kopt *gnosztikus* papirusz-kódexben szerepel, mely felfedezőjéről, *James Bruce*-ről (XVIII. sz.) *Codex Brucianus* néven vált ismertté. A *gnoszticizmus* az időszámítást megelőző és az azt követő néhány évszázad szellemi mozgalma volt, mely részben a *hermetikus* tanokból, részben a perzsa *Zaratusztra* követőinek tanításaiból táplálkozott. A gnózis jelentése a görög *gnoszisz* (felismerés) szó alapján keletkezett, és azt kívánta kifejezni, hogy a szekta vagy mozgalom tagjai az isteni felismerés birtokában vannak.

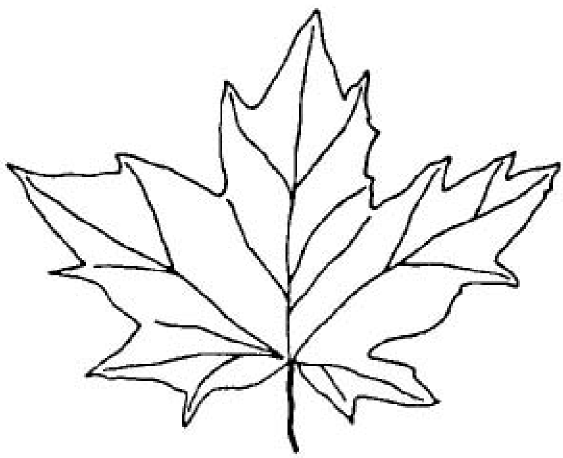
A korai keresztény gnosztikusok csak részben fogadták el a római egyház tanítását, és azt a korabeli vallások és az antik (görög, egyiptomi) filozófia nézeteivel ötvözték. Erre utal többek között az a tény is, hogy a korai keresztény közösségek hitébe a reinkarnáció tana is beépült, és azt csak a II. Konstantinápolyi Zsinat 553-ban nyilvánította eretnekségnek.

A *hermetizmus* az i. e. III. században keletkezett szellemi és vallási irányzat, melynek prófétája és elindítója *Hermész Triszmegisztosz,* a Háromszor Legnagyobb, a bölcsesség legfőbb forrása. A hermetikus tanítások eszmevilága a késői antik filozófia és a keleti vallások elemeinek sajátos szintézise. A hermetizmus szellemi központja az ókorban Egyiptom; a mozgalom második fénykorát az európai reneszánsz idején éli.

Az első keresztény századok vallási irányzatai nem mentesek püthagoreusi hatásoktól sem. Erre a számmisztikára támaszkodó szemléletre vezethető vissza egyes arányok isteni eredetében való hit, és azok vallási jellegű tárgyakon és jelképeken való továbbélése (lásd még 6. fejezet).

Az ötszög

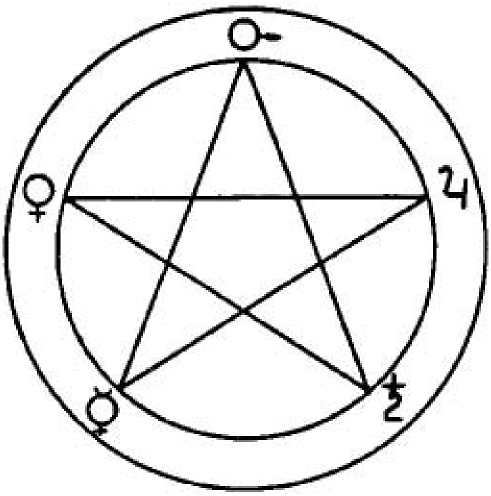
Az ötös számnak már az ókorban különös jelentőséget tulajdonítottak. Öt ujjunk van, ennyi az érzékszerveink száma, és a természetben is lépten-nyomon találkozunk ezzel a számmal. Nagyon sok virág ötszirmú: ilyen például az ibolya, igen sok vadvirág és a legtöbb gyümölcsfa virága. A mezei juhar levelei az öt ujjunkhoz hasonlóan öt karéjból állanak (4.4 ábra): a levelek részeinek méretviszonyaiban aranymetszési arányok fedezhetők fel.



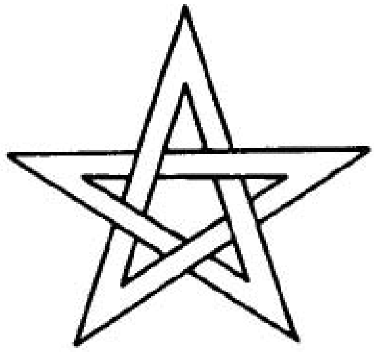
4.4 ábra

A püthagoreusok az ötös számot az emberi mikrokozmosz tökéletes számának tartották, és titkos jelként használták. Az ókori görögök az egészség szimbólumát látták benne, és csúcsaihoz az egészség istennőjének, Hügieniának jeleit kapcsolták. A középkor asztrológiai ábráin az ötszög csúcsainál az öt főbolygó *(Merkur, Vénusz, Mars, Juppiter, Szaturnusz)* neve szerepel (4.5 ábra). Az ötszög, mint jelkép már ősidőktől fogva az egység, és ugyanakkor az *univerzum* szimbóluma, de jelképe a termékenységnek és az életnek is. Ötágú csillag a szabadkőművesek jele, és ötágú csillagból alkotott ábra a boszorkányok titkos jele, a boszorkányszög (4.6 ábra).

Az ötszög különleges jelentőségét csak növelte az aranymetszéssel való kapcsolata: a szabályos ötszög egyik jellemző tulajdonsága, hogy átlói aranymetszés szerint osztják egymást.



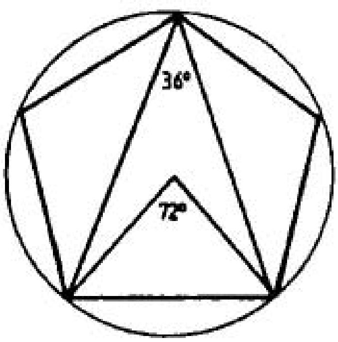
4.5 ábra



4.6 ábra

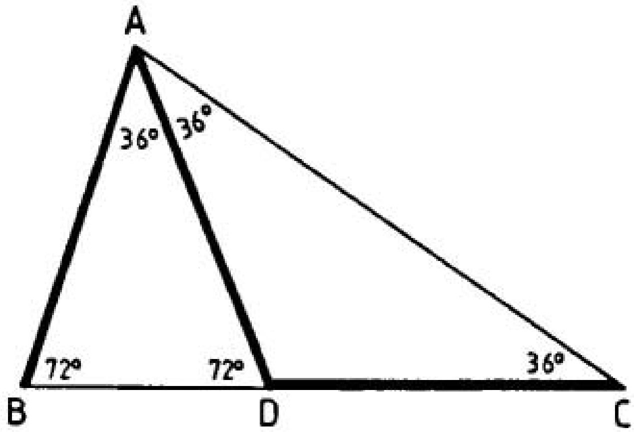
A szabályos ötszög geometriája

A szabályos ötszög alapvető tulajdonságai az aranymetszés törvényein nyugszanak. A szabályos ötszög csúcsai, mivel oldalai és szögei egyenlők, egy kör kerületén helyezkednek el (4.7 ábra); oldalai a kör húrjai. Az ötszög oldalaihoz tartozó középponti szögek $360 : 5 = 72$ fokosak, és az oldalakhoz, mint húrhoz tartozó kerületi szögek nagysága $36°$.



4.7 ábra

Ha az ötszög valamely oldalának végpontjait a szemközti csúccsal összekötjük, a kapott két átló olyan egyenlőszárú háromszöget alkot, melynek alapja az ötszög oldala, a csúcsnál levő szöge 36°, az alapon nyugvó szögei 72°-osak. Az így kapott egyenlőszárú háromszögnek azonban különleges tulajdonságai vannak (4.8 ábra).



4.8 ábra

Legyen az ABC háromszögben $AC = BC$, és legyen az A és B csúcsnál levő szögek mindegyike 72°, a C csúcsnál levő pedig 36°. Ezután szerkesszük meg azt az egyenlőszárú háromszöget, melynek alapja a BC egyenesen van, és egyik szára az eredeti háromszög AB alapja. Ennek a háromszögnek a BC oldalon lévő másik csúcsát jelölje D. Mivel az ABD egyenlőszárú háromszögben az alapon fekvő szögek egyenlők, a D csúcsnál levő BDA szög is 72°, amiből következik, hogy a BAD szög nagysága is 36°. Ez azt jelenti, hogy a kapott BDA háromszög hasonló az eredetihez. De ha figyelmünket a megmaradó ADC háromszögre irányítjuk, azt találjuk, hogy az is egyenlőszárú háromszög. Ugyanis a DAC szög, mivel $72^\circ - 36^\circ = 36^\circ$, szintén 36°-os lesz. Ebből viszont az következik, hogy $DC = AD = AB$.

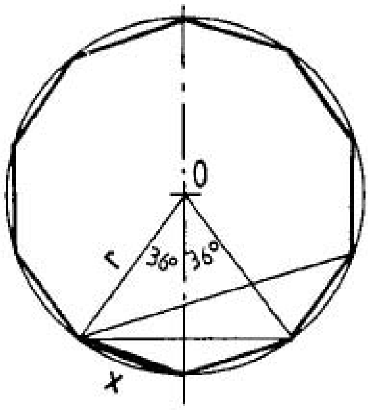
Az ABC és ABD háromszögek hasonlósága alapján a megfelelő aránypárt felírva:

$$BD : AB = AB : BC, \quad \text{ahonnan} \quad AB^2 = BD \cdot BC.$$

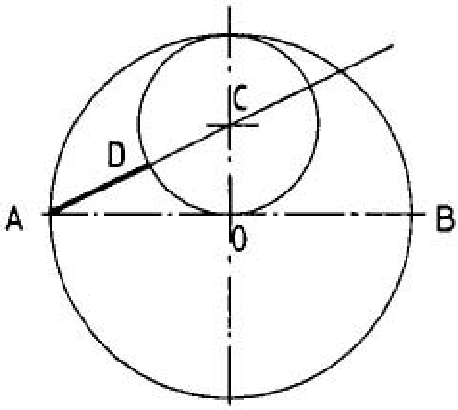
Ez pedig éppen azt jelenti, hogy D pont a BC szakaszt az aranymetszésnek megfelelő arányban osztja. A kapott eredmény szerint az r sugarú körbe írt szabályos tízszög (mivel az ehhez tartozó középponti szög 36°-os), oldala a kör sugarának hosszabbik aranymetszete (4.9 ábra). Ennek az összefüggésnek az alapján szerkeszthetjük meg euklideszi módon a szabályos tízszög oldalát, ami a 4.10 ábrán az AB szakasznak felel meg.

A szabályos ötszög oldalát a szabályos tízszög oldalából legegyszerűbben úgy nyerhetjük, hogy a tízszög minden második csúcsát összekötjük. Azonban mind a szabályos ötszög, mind pedig a szabályos tízszög oldala a 4.11 ábrának megfelelően közvetlenül is megszerkeszthető. Ugyanis bebizonyítható, hogy az r sugarú körbe írt szabályos tízszög a-val, a szabályos ötszög b-vel jelölt oldala és a kör r sugara között a

$$b^2 - a^2 = r^2$$



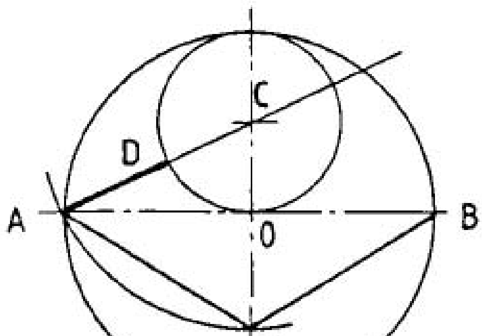
4.9 ábra



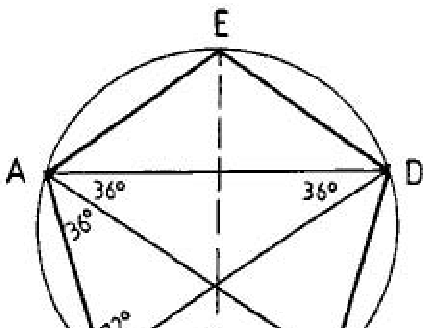
4.10 ábra

összefüggés áll fenn. Az ábrán az $AD = OE$ szakasz lesz az OA sugarú körbe írt szabályos tízszög, az AE szakasz pedig a szabályos ötszög oldala.

De térjünk vissza az ötszöghöz és tekintsük az M metszéspontú AC és BD átlókat. Mivel a CAD és BDA egyenlő szárú háromszögek, melyek alapja az ötszög oldala és a csúcsnál lévő szögük 36°-os, az AM szakasz az AC, MD szakasz a BD átló hosszabbik aranymetszete (4.12 ábra).



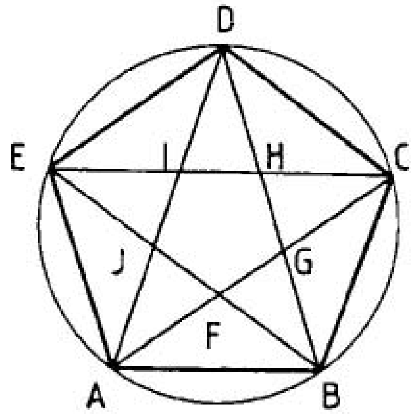
4.11 ábra



4.12 ábra

A fentiekből következik, hogy a szabályos ötszög átlói egymást az aranymetszésnek megfelelő arányban metszik, és a metszet nagyobbik szelete megegyezik az ötszög oldalával. Ez az összefüggés már a görög matematikusok előtt sem volt ismeretlen, aminek bizonyítéka, hogy már Hipparkhosz munkáiban is szerepel.

Az átlók metszésével kapcsolatban további összefüggésekre is fény derül. Ha megrajzoljuk az ötszög összes átlóját, – ezek száma $n(n-3)/2 = 5$, megfigyelhetjük, hogy minden átlót két másik átló metsz. Legyenek az ötszög csúcsai A, B, C, D és E (4.13 ábra), az átlók metszéspontjai pedig F, G, H, I és J. Válasszuk ki az AC átlót. Ennek F és G pontjai lesznek az EB és DB átlókkal alkotott metszéspontjai, és a AG szakasz az AC átló hosszabbik aranymetszete.



4.13 ábra

Vegyük észre, hogy ABG háromszög szintén aranymetszési tulajdonságot hordozó egyenlőszárú háromszög, amiből következik, hogy az F pont az AG szakaszt, az átló hosszabbik metszetét szintén aranymetszésnek megfelelően osztja. Az FG szakasz az AG szakasznak a rövidebb aranymetszete, vagyis $FG \approx 0,38 \cdot AG$. Mivel az AG szakasz hossza megegyezik az FC szakasz hosszával, FG a két metszéspont között szimmetrikusan helyezkedik el. De AG, illetve FC megegyezik az ötszög oldalainak hosszával, így a kapott FG szakasz egyúttal az oldal hosszának is rövidebb aranymetszete.

Az átlókon a két metszéspont által meghatározott középső szakaszok a szimmetria miatt egyenlő hosszúak: $FG = GH = HI = IJ = JG$. Mivel ugyanez mondható az e szakaszok által meghatározott ötszög szögeiről is, megállapíthatjuk, hogy a szabályos ötszög átlói egy újabb szabályos ötszöget alkotnak, és ennek oldalai olyan hosszúak, mint az eredeti ötszög oldalainak rövidebb aranymetszete.

Ha az átlókat megrajzoljuk, és az ötszög oldalait eltávolítjuk, szabályos ötágú csillag keletkezik, melyben az $AF = FB = BG = \ldots$ szakaszok hossza éppen az ötszög oldalainak hosszabbik aranymetszete.

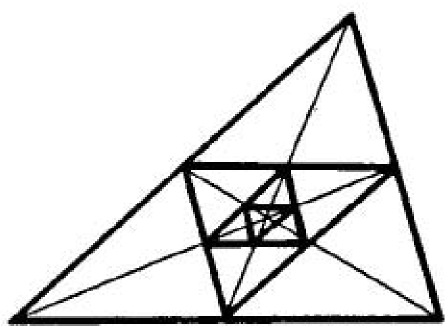
5. Öröklődő arányok

Síkidomok egymásban és egymás körül – Szabályos sokszögek átlóival bezárt alakzatok – Hasonló alakzatok és a geometriai sorozat – A geometriai sorozat és az aranymetszés – Az aranymetszési hányadossal képzett exponenciális függvény mint növekedési modell

Síkidomok egymásban és egymás körül

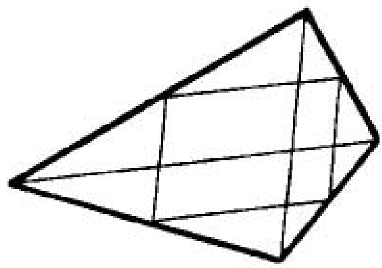
Ha egy háromszög oldalainak felezőpontjait összekötjük, a kapott szakaszok olyan újabb háromszöget határoznak meg, melynek oldalai az eredeti háromszög középvonalai. A középvonalak párhuzamosak a háromszög azon oldalaival, melyeket nem feleznek, és fele olyan hosszúak, mint ez az oldal. Mivel a két háromszög oldalainak aránya megegyezik, az így kapott kisebb háromszög hasonló lesz az eredetihez, és a hasonlósági arány 1 : 2.

Ha az így nyert háromszög oldalainak felezőpontjait ismét összekötjük, újabb, az előzőhöz és az eredetihez hasonló háromszöghöz jutunk, melyben az oldalak hossza az előző háromszög megfelelő oldalainak ugyancsak a fele, az eredeti háromszög oldalának negyedrésze. Mivel a hasonlósági arány ismét $\frac{1}{2}$, a második és az eredeti háromszög hasonlósági aránya már $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ lesz. Az eljárás folytatásával kapott háromszögek megfelelő oldalai olyan geometriai sorozatot alkotnak, melynek hányadosa $\frac{1}{2}$ (5.1 ábra).



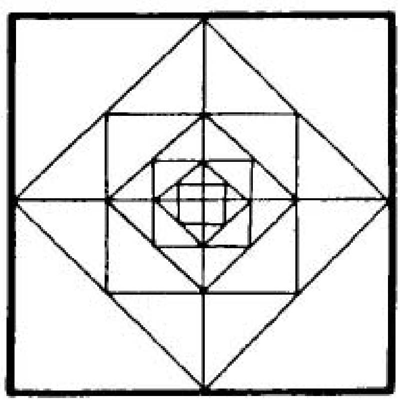
5.1 ábra

A képzési sorrendet meg is fordíthatjuk: a sorozat első tagjának (elemének) valamelyik beírt háromszöget választva az e köré írt háromszögek oldalai olyan növekedő geometriai sorozatot alkotnak, melynek hányadosa 2. Könnyen belátható, hogy a megfelelő oldalak felezőpontjai egy-egy egyenesen, a súlyvonalak egyenesein sorakoznak oly módon, hogy két egymást követő felezőpont a súlyvonal ellenkező oldalára esik. A három súlyvonal metszéspontja, a súlypont a keletkezett hasonló háromszögek közös hasonlósági pontja, a hasonlósági transzformáció vetítési középpontja.



5.2 ábra

A négyszögeknél már nem ilyen egyszerű a helyzet. Ugyanis könnyen belátható, hogy bármely négyszög szomszédos oldalainak felezőpontjait összekötve paralelogrammát kapunk (5.2 ábra). Így, ha az eredeti négyszög nem volt parallelogramma, hasonlóságról már eleve nem lehet szó. A parallelogrammák közül is csak akkor lesz a szomszédos oldalak összekötésével kapott síkidom az eredetihez hasonló, ha a kiinduló alakzat átlói egyenlő hosszúak és egymásra merőlegesek. Ezekkel a tulajdonságokkal pedig csak a négyzet rendelkezik. A négyzet esetén tehát igaz, hogy az oldalak felezőpontjait összekötve, újabb négyzetet kapunk (5.3 ábra). Az ily módon beírt négyzet oldalainak hossza az eredeti



5.3 ábra

négyzet átlójának a fele, az oldalak hosszának $\frac{\sqrt{2}}{2}$-szerese. Az eljárást folytatásával kapott négyzetek oldalai olyan geometriai sorozatot alkotnak, melynek hányadosa $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ha valamely belső négyzetből indulunk ki, és az előző négyzet csúcsain áthaladó, az átlókkal párhuzamos egyenesek megrajzolásával keletkező, körülírt négyzetek sorozatát tekintjük, ezek oldalai olyan növekedő geometriai sorozatot alkotnak, melynek hányadosa az előzőnek a reciprok értéke, $\sqrt{2}$.

Észrevehetjük, hogy a négyzetek közül minden második hasonló helyzetű is lesz. Ezeknek a négyzeteknek az oldalai is geometriai sorozatot alkotnak, de ennek a sorozatnak a hányadosa $\frac{1}{2}$ (illetve 2). Az így kapott négyzetek olyan hasonlósági transzformációval származtathatók, melynek középpontja a négyzetek közös középpontja.

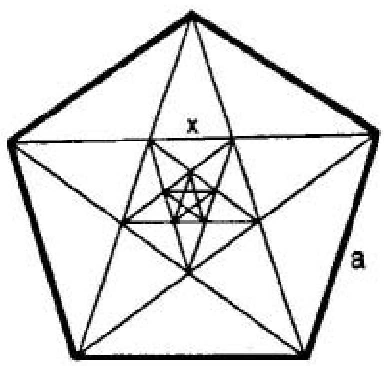
Szabályos sokszögek átlóival meghatározott alakzatok

A négyzet átlói egy pontban metszik egymást: az átlók által meghatározott alakzat egyetlen pont. Az ötszög az a legkisebb oldalszámú síkidom, melynek átlói újabb síkidomot zárnak be. Az is belátható, hogy a szabályos ötszög esetében a szimmetria miatt a kapott alakzat ismét szabályos ötszög lesz. Az átlók által bezárt ötszög oldalának hossza az eredeti ötszög oldalhosszának a kisebbik aranymetszete, ami abból az ismert tényből következik, hogy a szabályos ötszög átlói egymást az aranymetszésnek megfelelő arányban osztják.

Ha az eredeti ötszög AB oldalát a-val, az átlók metszésével keletkezett ötszög oldalát x-szel jelöljük, akkor x értéke az aranymetszési hányados ismeretében meghatározható:

$$x = a - ha = a(1-h) \approx 0,38a, \quad \text{és} \quad \frac{x}{a} = 1 - h \approx 0,38.$$

Ha az átlók által határolt ötszög átlóit is megrajzoljuk, újabb szabályos ötszög keletkezik, melynek oldalhossza az előzőének ismét ugyanannyiszorosa. Az eljárást folytatva (5.4



5.4 ábra

ábra), szabályos ötszögek egymásba írt sorozatához jutunk, melyek oldalai csökkenő geometriai sorozatot alkotnak. A sorozat hányadosa $1-h$, ahol h az aranymetszési hányados.

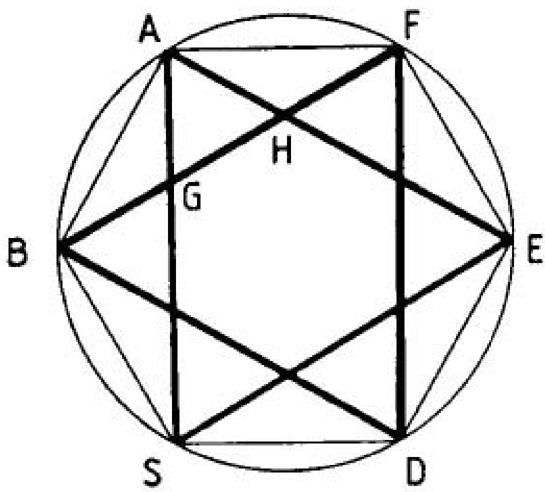
Az ötszögek előállítása tetszőlegesen folytatható, míg az elvileg végtelen kis ötszög ponttá nem zsugorodik. Ha a sorozatban visszafelé haladva – egy tetszőleges ötszögből kiindulva – azoknak az ötszögeknek az oldalait tekintjük, melyek átlói az előző ötszög oldalegyenesén fekszenek, olyan növekedő geometriai sorozatot kapunk, melynek hányadosa az előbb kapott érték reciproka.

$$\frac{1}{1-h} \approx \frac{1}{0,382} \approx 2,618.$$

Mivel az ötszög átlói párhuzamosak azzal az oldallal, mellyel nincs közös pontjuk, az így származtatott ötszögek oldalai párhuzamosok lesznek azzal az oldallal, amellyel párhuzamos átlón fekszenek. Az egymást követő ötszögek megfelelő oldalai a hasonlósági pont (ami itt is a körülírt kör középpontja) ellenkező oldalára kerülnek.

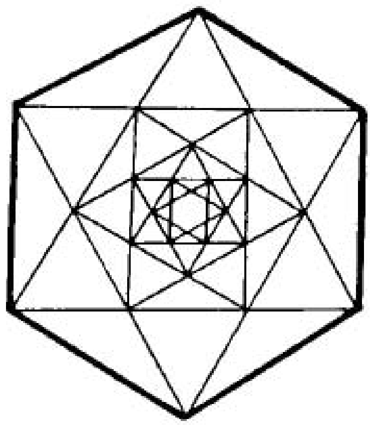
A szabályos hatszög átlói

A szabályos hatszög minden második csúcspontját összekötő átlók két szabályos háromszöget alkotnak, melyek szabályos hatszöget zárnak be. (5.5 ábra). A szimmetria miatt az ABG és AGH háromszögek egyenlőszárúak, és mivel AGH háromszög egyenlő oldalú is: $BG = GH = HF$, az átlók egymást három egyenlő részre osztják, röviden harmadolják.



5.5 ábra

Mivel az átló a hatszög oldalának $\sqrt{3}$-szorosa, az átlók által bezárt hatszög oldalának hossza ennek harmadrésze, az eredeti hatszög oldalának $\frac{\sqrt{3}}{3}$-szorosa. Ha az így nyert hatszög minden második csúcsát ismét összekötjük, az átlók újabb szabályos hatszöget zárnak be, melynek oldalhossza az előzőének ugyancsak $\frac{\sqrt{3}}{3}$-szorosa, és az eredeti hatszög oldalának harmadrésze.



5.6 ábra

Ha az eljárást folytatjuk, a keletkezett hatszögek oldalai olyan geometriai sorozatot alkotnak, melynek hányadosa $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (5.6 ábra). Ha belülről kifelé haladunk, és azt a növekedő sorozatot tekintjük, melynek első tagja a hatszögek közül az egyik tetszőlegesen választott hatszög oldala, csúcsai pedig az oldalalak meghosszabbításával kapott egyenesek metszéspontjai, a sorozat hányadosa az előzőekben kapott hányados reciproka lesz.

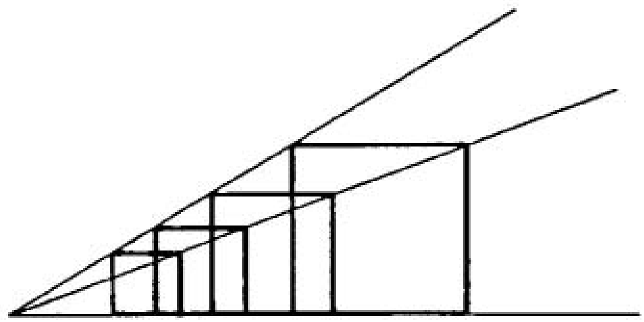
Az így keletkezett hatszögek sorozatának elemei közül minden második hatszög megfelelő oldalai párhuzamosak. Hasonlósági vagy nagyítási arányuk $\frac{1}{3}$, illetve 3, és hasonlósági pontjuk a hatszög köré írható kör középpontja.

A hatszög minden második csúcsát összekötő átlók két szabályos háromszögből álló hatágú csillagot alkotnak. A csillag ágainak hossza megegyezik az átlók által bezárt hatszög oldalának hosszával.

A hatágú csillagnak ősidőktől kezdve sokféle szimbolikus jelentést tulajdonítottak. Mint két egyenlőszárú háromszög összekapcsolásával létrejött alakzat, különböző ellentétpárok (anyag–lélek, férfi–nő, tűz–víz,) harmonikus egységét, egyensúlyát fejezi ki. A hatágú csillag a zsidóság ősi jelképe, már a zsidó nép harcos vezére, Bar Kochba pénzérméin (II. sz.) is megtalálható, de mint a teremtés szimbolikus jelképe, a kereszténységhez is kapcsolódik.

Hasonló alakzatok és a geometriai sorozat

Hasonló alakzatok megfelelő szakaszai akkor alkotnak geometriai sorozatot, ha abban az egymást követő elemek (a szakaszok, pontosabban ezek hosszának megfelelő mérőszámok) hányadosa mindig ugyanaz. Ez az állandó egyúttal az alakzatok egymáshoz viszonyított nagyítási (kicsinyítési) aránya is. Ha ennek a követelménynek a teljesülését valamilyen módon (például a párhuzamos szelők tételére alapozott szerkesztéssel) biztosítjuk (5.7 ábra), a hasonlósági arány megmarad, és az alakzatok megfelelő szakaszai a geometriai sorozat törvényei szerint követik egymást.



5.7 ábra

Az

$$a_1, \quad a_2 = a_1 \cdot q, \quad a_3 = a_1 \cdot q^2, \ldots, a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

geometriai sorozat elemeit mint az *elemek számának a függvényét* derékszögű koordinátarendszerben is ábrázolhatjuk. Ha az abszcisszán felvett $1,\ 2,\ 3,\ldots,n$ pozitív egész számokhoz hozzárendeljük a sorozat megfelelő, $a_1,\ a_2,\ a_3,\ldots,a_n$ elemeit mint ordináta értékeket, különálló (diszkrét) pontokat kapunk. Ezek a pontok egy exponenciális függvény görbéjén helyezkednek el, annak a természetes számú kitevőkhöz tartozó értékeit jelentik. (5.8 ábra).

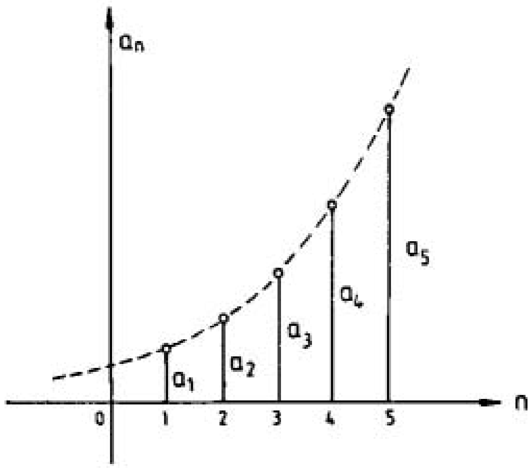
Az exponenciális függvényt azonban nem csak egész értékekre, hanem a független változó minden valós x értékére értelmezzük. Általános alakja:

$$y = c \cdot a^x,$$

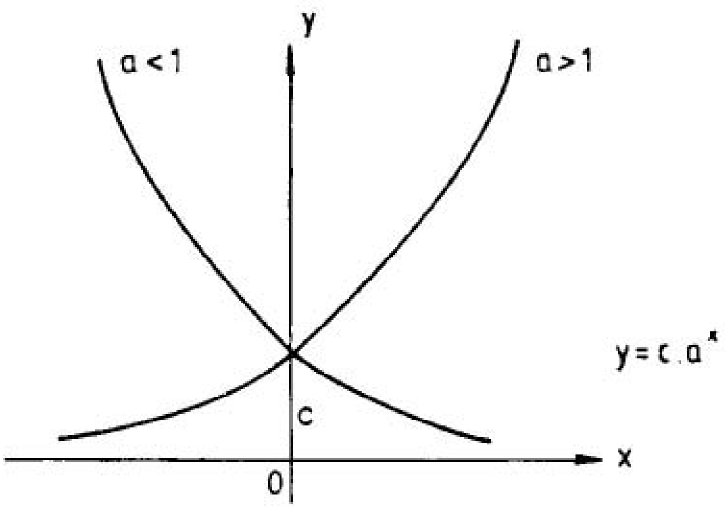
ahol c az $x = 0$ helyen felvett függvényérték. A függvény $a > 1$ értékekre monoton (állandóan) növekedő, $a < 1$ esetén pedig monoton fogyó vagy csökkenő, (5.9 ábra). Ha $a = 1$, ennek minden hatványa 1 lévén, a függvény állandó.

Ha az időt tekintjük független változónak, az exponenciális függvény ($a > 1$ esetén) olyan növekedési tendenciát fejez ki, melyben a növekedés az előző értéknek mindig ugyanannyiszorosa. Az élővilágban lejátszódó időbeli folyamatokat leíró törvények exponenciális függvény alakjában fogalmazhatók meg. Exponenciális függvénykapcsolat fejezi ki a növekedési szakaszban a növényi vegetáció tömegének időbeli változását, az állati populáció természetes körülmények közötti szaporodását, egy adott népesség időbeli növekedését.

Egynél kisebb hányadosú, csökkenő exponenciális függvény írja le a radioaktív sugárzó anyagok tömegének időbeli csökkenését. Ezen alapszik a radioaktív óra: a sugárzó



5.8 ábra



5.9 ábra

anyag, és a sugárzás során átalakult anyag tömegének viszonyából következtetnek a sugárzás időbeli lefolyására.

A számtani sorozat mint függvény

A számtani sorozat mint az elemek (tagok) számának függvénye a természetes számokon értelmezett lineáris függvény (5.10 ábra). A függvényértékek itt is – akár a geometriai sorozat esetében – diszkrét pontokból állnak. Jelölje a sorozat első elemét a_1, n-edik elemét a_n és különbségét d. A sorozat n-edik elemét az elsővel és a különbséggel kifejezve:

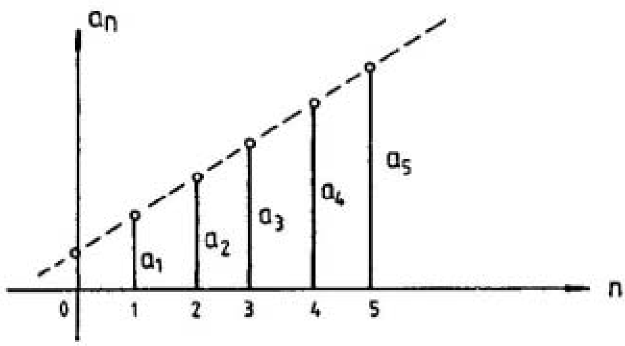
$$a_n = a_1 + (n-1)d, \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

A számtani sorozat középarányos tulajdonsága, hogy bármely eleme (a második elemtől) a két szomszédos elem számtani közepe:

$$a_k = \frac{a_k - d + a_k + d}{2}.$$

Mivel az egyenes arányosságnak megfelelő függvény áthalad az origón, a számtani sorozat csak akkor fejez ki egyenes arányosságot, ha $a_1 = d$.

Ekkor ugyanis $a_n = d + (n-1)d = nd$.



5.10 ábra

A geometriai sorozat és az aranymetszés

A geometriai sorozat egyik meghatározó tulajdonsága, hogy a második elemtől (tagtól) kezdve bármely eleme a két szomszédos elem mértani középarányosa:

$$a_k^2 = \frac{a_k}{q} a_k q.$$

Ha a geometriai sorozat hányadosa az aranymetszésnek megfelelő növekedési arány ($q = 1,618\ldots$), a sorozat harmadik elemétől kezdve igaz, hogy minden elem az előző kettő összege. A középső elemet a-val jelölve: $\frac{a}{q} + a = aq$. A fenti összefüggés szerint az aranymetszési növekedési aránnyal, mint hányadossal képzett geometriai sorozat bármely eleméből a rákövetkező úgy is képezhető, hogy a kérdéses elemhez hozzáadjuk az azt megelőző elemet.

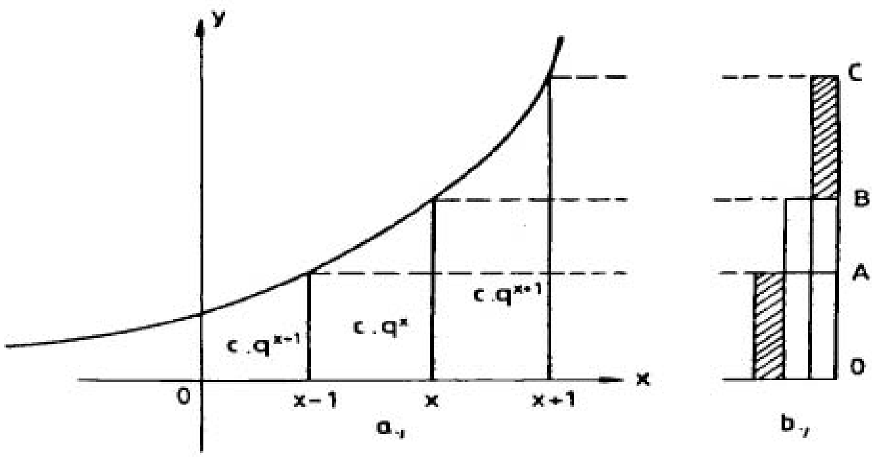
Hogyan értelmezhető ez a tulajdonság az exponenciális függvény esetére? Mivel az exponenciális függvényt minden valós számra értelmezzük, a fenti tulajdonság az $y = c \cdot q^x$ alakú exponenciális függvényre vonatkozóan azt jelenti, hogy ha annak alapja az aranymetszésnek megfelelő növekedési arány, $q = 1,618\ldots$, akkor bármely valós x értékre fenn kell állnia a következő egyenlőségnek (5.11 *a* ábra):

$$c \cdot q^{x-1} + c \cdot q^x = c \cdot q^{x+1}.$$

Az egyenlet mindkét oldalát $c \cdot q^x$ kifejezéssel osztva, (mivel $c \neq 0$ és $q^x > 0$), éppen az

$$\frac{1}{q} + 1 = q,$$

az aranymetszés szerinti növekedést meghatározó egyenlethez jutunk.



5.11 ábra

Legyen most $x \geq 1$ valós szám. Ha a $c \cdot q^{x-1}$, $c \cdot q^x$ és $c \cdot q^{x+1}$ függvényértékeknek megfelelő távolságokat OA, OB és OC szakaszok jelölik, az 5.11 *b* ábráról leolvasható, hogy a B pont az AC szakaszt aranymetszésnek megfelelő arányban osztja. Mivel $BC = OA$, az A pont az OB szakasznak szintén az aranymetszésnek megfelelő arányban osztó pontja.

Ha az idő függvényében leírt növekedési görbe olyan exponenciális függvény, melynek alapja az aranymetszési növekedési arány, akkor a növekedési folyamatban egy adott időponthoz tartozó állapot aranymetszete az azt egy időegységgel megelőző és az azt ugyanannyival követő állapotok közötti növekedési szakasznak. A megelőző állapot aranymetszet a kezdőállapot és a meglévő között; ugyanakkor fennáll az az összefüggés is, hogy a meglévőt egy időegységgel követő állapotnak megfelelő érték a meglévő és az azt megelőző értékek összege.

6. Arányok és szögek

Kuriózumok a trigonometria történetéből – Miben tévedett Kolumbusz? – Térképkészítés az ókorban – Az első húrtáblázatok és a mai trigonometria – Az aranyszög és a vele kapcsolatos jelképrendszerek

Miben tévedett Kolumbusz?

Köztudott, hogy *Kolumbusz* nevezetes hajóútján nem új földrészt keresésére indult, hanem a távolkeleti India eléréséhez a Föld nyugati irányban való megkerülésével új hajózási útvonalat akart felkutatni. Hogy vállalkozásának az eredménye mégis egy új világ (*az Újvilág*) felfedezése lett, abban a véletlenek közrejátszásának is szerepe volt.

Kolumbusz terveit és hajóútját olyan térképre alapozta, mely a földi *Egyenlítő* hosszát a valóságos távolság helyett annál mintegy egynegyedével rövidebbnek tüntette fel. Amikor 1592. október 12-én az expedíció vezérhajóján szolgálatot teljesítő matróz szájából elhangzott a várva várt *FÖLD* kiáltás, és Kolumbusz a hosszúra nyúlt hajóút végén megpillantotta a *Bahama* szigetcsoporthoz tartozó egyik sziget, a mai *San Salvador* partjait, meg volt róla győződve, hogy kitűzött úticélját elérve, Ázsia keleti partjaihoz érkezett.

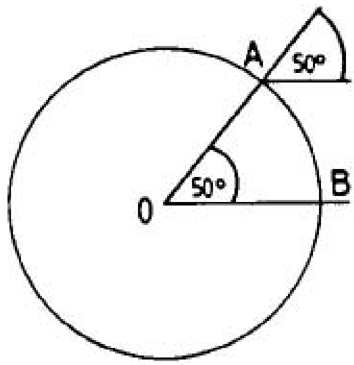
Mivel Kolumbusz térképén ez a hely az ázsiai szigetvilághoz tartozó területnek felelt meg, az ott talált őslakókat indiaiaknak, mai néven *indiánok*nak nevezte.

Térképszerkesztés az ókorban

A Kolumbusz által használt térkép, melyre hajóútja tervezésénél támaszkodott, *Poszeidóniosz* szír (arameusz) származású görög csillagász számításai alapján készült, és *Ptolemaiosz* görög matematikus és természettudós révén került Európába. Erre támaszkodott *Toscanelli* 1477-ben kiadott hajózási térképe is, melyen már szerepelt az Atlanti-óceán számos szigete, és annak keleti partjainál az ázsiai szigetvilág és az ázsiai szárazföld. Tulajdonképpen ez a térkép adta Kolumbusznak azt az ötletet, hogy a gazdag Keletet nyugati irányba hajózva közelítse meg.

A történelemmé vált történet során azonban felmerül a kérdés: hogyan készültek a régebbi korokban a térképek, és hogyan számították vagy becsülték a távolságokat?

A Föld délköreinek, illetve az abban az időben azzal azonos méretűnek gondolt Egyenlítő hosszának meghatározását *Erathosztenész* már az időszámítás előtti II. században mérésekre alapozta. Abból indult ki, hogy amikor a dél-egyiptomi Syenében (mai nevén *Assuán*) dél van (6.1 ábrán az *A* pont), vagyis a Nap sugarai merőlegesen érik a Földet, *Alexandriában* (6.1 ábra *B* pont) a Nap sugarai a beesési merőlegessel $\frac{360}{50} = 7,2°$-os szöget zárnak be. Ez a szög megegyezik az *A* és *B* pontokon átmenő főkör *AB* ívéhez tartozó középponti szöggel. Ezután megmérte a két város távolságát, majd az arányosságra támaszkodva kiszámította annak a főkörnek a teljes hosszát, amely közelítően ezeken a földrajzi helyeken halad át, és amit azonosnak vett az Egyenlítő hosszával.



6.1 ábra

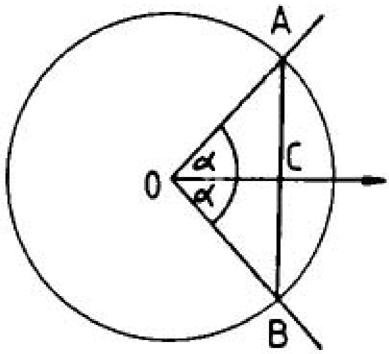
Erathosztenész mérési eredményei a maiakkal nagyságrendben megegyeznek. Mivel mérési adatait és számítási eredményeit a hosszúság mérésére abban az időben általánosan használt mértékegységben, *stádium*ban adta meg, a valódi értékekre vonatkozóan csak becslésekre vagyunk utalva.

A dolog érdekessége, hogy Eratoszthenész mérési eredményei jóval pontosabbak voltak, mint a több évszázaddal később élt *Poszeidónioszé,* akinek a térképe alapján Kolumbusz hajózott. Poszeidóniosz hibás számításainak egyik oka az volt, hogy méréseit a *Canopus* csillag állására alapozta, mely *Rhodoszban* a horizonton, *Alexandriában* pedig 7,5 fokkal magasabban látszik. Számításainál azonban nem vette figyelembe a levegő fénytörését, ami pedig a horizonthoz közeli tárgyak észlelésénél a látószög jelentős eltérését is eredményezheti. További hibaforrást jelentett az alappontokul választott városok távolságának meghatározása. Mivel azokat tenger választja el, távolságukat nem közvetlen *méréssel,* hanem a hajóút megtételéhez szükséges időből és a hajó haladási sebességéből *számítások* útján határozta meg.

A trigonometria születése

A történet önkéntelenül is felveti a kérdést: hogyan született a szögek és távolságok kapcsolatának vizsgálatából a trigonometria?

A trigonometriát, mint a matematika számos új területét, a gyakorlat igénye szülte. A hajózás biztonságának növeléséhez szükség volt pontos földrajzi helymeghatározásra, ez pedig a különböző középponti szögekhez (illetve a megfelelő körívekhez) tartozó húr hosszának a pontos ismeretét követelte meg. Az első trigonometriai táblázatok húrtáblázatok voltak, és a kör húrja és a hozzátartozó középponti szög összetartozó értékeit tartalmazták. Adott sugarú körben egyenlő középponti szögekhez egyenlő ívek tartoznak, az ív arányos a hozzátartozó középponti szöggel.



6.2 ábra

A 6.2 ábrán az *O* középpontú kör *AB* ívéhez tartozó középponti szög 2α. Az *AB* húr és *OA*, illetve *OB* sugarak egyenlőszárú háromszöget zárnak be. Az *A*B húr a hozzátartozó ívvel, illetve a középponti szöggel változik, de ez a változás nem arányos az ívvel. Kétszer akkora ívhez nem kétszer akkora húr tartozik. A középponti szögeket, és a hozzájuk tartozó húr hosszának megfelelő értékeket tartalmazó felsorolások jelentik az első húrtáblázatokat.

A ma is használatos szögfüggvények a húrhoz tartozó középponti szög fele (α) és a hozzátartozó félhúr kapcsolatát fejezik ki. A 6.2 ábrán az *OC* sugár merőleges az *AB* húrra, és azt felezi. De *OC* felezi a húrhoz tartozó középponti szöget is, így az *AC* ívhez tartozó középponti szög α.

Mai jelölésnek megfelelően a húr felének, $\frac{h}{2}$-nek az r sugárhoz való viszonyát nevezik az α szög *szinuszának*:

$$\sin\alpha = \frac{h}{2r}, \quad \text{vagy} \quad h = 2r\sin\alpha.$$

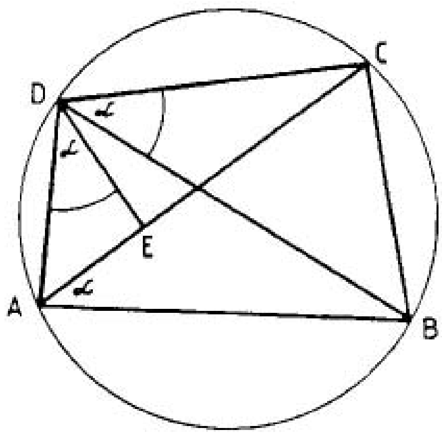
A szinusz (*sinus*) latin szó, eredetileg a szanszkrit *dzsja* arab megfelelőjének latin fordítása, és jelentése bemélyedés, öböl. Az elnevezés a középkorban arab csillagászok révén került Európába, és vált általánossá.

Az első, a középponti szögeket és a hozzájuk tartozó húr hosszát tartalmazó trigonometriai táblázatok már *Hipparkhosz* munkáiban is (i. e. II. sz.) megtalálhatók. Hipparkhosz nevéhez fűződik az első csillagkatalógus elkészítése, valamint a földrajzi helymeghatározásban alkalmazott hosszúsági és szélességi körök rendszerének, és ezzel a *sztereografikus projekció* térképészeti alkalmazásának megalapozása.

Hipparkhosz húrtáblázatát és az egyes értékek kiszámítási módját *Ptolemaiosz* görög matematikus és csillagász *Almagest* című munkájából ismerjük. A húrszámítás arra a Ptolemaioszról elnevezett tételre támaszkodik, mely szerint egy húrnégyszögben a szemközti oldalak szorzatának összege megegyezik az átlók szorzatával (6.3 *a* ábra).

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD.$$

A tétel bizonyítása a kerületi szögek tételén és a hasonlóságon nyugszik.



6.3 ábra

Jelölje a CAB, illetve BDC szögeket α, és húzzunk a D ponton át az AD oldallal α szöget bezáró egyenest, mely az AC átlót E pontban metszi. Ekkor az AED és BCD háromszögek hasonlóságából

$$AE : AD = BC : BD,$$

az EDC és DAB háromszögek hasonlósága alapján pedig

$$CE : CD = AB : BD.$$

Az aránypárokat szorzattá alakítva:

$$AE \cdot BD = AD \cdot BC \quad \text{és} \quad EC \cdot BD = AB \cdot CD.$$

Ha a megfelelő oldalakat összeadjuk, és BD-t kiemeljük, az

$$(AE + EC) \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC$$

összefüggést kapjuk, ami, tekintve, hogy $AE + EC = AC$, éppen a bizonyítandó tételnek felel meg.

Abban a speciális esetben, amikor az egyik átló a kör átmérője, a Ptolemaiosz-tételből a

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta$$

összegezési tétel már megkapható.

Hipparkhosz húrtáblázatait az ebből levezethető

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}$$

képlet alapján számította. A $0,5$ fokos középponti szöghöz tartozó húr hosszát a 720 oldalú szabályos sokszög segítségével határozta meg; húrtáblázata a szögfüggvények értékeit félfokonként tartalmazza.

Hipparkhosz a π értékét $\frac{377}{120}\approx 3,14166$ értékkel közelítette.

Az arab csillagászok trigonometria iránti érdeklődését a gyakorlati élet szükségletei motiválták. A középkorban élt arab *Naszreddin* (1201–1274) hatjegyű trigonometriai táblázata a szinusz értékeket már 1 percnyi szögváltozással tartalmazta. Számításait a 36°-os egyenlőszárú háromszögre vonatkozó, az aranymetszésnek megfelelő arányokra alapozta.

Az európai kontinensen megindult ez irányú vizsgálódások a gyakorlati alkalmazásokon túl az elméleti megalapozás irányába mutattak. *Luca Pacioli* „Summa de Aritmetica geometria proportioni et proportionalita” című 1494-ben megjelent munkájában a trigonometriát mint matematikai diszciplinát tárgyalja. A *Regiomontanus* néven ismert *Johannes Müller* 1461-ben megjelent „De triangulis omnimodus libri quinque” (öt könyv a mindenfajta háromszögekről) című munkájában már a trigonometria ma ismert összefüggéseinek zöme megtalálható. Regiomontanus szinusztáblázata 60000 fokig terjed, és benne a szinuszértékek 1 szögpercnyi intervallumonként szerepelnek.

Napjainkban a (hét jegy pontosságú) trigonometriai táblázatok a függvények sorfejtésén alapuló számítási módszerekkel készülnek. Így a $\sin x$ függvény az $x=0$ hely környezetében az

$$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots-\ldots$$

végtelen sor alakjában írható fel, melynek alapján a függvény értékei tetszőleges intervallumonként határozhatók meg. A fenti sor a $\sin x$ függvénynek az $x=0$ hely környezetében vett *Taylor* sora, illetve *Mac Lauren* sora. A megfelelő numerikus számításokat ma már elektronikus számítógépek segítségével végzik.

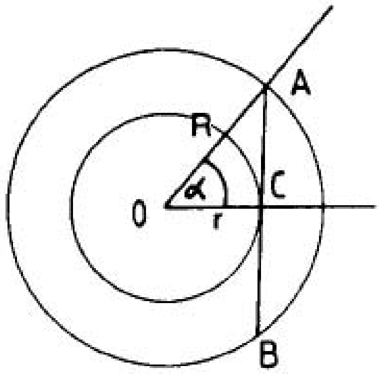
Az aranyszög

Aranyszögnek nevezik azt a szöget, melynek koszinusza az aranymetszés hányadosa:

$$\cos\alpha=0,618034\ldots$$

Az *arcuscosinus* $0,618034$ jelenti azt ívet, ill. a hozzátartozó α középponti szöget, melynek koszinusza $0,618034$. Az α szög értéke a táblázatok alapján: 51°49’43”.

Az aranyszög körzővel és vonalzóval való megszerkesztése visszavezethető az aranymetszet euklideszi szerkesztésére (6.4 ábra). Legyenek r és R az O középpontú koncentrikus körök sugarai és legyen r az R hosszúságú szakasz nagyobbik aranymetszete. Az AB húr legyen az r sugarú kör érintője, és C legyen az érintési pont. Ekkor az OAC derékszögű háromszögben az AB húr fele, $AC = R \cdot \sin\alpha$, és $\cos\alpha = \frac{r}{R} = h \approx 0{,}618034$.



6.4 ábra

Ismeretes, hogy a h aranymetszési hányadosra vonatkozóan fennáll a $h+1 = \frac{1}{h}$ összefüggés. A h helyébe $\cos\alpha$-t írva, az

$$1 + \cos\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$$

egyenletet kapjuk, (feltételezve, hogy $\cos\alpha \neq 0$), melynek mindkét oldalát $\cos\alpha$-val szorozva, a

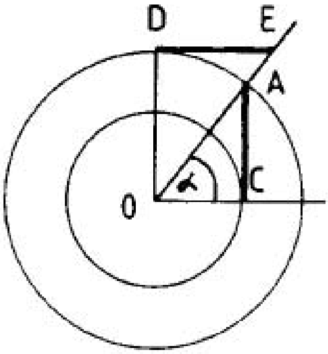
$$\cos^2\alpha + \cos\alpha = 1$$

egyenlethez jutunk. A $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ azonosság felhasználásával a $\cos\alpha = \sin^2\alpha$ alakot, majd mindkét oldalt $\sin\alpha$-val osztva ($\sin\alpha \neq 0$),

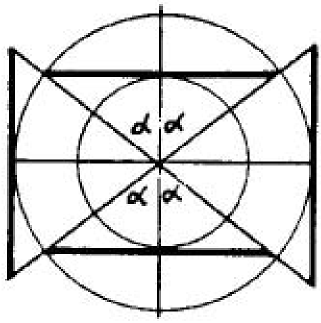
$$\operatorname{ctg}\alpha = \sin\alpha$$

összefüggést kapjuk, ahol $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ (6.5 ábra). Az egyenlet geometriai jelentése, hogy a belső körhöz annak C pontjában húzott CA érintőszakasz megegyezik a külső kör D pontbeli érintőjének az érintési pont és a szög szára közötti DE szakaszával.

A kapott összefüggés egyenes következménye, hogy az olyan két koncentrikus körből álló alakzatban, ahol a kisebb kör sugara a nagyobb sugarának aranymetszete (6.6 ábra), a kisebb sugarú kör érintője a nagyobb körből olyan hosszúságú húrt metsz ki, mint a nagyobb sugarú kör e húrokra merőleges érintőjének a szöget bezáró egyenesek közé eső szakasza.



6.5 ábra

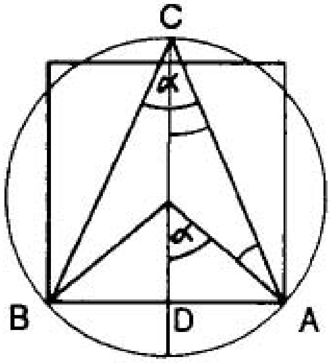


6.6 ábra

Az aranyszög jelképrendszere

Az aranyszög számos díszítő alakzaton felfedezhető. A középkor építészei, művészei az arány isteni eredetének megfelelően az aranymetszésnek és az aranyszögnek különös jelentőséget tulajdonítottak. Azok a szimbólumok, jelképek, melyek az Ég és a Föld viszonyára vonatkoznak, az aranymetszési arány hordozói.

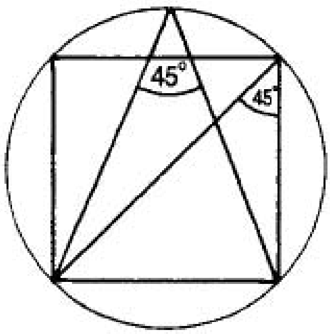
A középkorban általánosan elfogadott jelképrendszer szerint a kör az *égi,* a négyzet a *földi* dolgokat jelentette. Ezek egyensúlyát a körnek és annak a négyzetnek a viszonya fejezte ki (6.7 ábra), melyet a körbe írt olyan egyenlőszárú háromszög alapja fölé szerkesztették, melynek a csúcsnál levő szöge aranyszög. Az így kapott négyzet kerülete közelítően megegyezik a kör kerületével, amiről némi számolással könnyen meggyőződhetünk.



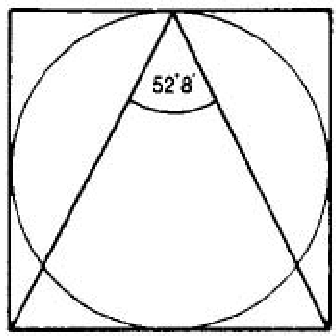
6.7 ábra

Ugyanis *AOD* szög az *OAC* egyenlőszárú háromszög külső szöge, így $AOD = \alpha$. A kör sugarát egységnyi hosszúságúnak választva $OD = \cos\alpha = 0,61803$, amiből $AD = \sqrt{1-0,61803^2} \approx 0,7862$, a négyzet kerülete pedig ennek nyolcszorosa, $K \approx 6,289$, ami a kör kerületének három tizedes pontossággal számított értékét $(6,283)$ két tizedes pontossággal közelíti.

Az olyan körbe írt egyenlőszárú háromszög, melynek alapja a körbe írt négyzet oldala, a *földi* dolgok *égieknek* való alárendelését fejezte ki (6.8 ábra), míg a négyzetbe írt kör és a négyzet oldala, mint alap fölé szerkesztett egyenlőszárú háromszög a földi dolgok előbbrevalóságát juttatta kifejezésre (6.9 ábra). Könnyen meggyőződhetünk róla, hogy míg az első esetben kapott egyenlőszárú háromszög csúcsnál levő szöge kisebb (45°), az utóbbiban nagyobb az aranyszögnél (52°08').

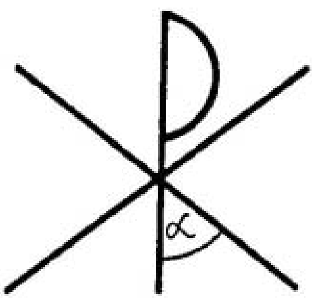


6.8 ábra

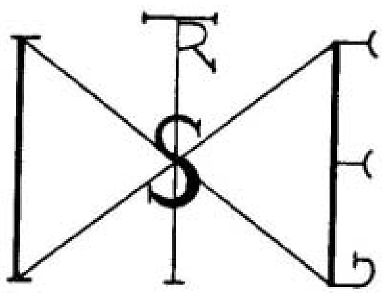


6.9 ábra

Az aranyszöggel számos egyéb, jelképet hordozó relikvián, emléken találkozunk. Aranyszöget zárnak be az ismert Krisztus-monogram X jelének szárai a P betű szárával (6.10 ábra), és aranyszöget fedezhetünk fel Szent István királyunk REX ST *(Rex Stephanus)* betűjeleket tartalmazó *ligatúrás* kézjegyén is (6.11 ábra).



6.10 ábra



6.11 ábra

7. A Fibonacci-sorozat

Az élő természet sorozatokkal leírható törvényszerűségei – A szakaszos növekedés matematikai leírása – A Fibonacci-sorozat származtatása, lényeges tulajdonságai, kapcsolata az aranymetszéssel – A Fibonacci-sorozat általánosítása

A Fibonacci-sorozat és az élő természet

Leonardo Pisano, ismertebb nevén *Fibonacci* (Bonaccio fia) kora matematikai ismereteit *Liber Abaci* címen ismert munkájában foglalta össze. A pizai Leonardo, a 12. és 13. század fordulóján élt matematikus egyike volt azoknak, akik a hinduktól származó, de az akkori világban arab közvetítéssel elterjedő tízes alapú, helyiértékes rendszerre épülő számírási módot Európában meghonosították.

Leonardo e híres munkájában található a következő probléma: Egy nyúlpár, mely először kéthónapos korában lesz szaporulatképes, havonta egy új nyúlpárnak ad életet. Az utódok első szaporulatára szintén két hónapot kell várni, de azután azok is hasonló ütemben hoznak létre újabb párokat. Hogyan alakul a nyúlpárok száma, ha mindegyikük életben marad?

A feladat megoldásában kövessük a nyúlpárok számának időbeli alakulását! Az első hónapban egy nyúlpárunk van, és ugyanannyi lesz a másodikban is; a párok száma csak a harmadik hónapban változik egyről kettőre. A következő hónapban a szülők újabb párnak adnak életet, így a párok száma háromra nő. Az ötödik hónapban azonban már az új pár is szaporulatképes, így az új párok száma már kettővel nő, és az összes párok száma ötre gyarapodik. A következő hónapban már mindkét ifjabb generáció hoz létre új párokat, és a párok száma hárommal növekedve nyolcra változik. Az egyes hónapokhoz tartozó nyúlpárok számát leíró

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ldots$$

számsor *Fibonacci-sorozat* néven vonult be a matematika történetébe. A sorozat előállításának alapja az a tulajdonság, mely szerint a harmadik elemtől (tagtól) kezdve bármely elem az előző kettő összege. A sorozat első két elemét azonban meg kell adni; ezek értéke a Fibonacci-sorozat esetén 1. A sorozat definíciója ennek megfelelően:

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 1, \quad \text{és} \quad a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \quad \text{ha} \quad n > 2.$$

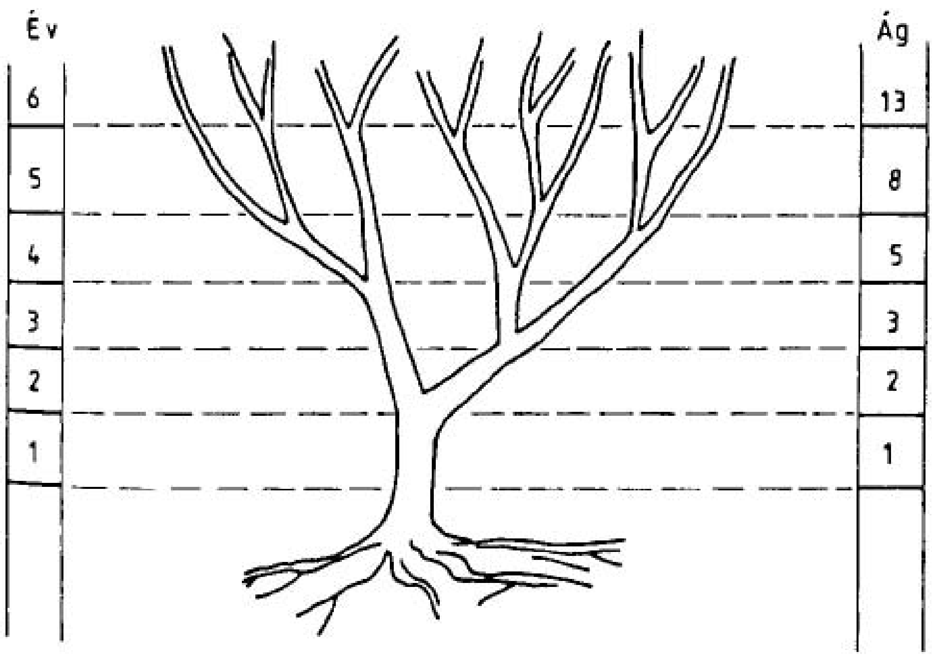
A sorozatok olyan előállítási módját, mely az újabb elemek képzését az előzőekre vezeti vissza, *rekurzív* eljárásnak nevezik.

A fák koronájának időbeli alakulása

Az előző növekedési modellhez hasonlóan Fibonacci-sorozattal írható le egyes fafajtáknál az ágak számának évenkénti alakulása is (7.1 ábra). Az első évben egyetlen hajtással számolhatunk, mely az idők folyamán majd törzzsé vastagodik. A második évben megjelenik az első oldalág, a főág pedig egy évet pihen, majd a harmadik évben hoz ismét új hajtást. Az első oldalág ugyanezt a sémát követi: egy esztendő múltán új ággal gyarapodik, majd egy évet pihen. A továbbiakban ez a folyamat ismétlődik. Az új hajtások egy esztendő múltán új hajtással jelentkeznek, majd egy évet kihagyva, folytatják az elágazást. Ha az egyes években már kihajtott ágakat összeszámoljuk, az

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ldots$$

sorozathoz jutunk. Ha a sorozat első eleme elé nulladik elemként még egy 1-es számot írunk, ami a növény szunnyadó állapotának felel meg, a már ismert Fibonacci-sorozatot kapjuk.



7.1 ábra

A Fibonacci-sorozat és az aranymetszés

A Fibonacci-sorozat szoros kapcsolatban van az aranymetszéssel. Az aranymetszés egy szakaszt oly módon oszt két részre, hogy a hosszabbik metszet mértani középarányos a rövidebb metszet és az egész szakasz között.

Jelölje a az aranymetszés szerint felosztandó szakaszt, és x a hosszabbik és $(a-x)$ a rövidebb aranymetszetet. Ekkor a következő összefüggést írhatjuk fel:

$$\frac{a-x}{x} = \frac{x}{a}.$$

Ha a baloldalon a kijelölt műveletet elvégezzük, átrendezés után a következő alakot kapjuk:

$$\frac{a}{x} = 1 + \frac{x}{a}.$$

Az $\frac{a}{x}$ értéket q-val jelölve, az egyenlet $q = 1 + \frac{1}{q}$ alakban írható.

Az aranymetszésnél tehát a rövidebb és a hosszabbik metszet, valamint a felosztandó szakasz olyan mértani sorozatot alkotnak, melynek hányadosa $\frac{a}{x} = q = 1{,}618\ldots$, ahol $\frac{1}{q} = h \approx 0{,}618\ldots$. Ezt az egyenletet kapcsolatba hozhatjuk a Fibonacci-sorozattal.

A fenti egyenlőség mindkét oldalát a_1q^k-nal szorozva, ahol a_1 tetszőleges zérustól különböző szám, az

$$a_1q^{k+1} = a_1q^k + a_1^{k-1}$$

egyenlőséget kapjuk, ami éppen azt jelenti, hogy a fenti q hányadossal képzett mértani sorozatokra igaz, hogy a harmadik elemtől kezdve bármely elem egyenlő az előző kettő összegével (lásd még 5. fejezet).

Ez utóbbi tulajdonsága azonban megvan a Fibonacci-sorozatnak is. Ugyanis a sorozat $(n+1)$-edik eleme (a harmadik elemtől) a következő módon állítható elő:

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1}.$$

Mindkét oldalt a_n-nel elosztva, az

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n}$$

egyenlethez jutunk.

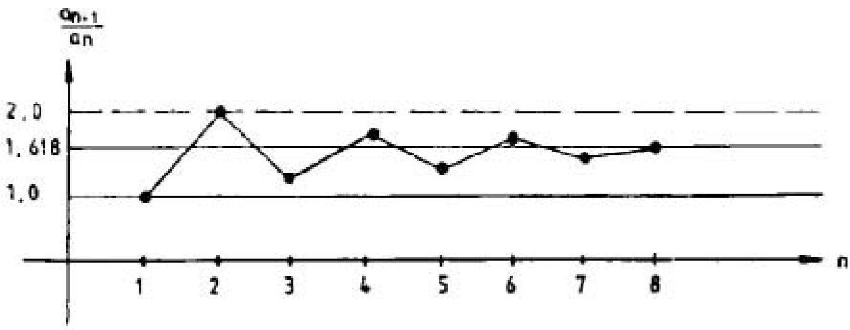
A kapott összefüggés formailag hasonló az aranymetszésnél kapott egyenlethez, és (a harmadik elemtől) alkalmas a sorozat előállítására:

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{1} + 1 &= \tfrac{2}{1} \\ \tfrac{1}{2} + 1 &= \tfrac{3}{2} \\ \tfrac{2}{3} + 1 &= \tfrac{5}{3} \\ \tfrac{3}{5} + 1 &= \tfrac{8}{5} \\ \tfrac{5}{8} + 1 &= \tfrac{13}{8} \end{aligned}$$

és így tovább.

A kapott összefüggés akkor egyezne meg az aranymetszési egyenlettel, ha a Fibonacci-sorozat egymást követő elemeinek hányadosa ugyanaz az érték lenne, vagyis az elemek geometriai sorozatot alkotnának.

A Fibonacci-sorozat elemei azonban nem alkotnak mértani sorozatot, az egymást követő elemek hányadosa nem állandó, ami különösen jól látható alacsony sorszámok esetén. Az elemek számának növelésével azonban ez a hányados egy állandó számhoz, az aranymetszéssel kapott hosszabbik szakasznak a rövidebbhez való arányához közelít. A közelítés kétoldali: két egymást követő elem hányadosa nagyobb, illetve kisebb, mint a közrefogott arányszám (7.2 ábra).



7.2 ábra

Írjuk fel a Fibonacci-sorozat elemeit, és vizsgáljuk a két egymást követő tag hányadosának alakulását!

n	a_n	$\frac{a_{n+1}}{a_n}$
1	1	$\frac{1}{1} = 1$
2	1	$\frac{2}{1} = 2$
3	2	$\frac{3}{2} = 1,5$
4	3	$\frac{5}{3} = 1,667$
5	5	$\frac{8}{5} = 1,6$
6	8	$\frac{13}{8} = 1,625$
7	13	$\frac{21}{13} = 1,615$
8	21	$\frac{34}{21} = 1,619$
9	34	$\frac{55}{34} = 1,617$
10	55	$\frac{89}{55} = 1,618$

Ez a kétoldali közelítés más módon is világossá tehető. Ismeretes a mértani sorozatnak az a tulajdonsága, hogy a második tagtól kezdve bármely elem az előtte levő, és őt követő elem mértani középarányosa. Ez másképpen fogalmazva azt jelenti, hogy a középső elem négyzete a vele közvetlenül szomszédos elemek szorzatával egyenlő. A Fibonacci-sorozat elemeire vonatkozóan ez a tulajdonság azzal a módosítással érvényesül, hogy a sorozat bármely elemének a négyzete (a másodiktól kezdve) a szomszédos elemek szorzatánál eggyel kisebb vagy eggyel nagyobb. Az elemek négyzetei és a szomszédos tagok szorzatai a következő táblázatról leolvashatók:

n	a_n	$q = a_n^2$	$p = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$	$q - p$
1	1	1		
2	1	1	$1 \cdot 2 = 2$	$1 - 2 = -1$
3	2	4	$1 \cdot 3 = 3$	$4 - 3 = +1$
4	3	9	$2 \cdot 5 = 10$	$9 - 10 = -1$
5	5	25	$3 \cdot 8 = 24$	$25 - 24 = +1$
6	8	64	$5 \cdot 13 = 65$	$64 - 65 = -1$

Általánosan: az $a_n^2 - a_{n-1} \cdot a_{n+1}$ különbség -1, illetve $+1$ lesz annak megfelelően, hogy n páros vagy páratlan.

A Fibonacci-sorozat egy másik érdekes tulajdonsága a sorozat első n tagjának összegéből alkotott sorozatra vonatkozik. Könnyen igazolható, hogy ha a_n jelöli a sorozat n-edik elemét, és S_n az első n elem összegét, akkor mindig fennáll a következő összefüggés:

$$S_n + 1 = a_{n+2}.$$

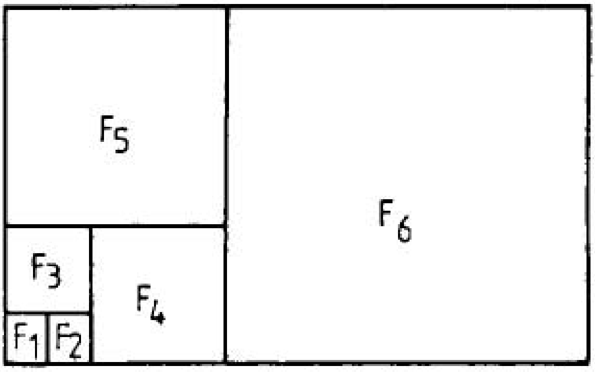
A Fibonacci-négyzetek

Azokat a négyzeteket, melyek oldalainak mérőszámai a Fibonacci-sorozat elemei, *Fibonacci-négyzeteknek* nevezik. Az első n négyzet egymáshoz illesztésével olyan téglalapokat kapunk, melyek oldalhosszai megegyeznek az n-edik és $(n+1)$-edik négyzet oldalának hosszával. Ha F_n jelenti magát az n-edik négyzetet, S_n az első n négyzet területének összegét, és f_n az n-nedik négyzet oldalának hosszát, akkor ezek között a következő összefüggés áll fenn:

$$S_n = f_n \cdot f_{n+1}.$$

Az összefüggés helyessége a négyzetek illesztésével a következő módon látható be (7.3 ábra): Vegyünk két egységnyi oldalhosszúságú négyzetet, (F_1 és F_2), és ezek fölött helyezzük el a 2 egységnyi odalhosszúságú F_3 négyzetet. Az így kapott alakzathoz illesszünk (jobbról) olyan négyzetet, melynek odalhossza megegyezik az előző két négyzet oldalának összegével (F_4). Az így kapott téglalap fölé illesszük az F_5, majd ezekhez ismét jobbról az F_6 négyzetet, és így tovább.

Az első két négyzet olyan téglalapot határoz meg, melyben az oldalak hosszúsága 1 és 2, vagyis amennyi az előző két négyzet oldalainak hossza. Az első három négyzet területösszege S_3, olyan téglalapot határoz meg, melynek oldalai 2 és 3, és ezek éppen az F_3 és F_4 négyzetek oldalhosszaival egyeznek meg. Az összefüggés helyessége, mely a Fibonacci-sorozat tulajdonságából következik, az ábráról is leolvasható.



7.3 ábra

A Fibonacci-sorozat általánosítása

A Fibonacci-sorozat többféle módon is általánosítható. Az általánosítás egyik módja olyan – *Fibonacci-típusú* – sorozatok előállítása, melyeknél a rekurzivitási tulajdonságot változatlanul hagyva, a sorozat első két elemét más értékekkel definiáljuk. Ilyen módosított sorozat például a következő:

$$L_1 = 1, \quad L_2 = 3, \quad \text{és} \quad L_n = L_{n-1} + L_{n-2}, \quad \text{ha} \quad n > 2.$$

Az így kapott *Lucas*-sorozat elemei:

$$1, \ 3, \ 4, \ 7, \ 11, \ 18, \ 29, \ldots$$

Megmutatható, hogy ennek a sorozatnak is megvan az a tulajdonsága, hogy két egymást követő elem (tag) hányadosa a tagok számának növelésével egy állandó számhoz tart, és ez az aranymetszési hányados.

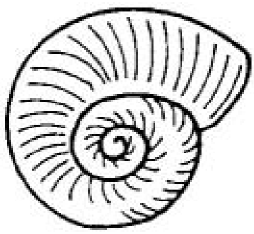
Az általánosítás egy másik módja a rekurzív tulajdonság megváltoztatása. Ha a sorozat elemeit nem az azt megelőző kettő, hanem n számú elemének összegével definiáljuk, n-edrendű Fibonacci-sorozatat kapunk. A sorozat első $n-1$ elemét természetesen itt is meg kell adni. Az új sorozatokat ezek megválasztása, és a rekurzivitási tulajdonság együtt határozzák meg.

8. Arányok és spirálok

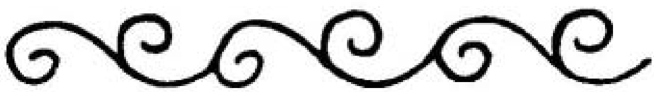
Csigavonalak és spirálgörbék – Az arányosan növekedő sugarú és a logaritmikus spirál – A logaritmikus spirál és az aranymetszés – Különleges csigaházak – A logaritmikus spirál érintőjének iránytartó tulajdonsága – Az ortodroma és loxodroma szerepe a tengeri és légi navigációban

A csigavonal

Csigavonallal gyakran találkozunk mind a természetben, mind pedig a technikai környezetünkben. A szárazföldi és tengeri csigák mészházainak felépítése csigavonalat követ: a *csigavonal* elnevezés is erre utal (8.1 ábra). Egyes növények levelei térbeli csigavonal mentén rendeződnek el.



8.1 ábra



8.2 ábra

Csigavonalat kapunk, ha a síkban körözö mozgással olyan vonalat rajzolunk, melynek egy kiinduló ponttól való távolsága változó. A térbeli csigavonal térbeli tengely körüli körirányú mozgással származtatható.

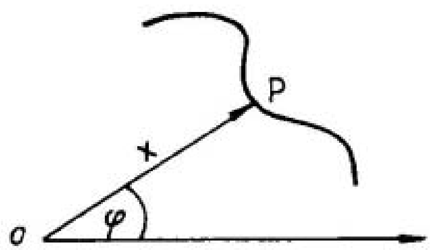
A henger vagy kúp palástjára írt térbeli csavarvonal a műszaki gyakorlati élet számos területén jut szerephez. A fa- és fémcsavarok, a csavarorsó különböző változatai mindennapi életünk szinte nélkülözhetetlen kellékei. A csigalépcső korlátjának határoló vonalai szintén térbeli csigavonalat írnak le. A spirálrugók a golyóstolltól a gépkocsiig számos technikai eszköz tartozékai.

A csigavonalat díszítőelemként már ősidőktől kezdve szinte minden korban alkalmazták. Felfűzött csigákból álló nyakláncokkal az őskortól napjainkig találkozhatunk. A csigavonal megtalálható a görög oszlopfők mintázatain csakúgy, mint mindennapi használati tárgyainkon, vagy a mai művészeti alkotásokon. A 8.2 ábrán kelta eredetű, indát utánozó spirális motívum (tendril) látható.

A csiga, mint jelkép a lassúságot, megfontoltságot jelképezi, de jelképe a lustaságnak is.

A síkbeli spirálgörbék matematikai leírása

A síkbeli csavarvonalak vagy spirálok olyan koordinátarendszerben írhatók le egyszerűen, melyben a mozgó pont helyzete annak egy kezdőponttól *(pólustól)* mért távolságával és az elfordulás szögével *(polárszög)* jellemezhető. Ilyen a *poláris koordinátarendszer* (8.3 ábra).



8.3 ábra

Legyen a polár-koordinátarendszer kezdőpontja O, a mozgó pont, melynek pályáját leírjuk, P. Az OP távolságot jelölje r *(rádiusz vektor)*, és ennek egy megadott iránnyal bezárt szöge legyen φ. Az r rádiusz vektor hossza és a φ polárszög a P pont helyzetét egyértelműen meghatározzák: ezek a P pont *polárkoordinátái.* Az r és φ közötti összefüggés a pont által leírt görbe *polárkoordinátás egyenlete.*

Valamely P pont polárkoordinátái és derékszögű koordináti között az

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \ \text{továbbá az} \ x^2 + y^2 = r^2$$

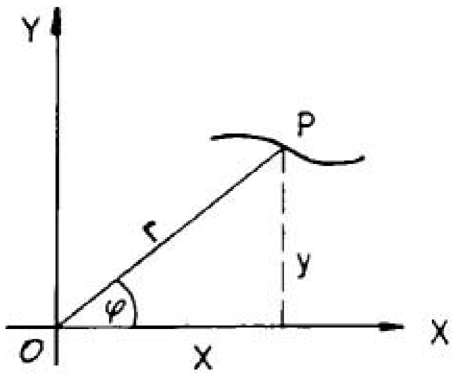
egyenletek teremtik meg a kapcsolatot (8.4 ábra).

Az arányosan növekvő sugarú spirál

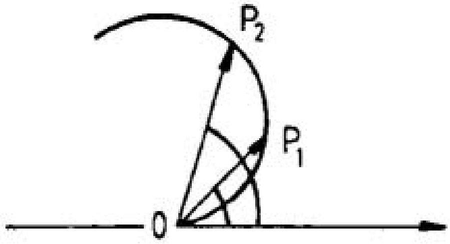
A legegyszerűbb szabályos csigavonal vagy spirál leírásával már *Arkhimedész* munkáiban is találkozunk. Az *arkhimedészi spirál* jellemzője, hogy a spirált leíró P pontnak a kezdőponttól való távolsága arányos az elfordulás szögével (8.5 ábra). Az elfordulási szöget ívmértékben mérve ($\pi = 180°$), az archimedészi spirál polárkoordinátás egyenlete:

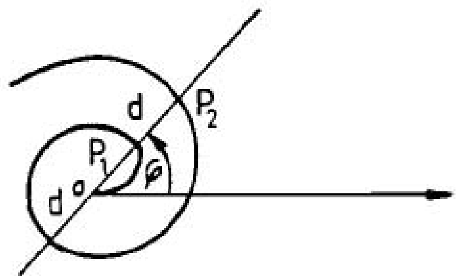
$$r = k\varphi, \ \text{ahol} \ (\varphi \geq 0),$$

és k egy állandó szám.



8.4 ábra





8.5 ábra

8.6 ábra

Az arkhimedészi spirál fenti tulajdonságából következik, hogy két egymást követő ív közötti távolság nem változik: az arkhimedészi spirál állandó szélességű csigavonal. Ezt könnyen beláthatjuk a következő módon: Legyenek P_1 és P_2 a spirál két egymást követő ívének egy, a spirál középpontján átmenő tetszőleges egyenessel való metszéspontjai (8.6 ábra). Legyen

a P_1 ponthoz tartozó polárszög φ_1,

a P_2 ponthoz tartozó pedig $\varphi_2 = \varphi_1 + 2\pi$,

a két pont távolsága, $OP_2 - OP_1 = r_2 - r_1$.

Mivel $r_1 = k\varphi_1$, és $r_2 = k\varphi_2 = k(\varphi_1 + 2\pi)$,

$$r_2 - r_1 = k\varphi_2 - k\varphi_1 = k(\varphi_1 + 2\pi - \varphi_1) = 2k\pi = d.$$

Lévén k és π állandók, a két pont távolságának különbsége is állandó érték. Az az r és φ értékek között egyenes arányosság áll fenn. Ha az összetartozó r és φ értékeket derékszögű koordinátarendszerben ábrázolnánk, a „kiegyenesített” spirál képe az origón átmenő egyenes lenne.

Gyakorlatilag arkhimedészi spirálhoz jutunk állandó vastagságú zsinór, kötél vagy egyéb anyagok (szőnyeg) feltekerésével. Arkhimedészi spirált ír le a lemezjátszó tűje, és ilyen spirált alkotnak a hanglemez barázdái is.

A logaritmikus spirál

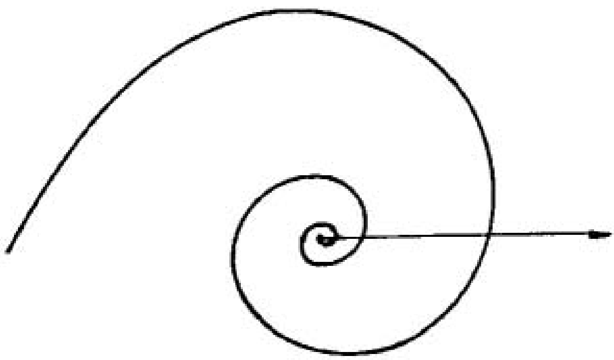
Megfigyelhetjük, hogy a csigák mészháza alkotta csigavonal két egymást követő íve között a távolság állandóan növekszik. Ha ez a növekedés arányos az elfordulás szögével, a csigavonalon mozgó pont középponttól való távolsága exponenciális függvény szerint nő. Az így keletkezett görbe neve *logaritmikus spirál* (8.7 ábra). A sugár hossza és az elfordulás szöge közötti kapcsolat az

$$r = Aa^{k\varphi}$$

egyenlettel írható le. Ha az $A = 1$ érték mellett (amit az egység alkalmas megválasztásával mindig elérhetünk) az egyenlőség mindkét oldalának a logaritmusát vesszük, a

$$\log_a r = k\varphi$$

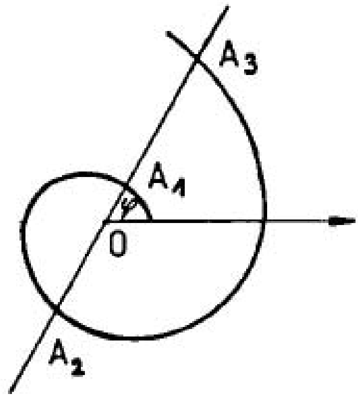
egyenletet kapjuk, ami azt fejezi ki, hogy a csigavonalon mozgó pont középponttól való távolságának a *logaritmusa* arányos az elfordulás szögével. Ez indokolja a logaritmikus spirál elnevezést.



8.7 ábra

A logaritmikus spirál kezdőpontján átmenő bármely egyenes a spirált több pontban metszi. Az egymást követő ívekhez tartozó metszéspontok kezdőponttól való távolságai mértani sorozatot alkotnak (8.8 ábra). Ugyanis, ha

$$\begin{aligned}
OA_1 &= r_1 = a^{k\varphi}, \\
OA_2 &= r_2 = a^{k(\varphi+\pi)} = a^{k\varphi} \cdot a^{k\pi}, \\
OA_3 &= r_3 = a^{k(\varphi+2\pi)} = a^{k\varphi} \cdot a^{k2\pi}, \\
&\dots \\
OA_n &= r_n = a^{k[\varphi+(n-1)\pi]} = a^{k\varphi} \cdot a^{k(n-1)\pi}.
\end{aligned}$$



8.8 ábra

Bevezetve az $a^{k\pi} = q$ jelölést, és figyelembe véve, hogy $a^{k\varphi} = r_1$,

$$r_2 = r_1 \cdot q, \;\; r_3 = r_1 \cdot q^2, \ldots, r_n = r_1 \cdot q^{n-1},$$

ami éppen a fenti állítást igazolja.

A fenti tétel általánosabban is fogalmazható: a logaritmikus spirál ugyanolyan értékkel növelt elfordulásaihoz tartozó pontjainak a középponttól mért távolságai (a rádiusz vektorok hosszai) mértani sorozatot alkotnak.

A logaritmikus spirál egyes pontjainak szerkesztése

A logaritmikus spirál egyes pontjait *euklideszi értelemben* vett elemi geometriai módszerekkel a következő módon szerkeszthetjük meg:

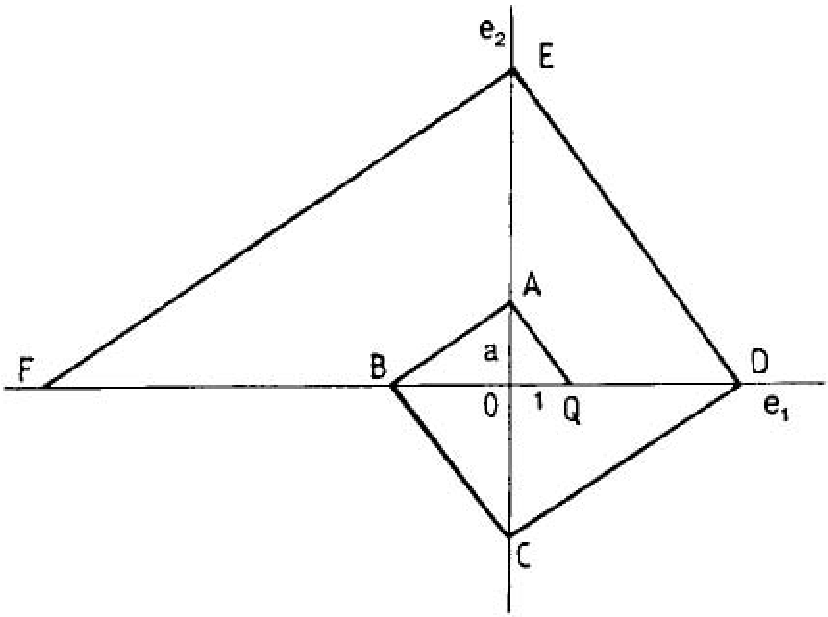
Vegyünk fel két, egymásra merőleges egyenest (e_1 és e_2), és jelölje ezek metszéspontját O (8.9 ábra). Tekintsük az e_1 egyenes Q pontjának a metszésponttól való OQ távolságát egységnek. Mérjünk fel az e_2 egyenesen az O pontból kiindulva tetszőleges, az OQ szakasznál nagyobb a távolságot, melynek másik végpontja legyen A.

Szerkesszünk az A ponton keresztülmenő AQ egyenesre merőleges egyenest, mely e_1-et annak B pontjában metszi. Mivel a QAB derékszögű háromszög magassága OA, és ez mértani közép az átfogó metszetei között, az OB szakasz hossza a^2.

Ha most a B ponton át az AB egyenesre merőlegest szerkesztünk, ez C pontban metszi az e_2 egyenest. Azonban az ABC háromszög is derékszögű, melyben OB szakasz az átfogóhoz tartozó magasság, $OA = a$. Mivel a derékszögű háromszögben a magasság mértani közép az átfogó metszetei között,

$$OB = a^2 = \sqrt{OA \cdot OC}, \quad \text{következik, hogy} \quad OC = a^3.$$

A C ponton átmenő, BC egyenesre merőleges egyenes e_1-et D pontban metszi; az előzőhöz hasonló meggondolásból következik, hogy AD szakasz hossza a^4 távolságnak



8.9 ábra

felel meg. Ha az eljárást folytatjuk, az OQ, OA, OB, OC, $OD, \ldots$ szakaszokhoz jutunk, melyek ($a > 1$ esetén) növekedő geometriai sorozatot alkotnak. A sorozat első eleme az egység, hányadosa a. A sorozat elemei: $1;\ a;\ a^2;\ a^3; \ldots ; a^n$

Az így szerkesztett pontok, a sorozat elemei azonban éppen az $r = a^{k\varphi}$ alakban felírt logaritmikus spirál $k = \frac{2}{\pi}$ és

$$\varphi = 0,\ \frac{\pi}{2},\ \frac{2\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2}, \ldots, \frac{n\pi}{2} \ldots$$

értékeihez tartozó pontjainak felelnek meg.

Az e_1 egyenesesen kapott OQ, OB, OD, $OF, \ldots$ szakaszok szintén geometriai sorozatot alkotnak: a sorozat első eleme itt is a választott egység, de hányadosa nem a, hanem a^2. Az így nyert $1,\ a^2,\ a^4,\ a^6, \ldots$ geometriai sorozat elemei a fenti alakban adott logaritmikus spirál

$$\varphi = 0,\ \pi,\ 2\pi,\ 3\pi, \ldots n\pi$$

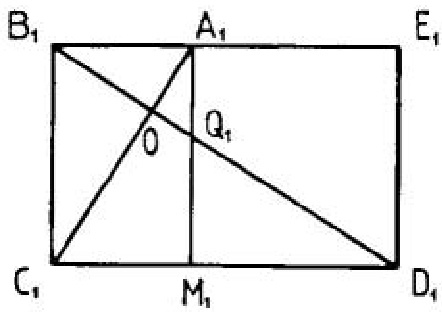
értékeihez tartó pontoknak felelnek meg.

A negatív forgási irányú, vagy *reciprok spirál* a tengelyekből olyan szakaszokat metsz ki, melyek csökkenő geometriai sorozatot alkotnak. Könnyen belátható, hogy egy ily módon kapott sorozat hányadosa a pozitív forgással kapott megfelelő sorozat hányadosának reciproka lesz.

A logaritmikus spirál és a téglalap

A logaritmikus spirál két, egymásra merőleges egyenessel alkotott metszéspontjait más módon is megszerkeszthetjük. Induljunk ki egy olyan téglalapból, melyben az oldalak aránya megegyezik a spirál egyenletében szereplő exponenciális függvény alapjával.

Legyenek a téglalap csúcsai $B_1C_1D_1E_1$ (8.10 ábra), és az oldalak aránya: $C_1D_1 : B_1C_1 = a$. Szerkesszük meg a B_1D_1 átlót, majd szerkesszünk a C_1 csúcson át erre merőleges egyenest; ez a B_1E_1 oldalt A_1 pontban metszi. Az A_1 ponton átmenő, C_1D_1 egyenesre merőleges egyenes a B_1D_1 tengelyből kimetszi Q_1 pontot. Az eljárást az ezen a ponton átmenő C_1D_1 egyenes megszerkesztésével folytathatjuk; ezzel a szerkesztést az előzőekben megadott szerkesztési algoritmusra vezettük vissza.



8.10 ábra

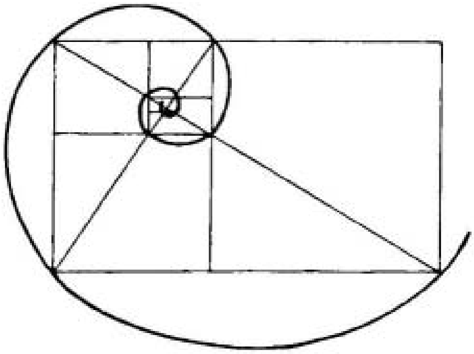
A szerkesztés arra épül, hogy a B_1D_1 és A_1C_1 egyeneseket az előző ábrák e_1 és e_2 egyeneseinek (a tengelyeknek) feleltetjük meg. A további pontokat a kapott téglalapok oldalainak a meghosszabbításával nyert egyenesek megfelelő tengellyel való metszéspontjai adják.

A kapott $Q_1, A_1, B_1, C_1, D_1, \ldots$ pontok az a, ill. $\frac{1}{a}$ aránnyal (hányadossal) jellemezhető logaritmikus spirál B_1D_1, illeive A_1C_1 tengelyekkel való metszéspontjai aszerint, hogy azokat növekedő vagy csökkenő sorozat elemeinek tekintve a szerkesztéssel belülről kifelé, vagy kívülről befelé haladunk. Ez a szerkesztési eljárás különösen olyan esetekben előnyös, amikor kívülről befelé haladva, a görbe pontjainak csökkenő sorozatát kívánjuk előállítani.

Abban a speciális esetben, amikor a téglalapokból lemetszett megmaradó téglalapok $(A_1M_1D_1E_1)$ történetesen négyzetek, a téglalapok oldalainak aránya éppen az aranymetszési arány: $q \approx 1,618\ldots$ (8.11 ábra). Ezt belátandó, jelöljük a téglalap hosszabb oldalát a-val, a rövidebb oldalt, amely egyúttal a négyzet oldala is, x-szel. A megfelelő háromszögek hasonlóságából

$$a : x = x : (a - x),$$

ami éppen azt fejezi ki, hogy a rövidebb oldal a hosszabbnak aranymetszete.



8.11 ábra

A logaritmikus spirál és az aranymetszés

Ha a logaritmikus spirált leíró

$$r = a^{k\varphi}$$

exponenciális egyenletben az exponenciális függvény alapja $a = q = \frac{1}{h}$, az aranymetszési növekedési arány, a spirál (elméleti) középpontja bármely rajta átmenő egyenesnek a spirálkarokkal alkotott két átellenes metszéspontja közötti távolságát az aranymetszésnek megfelelő arányban osztja. A 8.8 ábrának megfelelő jelöléssel

$$OA_2^2 = A_2A_1 \cdot OA_1.$$

Ez következik abból, hogy a logaritmikus spirál olyan egymást követő pontjai, melyek egymástól π szögelfordulással különböznek, mértani sorozatot alkotnak. Ha a sorozat hányadosa q, az aranymetszési növekedési arány, akkor fennáll a

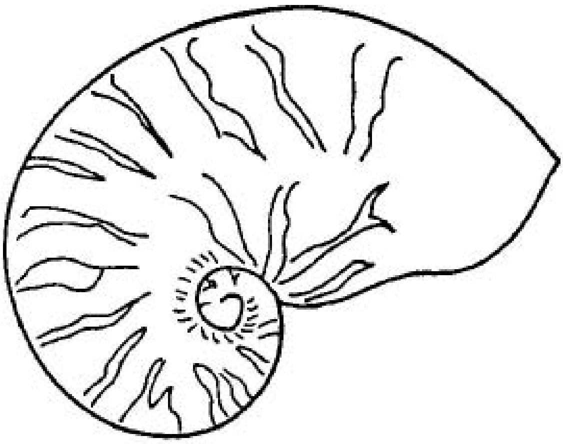
$$q^2 = q + 1$$

egyenlőség is, ami éppen a fenti tulajdonságot fejezi ki.

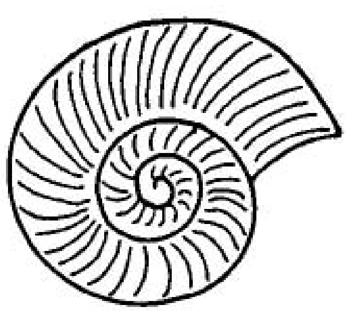
A csigák mészházának felépítésére általában logaritmikus spirálnak megfelelő alak jellemző. Egyes csigafajoknál az aranymetszésnek megfelelő arány nagy pontossággal jelentkezik. A közönséges éti csiga legtöbb egyedénél jól megfigyelhető, hogy az aranymetszési tendencia közelítően érvényesül. A szabályostól való eltérések egyedi fejlődési körülményekkel magyarázhatók.

Különleges helyet foglalnak el ebből a szempontból a lábasfejűek (*ammoniteszek*) egyik csoportjához tartozó, az őskori fejlődési fokon megrekedt *nautilusz-félék*. A 8.12 *a* ábra ma is élő nautilusz mészvázát mutatja. A 8.12 *b* ábrán a *Devon-korban* élt ammonitesz lenyomata látható.

A logaritmikus spirálnak megfelelő alakzatok megjelenése nem tekinthető véletlennek: ebben a természet bővített újratermelési tendenciája, önmagához hasonló alakzat létrehozására irányuló önreprodukciós törekvése jut kifejezésre.



8.12 *a* ábra

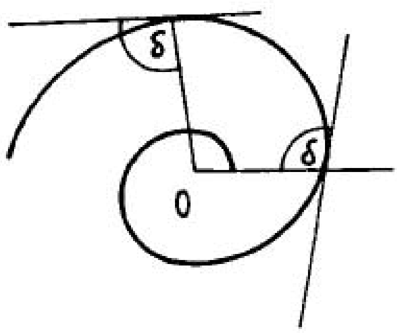


8.12 *b* ábra

A logaritmikus spirál érintője

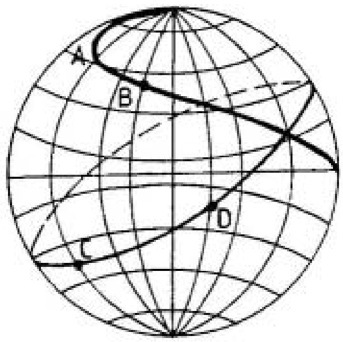
A logaritmikus spirál egyik jellemző tulajdonsága, hogy bármely pontjához húzunk érintőt, ez az érintési ponthoz tartozó sugárral mindig ugyanolyan nagyságú szöget zár be. Igaz ennek megfordítása is: ha valamely pontból kiindulva olyan vonalat rajzolunk, melynek érintője a kezdőponttól a vonalhoz húzott sugárral állandó nagyságú szöget zár be, a leírt görbe logaritmikus spirál lesz (8.13 ábra).

Ez a tény nagy mértékben hasznosítható a tengeri és légi navigációban. Az a jármű, mely a Föld felületén állandó irányt tartva halad, tehát haladási iránya a délkörökkel mindig azonos szöget zár be, egy sajátos térbeli görbén, *loxodromán* mozog. A 8.14 ábra *A* és *B* pontjait *loxodroma* köti össze. A Föld két pontját összekötő legrövidebb távolság ezzel



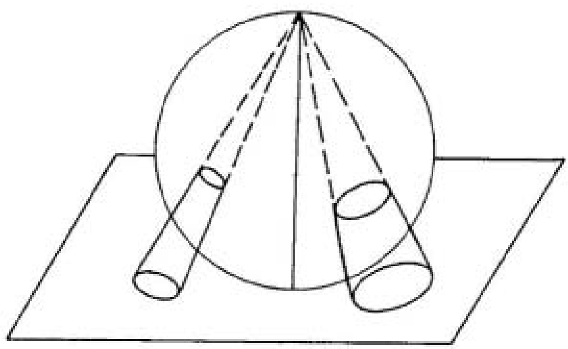
8.13 ábra

szemben a főkör két pontját összekötő vonalon fekszik: ez az *ortodroma.* A 8.14 ábrán a C és D pontok ortodromán fekszenek.



8.14 ábra

A térképek készítésénél a gömbfelület pontjait általában síkon ábrázolják. A gömb síkra való leképezésének egyik módja a *sztereografikus projekció.* Ennél a leképezésnél a gömbalakúnak tekintett Föld pontjait az egyik *pólusból* a másik pólushoz illesztett érintősíkra vetítik (8.15 ábra). Az ily módon létrejött leképezés szögtartó: a gömbfelület két egyenese által bezárt szög a vetületben is ugyanolyan nagyságú marad.



8.15 ábra

A loxodroma sztereografikus projekcióval kapott vetülete logaritmikus spirál, az ortodromáé körív. A sztereografikus projekcióban a délkörök képei egy pontból kiinduló sugarak, a szélességi körök képe koncentrikus körsor. A loxodroma képe, – mivel ennek a sugarakkal alkotott szöge állandó, és a sztereografikus projekció szögtartó leképezés, – logaritmikus spirál.

9. Nevezetes arányok az élő természetben

Fibonacci-számok és a növények leveleinek elhelyezkedése – A levélállás (fillotaxis) és a spirális levélelrendezés törvénye – A magok elhelyezkedése a napraforgó tányérján és a fenyők tobozán – A növekedés egy általános modellje – Elméletek és hipotézisek a fillotaxis magyarázatára – Aranymetszés a sejtnövekedés szintjén

A levelek száma és elrendezése

Már a múlt század botanikusainak is felkeltette az érdeklődését az a szabályosság, mely egyes növények leveleinek a száron való elhelyezkedésében figyelhető meg. Ugyancsak szabályosságot találunk egyes növények csoportosan megjelenő termésénél a magok, némely virágnál a szirmok elhelyezkedésében is.

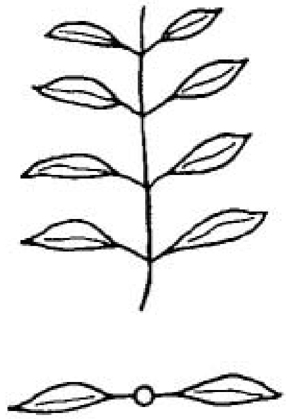
A száras növények egy részénél a levelek párosan jelennek meg: az egymás feletti levélpárok tengelyei vagy ugyanabban a síkban helyezkednek el, vagy egymásra merőlegesek (9.1 ábra *a*, ill. *b*). Ezt az elrendezést *szimmetrikus levélállásnak* is nevezik.

A levelek olyan elrendezését, amikor azok a levélszáron nem párosával helyezkednek el, *szórt állású* vagy *spirális* levélelrendezésnek mondjuk. Az ilyen levelek, rügyek, ágak geometriai elhelyezkedésében a Fibonacci-sorozathoz tartozó számoknak meghatározó szerepük van.

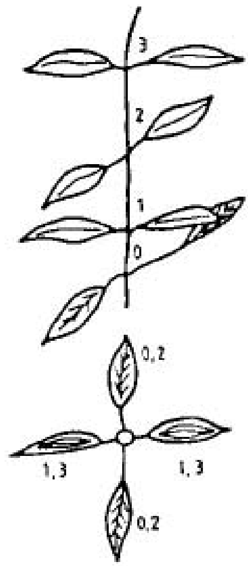
Megfigyelhető, hogy szórt levélállás esetén a levelek a száron spirális mentén helyezkednek el, és az egymást követő levélszárak iránya egymáshoz képest közel azonos szögelfordulást mutat.

Válasszunk ki egy, a tőhöz közeli levelet, és rendeljük hozzá a 0 sorszámot. Ha a felette levő leveleket is rendre sorszámmal látjuk el, akkor azoknak a leveleknek a sorszámai, amelyek a kiválasztott levél felett helyezkednek el, éppen a Fibonacci-sorozat elemeit adják.

Ha azt is megszámoljuk, hogy az elsőnek tekintett 0 sorszámú levéltől a vele először fedésbe kerülő levélig hány teljes fordulattal jutunk, újabb Fibonacci-számot kapunk. A jelenség érdekessége, hogy mindkét irányú körüljárás Fibonacci-számhoz vezet. Ugyanahhoz a levélhez ellenkező irányú körüljárással két teljes fordulattal jutunk.



9.1 *a* ábra



9.1 *b* ábra

Ha a felülről nézve az óramutató járásával ellenkező irányú forgással kapott fordulatok számát m-mel, a 0 sorszámú levél utáni, azzal először fedésbe kerülő levél sorszámát n-nel jelöljük, a levélelrendezés az m/n törtszámmal jellemezhető, ahol m és n is Fibonacci-számok.

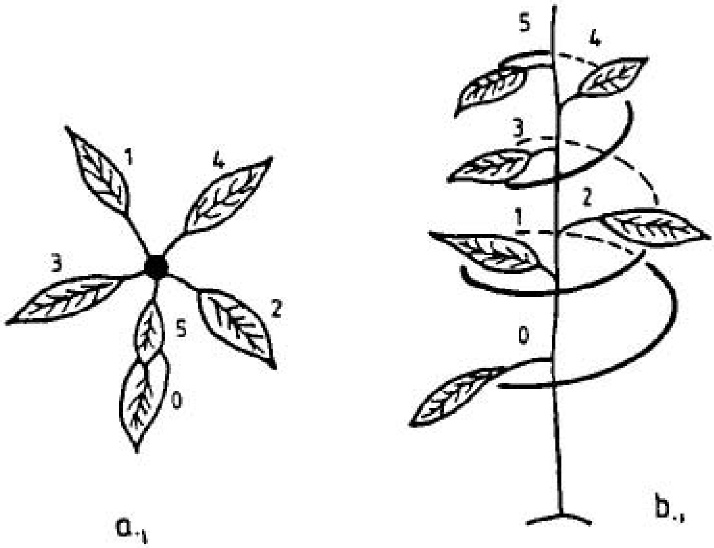
A 9.2 ábrán az ötödik levél kerül először fedésbe a 0 sorszámúval, és ehhez az óramutató járásával ellenkező (pozitív) forgási irányban éppen három fordulat szükséges. A levelek itt $3/5$ spirált alkotnak. A 9.2 *a* ábra ezt az elrendezést felülnézetben mutatja.

Ha az elrendezésben minden második levél kerül fedésbe (kétsoros levélállás), $n = 2$ lesz, és mivel két levél egyetlen körülforgással hozható fedésbe, $m = 1$. A levelek itt $1/2$ spirált alkotnak (9.3 ábra).

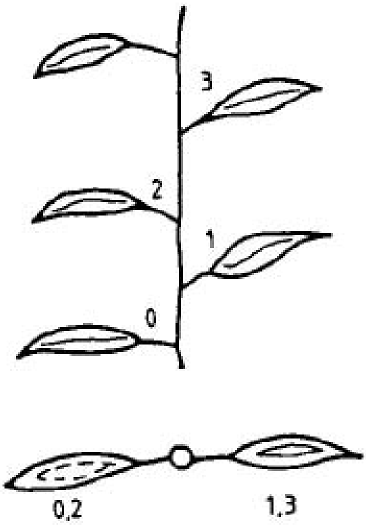
Az elrendezésekhez tartozó m/n arányok az m, ill. n számok növekedésével a jól ismert aranymetszési hányadoshoz, a $h \approx 0,618$ értékhez közelítenek. Ha a $3/5$ spirál esetén a forgási irányt az óra járásával megegyező irányúnak tekintjük (pozitív forgási irány), az ötödik levél fedéséig két fordulattal jutunk. A fenti arány ez esetben $2/5$, ami az aranymetszés kisebbik szakaszának az egész távolsághoz való viszonyához közelít.

A levéltengelyek iránya

Mekkora szöget zárnak be egymással az egyes levelek tengelyei? Az $1/2$ spirál esetén a két egymás fölött elhelyezkedő levél (az 1-es és a 3-as számú) között egy teljes fordu-



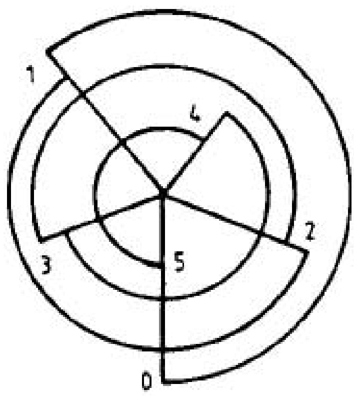
9.2 ábra



9.3 ábra

latnak megfelelően 360°-os a szögelfordulás. A közöttük lévő 1-es számú levél mindkét szomszédjával 180°-os szöget zár be.

A $3/5$ spirált alkotó elrendezésnél az ötödik levélig 3 teljes fordulatot kell megtenni, ami 1080°-os szögnek felel meg. Ez azt jelenti, hogy két egymást követő levél iránya között $1080^\circ : 5 = 216^\circ$-os az elfordulás. Az m és n értékek emelkedésével ez a szög a $212{,}5^\circ$-os *határszöghöz* közelít.



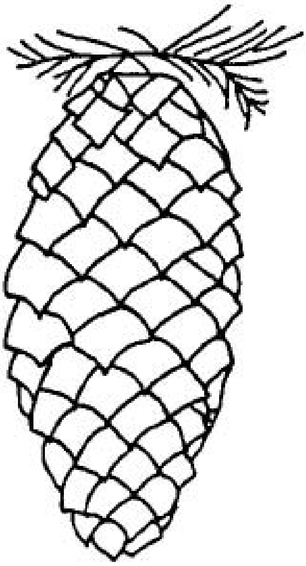
9.4 ábra

Ha az ellenkező irányú forgást tekintjük, a szögek között a $2/5$ aránynak megfelelően $720^\circ : 5 = 144^\circ$-os elfordulás lesz. Ha m és n elég nagyok, ez a szög a $137{,}5^\circ$-os határértékhez közelít. Ezek az értékek pedig éppen a teljes fordulathoz tartozó 360°-os szög aranymetszetei. (9.4 ábra)

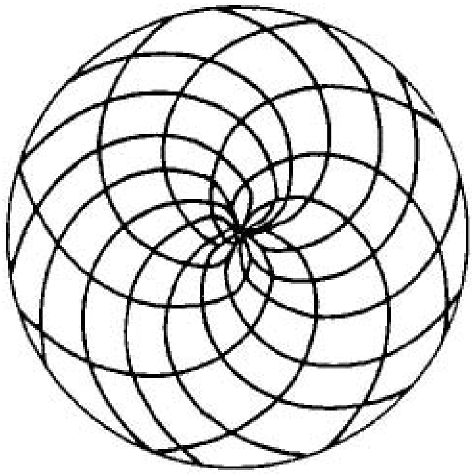
Az $m : n$ arány segítségével körszimmetrikus alakzatok is leírhatók. Ha $m = n$, sugárirányú egyenes vonalak és koncentrikus körök kiegészítő *(komplementer)* rendszerét kapjuk. A kör ugyanis a logaritmikus spirál olyan speciális esetének tekinthető, melynél a φ szögelfordulás értéke 0°. Ekkor $r = A$, és ennek megfelelően koncentrikus körökből álló körsort kapunk. A sugársor egyenesei φ végtelen nagy értékéhez tartozó vonalak lesznek. Ilyen elrendezést mutatnak azok a virágok, melyek szirmai egy síkban, körszimmetrikusan helyezkednek el. Az is belátható, hogy ha m és n különbsége 1, a konstrukció egyetlen nagy spirálist eredményez.

A szórt állású levélelrendezéshez hasonló szerkezetet mutat igen sok olyan növény, melynél a levelek, rügyek, szirmok nem szimmetrikusan helyezkednek el. Ilyen elrendezés szerint alakul ki a hagyma leveleiből a hagyma feje, a káposzta egymásra boruló leveleiből a káposztafej. Ilyen elrendezés szerint helyezkednek el az őszirózsa és még sok hasonló virág szirmai, egyes növények magházai.

Ezek a viszonyok jól megfigyelhetők az aránylag nagyobb méretük miatt iskolapéldának is tekinthető fenyők toboztermésén található fedőlemezek elrendeződésében (9.5 ábra) és a napraforgó tányérján a magok elhelyezkedésén (9.6 ábra). Míg az előbbieknél az elrendezés egyértelműen térbeli spirálisként jelenik meg, a napraforgó tányérján a spirálisok síkbeli alakzatként is leírhatók.



9.5 ábra



9.6 ábra

A napraforgó tányérja és a fenyőtoboz

Ha közelebbről megfigyeljük a napraforgó tányérján a magok elhelyezkedését, feltűnő szabályosságot tapasztalunk. A magok a tányéron két, egymást metsző logaritmikus spirálból álló görbesorozat mentén helyezkednek el. A spirálkarok a tányér középpontjából indulnak ki, és a tányér széléig futnak. A két, ellentétes irányban futó görbesorozatban a spirálkarok száma két szomszédos *Fibonacci-szám*, melyek közül a felülről nézve az óramutató járásával ellentétes irányú forgáshoz nagyobb, az azzal megegyező irányúhoz kisebb szám tartozik. A tapasztalat szerint közepes méretű, 15 – 20 cm átmérőjű napraforgótányér spirálisainak száma 34 és 55, a kisebbeké 13 és 21. Nagyobb tányérok esetén azonban előfordulhat az 55/89 arány is.

Minden spirálkar metszi az összes ellenkező irányú *(komplementer)* görbét. A magok két spirálishoz is tartoznak, és azok metszésében helyezkednek el. A magok alakja a szomszédos magokhoz való kényszerű igazodás folytán közelítően romboidhoz lesz hasonló.

Hasonló szabályosságot mutat bizonyos növényeknél a termés, egyes virágoknál a szirmok elhelyezkedése. Ilyen az ismert virágok közül az *őszirózsa*, a *krizantém, a százszorszép*, és általában azok a virágok, melyeknél a szirmok vagy termések több sorban, szorosan egymás mellett helyezkednek el.

A térben hasonló elrendezést mutatnak legtöbb fenyőfajta tobozán a magok, illetve az azokat fedő védőlemezek is. Az elrendezés itt is logaritmikus spirálkarok két, egymást metsző rendszeréből áll. A spirálkarok kiindulópontja a toboz szára; a spirálisok térbeli csigavonal alakjában végigfutnak a toboz hengeres testén, egészen annak csúcsáig.

Ilyen elrendezést találunk általában azoknál a növényeknél, virágoknál, illetve ezek szirmainál vagy terméseinél, melyeknél a magok vagy kezdemények a magház testén szórtan jelennek meg. Ilyenek többek között a *mácsonyafélék*, és még számos növény és virág.

Fibonacci-sorozat és aranymetszés az élő természetben

Az élő természetben, az állatok és növények alakjában és fejlődésében mutatkozó változatosság szinte kimeríthetetlen; csak rajtunk múlik, hogy felismerjük azokat a törvényszerűségeket, melyek e változatosság mögött rejlenek.

Az élő természet különböző területein található különös arányok felismerése során óhatatlanul megfogalmazódnak azok a kérdések, melyek a jelenségek közötti összefüggésekre vonatkoznak.

Van-e kapcsolat a csigák mészházának logaritmikus spirált formáló alakja és a napraforgó tányérján a magok logaritmikus spirál mentén való elhelyezkedése között? Mi a közös a növények leveleinek elrendeződésében jelentkező Fibonacci-számok aránya és a fenyők tobozán található spirálkarok számának hányadosa között?

Miért mutatnak egyes csigafajok mészházai átmérőben mérve aranymetszési arányokat? Tekinthetők-e ezek a jelenségek a természet furcsa játékának, vagy általános törvényszerűség rejlik mögöttük?

A tudományos igénnyel jelentkező elméletek tényekből indulnak ki és bizonyított, általánosan elfogadott törvényekre támaszkodnak. A hipotézisek olyan elképzelések, melyek valamely elméletbe beilleszthetők, de teljes bizonyításuk még várat magára.

A levélállásra, a csigák méreteire, egyes virágok és termések elrendeződésére vonatkozóan olyan tömegű megfigyelés áll rendelkezésre, hogy azok eredményeivel, mint tényekkel számolhatunk. A növényi növekedésre vonatkozóan pedig a tudomány egzakt törvényeket fogalmaz meg.

Ha a fejlődésben egymástól megkülönböztethető, diszkrét szakaszok figyelhetők meg, a jelenség sok esetben a Fibonacci-sorozattal írható le. Egyes élő fajok szaporulatának alakulásában, számos növény növekedésének alaki viszonyaiban a Fibonacci-sorozat törvényszerűségei fedezhetők fel. Ezt példázza a fák és növények hajtáselágazása, a nyúlak szaporodása, vagy a levelek elhelyezkedése a növények szárain, a magok elhelyezkedése a napraforgó tányérján.

Ha az egyedek, sejtek nagy száma, vagy a tenyészidő viszonylagos rövidsége (pl. sejtszaporulat) miatt a folyamat folytonosnak tekinthető, a folyamatot a növekedési szakaszban az exponenciális függvény írja le.

A Fibonacci-sorozat meghatározó tulajdonsága, hogy bármely eleme (a harmadik elemtől kezdve) az előző kettő összege. De ugyanezt a tulajdonságot mutatja az a geometriai sorozat is, melynek hányadosa az aranymetszési növekedési arány, ($q \approx 1{,}618\ldots$).

A megfigyelések azt mutatják, hogy a növények döntő többségének a fejlődésében a spirálforma domináns jelleggel érvényesül, és inkább az ettől való eltérés tekinthető kivételnek. A szárazföldi növényeknél a hajtásnövekedés egymást metsző görbékből álló minta szerint végbemenő ritmikus folyamat. A növekedés egyetlen pontból kiinduló expanzióként fogható fel, mely önmagához hasonló minta létrehozására irányul. A hasonlóság itt nem érvényesül geometriai pontossággal, a fejlődést másodlagos növekedési tényezők is befolyásolják. Ez az oka például annak is, hogy a fák évgyűrűi csak közelítőleg tekinthetők koncentrikus köröknek.

Az exponenciális növekedés törvénye

Általánosan elfogadott törvénynek kell tekintenünk az exponenciális növekedés törvényét, mely az élő anyag mennyiségi növekedésére vonatkozó mérésekre, és az egysejtű mikroorganizmusok szaporodásával járó sejtszámnövekedésre vonatkozó megfigyelésekre támaszkodik. Többsejtű, illetve magasabbrendű élőlényeknél a sejtszám gyarapodását a szervek geometriai méreteinek a megváltozása, megnagyobbodása is kíséri. A test, illetve szerv növekedése e két folyamat együttes eredménye.

A többsejtű szervezeteknél a test tömegének, ill. méretének időbeli változása a növekedési szakaszban exponenciális.

Az időbeli változást leíró függvény általános alakja:

$$W = W_0 \cdot e^{rt},$$

ahol W_0 a növény egy kezdeti időpontnak megfelelő állapotához tartozó tömege, t az azóta eltelt idő, W a t idő elteltével megnövekedett tömeg, és r a relatív növekedési állandó.

Az exponenciális növekedés azonban csak a növekedési szakaszra érvényes. A növekedés bizonyos idő elteltével a későbbi életkorban lelassul, a görbe ellaposodik (9.7 ábra). A teljes növekedési görbe hasonló a közgazdaságtanból jól ismert telítési vagy *logisztikus* görbéhez.

A növényi alakok expanziója, a szervek növekedése azt mutatja, hogy az élő természet önmagát úgy reprodukálja, hogy közben az előzőhöz hasonló állapot jöjjön létre. A növekedési törvényt kifejező exponenciális függvényben az r paraméter a növekedési sebesség meghatározására vonatkozik, és értéke az időegység megválasztásától függ. Ha időegységnek azt az időtartamot tekintjük, mely alatt a növény tömege éppen a q-szorosára növekszik, ahol $q = 1/h$, az aranymetszésnek, illetőleg a folytonos aránynak megfelelő *növekedési hányados*, a növekedést leíró exponenciális függvény felírható

$$W = W_0 \cdot q^t$$

alakban, ahol $q = e^r$, és $r = \ln q$, (ahol $\ln q$ a q szám természetes alapú logaritmusa).

Az V. fejezetben megmutattuk, hogy a $q = \frac{1}{h}$ alapú exponenciális függvény bármely $x > 1$ értékére fennáll a

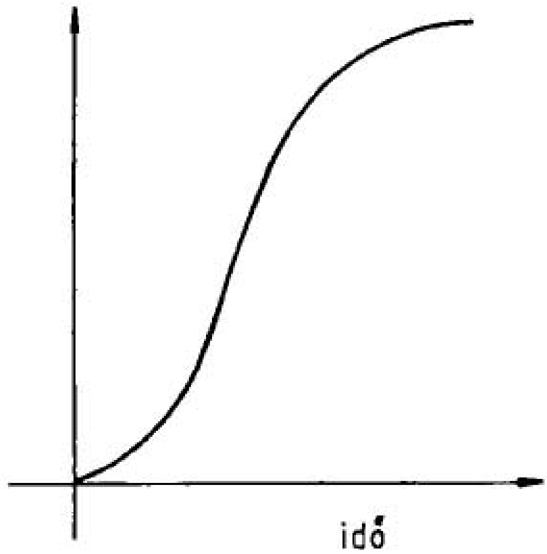
$$cq^{x-1} + cq^x = cq^{x+1}$$

egyenlőség. Mivel $c \neq 0$, az egyenlet mindkét oldalát a cq^x kifejezéssel osztva, az

$$\frac{1}{q} + 1 = q$$

egyenlethez jutunk, ami a megválasztott időegységre vonatkoztatva valóban az aranymetszés szerinti növekedésnek felel meg.

A növekedés egyes fázisaira vonatkozó összefüggések az 5.11 ábráról is leolvashatók.



9.7 ábra

Ha tehát az idő függvényében leírt növekedési görbe olyan exponenciális függvény, melynek alapja az aranymetszési vagy folytonos *növekedési arány* $(q \approx 1,6182)$, vagy ami lényegében ugyanaz, olyan időegységet választunk, mely alatt egy élő populáció q-szorosára szaporodik, akkor a leírt növekedési folyamatban egy adott időpontban fennálló állapot aranymetszete lesz az azt egy időegységgel megelőző, és az azt ugyanannyival követő két állapot közötti fejlődési szakasznak. A megelőző állapot aranymetszet a kezdeti és a jelenlegi között; ugyanakkor a jelenlegire időegységgel következő állapotnak megfelelő (tömeg, térfogat stb.) érték a jelenlegi és az ezt megelőző értékek összege lesz.

Érdekességként megemlíthető, hogy ha időegységnek nem a szokásos egy évet(hónapot), hanem egy emberöltőnek megfelelő időtartamot tekintünk, az emberi populáció növekedési aránya az aranymetszési növekedési aránynak megfelelő alapú exponenciális függvénnyel is kifejezhető.

Európában az éves növekedési arányt általában 14 ezreléknek tekintik. Ehhez a növekedési rátához azonban éppen 30 évnek megfelelő reprodukciós ciklus tartozik, ami azt jelenti, hogy változatlan növekedési arányt feltételezve, ennyi idő alatt szaporodna az adott populáció az $1,618\ldots$ szorosára.

Ez közelítőleg egy emberöltőnek, illetve egy új generáció megjelenéséhez szükséges időnek felel meg. Azokban az országokban, ahol az egyedek nemi érése hamarabb következik be, ez az idő rövidebb, és az évi növekedési arány ennek megfelelően magasabb. Évi 20 ezrelékes növekedési ráta már 25 éves ciklust feltételez.

Elméletek és hipotézisek

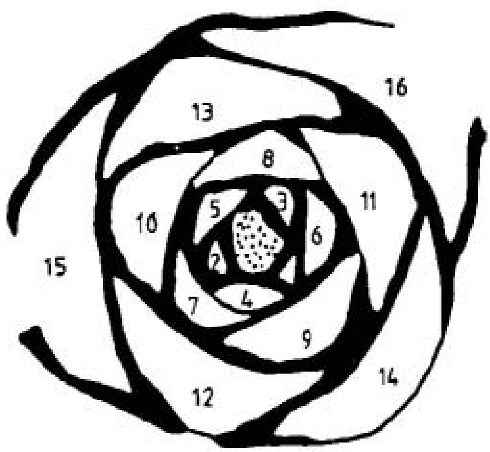
Milyen okokra vezethető vissza, mivel magyarázható a szárazföldi növények fent leírt viselkedése? A kérdésre adott válaszok két, munkahipotézisnek is tekinthető elmélet köré csoportosíthatók.

A tradicionális *spirálelmélet* szerint a növények olyan örökölt mechanizmusáról van szó, mely a fejlődés ősi, vízi és víz alatti állapotára utal, és melynek eredete ősibb, mint a szárazföldi vegetáció maga.

A múlt század végén megfogalmazott *ekvipotenciális elmélet (Wiener, 1875)* a levelek elhelyezkedését a fény és levegőáramlás optimális kihasználására irányuló törekvéssel magyarázza. Az elmélet a növények fotoszintéziséhez kapcsolódik, és bár a jelenség sok részletére ad magyarázatot, nem ad választ arra, hogy a Fibonacci-szimmetria miért érvényesül olyan növények gyökérzetében is, melyeknek nincs levélzetük. Mindkét elméletből levezethető azonban a levelek spirális elfordulási szögének a nagysága, és azok határszöge.

A jelenség lefolyásának mechanizmusát leíró *taszítási elmélet* szerint, mely *Shoute* nevéhez kapcsolódik, a levélkezdemények *(primordiumok)* kialakulásában olyan speciális vegyületek vesznek részt, melyek az újabb kezdemények kialakulását gátolják. A *rendelkezésre álló tér elmélete (Hofmeister, 1865)* szerint két formálódó kezdemény között, valamint ezek és a csúcs között minimális távolságnak kell lennie ahhoz, hogy a következő kezdemény fejlődésnek indulhasson. A csúcs növekedésével a kezdemények közötti tér is nő, míg eléri az új kezdemény kialakulásához szükséges minimális nagyságot.

Az új alakzatra azonban hatást gyakorolnak a szomszédos sejtek, és az eredmény az úgynevezett érintkezési nyomásban jelentkezik. Ennek egyik következménye, hogy a spirálisok metszésében lévő területek eltorzulnak, és közelítően romboid alakot vesznek fel.

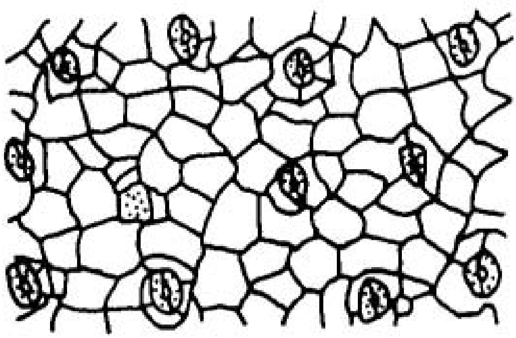


9.8 ábra

A levélkezdemények a hajtáscsúcson spirális fillotaxis szerint rendeződnek el. A 9.8 ábra a *Saxifraga* nevű pálma hajtáscsúcsán kialakuló levélelrendezést mutatja, ahol a levélkezdemények a feltüntetett sorszámnak megfelelő sorrendben indulnak fejlődésnek.

A *kölcsönös gátlás* elméletével jól magyarázható a légzősejtek *(sztomasejtek)* között az *anyasejtek* elrendeződése. A légzést biztosító sztomasejtek egyenletesen, mozaikszerű mintázatot alkotva helyezkednek el a levél felületén.

A növekedés során az anyasejtek kialakulásában a gátlási mechanizmus érvényesül, és ezek a meglévőktől csak bizonyos távolságban jelennek meg. Az új sejtkezdemény a meglevők között azonban nem szimmetrikus elrendeződésben mutatkozik, hanem *aszimmetrikusan* olyan pontban, mely a szomszédos anyasejtek közötti távolságot az aranymetszésnek megfelelően osztja (9.9 ábra). Az ábráról az is leolvasható, hogy ez az aszimmetria különböző irányokban levő sejtekre is érvényesül.



9.9 ábra

A fent vázolt elméletek egymásnak valójában nincsenek ellentmondásban, egymást nem zárják ki, inkább kiegészítik.

10. Épületek, arányok és mítoszok

Arányok az épületek méreteiben – Arányok és formák különleges jelentősége az ókori építészetben – Az ókori hindu, egyiptomi és sumér épületek méretarányai – Arányok antik görög és római építészeti emlékeken – Római lakóházak, terek és templomok méretarányai Vitruvius és Palladio nyomán – Az arány szerepe a középkori, a reneszánsz és a modern építészetben

Arányok az épületek méreteiben

Az épületek térbeli alakzatok, és így egyúttal az általuk elfoglalt tér szerkezetét is meghatározzák. A méretek és arányok az egész épületre vonatkozóan jellemző értékek. Az épületek méreteinek és az ezek közötti arányoknak a megválasztása az építészetben ezért is különleges jelentőségű.

Az épületek funkciójuk szerint középületek vagy lakóházak. A középületek között is különleges helyet foglalnak el a szakrális célú épületek: a templomok és kegyhelyek. Az egyéb célú, az élet szervezésének más vonatkozásaival kapcsolatos középületek létesítésén túl az építészet körébe tartozik az utcák, terek, továbbá egész városok vagy városrészek tervezése is.

Az épületekkel szembeni igények, és ennek megfelelően az azokra vonatkozó kötöttségek és előírások a kor szükségleteinek, praktikus és esztétikai szempontoknak, továbbá a társadalmi berendezkedésnek megfelelően változnak. Az épületek stílusa, szerkezete, a méretek arányainak megválasztása ennek megfelelően mindig az adott kor világszemléletét tükrözi.

Arányok és formák az ókori kultúrák építészetében

Az ókori kultúrákban az épületek méreteire vonatkozó arányoknak nagy jelentőséget tulajdonítottak, és ez többnyire szigorú építészeti előírásokat jelentett. Ezek közül a *mítoszokban*, vallási hiedelmekben gyökerező előírások betartása kötelező volt. Az arányok megválasztásának esztétikai vonatkozásai csak akkor jöhettek számításba, ha azok megfeleltek a vallási előírásoknak is.

A *négyzetet,* mint a legegyszerűbb geometriai formát, legtöbb népnél a tökéletesség szimbólumának, ezért isteni eredetűnek tartották. Az ókori hindu építészetben például négyzetalakú alaprajza csak a templomoknak lehetett. A templomok négyzetalapú alaprajzán további osztásokkal négyzethálót alakítottak ki, legtöbbször 7×7, 8×8, vagy 9×9 beosztásnak megfelelően. Az így szerkesztett hálót tekintették a további tervezés és szerkesztés alapjának.

A négyzetalapú beosztás a hinduknál az isteneknek a földöntúli gonosz hatalmak feletti győzelmét jelképezi. A nagyobb négyzet a legyűrt ellenfél jelképe, míg a kisebb négyzeteknek megfelelő területek az istenek *Brahma* elképzelései szerinti uralmát fejezik ki.

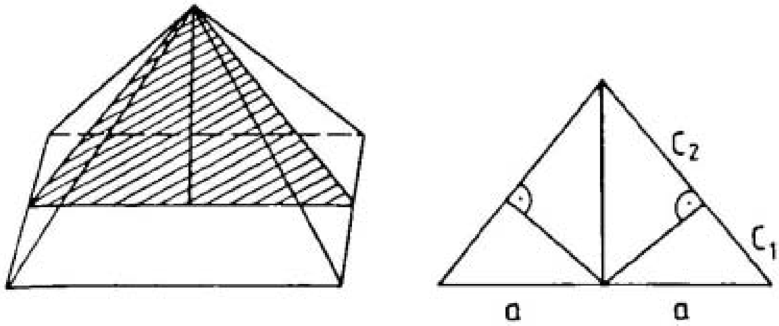
A *lakóházak* méreteinek arányát hasonlóan szigorú szabályok szabták meg aszerint, hogy az kinek a számára épült. A *brahmanok* lakóházaik oldalainak arányát a négyzet oldalainak arányához, az 1-hez közel választhatták meg, de ez az arány a négyzet oldalainak arányát $11/10$-nél jobban nem közelíthette. A harcosok *(vayshiák)* kasztjabelieknél ez az arány $9/8$, az iparosok és kereskedők kasztjabelieknél legfeljebb $7/6$, míg a *sudráknál* vagy tisztátalanoknál csupán $5/4$ lehetett. Az utóbbiak házai nem lehettek magasabbak két és fél emeletnél, a brahmanok házainál hat és fél emeletet engedélyeztek.

Az épületek *tájolását* is szigorú szabályok írták elő. A rövidebb oldal mérőszámának háromszorosát az égtájak számának megfelelően (beleértve a 45 fokos elfordulási irányokat is) nyolccal osztották, és a maradék alapján határozták meg a tájolási irányt. A keleti iránynak a 0, a délkeletinek 1-es, a déli iránynak a 2-es szám felelt meg, és így folytatva, minden maradékhoz egy irány tartozott. Mivel ideális tájolásnak a *keleti* irányt tartották, az épület méreteit és ezek arányát ennek megfelelően választották meg.

A *négyzetalak,* mint a templomok és temetkezési helyek alaprajzára vonatkozó előírás, megtalálható más ősi kultúrákban is. A *tolték–maya* építészet (X–XII. sz.) által a mai Mexikó területén létrehozott *Harcosok Templomának* (Chichen Itza) alaprajza szintén négyzet, és négyzetes alapon nyugszik a *Qetzalcoatl* vagy *Tollas Isten* tiszteletére épült *Kukulkán Templom* is. Az utóbbinál a szentély egy kilenc lépcsőből álló piramis tetején áll, annak megfelelően, hogy a maya világképben a krokodil hátán úszó világegyetemhez kilenc alvilág tartozik. A négyzetalak a négy fővilágtájnak felelt meg, azt jelképezve, hogy az istenek is négy alakban jelennek meg. A szentélyhez négy oldalról vezető lépcsők egyenként 91 lépcsőfokból állnak, ami az utolsó lépcsőfokkal együtt az év napjainak a számát (365) adja.

Négyzetalapú az egyiptomi *piramisok* többsége is. Az egyiptomi piramisok méreteinek arányát szigorú szabályok rögzítették. Ha a négyzetalapú gúlának megfelelő *Kheopsz-piramis* csúcsán keresztül az egyik oldalra merőleges síkot fektetünk (10.1 ábra), ez a piramisból olyan egyenlőszárú háromszöget metsz ki, melynek szimmetriatengelye a gúla magassága. A kapott két egybevágó derékszögű háromszög *(Kepler-háromszög)* érdekes tulajdonsága, hogy azok magasságvonala a szemközti átfogót az aranymetszésnek megfelelő arányban osztja.

Ez egyúttal azt is jelenti, hogy az aranymetszésnél kapott hosszabbik szelet, c_2 megegyezik az egyenlőszárú háromszög alapjának felével, a-val. Ugyanis a derékszögű háromszögekre vonatkozó arányossági tétel szerint a befogó mértani közép az átfogó, és a



10.1 ábra

befogónak arra eső vetülete között:

$$a^2 = c_1(c_1 + c_2).$$

Mivel azonban c_2-re, az aranymetszet hosszabbik szeletére is fennáll, hogy:

$$c_1 : c_2 = c_2 : (c_1 + c_2),$$

a két egyenlőségből az $a = c_2$ azonosság következik.

A *sumér* építészet egyik legszebb remekművе az Ur városában épített toronytemplom, vagy *Zikkurát,* melynek téglalap alakú alaprajzán a hosszabbik oldal a rövidebbnek másfélszerese. Az épület pontos mérete $62,5 \times 43$ m. Hasonló toronytemplom lehetett az ókori *Babylonban* épített Bábel tornya is.

Az arány jelentősége az ókori görög és római építészetben

A görögök a szomszédos népekhez hasonlóan nagy súlyt helyeztek az épületek méretarányainak megválasztására. Erről nem csupán a fennmaradt emlékek győznek meg bennünket, a korabeli építészetről szóló írásos munkák is ezt tanúsítják.

A klasszikus korok építészetének alapelveit *Vitruvius*, az I. században Rómában élt görög származású építész munkáiból ismerjük. Elméleti és gyakorlati ismereteket egyaránt tartalmazó kézikönyve a korabeli építészet számára normát jelentett, de hatása még évszázadok múlva is kimutatható. Rá hivatkozik és belőle merít a XVI. század kiemelkedő itáliai építésze, *Andrea Palladio,* akinek az építészetről szóló munkája a következő századok építészetében meghatározó szerepet játszott. Kultúrtörténeti jelentőségét bizonyítja, hogy munkáit több nyelvre is lefordították. *Négy könyv az építészetről* című munkája magyar nyelven is megjelent.

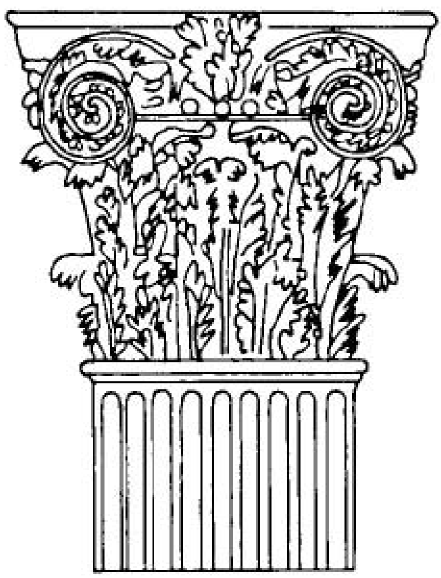
Palladio *Vitruviusra* hivatkozva ismerteti az antik görög és római oszlopok és oszloprendek (oszlopegyüttesek) szerkezetére és méretarányaira vonatkozó előírásokat. Ezek szerint a görög építészetben leggyakrabban alkalmazott *dór, ion és korinthuszi* oszlopok nem csupán az oszlopfők díszítőelemeiben különböznek, hanem a talapzat, a törzs és az oszlopfő méreteinek arányában, továbbá a karcsúsítás mértékében is.

Palladio erről ezt írja: „Az oszloprend oszlopait oly módon kell megformálni, hogy a felső rész keskenyebb (karcsúbb) legyen az alsónál, és a közepüknél kissé megvastagodjanak. A karcsúsodás mértéke az ion oszlopoknál az alsó keresztmetszet $1/6$-a, és a karcsúsodás a magasság harmadánál kezdődjék". A dór oszlopoknál a karcsúsodás aránya $1/5$, és ez valóban tömörebb formát eredményez.

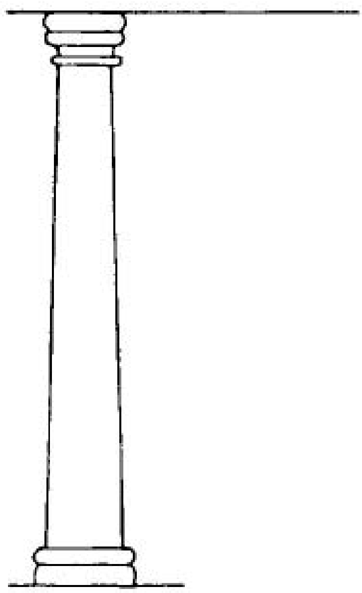
De nem csupán az oszlopok méreteiben jelentkező arányokra vonatkoztak szigorú előírások, hanem az oszloprendben az oszlopok közötti távolságokra is. Az oszlopközök az oszlop szélességének másfélszeresétől annak háromszorosáig terjedhettek, de a két és egynegyed oszloptávolságot tekintették ideálisnak. Az oszlopközök meghatározásánál azonban tekintettel voltak az oszlopok magasságára is.

A dór oszlopok az erőt kifejező férfitest arányosságát, az ion oszlopok a női alak karcsúságát és szépségét szimbolizálták. Vitruvius szerint az oszlop talapzatának és a teljes magasságának – az oszlopfőt is beleértve – arányát az ember talphossza és a teljes magassága arányának megfelelően határozták meg. Ez az arány a dór oszlopoknál 1 : 6, az ion oszlopoknál 1 : 8, ami az előbbieknél tömörebb, az utóbbiaknál karcsúbb, légiesebb formát eredményezett.

A korinthuszi (a görög *Korinthoszból* származó) oszlopok oszlopfőit stilizált akantuszlevelek díszítették, méreteinek arányát tekintve pedig az ion oszlopoknál is karcsúbbak voltak. A *kompozit* oszlopok több stílus jegyeiből, leggyakrabban az ion és korinthuszi oszlopfők elemeiből összetett oszlopokat jelentettek (10.2 *a* ábra).



10.2 *a* ábra



10.2 *b* ábra

A római építészetben a görög oszlopokon kívül az itáliai *Toscana* tartományból származó *toszkán* oszlopok is szerepelnek. A *toszkán* oszlopok a görög oszlopoknál tömörebbek voltak: lábazatuk magassága az oszlop vastagságának fele, a karcsúsodás mértéke pedig a szélesség egynegyede. Ezeket az oszlopokat egyszerűségüknél és nagy stabilitásuknál fogva többnyire olyan helyeken alkalmazták, ahol a teherbírásnak különleges szerepe volt (pl. földalatti létesítmények, amfiteátrumok alsó szintje stb.) (10.2 *b* ábra).

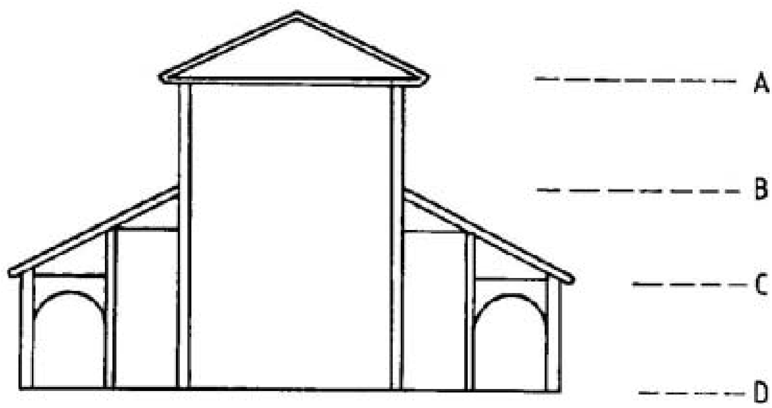
Mind a görög, mind pedig a római építészetben alkalmazott oszlopok alulról felfelé karcsúsodtak, vagyis talapzatuknál volt a legnagyobb az átmérőjük. Az oszlopok alulról felfelé való keskenyedése azonban nem volt általános jelenség az ókori kultúrákban. Az i. e. XVI. században virágzó égei kultúrához tartozó *Minoszi palota* oszlopai például felülről lefelé keskenyednek.

Antik templomok és lakóházak méretarányai

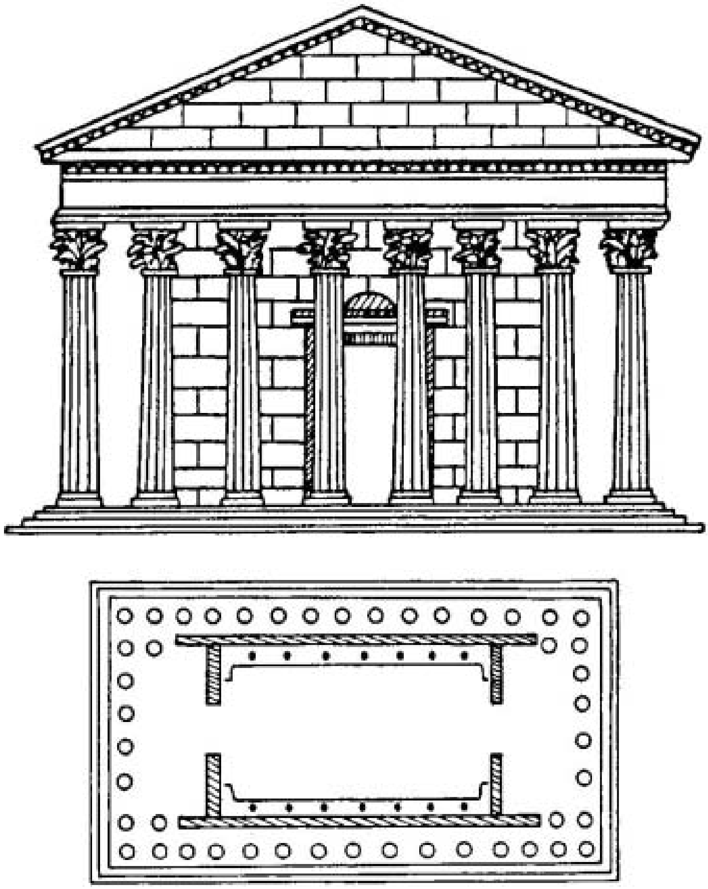
Az arányok tudatos alkalmazása leginkább a templomok építésében mutatható ki. Azonban míg az ókori hindu, egyiptomi, mezopotámiai népeknél a templomok alaprajza többnyire négyzet, az ókori görög és római templomok alaprajza gyakran kör vagy téglalap.

A köralakú templomoknál a belső, köralakú szentélyt oszlopok veszik körül. Vitruvius szerint az oszlopszékeket, melyekre az oszlopok kerülnek, két lépcső magasságában kell elhelyezni. Az oszlopfolyosó szélessége a templom átmérőjének ötödrésze, és az oszlopok olyan magasak legyenek, amilyen széles a köralakú cella. „Az oszlopok vastagsága a magasság tizedrésze legyen, és a kupola magassága olyan, hogy az az oszlopfolyosó fríze és párkánykoszorúja fölött a mű fele magasságában emelkedjék ki” – mondja Vitruviusra hivatkozva *Palladio.*

A téglalap alakú templomoknál az alap hosszúságának és szélességének arányát tekintve leggyakrabban az aranymetszési aránnyal találkozunk, és csak kivételesen szerepel ettől eltérő arány. Ez az arány különben a templomokon kívül más, egyéb célra épült épü-



10.3 ábra

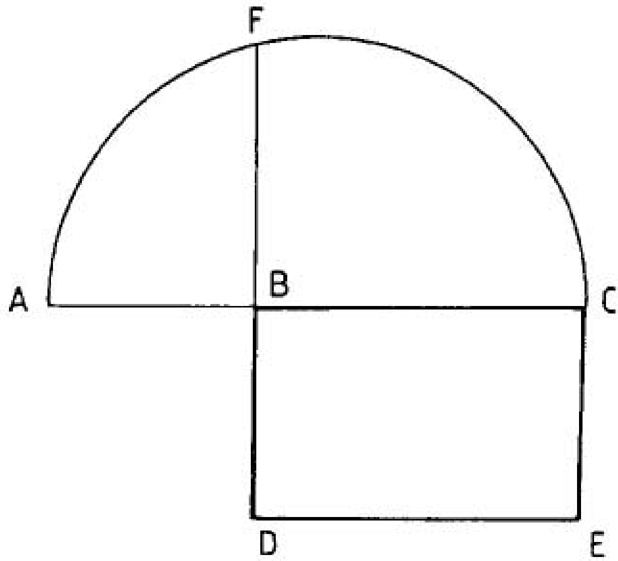


10.4 ábra

leteknél is megtalálható, a templomok építésénél azonban, mivel az aranymetszést arányt isteni eredetűnek tekintették, szinte kötelező előírásnak számított.

A IV. században épült *régi Szent Péter Bazilika* méretarányaiban az aranymetszés több vonatkozásban is kimutatható. A főhajó alaprajzán a szélesség a hosszúság aranymetszetének felel meg, de a főhomlokzat keresztmetszetén a mellékhajók támaszsíkjának *C* illeszkedési pontja (10.3 ábra) az aranymetszésnek megfelelően osztja a teljes magasságot, az alsó tetőgerenda illesztési pontja pedig az oldalhajó tetőszerkezetének *B* pontja és az *A* alappont közötti távolságot.

Rómában a *Campidoglio* és a *Palatinus* dombok között, a *Forum Romanum* mellett volt található *Jupiter Stator* temploma, melyből ma már csak egyes oszlopok állanak. A templom téglalap alakú alaprajzán az oldalak hosszméreteinek aránya az aranymetszésnek felel meg. A homlokzaton nyolc, az oldalain tizenöt oszlopból álló oszlopsor fut végig. A templom Palladio által rekonstruált alaprajza és főhomlokzata a 10.4 ábrán látható.



10.5 ábra

A közterek méreteinek arányát az adottságoknak megfelelően választották meg, a tudatos tervezés azonban itt is szerephez jutott. A római terek ideális méretarányára Vitruvius 3 : 2 arányt ad meg.

Ami a görögöknél az *agora*, az a rómaiaknál a *forum*: a városok főtere, a közélet színtere. Itt bonyolódott le a kereskedelem, itt történt a rómaiaknál a gladiátorok kitüntetése, megajándékozása. Itt állt a *bazilika,* az a többnyire kupolával fedett csarnok, melyben helyet kapott az igazságszolgáltatás és amelyben a fontos közügyeket is intézték.

A *bazilika,* mely eredetileg királyi házat jelentett, több jelentésváltozáson ment keresztül. Ma a kupolával fedett, nagyobb méretű templomokat nevezik bazilikának. A leghíresebb antik bazilikák egyike *Paulus Aemilius bazilikája,* mely Róma főterén, a Forumon *Saturnus* és *Faustina* templomai között helyezkedett el.

A *lakóépületekre* vonatkozóan kevésbé szigorú előírásokat találunk. Palladio könyve az épület főbejáratának, a szobák ajtóinak, ablakainak méreteire vonatkozóan az épület nagyságának megfelelő méreteket ajánl. „A talaj és a gerendázat síkja közötti teret három és fél részre kell bontani, ebből a nyílás magassága két rész, az ajtónyílás szélessége egy rész, elhagyva belőle a magasság $1/12$-ed részét.”

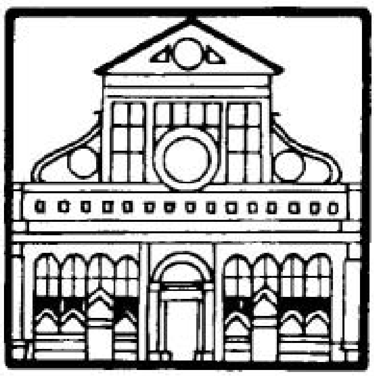
A lakószobák méreteinek arányát tekintve Vitruvius szerint a síkmennyezetű szobáknál a magasságnak meg kell egyeznie a szélességgel. Ha a szoba boltozott, és alapja négyzet, magasságának az alap oldalhosszának $4/3$-szorosát kell választani. Téglalap alakú boltozott helyiségekre a boltív magasságának a két méret számtani, vagy mértani közepe választható, mint olyan arány, „mely szépséget okoz a szemnek, másrészt megfelelő a mennyezet és padló méreteinek”. A 10.5 ábra a BCDE téglalappal meghatározott alaprajzú szoba magasságának szerkesztéssel való meghatározását mutatja Palladio könyve alapján: a *BF* szakasz, mely a hosszúság és szélesség mértani középarányosa, lesz a szoba magassága.

Korok, épületek, arányok

Az aranymetszésnek megfelelő arány az ókori építményekhez hasonlóan a középkorban különösen a templomok méretarányaiban jelentkezett. Ez a nevezetes arány azonban sok esetben nem csupán az alapméretekre, hanem ez épület más részeinek viszonyára, azok belső elrendezésére is vonatkozott.

Az aranymetszetnek megfelelő arány alkalmazását a késői középkort követően a reneszánsz építészei is átvették. A római *Szent Péter Bazilika*, mely több évszázadon keresztül épült, alaprajzától a kupola tervezéséig számos méretviszonyában hordoz aranymetszésnek megfelelő arányokat.

A Firenzében ma is látható *Santa Maria Novella* homlokzata négyzetbe foglalható. A magasság a teljes szélességgel egyezik meg, és azt 2:1 arányban osztja. A homlokzat további osztása is kötött rendszerű négyzetháló alapján történik (10.6 ábra).

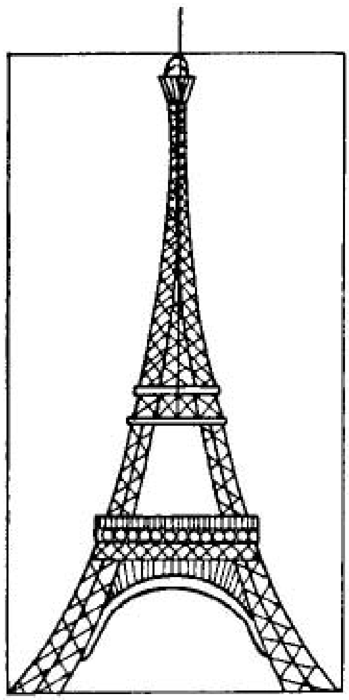


10.6 ábra

A 15. század építészetében az arány nem csupán szerkesztési mód, hanem a világmindenség harmóniájának az épületek méreteiben való kifejezése. *Alberti* (Battista Alberti, 1404–72), a reneszánsz nagy építőművésze szerint az épület formáját anyag nélkül kell elgondolni, és az ideális formából annyit kell megvalósítani, amennyit az anyag enged. Ezt a szemléletet tükrözi a firenzei *Strozzi* palota tervezése, melynél a homlokzati befoglaló idom egy körbe írt szabályos hatszög csúcsaira támaszkodik, az alaprajz pedig olyan téglalap, melynek rövidebb oldala a magasság 5/4-ed része. Az alaprajzba írt érintőkörbe szerkesztett szabályos hatszög jelöli ki az udvar belső méreteit, és ehhez igazodnak a szintek magasságai is.

A *reneszánsz építészet* az arányoknak túlzottan is nagy jelentőséget tulajdonított. Az építészeti szerkesztés majdnem kizárólag az arányokra épül. Az elérendő eszmeiségű alkotás anyagtól, formától függetlenül elvont, tiszta gondolati konstrukcióként, mint tökéletes hangzású zenei akkord jelentkezik. Közös bennük, hogy a geometria és a zene egyaránt harmóniára törekszik.

A késői reneszánsz és a barokk építészetben az arányok jelentőségét a díszítő formák sokfélesége váltja fel, az újkor építészetében pedig a konstrukció tisztasága, az épületek statikai megbízhatósága és praktikus szempontok kerülnek előtérbe. *Gustav Eiffel* Párizsi világkiállításra készült híres tornya, melyet a korabeli építészek nagy megütközéssel fogadtak, mai szemmel nagyszerű alkotásnak bizonyul. Kora építészei a torony esztétikai megoldása mellett annak stabilitását kifogásolták; a torony azonban karcsúsága ellenére is stabil. Kevesen gondolnák, hogy magassága és teljes talapzata méreteinek aránya 2:1, vagyis befoglalható olyan téglalapba, melynek hossza a szélesség kétszerese (10.7 ábra).



10.7 ábra

A legújabbkori építészet is a tervezés lényeges elemének tekinti az arányok helyes megválasztását. A mai kor tervezőjét azonban elsősorban a funkcionális céloknak megfelelő praktikus szempontok és esztétikai meggondolások vezérlik, és egyéb körülmények csak ezek után jönnek számításba.

Az aranymetszés, mint a természetben is megtalálható minta, a modern építészetben is helyet kap. Korunk sok építésze – többek között a világhíres francia építész, *Le Corbusier*

– előszeretettel alkalmazza az aranymetszésnek megfelelő arányokat, ezzel is elősegítve az épületnek a természeti környezetbe való beilleszkedését.

A természet tudatos vagy spontán utánzásának igényére utalnak az akantuszlevelekből álló díszítőelemek a korinthuszi oszlopfőkön éppúgy, mint a stilizált virágminták a *Lechner Ödön* tervezte budapesti épületek homlokzatain.

11. Képek és arányok

Arány és képi ábrázolás – Az emberi test arányai – Arány és esztétikum – Arány a művészetben és a valóság – Szimmetriák és szerkezeti vonalak – Aranymetszés a reneszánsz művészek képein – Változó irányok, ismerős arányok – Arányok és szimmetriák

Az arány szerepe a képábrázolásban

A képi ábrázolásban, a képek megalkotásában az aránynak több vonatkozásban is meghatározó szerepe van. Egy ábrázolt alakot, tárgyat *önmagában* arányosnak tekintünk, ha azon a részek egymáshoz és az egészhez való viszonya a valóságnak megfelelő. Az arány azonban szerephez jut a képalkotás során a kép alakjainak, tárgyainak *egymáshoz és a környezethez való viszonyában,* továbbá magának a kép méreteinek megválasztásában, annak a külső térrel való kapcsolatában is.

A képek, rajzok előállításának legrégebbi dokumentumai a *neolitkori* barlangrajzok. Ezek közül a legismertebbek a spanyolországi *Altamira* és a franciaországi *Lascaux* melletti barlangokban találhatók. Ezek a rajzok, melyek gyakorlati funkciójukon és mágikus, kultikus jelentésükön túl esztétikai értékeket is hordoznak, már az *arány* fogalmának ismeretéről és annak tudatos alkalmazásáról árulkodnak.

Az őskori ember rajzait elsősorban gyakorlati szempontok motiválták. Az ábrák szolgálhatták híradás céljait, de alkalmasak voltak arra is, hogy egy eseményt megőrizzenek. A *mágikus,* vallási cél valamely kívánt hatás előidézése, a felsőbb hatalmak kiengesztelése, befolyásolása lehetett.

Ha az ábrázolt személy, vagy tárgy egyes részeinek egymáshoz való viszonya a valóságos viszonyoknak megfelelő, az ábrázolt alakot *arányosnak* mondjuk. Azonban a valóságnak megfelelő arányok megváltoztatása lehet tudatos művészi elképzelés eredménye is. Az arányok tudatos megváltoztatása a művészi mondanivaló hangsúlyozására minden korban megtalálható.

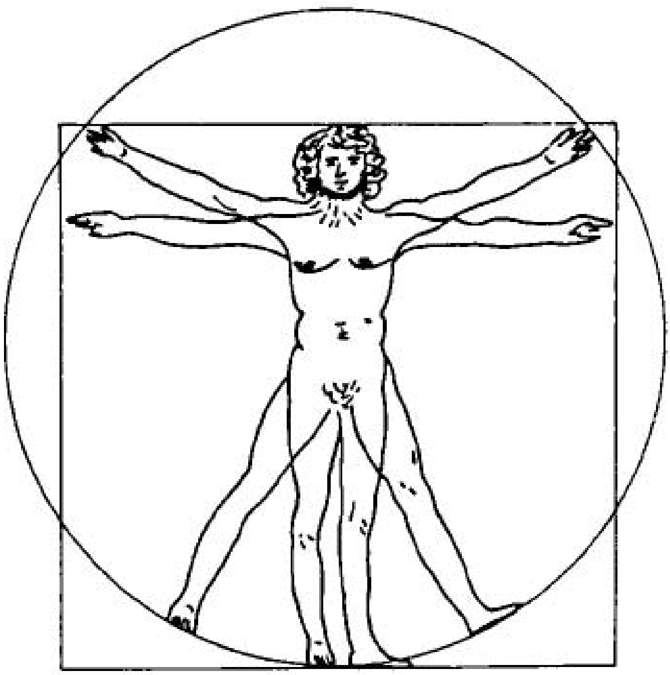
Az ábrázolt alakok (tárgyak, személyek, dolgok) a képen látható más tárgyakkal, dolgokkal együtt, az általuk meghatározott környezetben jelennek meg. Az arány ezért nemcsak a képen ábrázolt alakokra, hanem azok egymáshoz való viszonyára, a kép belső elrendezésére (*belső arányok*) is vonatkoztatható.

A kép kapcsolatban van a külső térrel, annak valamely részét jeleníti meg. A külső térrel való kapcsolatot kifejező, a kép méreteit meghatározó arányok a *külső arányok.* A belső és a külső arányok megválasztása lényeges, meghatározó elemei a képalkotásnak, a *kompozíciónak.*

Az emberi test arányai

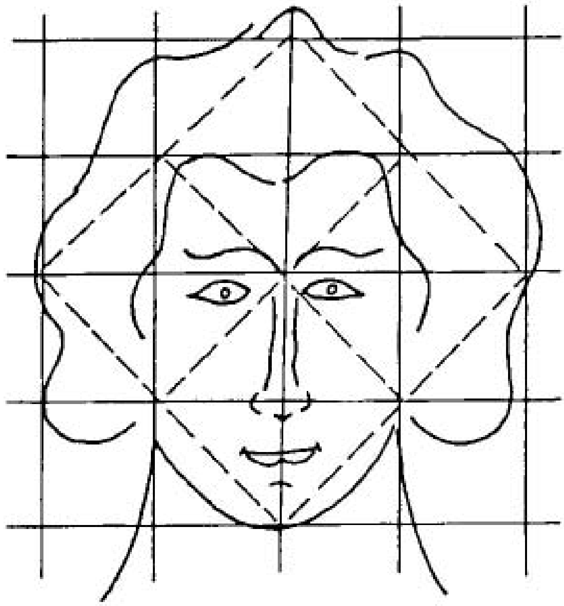
Polükleitosz, az V. században élt híres görög szobrász az emberi test ideális méretarányait *Kánon* című munkájában rögzítette. A *kánon* szerint az emberi fej magassága a teljes testmagasság 1/7-ed része. *Lüszipposz,* aki mintegy száz évvel később élt, ugyanezt az arányt már 1/8-nak vette. A francia *Cousin* (XVI. sz.) a testmagasságra a fej magasságának ugyancsak 8-szorosát fogadta el, vizsgálatait kiterjesztette a többi testrészre is. A testet egy-egy fej hosszának megfelelő szakaszokra osztotta, és az így kapott részek további elválasztóvonalainak a mellbimbót, a köldököt, a szeméremcsontot, a comb közepét, a térdet, a lábikra végét és a sarkot tekintette.

Vitruvius III. könyvében tárgyalja az emberi test arányait. Eszerint az egészséges testalkatú ember kinyújtott karokkal, terpeszállásban éppen beírható egy négyzetbe és egy körbe. Mivel a középkor általános felfogása szerint a kör a világmindenséget, a négyzet a földi dolgokat jelképezi, az így kapott ábra fejezi ki az ember és a kozmosz kapcsolatát (11.1 ábra).



11.1 ábra

A Magyarországon is megfordult *Villard de Honnecourt* XIII. században élt francia építész vázlatkönyvében található ábra szerint a szemben ábrázolt fej egy négyzetbe írható. Az arc szélessége a fej teljes magasságának a fele, melyet három osztóvonal négy egyenlő részre oszt. Az így kapott részek: a haj, a homlok, az orr, a száj és az áll (11.2 ábra).



11.2 ábra

Arány és esztétikum

A régebbi korokban egy mű létrehozásában és megítélésében az aránynak különös jelentőséget tulajdonítottak. Bizonyos arányok megjelenésében földöntúli jeleket, az *isteni tökéletesség* megnyilvánulását látták, és úgy gondolták, hogy ez már önmagában is esztétikai öröm forrása lehet. Ez a felfogás részben *Püthagorasz* számmisztikájában gyökerezett, és *Luca Pacioli: Az isteni arány* című munkájában teljesedett ki.

A *reneszánsz* korban az arányok művészetben betöltött szerepének, és a térbeli megjelenítés törvényeinek kutatásában a kor nagy mestere, *Albrecht Dürer* kiemelkedő szerepet játszott. Dürer, akinek nevét Budapesten utcanév is őrzi, a természet és az emberi test ábrázolásának titkát az *arányok* helyes megválasztásában látta. Elméleti és gyakorlati munkássága során felhalmozott tapasztalatainak eredményeit négy könyvben foglalta össze.

Dürer nem a tudományos módszerekkel megtervezett szépségideált tartotta követendő mintának, hanem a természet által létrehozott, a valóságnak megfelelő arányok szerint alkotott. Azt hirdette, hogy *„A művészet a természetben rejlik, azé, aki megleli”*.

Dürer életében, és az őt követő században elterjedt nézetek szerint az esztétikai élmény a természettel való közvetlen kapcsolat révén alakul ki. *Mintha a természet maga tanítana bennünket a szép élvezetére* – mondja Dürer. A természet környezeti hatását több mai művészetlélektani szakember és elmélet is meghatározónak tekinti.

Dürer korában a szépséget sokan matematikai képletekkel próbálták megragadni, és a bölcsek köhéhez hasonlóan keresték a szépséget kifejező mindenre alkalmazható formulát. E felfogásban szerepet játszott a tökéletes harmóniába vetett hit, mely a reneszánsz nagy mestereit remekműveik megalkotásában inspirálta.

Az esztétikai érték matematikai formulával való megközelítésének a gondolata ma is kísért. *Georg Birkhoff* amerikai matematikus a műalkotások mérésére a következő összefüggést találta:

$$M = \frac{O}{C}$$

ahol M a műtárgy megítélésére vonatkozó esztétikai mérték, C a műtárgy komplexitása és O a rejtett harmónia és rendezettség mértéke. E képlet helyességének azonban máris ellentmondani látszik az az egyszerű tény, hogy a négyzetalaknak nagy a szimmetriája, és ennek megfelelően a rendezettsége, csekély a bonyolultsága, azonban esztétikai értéke mégsem mondható magasnak.

Az aranymetszés esztétikája

Már az ókori munkákban is gyakran találkozunk aranymetszési aránnyal, vagy az azt közelítő *Fibonacci-számok* arányával. Az aranymetszés a reneszánsz kor nagy mestereinek munkáiban szinte uralkodó szerepet játszott. A középkorban és ennek örökségeként a reneszánsz nagy mestereinél az aranymetszés tudatos alkalmazása annak *isteni* eredetébe vetett hitre vezethető vissza, de ez az arány megfelelt az alkotók művészi elképzeléseinek és esztétikai értékítéletének is. Az aranymetszés fellelhető a későbbi korok számos művészi alkotásán is, ám ennek megjelenését mindinkább tisztán esztétikai szempontok indokolják.

A művészetlélektan tudományos módszerekkel keresett választ arra a kérdésre, hogy a különböző arányok között kitüntetett szerepet játszik-e az aranymetszés, és ha igen, ennek okai miben keresendők.

Tesztmódszerekkel végzett vizsgálatokkal kimutatták (*Desmond Morris*), hogy a kísérleti személyek közül legtöbben az aranymetszési arányt hordozó, vagy az ahhoz közelálló (*Fechner*) alakzatokat tartják leginkább esztétikusnak. Ez azzal magyarázható, hogy közvetlen környezetünk, maga a természet ehhez számos mintával szolgál. Ezzel találkozunk számos virág mintázatában, fák leveleinek méretarányaiban, az ágak és levelek elhelyezkedési viszonyaiban.

A környezetünk érzékelése és az ahhoz kapcsolódó élmények egész életünkön keresztül hatnak, és e formákra, mintákra, arányokra való *ráismerés* az esztétikai öröm forrása.

Ezek a minták az előző és mai korok művészi alkotásaiban is megjelennek, és az ezekhez kapcsolódó esztétikai élmény e formák értékelésének további megerősítését jelenti.

Egyes kutatók szerint az esztétikum kialakulásában a szerzett tapasztalatok mellett genetikai tényezők is szerepet kapnak (*Eysenck*), amit azok a kísérleti tények is alátámasztanak, melyek szerint az esztétikai ítéletek a központi idegrendszer örökletes sajátságaira vezethetők vissza.

Arány a művészetben és a valóság

A köznapi értelmezés szerint az *arányos* fogalma a művészetben is a megszokottat, az átlagost, a valósággal megegyezőt jelenti. A valóság jobb megismerését szolgálják a művészeti anatómiák és atlaszok is. Ha a képeken ábrázolt alakok a valóságos arányokat tükrözik, a kép a valóság látszatát kelti. A valóság másolása, a valósághű képalkotás azonban önmagában még nem tekinthető művészetnek. A művészi alkotás több: abban az alkotó saját gondolatai is kifejezésre jutnak.

Más értelmezés szerint az arányban rejlő *szépség* és *harmónia* a tökéletes formának, az előírásnak vagy kánonnak való megfelelés eredménye. A mai esztétikai elméletek azonban egyik felfogást sem fogadják el maradék nélkül. A köznapi értelmezésnek megfelelő felfogás a művészetben rejlő *teremtőerőt*, a művészi szabadságot korlátozza, a kánonnak, előírásnak megfelelő arányok szigorú betartása merev akadémizmushoz vezet, ami szintén a művészi szuverenitás korlátozását jelenti.

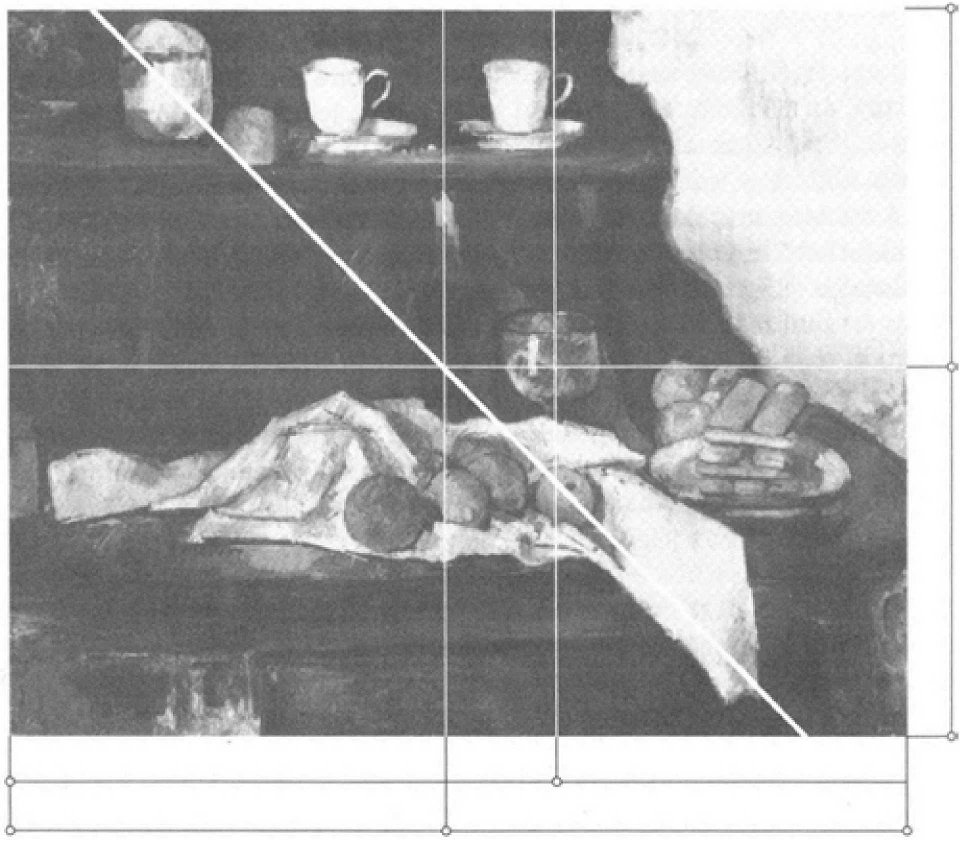
Az alkotó sok esetben éppen az arányok tudatos megváltoztatásával, torzításával hangsúlyozza mondanivalóját, és ezzel valósítja meg művészi elképzeléseit. Az ókori kultúrák *Vénusz* szobrai termékenységet kihangsúlyozó alakjai a mai női szépségideál arányaitól távol esnek, ezek a szobrok mégis hordoznak művészi értékeket.

Szerkezeti vonalak és befoglaló alakzatok

A kompozíciós arányok egy része szimmetriaviszonyokra vezethető vissza. A *szimmetria* legismertebb formája a tengelyes szimmetria. Szimmetriatengelynek tekinthető a kép geometriai középvonala, de lehet a kép főalakja, (vagy más egyéb alak, tárgy), illetve ennek középvonalán átmenő képzeletbeli „függőleges” egyenes vonal is.

A tökéletes szimmetria a képnek statikus jelleget kölcsönöz, nem kelt feszültséget. Az egyenlőtlen elosztás, az *aszimmetria* azonban azzal, hogy a felbomlott egyensúlyt ösztönösen vissza akarjuk állítani, esztétikai tevékenységre késztet. Az aszimmetriák között kiemelkedő szerepet játszik az aranymetszési arány.

Ha egy alak vagy tárgy a kép szimmetriatengelyébe kerül, annak jelentősége hangsúlyossá válik. *Paul Cézanne: Tálaló (Buffet)* címet viselő festményén a kép középvonalában lévő üveg vonzza a tekintetet (1. kép). A felső polcon lévő tányérok szimmetrikus elhelyezése szigorú rendet visz a látszólagos rendetlenségbe. A kompozíció fontos szerkezeti vonala a felső polcon álló edénykétől a kibomlott asztalkendő széléig húzódó képzeletbeli egyenes, mely az üvegen és a mellette álló poháron is áthalad.

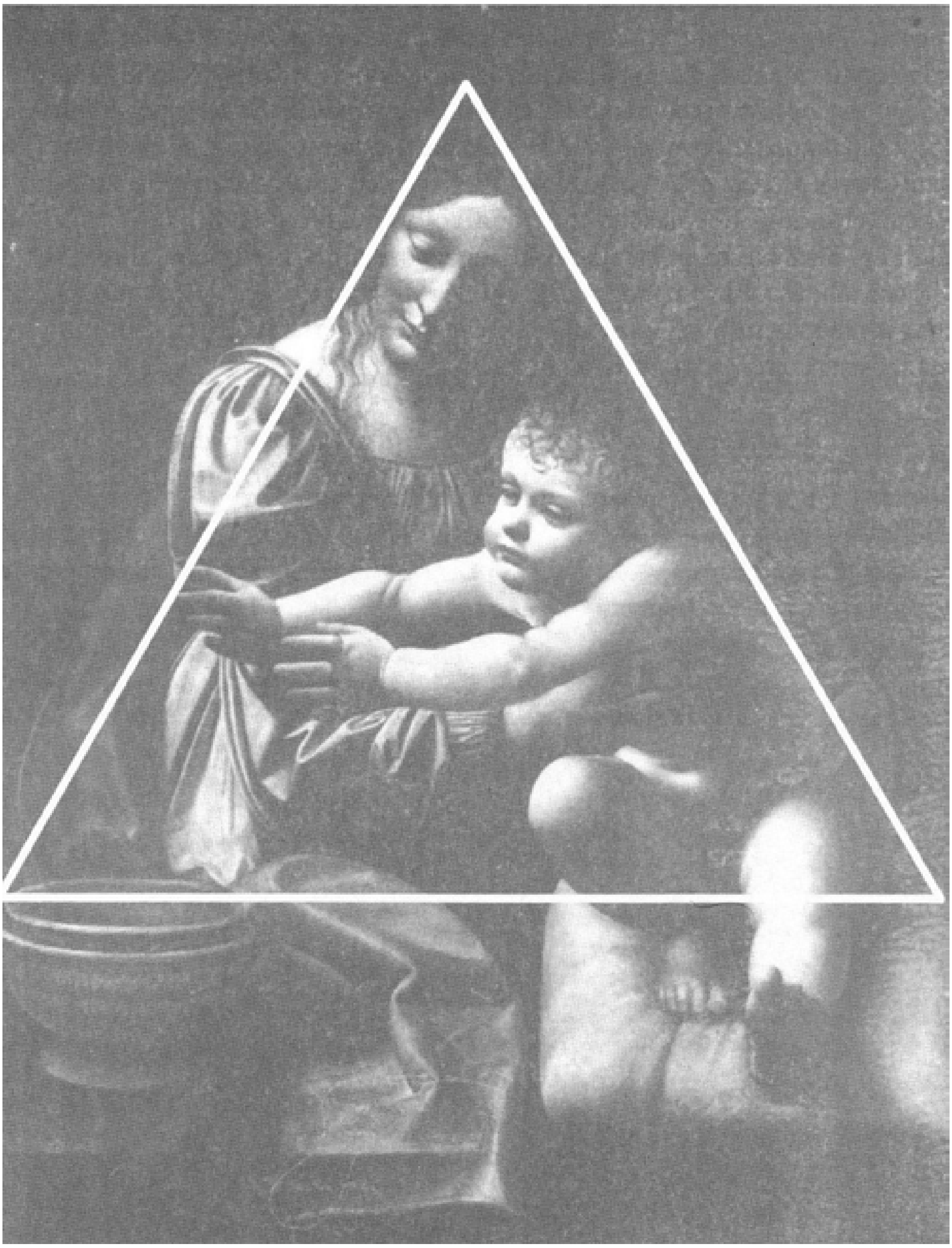


1. kép

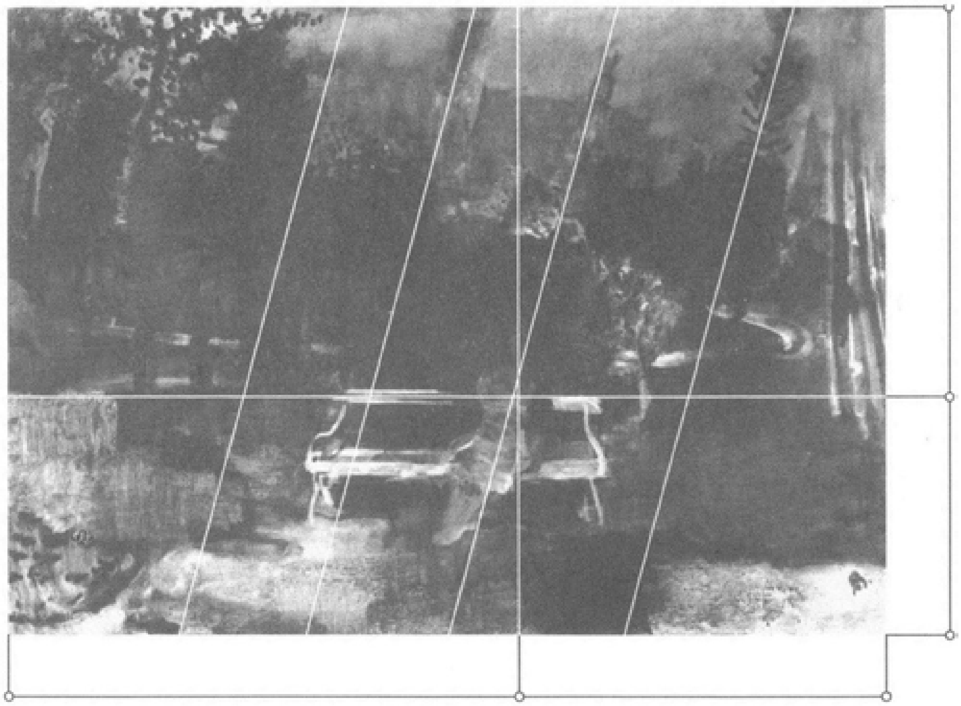
A kép vízszintes felezővonalának funkcionális szerepe van: a felette látható edényeket és az asztalon lévő ételeket választja el. Az asztalon álló pohár helyzetét tekintve azzal kap kitüntetett jelentőséget, hogy a középvonalán áthaladó egyenes pontosan a kép szélességének aranymetszetében van.

Ha a főalak vagy tárgy nem kerül a kép középvonalának megfelelő helyre, a rajta áthaladó képzeletbeli egyenes a kép terét meghatározott arányban osztja. Ez az arány a képen látható más személyek és tárgyak egymáshoz való viszonyához hasonlóan többnyire két kis egész szám hányadosával fejezhető ki, melyek között gyakran szerepelnek a Fibonacci-számok, és kitüntetett szerepe lehet az aranymetszési aránynak is. A kép terének tagolása nemcsak „függőleges”, hanem „vízszintes” tengelyek mentén is történhet.

Az egyes alakok, tárgyak elhelyezését, a belső arányok kialakítását *láthatatlan* befoglaló alakzatok és szerkezeti vonalak is segítik. Ezek a csak a szemlélő képzeletében létrejövő vonalak egyúttal a figyelem irányítására is szolgálnak, vezetik a tekintetet, ezáltal segítik a szemlélőt az esztétikai élmény teljesebb megélésében, a műalkotás megértésében.



2. kép



3. kép

A kép alakjai köré kirajzolódó legegyszerűbb befoglaló alakzatok geometrikus ábrák: háromszög, négyzet, téglalap vagy kör. Ezek az alakzatok önmagukban nem hordoznak jelentést, a képen betöltött szerepük révén válnak összetartó erővé és ezáltal kapnak jelentőséget.

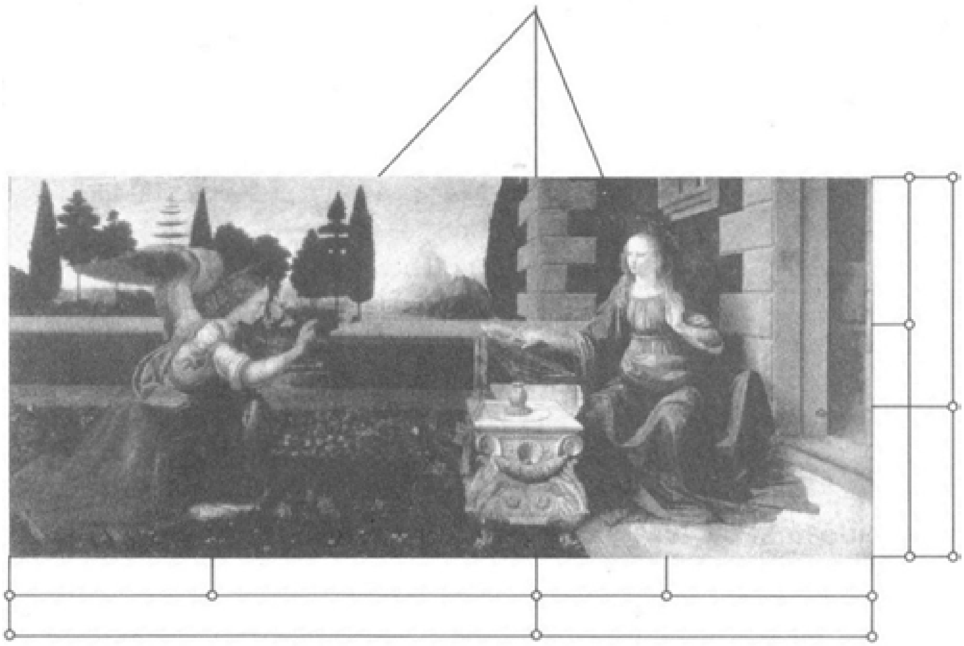
A befoglaló vonalak szerepét jól illusztrálja a Milánóban élt *Leonardo* tanítvány, *Giovanni Antonio Boltraffio: Mária gyermekével* (Lodi Madonna) néven ismert neves alkotása, melyen a kompozíciót egyetlen háromszög foglalja egységbe (2. kép).

Ha *Bernáth Aurél: Esti parkban* című képén a padon ülő nőalakot megfigyeljük, észrevehetjük, hogy a rajta átfektethető egyenes a függőleges irányhoz képest „ferde” helyzetű, azzal kb. 15°-os szöget zár be (3. kép). Ugyanilyen irányú a képen látható legtöbb fa dőlése is. A párhuzamosan futó „ferde” szerkezeti vonalak a néző képzeletében a távolodás érzetét keltik, és ezzel a képnek sajátos dinamikát kölcsönöznek.

A padon ülő nőalak fején áthaladó vonal a kép terét 7:4 arányban osztja, ami a *Fibonacci-sorozat* egy változatának, a *Lucas-sorozat* számaiból képzett aránynak felel meg. A képen látható pad felső támlája párhuzamos a kép vízszintes széleivel, és a magasságot 5:3 aránynak megfelelő osztóponton halad át.

Arányok és reneszánsz alkotások

A reneszánsz mesterek legtöbb alkotásán az aranymetszési arány kiemelkedő szerepet játszik. E tudatos képszerkesztésnek egyik ragyogó példája *Leonardo: Angyali üdvözlet* című alkotása (4. kép). A képen a könyvtámasz alatti asztalka középvonalán áthaladó függőleges vonal a vízszintes helyzetű kép terét pontosan *aranymetszés* szerint osztja. Mária, illetve az angyal alakjának a középvonala az osztással kapott részeken belül szintén az aranymetszésnek megfelelően helyezkedik el úgy, hogy mindkettő az adott térrész ugyanazon oldalára esik. Ezzel olyan aszimmetria jön létre, mely a kép egyensúlyát biztosítja.



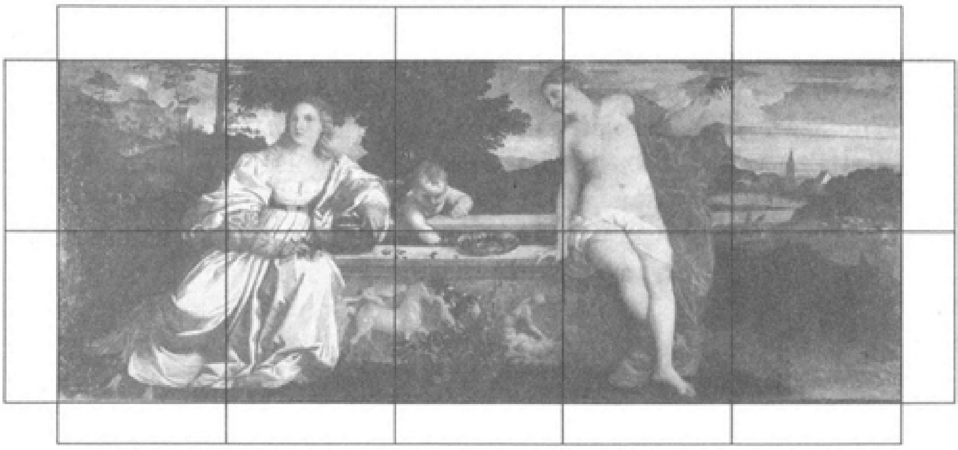
4. kép

A kép függőleges terét két vízszintes egyenes vonal az aranymetszésnek megfelelő arányban osztja, melyek közül a felső a kertben húzódó alacsony építmény fedőlapjának felső élén halad át, az alsó pedig a kerti utat a pázsittól választja el.

Ha a két nőalak mozdulatait követő vonalakat gondolatban meghosszabbítjuk, azok metszéspontja szintén az aranymetszés szerint osztó, az asztal középvonalán áthaladó egyenesre esik. Ez az egybeesés is arra utal, hogy ez a kép valódi főtengelye.

Tiziano az arányok szerepét a kép terének geometriai felosztása segítségével vizsgálta. *Égi és földi szerelem* című híres képének felosztásában a Fibonacci számoknak megfelelő 2:5, illetve 3:5 osztási arányok szerepelnek (5. kép).

A kép hossza az arra merőlegesen húzható egyenes vonalakkal öt egyenlő részre osztható. Az így kapott második és a negyedik mező a felöltözött földi, illetve a ruhátlan égi



5. kép

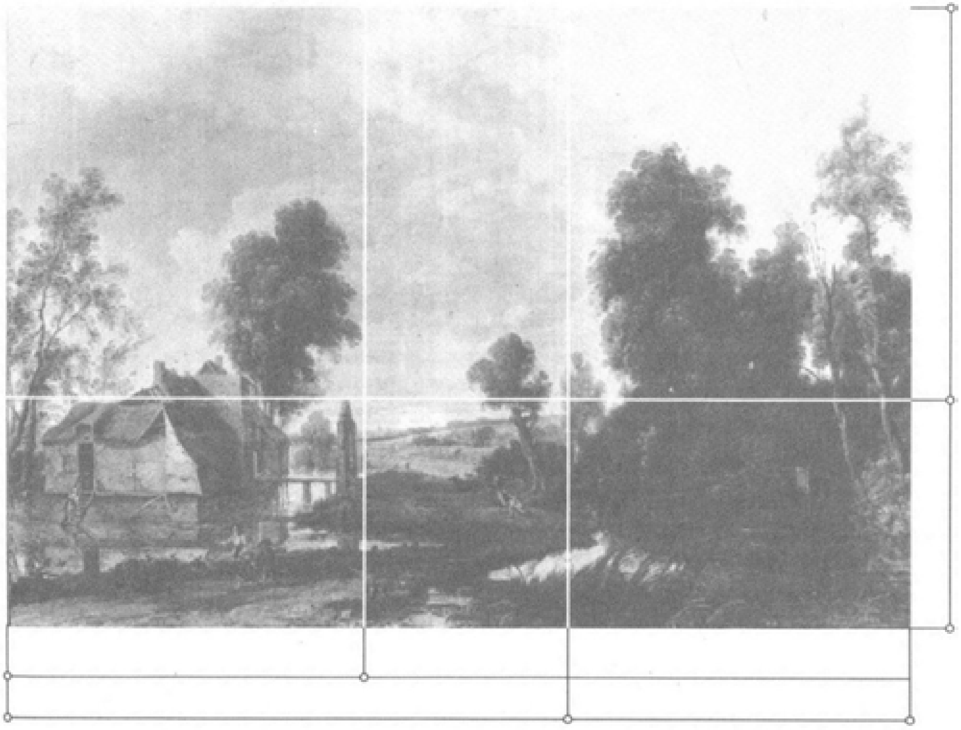
szerelmet megtestesítő *Vénusz* alakját, a középső rész a kőszarkofág szélénél játszadozó gyermeket foglalja magában. A kép szélső mezői távoli tájak finoman kidolgozott részleteit rejtik. A magasságot felező, a kép hosszirányával párhuzamos egyenes a kép terét is felezi, és ezzel a képtér tíz egyenlő területű négyzetre osztódik. A gyermek feje a két nőalak vele azonosságban mért testközepe között az aranymetszésnek megfelelő távolságban helyezkedik el. A nőalakok testhelyzetének irányába mutató középvonalak egyenesei a gyermekfej közepén áthaladó, a kép hosszára merőleges egyenesen (tengelyen) metszik egymást.

Változó korok, ismerős arányok

A reneszánsz hatás továbbélését bizonyítja, hogy a kitüntetett arányok alkalmazása a képszerkesztésben a későbbi korok művészeti irányzataiban is szerephez jutott. Mind a barokk nagyívű történelmi és vallási tárgyú alkotásain, mind a flamand tájképfestők képein találkozunk aranymetszési, vagy a a Fibonacci-számokból képzett arányokkal.

A *Rubens* nyomdokain haladó flamand festő, *Jan Wildens* 1629-ben alkotott *Mocsárvidék* címet viselő hangulatos képén az előtérben játszó gyermek pontosan a kép szélességének rövidebb aranymetszetében van (6. kép). A kép másik oldalán álló facsoport alacsonyabb, egyenes törzsű fája jelöli ki a hosszabbik aranymetszetet. A horizontvonal, mely egyúttal az épület előtt álló kőkapu tetejét is érinti és átmegy az épület egyik alacsonyabban fekvő tetősíkján, a kép magassági méretének aranymetszete.

Az *impresszionizmus* a valóság természethű, aprólékos ábrázolási módjával szemben a pillanatnyi hatást kiváltó képek alkotását tartotta fontosnak. Azonban a szubjektív benyomásokra építő irányzathoz tartozó képek között szép számmal találhatók olyan alkotások,



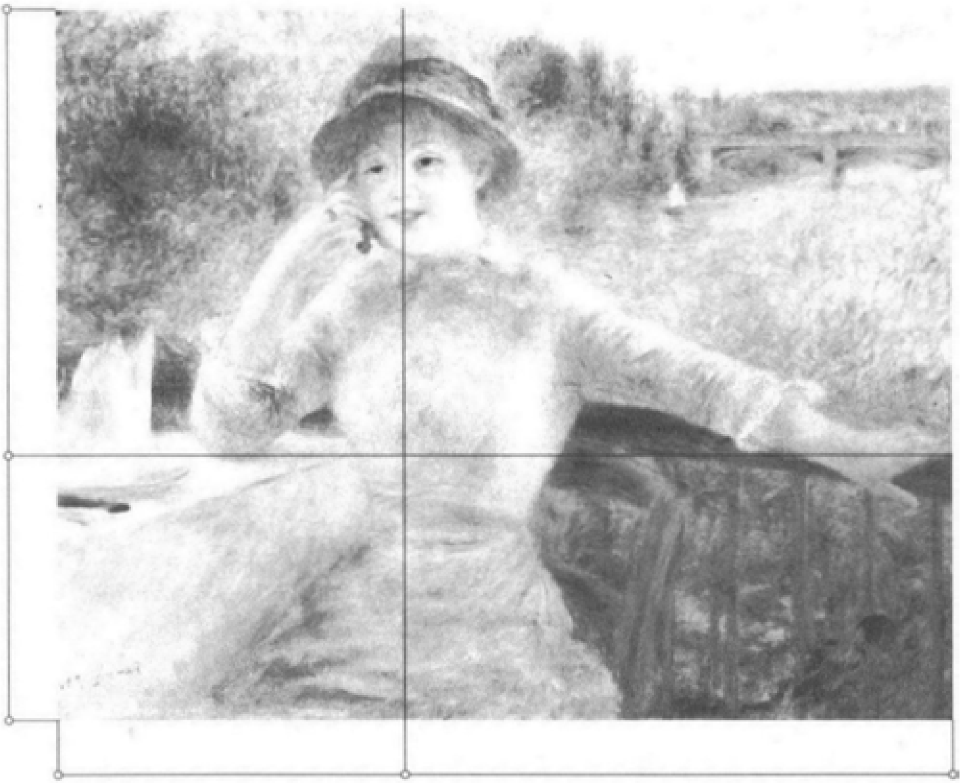
6. kép

melyek látszólagos elnagyoltságuk és könnyedségük mellett is szigorú kompozíciós szabályokat követnek.

August Renoir: Nő a Békástanyán című képe valódi impresszionista festmény, ám üde színfoltjai és elmosódott kontúrok keltette könnyedsége mellett is jól átgondolt kompozíciós törvényeknek engedelmeskedik (7. kép). Az ábrázolt nő arcának középvonalán áthaladó egyenes pontosan a kép szélességi méretének az aranymetszetébe kerül. Az erkély korlátjának felső széle, melyen a hölgy karja, illetve keze is nyugszik, a kép széléhez annak aranymetszetében illeszkedik. Az e ponton áthaladó, a kép hosszával párhuzamos egyenes egyúttal a másik karnak az asztalra támaszkodó pontján is áthalad.

A kompozíciós arányok matematikai módszerekkel való meghatározását célzó irányzatok egyik legmarkánsabb képviselője a XIX. század második felében a francia *Georg Seurat*, aki nem csupán a méretekben jelentkező arányokat vizsgálta, hanem a színekhez számértékeket rendelve, azok viszonyait is elemezte.

Seurat a tökéletes kompozíció keresésében a Fibonacci-sorozaton és az aranymetszésen kívül számelméleti meggondolásokra is támaszkodott. Matematikai módszerek alkalmazásában *Henry Charles* matematikus barátja volt segítségére. *Színkompozíciós* vizs-



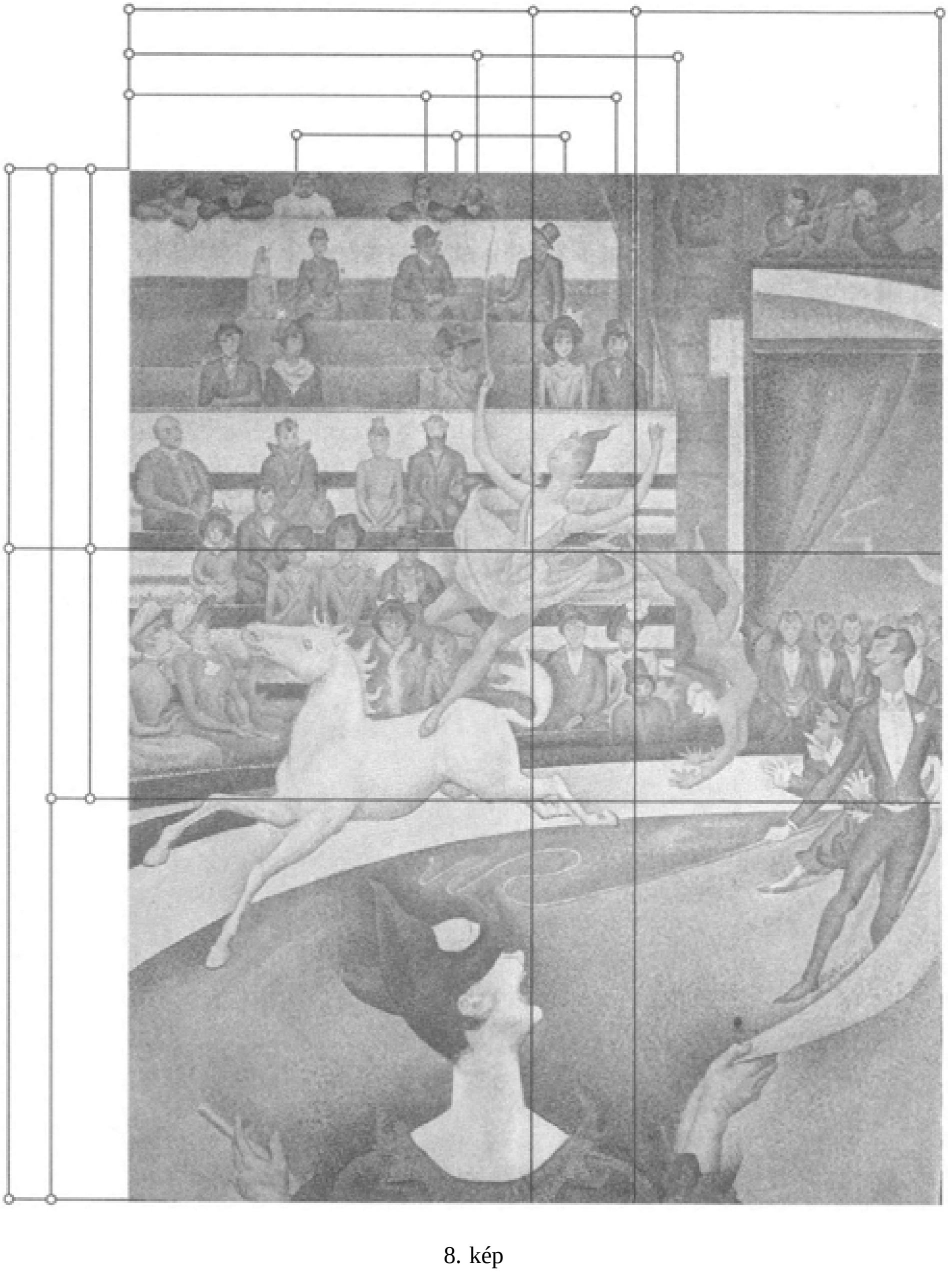
7. kép

gálatai eredményeként fejlesztette ki a *pointillista* technikát, melynek lényege, hogy a színhatás a színskála elemeiből összeállított apró, különálló pontok felvitelével alakul ki.

Egyik híres, az 1890–91 években festett képe *A cirkusz* (8. kép). A festmény függőleges tengelye a műlovarnő testének középpontján halad át, és teljes szélességének egyik aranymetszetét a felső üléssorok szélén álló oszlop jelenti. A műlovarnő felemelt karja a éppen az erkély hosszának megfelelő szakasz aranymetszetébe kerül.

A porond szélén, illetve az azt határoló válaszfal korlátjának tetején áthaladó, a kép szélével párhuzamos egyenes a kép függőleges terének aranymetszete, és e vonaltól a kép felső széléig terjedő távolságot az erkély korlátján áthaladó egyenes szintén aranymetszés szerint osztja. Az erkély második üléssorának a támlája, mely a kép szélén is látható, kép magasságának másik aranymetszetét jelöli ki. A levegőben bukfencet hányó bohóc teste az aranymetszeteken átmenő párhuzamos egyenesek közé kerül.

A nézők száma és elhelyezkedése sajátos arányokat, illetve szimmetriát mutat. Az első négy sorban a nézők száma a legfelső sortól kezdve 5, 4, 5, 4, és öt néző esetén ketten, illetve hárman alkotnak kisebb csoportokat.



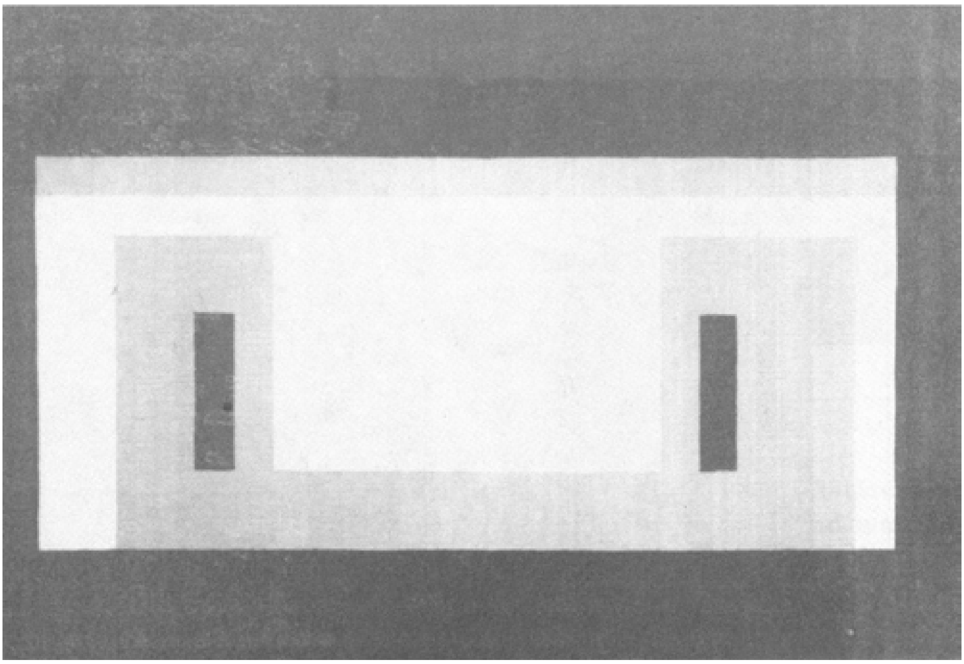
8. kép

A második sorban ülő kalapos férfi az üléssor hosszának aranymetszetében helyezkedik el. A felülről számított harmadik sor közepén három kalapos nő ül, akik közül a középső alakjának középvonala a két szomszédja közötti távolságot szintén az aranymetszésnek megfelelően osztja. A nézőtér statikus elrendezését a porondon szereplő artisták dinamikus mozgása ellensúlyozza.

Arányok és szimmetriák

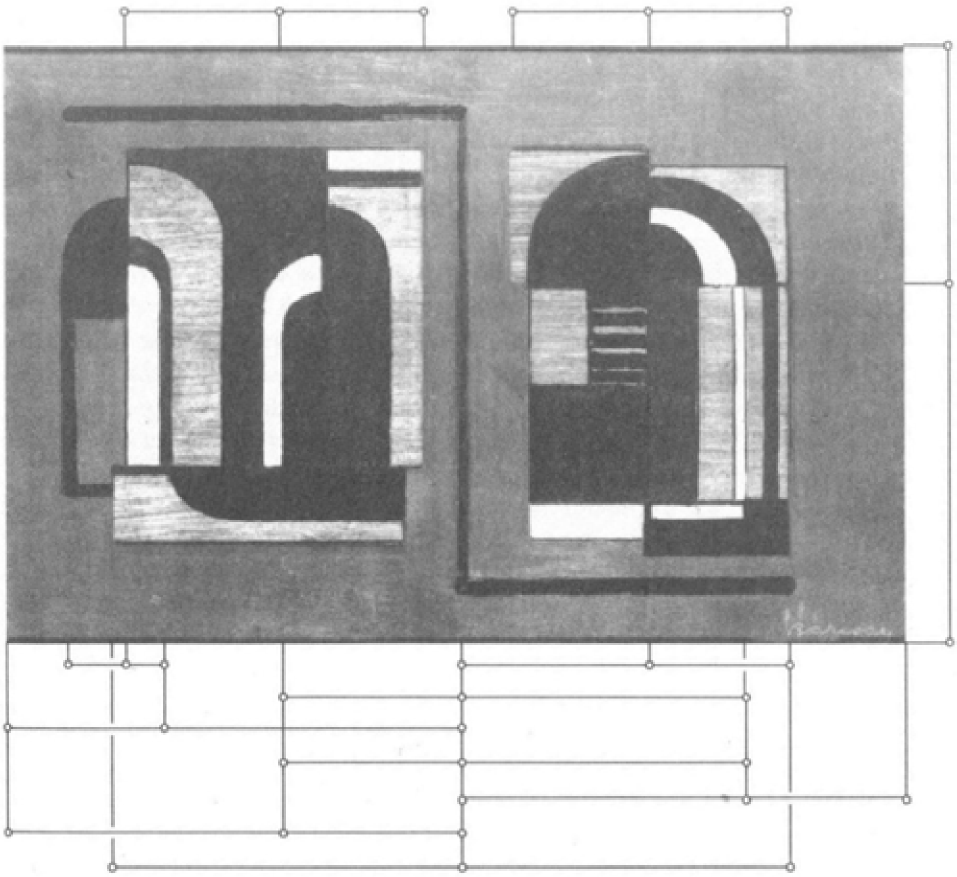
A szimmetriaviszonyok játéka önmagában is lehet esztétikai élmény forrása. Ezt igazolják egyes absztrakt irányzatokhoz tartozó műalkotások is, melyek közül a legismertebbek a holland *Piet Mondrian,* vagy a magyar származású *Viktor Vasarely* alkotásai.

Josef Albers: Világosszürke fal címet viselő képén egyszerű geometriai alakzat, a téglalap a főszereplő (9. kép). A különböző alakú és méretű téglalapok elhelyezésében rejlő szimmetria, a szürke szín sötétebb és világosabb tónusainak, árnyalatainak variációja vált ki esztétikai hatást.



9. kép

Hasonlóan az egyszerű formák játékos variációival keltenek esztétikai élményt *Barcsay* egyes konstruktív képei is. A művész *Íves ablakok szürkében* című alkotásán az aranymetszési arányok szinte egymásba kapcsolódnak, és az így nyert formák és színek kompozíciója gyönyörködtet (10. kép).



10. kép

A virágok szirmai sok esetben szimmetriát mutatnak. Ez a szimmetria azt jelenti, hogy az alakzat bizonyos szöggel való elfordulása esetén önmagával fedésbe kerül. Ilyen *forgási szimmetria* található már az őskori cserépedények vonalas ábráin, és a népművészetből jól ismert köralakú edényeken, tányérokon is.

A főként hímzéseken megjelenő ismétlődő szegélymotívumok *eltolási szimmetriát* jelentenek. A nagyobb ábrák között megjelenő, ugyanolyan alakú, de kicsinyített formák *hasonlósági szimmetria*ként foghatók fel.

12. Perspektíva a művészetben

A tér és a sík ellentmondása – A térbeliség érzékeltetése ősi és ókori ábrákon – Színperspektíva és méretrövidülés – Az egy pontra támaszkodó perspektíva gyakorlata és elméleti alapvetése – A perspektív ábrázolás geometriai törvényei – A kiterjesztett perspektíva és a modern művészeti irányzatok

A tér és a sík ellentmondása

A képkészítés, a festészet és a grafika alapvető problémája, hogy a valóságban három dimenzióban megjelenő alakzatokat a kétdimenziós síkon kell megjeleníteni. Az ókori ábrákon, a középkor festményein nem érzékelhető a tér mélysége. A valósághű optikai tér csak a korai reneszánsz festők képein jelenik meg, és ennek tapasztalatai vezetnek a geometriai perspektíva tudományos megalapozásához.

A geometria törvényeire épülő perspektíva felfedezése arra a felismerésre támaszkodik, hogy a távolabbi tárgyakat kisebbnek, a közelebb lévőket nagyobbaknak látjuk. A gyermek a távolabbi dolgokat valóban kisebbeknek is képzeli, és csak tanulás során sajátítja el a térbeli látást.

Az ősi kultúrák rajzos emlékei, a babiloni cseréptöredékek mintái és az egyiptomi vázák ábrái arról tanúskodnak, hogy alkotóik nem ismerték a *perspektívát.* A közeli és távoli tárgyak viszonyát a gyermeki rajzokhoz hasonlóan az alakok, tárgyak elhelyezésével érzékeltették. Ezeken a rajzokon a távolabbi tárgyak sokszor méretváltoztatás nélkül, a közelebb lévők fölött jelennek meg. Nem találkozunk a térbeliség kifejezésének *perspektív* ábrázolásra utaló módszereivel a korabeli távolkeleti művészeti alkotásokon sem.

Az ősi Egyiptomban készült képek és domborművek az ábrázolt tárgyakat, alakokat többnyire arról az oldalukról mutatják be, ahonnan azok a legjobban láthatók. Ennek eredménye az emberi alakok olyan ábrázolási módja, mely a fejet profilban, a testet szemben láttatja. A méretbeli arányok a térbeliség kifejezése helyett gyakran az ábrázolt alakok rangjának felelnek meg. A 11. kép színes fafaragásos fatábla (sztélé) részletét mutatja, melyen a középen trónoló *Ozirisz* előtt *Anúbisz*, a sakálisten kézenfogva vezeti az elhunytat. A trónus mögött a sólyomfejű isten, *Hórusz* és *Izisz* láthatók.

A görög vázafestők műhelyeiből kikerült vázaképeken egy ideig az egyiptomi hatás érvényesülése követhető nyomon. Az időszámítás előtti 6. század végén azonban a görög vázafestészetben forradalmi változás következett be: a térbeliséget egyes testrészek méreteinek megváltoztatása, *rövidülése* fejezi ki. A *feketealakos* technikát felváltó úgy-

11. kép

nevezett *vörösalakos* vázákon már feloldódik az ábrázolás merevsége, és előfordul az arc szemben való ábrázolása is. Ez azonban még nem jelent igazi térbeli megjelenítést, a kép kétdimenziós szerkezete nem bomlik meg.

A 12. képen feketealakos attikai görög amfóra vázaképe látható az i. e. 6. századból, mely *Pallasz Athéné* születése előtti pillanatokat ábrázolja, aki majd teljes fegyverzetben pattan ki *Zeusz* fejéből. A 13. kép vörösalakos vázafestménye *Andokidész* műhelyéből kikerült görög külix-vázán található, mely a stílusváltás kezdeti időszakában készült, és valószínűleg a szomját oltó Héraklészt ábrázolja. Az új stílus jegyeit az alak testtartásának és tekintetének életszerűsége, az edényt tartó és támaszkodó kezek már térbeliséget kifejező ábrázolása jelentik.

12. kép

A korai keresztény középkorban a festők és szobrászok alkotásai között a valósághűség szempontjából feltűnően nagy az eltérés. Ez főként arra vezethető vissza, hogy amíg a szobrászatban a térbeli alakok a valóságos háromdimenziós a térben formálódnak meg, a festő a térbeli viszonyokat a kétdimenziós síkon kénytelen ábrázolni.

13. kép

A festők a térbeliséget eleinte a fény és árnyék játékával, világosabb és sötétebb tónusokkal, a távolabbi tárgyak körvonalainak elmosódottságával próbálták érzékeltetni (színperspektíva). E technikák alkalmazásában kiemelkedő helyet foglal el *Giotto* (1267?–1337), akinek képein a fény és árnyék virtuóz alkalmazásán túl a méretváltozáson alapuló módszer elemei is felfedezhetők. Giotto képeinek rendezettsége nagyban hozzájárult ahhoz, hogy feloldja a középkorra jellemző misztikus képábrázolási elképzeléseket.

A geometriai perspektíva megjelenése

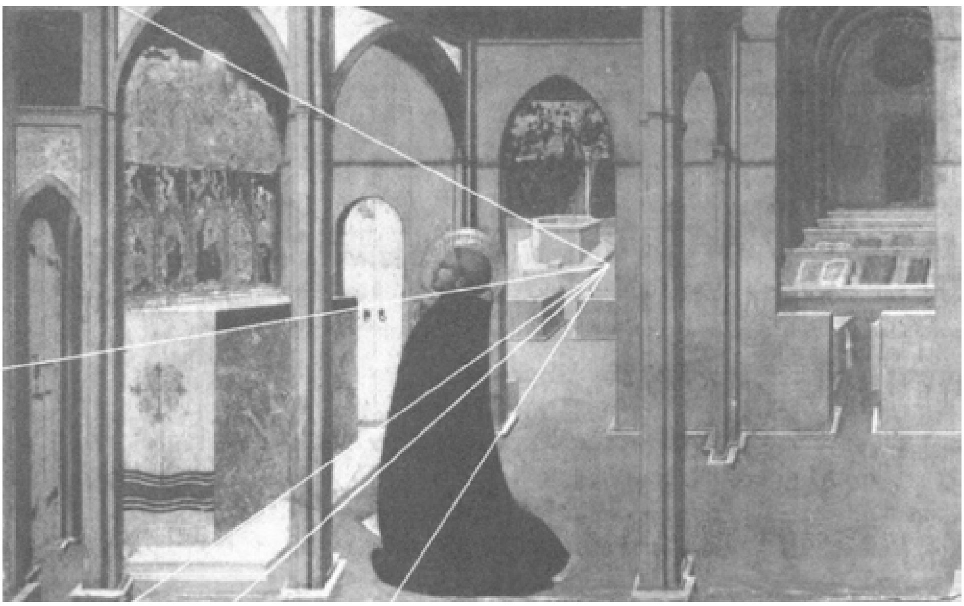
A perspektíva törvényeinek felismerése a reneszánszkori nagy művészek, festők és építészek nevéhez fűződik. Közülük elsősorban *Brunelleschi, Alberti*, *Masaccio* és *Pierro della Francesca* nevét kell megemlíteni, mint olyan művészekét, akik a látszati képek szerkesztésének elméleti alapjait vizsgálták, és annak eredményeit munkáikban is alkalmazták.

Brunelleschi (1377–1446) firenzei építész és szobrász a méretek látszólagos változásának, a rövidülésnek elméleti hátterét kutatta. *Alberti* (1404–1472) olasz építész az arány elméletének vizsgálatán keresztül közelítette a perspektív ábrázolás törvényeit. Az erre vonatkozó írásai a reneszánsz kor első ilyen témájú munkái közé sorolhatók. A fiatalon elhunyt *Masaccio* (valódi nevén *Tomaso de Giovanni di Cassai*) rövid életében (1408–1428) is csodálatos műveket alkotott. Nevezetes alkotása a firenzei *Sta Maria Novella* templom mellékkápolnája számára készült *Szentháromság* című freskója.

Pierro della Francesca (1415–1492), a reneszánsz művész és tudós, akit a *homo universalis* klasszikus megtestesítőjének tartottak, elméleti munkájával alapozta meg a perspektíva törvényeinek gyakorlati alkalmazási lehetőségeit.

Mesterien alkalmazta a perspektíva törvényeit *Leonardo.* A térhatás lenyűgöző látványát nyújtja 492 és 1495 között készült *Utolsó vacsora* című képe, mely ma is a milanói *Sta Maria delle Grazie* kolostor ebédlőjének falát díszíti. Ugyancsak jól fejezi ki a térbeliséget az előző fejezetben szereplő *Angyali üdvözlet* című képe is, melyen a perspektív ábrázolás szerkesztési vonalai és a perspektíva középpontja is jól felismerhetők.

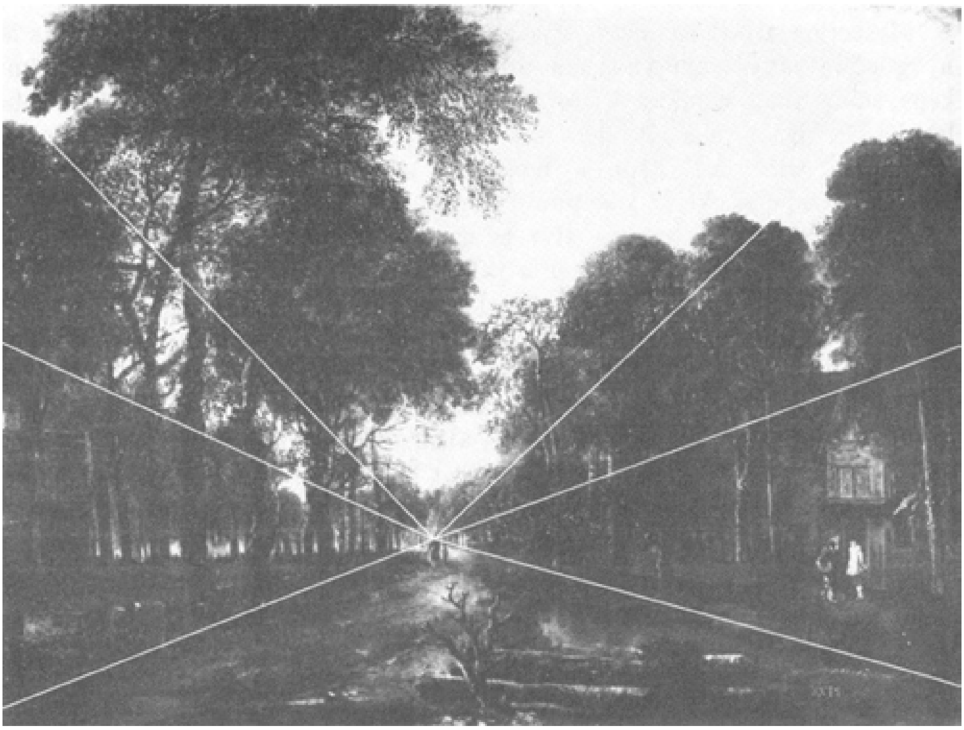
A térbeliségnek a perspektíva geometriai törvényeire támaszkodó kifejezése a reneszánsz festészetben általánossá vált, és ezt a korabeli mesterek több-kevesebb következetességgel alkalmazták. A reneszánsz képeken a perspektív ábrázolás szerkesztési vonalai sok esetben jól rekonstruálhatók. E korai törekvések ismerhetők fel a sziénai *Sassetta* 1423 körül készült oltárképén, melyen *Aquinói Szent Tamás imádkozik* (14. kép). A festményen az oltár valóságban párhuzamos élein áthaladó egyenesek egy pontban metszik egymást, a kép sajátosan konstruált belső tere azonban már nem erre a perspektíva-középpontra támaszkodik.



14. kép

A térbeliség kifejezésének a perspektíva törvényeire támaszkodó módszere a későbbi korok képszerkesztésében is fontos szerepet kapott. A holland tájképfestészet kiváló képviselője, *Aert van der Neer: Falusi utca* című képe jól érzékelteti a táj térbeliségét (15.

kép). Bár az összefutó vonalak geometriája az első pillantásra nem szembetűnő, a figyelmes néző felfedezheti a kép perspektivikus szerkesztettségét.



15. kép

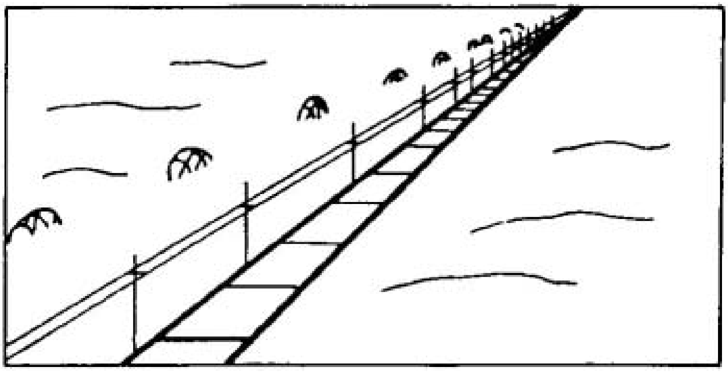
A perspektív ábrázolás törvényeinek alkalmazása a térbeliség kifejezésére napjaink képszerkesztési eszköztárában is megtalálhatók.

A perspektív ábrázolás törvényei

Ha egy egyenes irányban futó sínpáron végigfuttatjuk tekintetünket, úgy látjuk, mintha a sínszálak a látóhatár vagy *horizont* egyetlen pontjában találkoznának. Ha megfigyeljük a sínek között elhelyezett talpfákat, azok hossza is egyre rövidebbnek tűnik, és a köztük lévő távolságok is csökkenni látszanak.

Ugyancsak egyre kisebbeknek észleljük a sínek mentén egymástól egyenlő távolságban elhelyezett távíróoszlopokat, és a közöttük lévő távolságokat is (12.1 ábra). A megfigyelések egyértelműen azt igazolják, hogy a távolabbi tárgyak kisebbeknek, az ugyanolyan nagyságú, de közelebbiek nagyobbaknak látszanak.

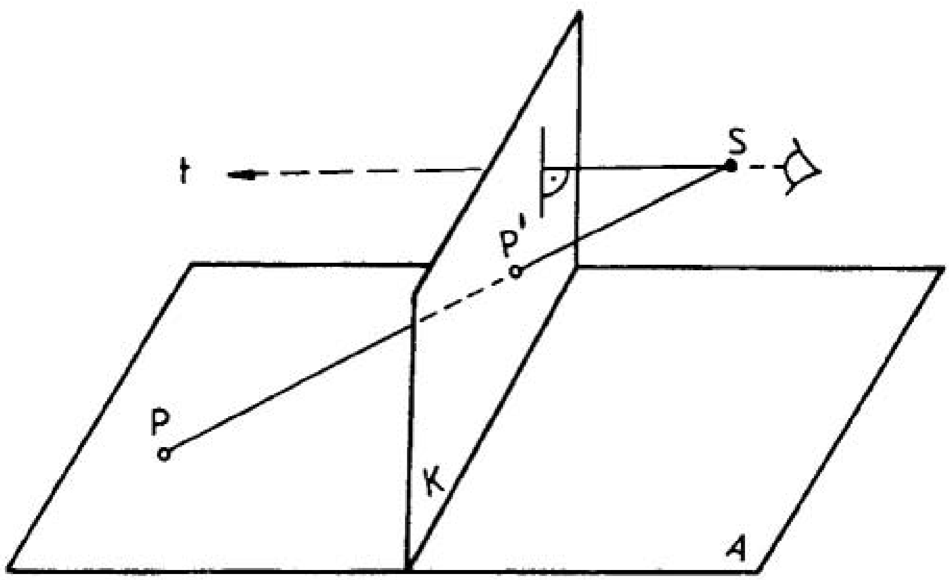
Hogyan szerkeszthetők olyan ábrák, melyek a térben megjelenő tárgyakat a valóságnak megfelelően láttatják? A valóságos tárgyak valóságnak megfelelő ábrázolását és láttatását



12.1 ábra

a perspektív ábrázolás törvényei teszik lehetővé. Ezek megértéséhez néhány alapfogalommal kell megismerkedni.

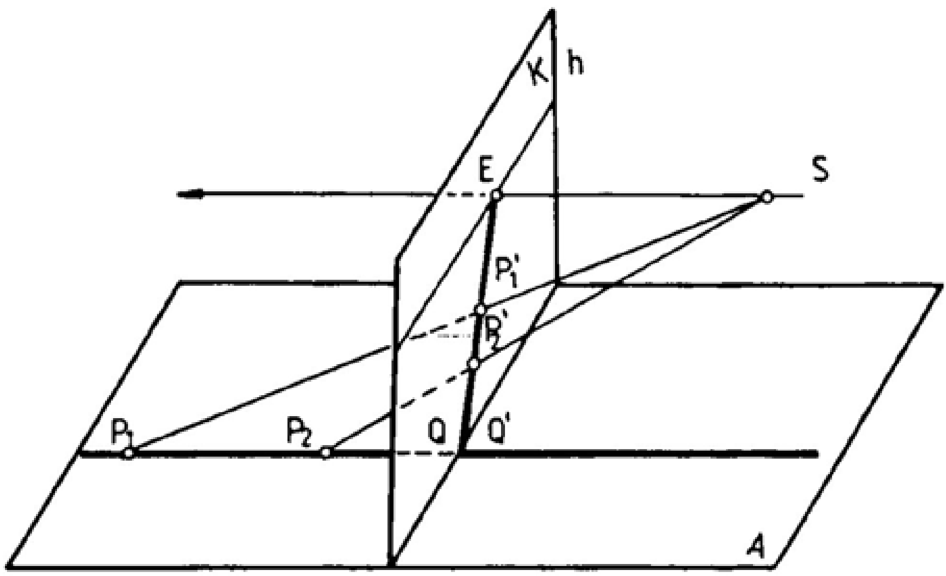
Alapsíknak (A) tekintjük azt a síkot, melyen az ábrázolandó tárgyak, dolgok elhelyezkednek. *Képsík* (K) az az alapsíkra merőleges sík, mely egyúttal merőleges az alaphelyzetünknek megfelelő irányú, a szemünkből kiinduló, az alapsíkkal párhuzamos sugárra vagy *tengelyre* is (12.2 ábra).



12.2 ábra

A valóság képe úgy jelenik meg látómezőnkben, mintha az a szemünktől (S pont) a *tisztalátás* távolságában (15–25 cm) elhelyezett képsíkra lenne vetítve. A képszerkesztés szabályai az erre a síkra való vetítés törvényszerűségeiből vezethetők le.

Az alapsíkon lévő P pont P' képe a P és S pontokat összekötő PS egyenesnek a K képsíkkal alkotott *döféspontja.* (Ha a PS egyenes merev rúd lenne, ez a valóságban is átdöfné K képsíkot). Az alapsík P_1 és P_2 pontjainak képe a K képsíkon P_1' és P_2', és a P_1P_2 egyenes K képsíkbeli megfelelője $P_1'P_2'$ egyenes (12.3 ábra).



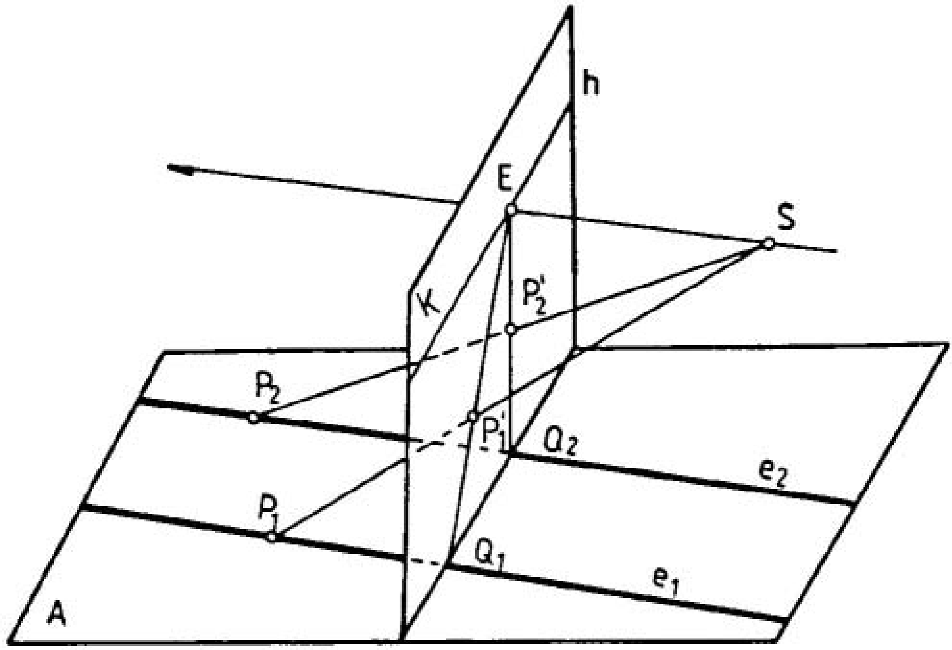
12.3 ábra

Ha a P pont a szemünktől nagyon nagy távol kerül, (végtelen távoli vagy *ideális pont*), abból a szemünkbe jutó sugár párhuzamos lesz az alapsíkkal. Az ideális pont képe az *enyészpont,* vagy *iránypont,* az ezen átmenő, az alapsíkkal párhuzamos egyenes a *horizontvonal* (h). A horizontvonalon sorakoznak a végtelen távoli pontok képei.

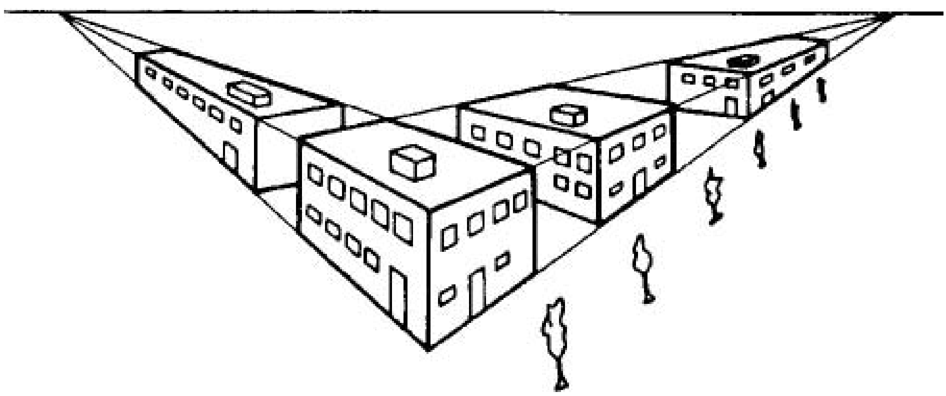
Az ugyanolyan irányú, vagy párhuzamos egyenesekhez azonos ideális pont, és ennek megfelelően azonos enyészpont tartozik, de különböző irányokhoz különböző ideális pontok tartoznak. Ennek egyik következménye, hogy a párhuzamos egyenesek képei a horizontvonalon metszik egymást (12.4 ábra).

Annak megfelelően, hogy a szem számára egyetlen, vagy több nézőpontot jelölünk ki, beszélünk egy, vagy több enyészpontú (középpontú, nézőpontú) perspektíváról. A reneszánsz művészek többnyire egy, de legfeljebb két enyészpontra támaszkodó perspektívát alkalmaztak.

A 12.5 ábrán modern házcsoport képe látható két enyészpontra támaszkodó perspektív ábrázolással.



12.4 ábra



12.5 ábra

A perspektíva gyakorlati alkalmazásának sikerei a kor matematikusait arra ösztönözték, hogy a perspektíva törvényeinek mélyebb hátterét is kutassák. A perspektíva felfedezése így hatással volt a geometria egyes ágainak fejlődésére, és megvetette a projektív geometria alapjait.

A kiterjesztett perspektíva

Az egy pontra támaszkodó perspektíva egyoldalú alkalmazása – minden művészi értéke mellett – a képnek statikus jelleget kölcsönöz. A térből meghatározott térrészt különít el, ablakot vág és ezzel leszűkíti azt. Lényegében hasonló hatást vált ki a két enyészpontú perspektíva is.

A valóságban azonban nem egyetlen pontból szemléljük a világot. A látás aktív tevékenység, melynek során szemünk a különböző helyzetekből látott képeket egyetlen képpé illeszti össze.

Már a reneszánsz művészetben is találhatók olyan törekvések, melyek az egyetlen (vagy akár több) pontra támaszkodó perspektíva geometriai törvényei *helyett* vagy *mellett* a térbeli viszonyokat a színek különböző árnyalataival próbálták kifejezni. A távolabbi tárgyak halványabb, elmosódott ábrázolási módja, a fény és az árnyék játékának tudatos alkalmazása már *Giotto* képein is megtalálhatók. A színtechnika művészi alkalmazása *Rembrandt,* a németalföldi *Ruysdael,* és az angol tájképfestészet kiemelkedő alakja, *Turner* munkáin jól megfigyelhetők.

A modern művészet egyes irányzatai a perspektíva kiterjesztésének merőben más eszközeit is alkalmazzák. Ezek közé tartoznak a képszerkesztés olyan módszerei, melyek a gyermeki rajzokhoz hasonlóan a valóságot egyszerre több oldalról mutatják be. Más irányzatok, melyek közül legismertebb a *kubizmus* és az *expresszionizmus,* az absztrakció különböző módszereit használják fel a tér láttatására.

A *kubizmus* a tárgyakat, alakokat mintegy a térben kiforgatva, egymás mellett ábrázolja. A kubizmus legkiemelkedőbb képviselője *Pablo Picasso.* Az *expresszionizmus* a belső élmények kifejezésére törekszik, és mint ilyen, az *impresszionizmus* ellentéteként fogható fel, ahol az intuíció helyett az intellektusra, az érzelem helyett a technikára kerül a hangsúly.

Az absztrakt képek sokak számára érthetetlenek, és megjelenésük ma is elutasítást vált ki. Azonban a ma általánosan elfogadott esztétikai felfogás szerint azok a képek, melyek összefüggő, egységes kompozíció benyomását keltik, és ezáltal képesek érzelmeket kelteni, valódi esztétikai értékeket hordoznak.

13. Arány és zene

A hang, mint rezgés – a rezgésszámok viszonya, skálák és hangközök – pentatónia és aranymetszés – A pitagoraszi zeneelmélet – A skálák kromatikus bővítése és a temperált skála – Arányok a zenemű szerkezetében

Arányok a zenében

A zene időben lejátszódó folyamat. Ahogyan a képzőművészetben az arány a tér szerkezeti tagolásának kifejezője, a zenében az arány az idő strukturálására vonatkozik. Mivel az időbeli változások magának a zenei hangnak a keletkezésétől a zenemű megkomponálásáig különböző szinteken játszódnak le, a zenében az arány több vonatkozásban is meghatározó szerepet játszik.

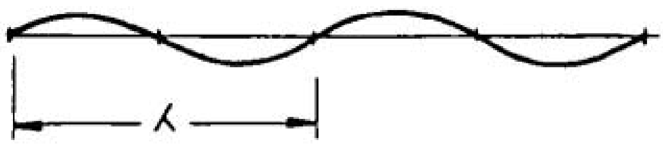
A hang magassága az időegység alatt keltett rezgésszámtól függ; a hangok viszonya, a skálák felépítése a rezgésszámok viszonyára vezethető vissza. Az egyszerre megszólaló hangok hanghatását, a *konszonancia* és *disszonancia* fokát az együtthangzásban résztvevő hangok rezgésszámainak viszonya vagy *aránya* határozza meg. Arányok határozzák meg a *ritmust*, az *ütemet* és azok kapcsolatát, valamint a teljes zenemű felépítését, *kompozícióját* is.

Hangmagasság és rezgésszám

Az emberi hang a hangszalagok rezgése által keletkezik. Talán ez is egyik oka annak, hogy a hang magasságára vonatkozó kísérletekhez húros hangszereket (többnyire egyhúros *monochordot*) használnak. Ha egy adott hosszúságú húrt rezgésbe hozunk, azon állóhullámok keletkeznek. A húr egy adott pontja mindig ugyanakkora maximális kitérésű *(amplitúdójú)* rezgéseket végez, melynek nagysága a pont helyzetétől függ (13.1 ábra).

13.1 ábra

Az így keletkezett rezgéseket a levegő továbbítja fülünk dobhártyájához, melynek rezgéseit meghatározott intervallumban hangként érzékeljük. Ez az intervallum az emberi fül számára 16 és 20 000 *Hertz* közötti érték. (Ennyi rezgés másodpercenként). Az alaphang hullámhossza a húr hosszának a kétszerese, $\lambda = 2l$, ahol l a húr hosszát, λ pedig a keletkezett hang hullámhosszát jelöli (13.2 ábra).



13.2 ábra

Egy húr megpendítésekor azonban nemcsak az alaphang szólal meg, hanem azok a hangok is, melyek hullámhossza racionális törtrésze az eredeti hang hullámhosszának. Ezek a *felharmonikusok.*

A hang hullámhossza és rezgésszáma között a $c = n\lambda$ összefüggés áll fenn, ahol c a hangnak az adott közegben való terjedési sebessége, n a másodpercenkénti rezgésszáma, λ pedig a hang hullámhosszát jelenti.

A hegedű húrjai egyenlő hosszúak, mégis különböző alaphangok kibocsátására képesek. Ha egy adott hosszúságú húrt nagyobb erővel feszítünk ki, magasabb hang keletkezik. Ez az alapja a húros hangszerek hangolásának. Azt is megfigyelhetjük, hogy a vastagabb, nagyobb átmérőjű húrok alaphangja mélyebb, a vékonyabbaké magasabb. A hang magassága a fentieken kívül még függ a húr anyagától is.

Pontos méréseken alapuló kísérletek szerint az alaphang rezgésszáma egyenesen arányos a húrt kifeszítő P erővel, fordítottan arányos a húr l hosszával és annak q keresztmetszetével. A kapcsolatot leíró

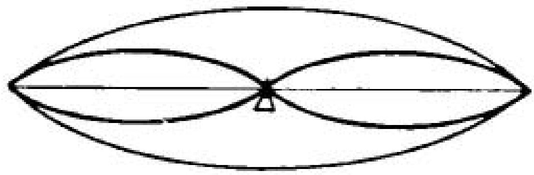
$$n = k\frac{P}{lq}.$$

összefüggésben szerepel még a k arányossági tényező, melyet a húr anyaga és a hang adott közegben való terjedési sebessége határoznak meg.

A skálák felépítése

Ha egy két végén rögzített húrt pontosan a közepén alátámasztunk (13.3 ábra), a keletkezett hang hullámhossza az eredetinek fele, rezgésszáma pedig annak kétszerese lesz. Az így keletkezett hang az eredeti hang (alaphang) *oktávja.* Ha e a két hangot egyszerre szólaltatjuk meg, azok együtthangzása kellemes hanghatást vált ki. Az alaphang és az oktávja közötti összecsengés a legmagasabb fokú *konszonancia.*

Az oktáv maga görög eredetű latin szó, és az *octo* (nyolc) számnévből keletkezett; itt nyolcadikat jelent, a hétfokú skála nyolcadik hangját. A hétfokú skála megalkotása a görögöknél általánosan elterjedt héthúros hangszer használatára vezethető vissza.



13.3 ábra

A zenei hangok meghatározott, a rezgésszámok szerint rendezett sorozata a hangsor, vagy *skála*. A hangsor hangjainak összessége a *hangkészlet*. A természetes számok hányadosaként kapott hangokból felépülő skálák a természetes, vagy *diatonikus* skálák. A *c*-vel jelzett hanggal kezdődő ilyen hangsor a *C-dúr skála*, melyben az ötödik hang rezgésszáma a *c* alaphang rezgésszámának $\frac{3}{2}$-szerese, a hozzátartozó húr hossza pedig annak $\frac{2}{3}$-ad része.

A hétfokozatú *C-dúr* skálában a *c* és a *g* hangok között még három, a *g* és a felső *c* (amit *c*'-vel jelölünk) között pedig még két hang helyezkedik el. Ezek a hangsorba úgy illeszkednek be, hogy rezgésszámaiknak az alaphangra vonatkozó viszonya két kis egész szám hányadosának felel meg.

Skálák és hangközök

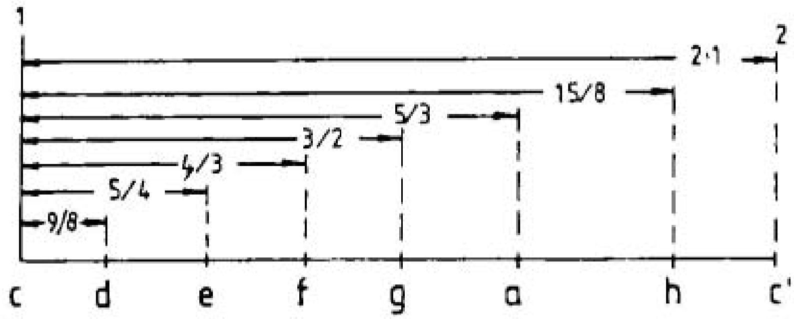
A hangok valamely alaphangra való viszonyát kifejező hányados a *hangköz*. Az oktávnak megfelelő hangköz 2 : 1, a *g* hangnak a *c* hangra vonatkoztatva a 3 : 2 arány felel meg. Mivel a *C-dúr* skálában a *g* hang az ötödik, a *c–g* hangköz neve a latin *quintus = ötödik* szó jelentése alapján *kvint*. A *C-dúr* skála negyedik, 4 : 3 aránynak megfelelő hangja az *f* hang, a *c–f* hangköz neve *kvart*. Az 5 : 4 aránynak az *e* hang felel meg, a *c–e* hangköz a *nagyterc*. A *c–d* hangköznek *(szekund)* megfelelő arány azonban nem a két következő egész szám hányadosa, 6 : 5, hanem 9 : 8.

A *C-dúr* skálában a *g* hang és a *c* hang (c') oktávja között még két hang szerepel: az 5 : 3 aránynak megfelelő *a* hang (a *c–a* hangköz neve *szext*), és a 15 : 8 aránynak megfelelő *h* (a *c–h* hangköz a *szeptim*). A hétfokozatú *C-dúr* skálában a hangközök és rezgésszámok viszonyát a 13.4 ábra szemlélteti.

Az *abszolút skálák* hangjaihoz meghatározott rezgésszámok tartoznak: a normál *á* hang hangmagasságának 440 Hertz felel meg. Ha az alaphang változik, az egyes hangok rezgésszámai is megváltoznak. A skála hangjainak az alaphangra vonatkozó viszonya azonban az alaphang megváltozásával változatlan marad. E viszonyokhoz betűcsoportokat, ritkábban számokat rendelnek: ez a *szolmizációs skála*. A *C-dúr* skálának megfelelő szolmizációs skála jelölésére a közismert

dó re mi fá szó lá ti dó

betűkombinációt használják.



13.4 ábra

A húros hangszeren játszó zenészt elsősorban az érdekli, hogy hol kell lefognia a húrt ahhoz, hogy az éppen a kívánt hangon szólaljon meg. A hangközök és a húr hossza közötti kapcsolat könnyen áttekinthetővé válik olyan derékszögű koordinátarendszerben, melyben az egyik tengelyen a *rezgésszámok,* illetve ezek viszonyai, a másikon a megfelelő *húrhosszúságok* szerepelnek.

Mivel a húr hossza a húr által kibocsátott hang hullámhosszának a fele, továbbá a rezgésszám és a hullámhossz között a $c = n \cdot \lambda$ összefüggés szerint fordított arányosság áll fenn, a rezgésszámok és a húrhosszak értékeinek megfelelő pontok *hiperbolán* helyezkednek el (13.5 ábra). Az egyes hangok közötti hangintervallumok az alaphangra vonatkoztatott viszonyokból számíthatók ki:

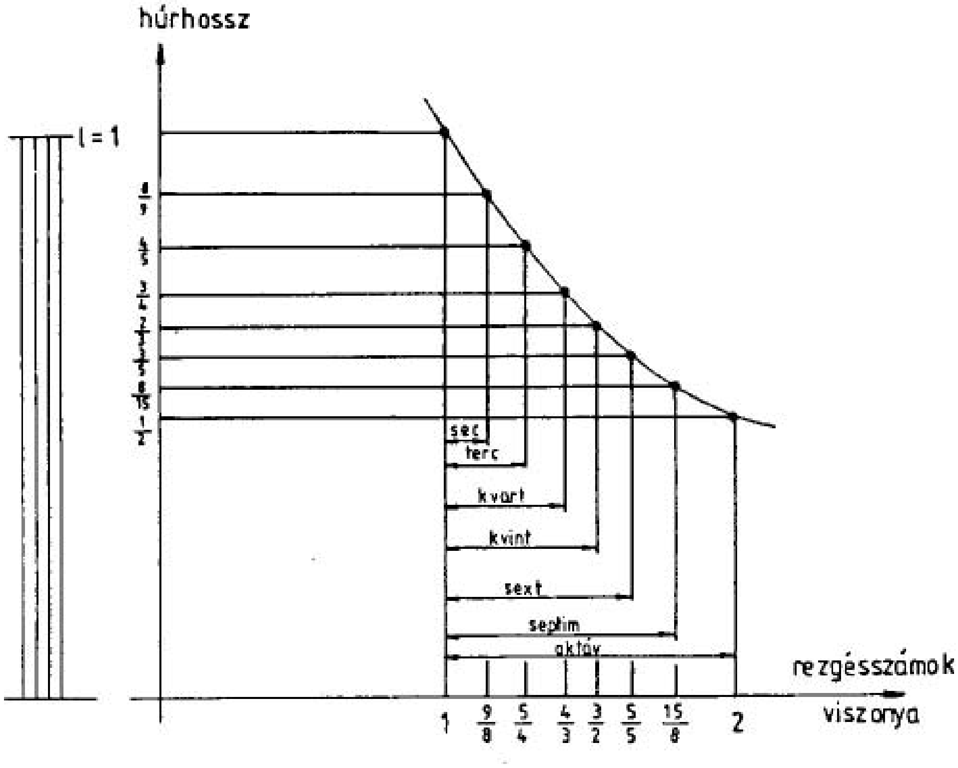
$$\begin{aligned}
d : c &= \tfrac{9}{8} \quad \text{(ez maga a szekund)},\\
e : d &= \tfrac{5}{4} : \tfrac{9}{8} = \tfrac{5}{4} \cdot \tfrac{8}{9} = \tfrac{10}{9},\\
f : e &= \tfrac{4}{3} : \tfrac{5}{4} = \tfrac{4}{3} \cdot \tfrac{4}{5} = \tfrac{16}{15},\\
g : f &= \tfrac{3}{2} : \tfrac{4}{3} = \tfrac{3}{2} \cdot \tfrac{3}{4} = \tfrac{9}{8},\\
a : g &= \tfrac{5}{3} : \tfrac{3}{2} = \tfrac{5}{3} \cdot \tfrac{2}{3} = \tfrac{10}{9},\\
h : a &= \tfrac{15}{8} : \tfrac{5}{3} = \tfrac{15}{8} \cdot \tfrac{3}{5} = \tfrac{9}{8},\\
c : h &= \tfrac{2}{1} : \tfrac{15}{8} = \tfrac{2}{1} \cdot \tfrac{8}{15} = \tfrac{16}{15}.
\end{aligned}$$

A $\frac{9}{8}$ hangközt *nagy egész,* a $\frac{10}{9}$-et *kis egész* hangköznek nevezzük. A $\frac{16}{15}$ intervallum *félhangnak,* pontosabban félhangköznek felel meg.

Mivel $\frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} = 2$, az oktávnak megfelelő hangköz kvintből és kvartból illeszthető össze.

A pentaton hangkészlet és hangsor

A *pentaton hangsor* – a görög *penta* (öt) jelentésnek megfelelően – ötfokozatú skálának felel meg. A *dó-pentaton skála* a *c* hangról indul, és tagjai *kvintlánc* segítségével állíthatók



13.5 ábra

elő: minden következő hang az előző *kvintje.* Ebben a skálában félhangnak megfelelő hangköz nem található; könnyen kiszámíthatjuk, hogy ilyen csak az ötödik kvint átlépése esetén keletkezne.

Állítsuk elő a *dó-pentaton* skálát! Mint azt az előbbiekben már megmutattuk, a *c* hang kvintje a *g* hang: rezgésszáma az alaphang regés számának $\frac{3}{2}$-szerese. A *g* kvintjének az alaphangra vonatkoztatott viszonya

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{4}.$$

Mivel ez az arány nagyobb 2-nél, a *c* oktávján, a (c' hangon) kívül esik. Ha ezt a hangot leszállítjuk az eredeti oktávjára, ami azt jelenti, hogy a kapott viszonyszámot (arányszámot) kettővel elosztjuk, a *d* hangnak megfelelő $\frac{9}{8}$ arányt kapjuk.

A *d* hang kvintje a $\frac{9}{8} \cdot \frac{3}{2} = \frac{27}{16}$ aránynak megfelelő hang, melyet $\frac{3}{2} \cdot \frac{9}{8}$ alakban írva, rögtön kitűnik, hogy ez a *g* hangra következő nagy szekundnak megfelelő *a* hang. (Itt meg kell jegyezni, hogy a természetes diatonikus skálában ennek a hangköznek kis szekund felel meg). Az így kapott hang kvintjének az alaphangra vonatkoztatott viszonya:

$$\frac{27}{16} \cdot \frac{3}{2} = \frac{81}{32},$$

ami ismét saját oktávjára leszállítva a $\frac{81}{64}$ törtet adja. Ez az *e* hangnak megfelelő $\frac{5}{4} = \frac{80}{64}$ aránytól az alaphang rezgésszámának $\frac{1}{64}$-ed részével tér el, ami a fül számára alig érzékelhető különbséget jelent.

A kapott kvintlánc hangjai adják a pentaton skála hangkészletét. Ezek a *c* hanggal kezdődően a rezgésszámoknak megfelelő sorrendben írva adják a *dó-pentaton* hangsort:

$$c - d - e - g - a - c.$$

A *dó-pentaton* hangsor hangközei közül a *c–d*, a *d–e* és a *g–a* hangközök nagy szekundnak, az *e–g* és *a–c* közök pedig kis tercnek felelnek meg.

A *d* hangra épülő ötfokozatú, *moll* vagy *lá-pentaton* skála a *d* hangról indul, és hangjai a következők:

$$d - f - g - a - c - d.$$

Ez a hangsor a *dó-pentatóniához* hasonlóan három szekundból és két kistercből építhető fel, ezek sorrendje azonban különböző lesz.

A sorrend a dó-pentatóniánál: s–s–t–s–t,
a moll pentaton hangsornál pedig: t–s–s–t–s .

Pentatónia és aranymetszés

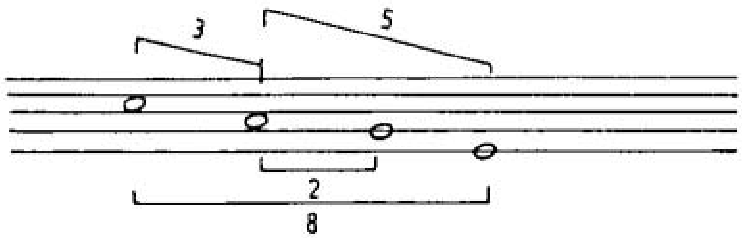
Ha a pentatóniára épülő dallamokat megfigyeljük, észrevehetjük, hogy azok olyan hangközökből épülnek fel, melyek félhangközökre átszámítva, a

$$2, \ 3, \ 5, \ 8$$

számsorozatot adják. (13.6 ábra). Ha ezeket egy további hanggal, a 13 félhangköznek megfelelő *kisnónával* kiegészítjük, a Fibonacci-sorozat elemeinek megfelelő számsorozat áll előttünk. Az ötfokozatú skála hangjainak viszonya – a Fibonacci-számoknak megfelelően – az aranymetszési arányt közelíti: *a pentatónia az aranymetszés zenei hordozója.*

Az ötfokozatúság az ember ősi zenei hagyományaihoz kapcsolódik, és kialakulásában az élő szervezetre vonatkozó legáltalánosabb törvényszerűségek is szerepet játszottak. Számos ősi kultúrához tartozó hangszeren öt húr található, vagy a hangszer maga ötfokozatú hangolású. A magyar népzene legősibb rétegei is ötfokozatú skálára épülnek, és főként a *lá-pentatónia* nyomait őrzik. A pentatónia más népek zenéjében is megtalálható, de elemeiből műzenei alkotásokban is gyakran építkeznek.

A *lá-pentatónia* tiszta formában való megjelenését illusztrálja Kodály gyűjtéséből a *Sej Dunáról fúj a szél* kezdetű jól ismert népdal, melynek lejegyzett hangjai a 13.7 ábrán találhatók. Az első, a harmadik, majd egy kvinttel alacsonyabban a hetedik és kilencedik ütem hangközei a 2, 3, és 5 Fibonacci-számokat reprezentálják. (13.8 ábra *a*). Ugyanilyen arányokat fedezhetünk fel a negyedik és ötödik ütem együttesének hangközeiben is (13.8 ábra *b*).



13.6 ábra

13.7 ábra

13.8 ábra

A pitagoraszi zeneelmélet

A püthagoreusok szerint mind a számok, mind a zenei hangok között *isteni harmónia* uralkodik. A világ fennmaradását ez az összhang biztosítja. A püthagoreusok zenei felfogása, a zenének számokkal való összekapcsolása arra a felismerésre támaszkodik, hogy azok a hangok, melyeket a húr két kis egész szám hányadosához tartozó pontban való alátámasztásával kapunk, kellemes együtthangzást, konszonanciát keltenek.

A tizenkettes szám, mivel a 3 és 4 legkisebb közös többszöröse, a pitagoraszi zeneelméletben különös jelentőségű. Ha a húr hosszát 12 egységre osztjuk, a pitagoraszi zeneelméletben a húr felezőpontjához tartozó oktávnak 6 egység, a kvintnek $12 \cdot \frac{2}{3} = 8$ egység, a kvartnak pedig $12 \cdot \frac{3}{4} = 9$ egység felel meg. Az ehhez tartozó húrhossz felezi a húr teljes hossza, és az oktávhoz tartozó felezőpont közötti szakaszt.

A kvintnak megfelelő hangintervallumhoz tartozó húr hossza 8 egységnek felel meg, és ez $8 = 6 \cdot \frac{12}{9}$ alakban hányadosként is írható. Az így kapott arány általános alakja

$$k = 2\frac{ab}{a+b}.$$

A képlet szerint a kvinthez tartozó húr hossza az a teljes húrhossz és a b félhúrhosszúság *harmonikus közepe.* Ennek geometriai analogonja a kocka, melynél k a csúcsok, a az élek, b pedig a lapok számának felel meg.

A pitagoraszi hangsor – a pentaton hangsorokhoz hasonlóan – szintén kvintlépésekből építhető fel azzal a különbséggel, hogy itt a hangképzés az ötödik kvintnél nem fejeződik be.

A diatonikus skálákat, a pentaton skálákat és a pitagoraszi skálát – mivel hangjaik a húr egész számokhoz tartozó arányainak megfelelő osztással nyerhetők – természetes skáláknak nevezik.

A természetes skálák kromatikus bővítése

Ha a hétfokozatú skála egész hangjai közé újabb hangokat iktatunk, olyan tizenkét fokozatú skálát kapunk, melyben különböző hosszúságú félhangintervallumok lesznek. Az ily módon nyert *kromatikus* skála háromféle félhangot tartalmaz. A természetes skála félhangintervallumait, és a kromatikus skála kétféle félhangjait.

A természetes skála félhangintervallumai a $\frac{16}{15}$ aránnyal fejezhetők ki; ilyenek az *e–f* és a *h–c* hangközök. A kromatikus félhangokat a nagy egész, illetve a kis egész hangnak megfelelő $\frac{9}{8}$ és $\frac{10}{9}$ arányhoz tartozó hangközöknek egy természetes félhanggal való leszállításával kapjuk. Az elsőhöz a $\frac{9}{8} \cdot \frac{15}{16} = \frac{135}{128}$, a másodikhoz a $\frac{10}{9} \cdot \frac{15}{16} = \frac{25}{24}$ arány tartozik. Az első esetnek megfelelően nyerjük az f és g hangok közé iktatott *fisz* vagy *(gesz),* illetve a *cisz* vagy *(desz)* félhangokat, a második esetben pedig a d és e közötti *disz*, valamint a g és a közötti *gisz* félhangokat.

A temperált skála

A természetes skálák hangjai kellemes hangzást biztosítanak, melynek harmóniája azonban megtörik, ha ugyanazt a dallamot a skála más hangján kezdve, más hangnemben szólaltatjuk meg. E probléma megoldására irányuló próbálkozások vezettek a kiegyenlített, vagy *temperált* skála megalkotásához.

A temperált skálában az oktávot 12 egyenlő hangközre osztják fel, ami azt jelenti, hogy bármely két egymást követő hang rezgésszámának viszonya ugyanaz a szám. Az így kapott hangok rezgésszámai olyan geometriai sorozatot alkotnak, melynek első eleme az alaphang rezgésszáma, tizenharmadik eleme pedig az alaphang oktávjához tartozó rezgésszám. Ha a sorozat első elemét a_0, a tizenharmadikat a_{12} jelöli, a mértani sorozat n-edik elemének meghatározására ismert összefüggés szerint

$$a_{12} = a_0 q^{12}.$$

Mivel az oktávhoz tartozó rezgésszám az alaphang rezgésszámának kétszerese:

$$a_{12} = 2a_0, \text{ így } a_0 q^{12} = 2a_0.$$

Az egyszerűsítést elvégezve, a $q^{12} = 2$ egyenletet kapjuk.

Innen q értékére $\sqrt[12]{2}$ adódik, melynek négy tizedesjegy pontosságú közelítő értéke $1,05946$. Mivel a temperált skála hangközei egyenlők, a temperált rendszerben a dúrskála kezdőhangjának bármely hang választható.

A temperált skála megalkotását elsősorban a billentyűzettel működtethető hangszerek *(klavikord, zongora, harmónium, orgona)* elterjedése tette időszerűvé. Az ilyen skálák megalkotására vonatkozó első próbálkozások a velencei Szent Márk templom karnagya, *Giuseppe Zerlino* (1517–1590) nevéhez fűződnek. A temperált skálák alkalmazása *J. S. Bach* korában vált általánossá, és ebben magának Bachnak, a zene koronázatlan királyának halhatatlan érdemei vannak. Az temperált skála bevezetése és meghonosodása a zenetörténetben új korszakot jelentett.

A félhangoknak a skálákba ilyen módon való közbeiktatása azonban egyes zenei körökben nagy ellenkezést váltott ki. Mivel az így kapott skála hangjai nem esnek pontosan egybe a természetes skála hangjaival, alkalmazásuk nehezen nyert polgárjogot mind a zeneművek alkotásában, mind pedig azok megítélésében.

Elsősorban a húros hangszerek hangolásával kapcsolatban jelentkeztek nehézségek, melyek átmeneti, kompromisszumos megoldásokhoz vezettek. Ez a szemlélet tükröződik a 17. század egyik jeles zenekritikusának, *H. Kellerath*-nak az ezzel kapcsolatban megfogalmazott véleményében, melyben egymásnak ellentmondó követelmények összeegyeztetésének az igénye jelentkezik: „*Wohltemperierte,* azaz jól kiegyenlített az a tizenkét fokozatú skála, melyen belül a hangkészlet minden hangnemben kifogástalanul használható, a természetes harmonikus rendszeren alapszik, és amely a diatonikus hangközök lehetséges tisztaságára törekszik”.

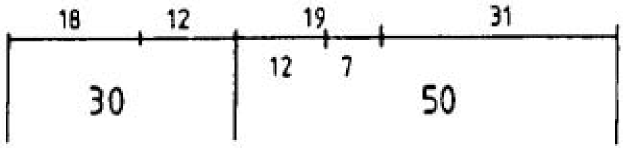
Ha a természetes skálák és a temperált skála hangintervallumait összehasonlítjuk, a *c–g* kvintnek megfelelő hangközhöz a temperált skálában $1,498$ érték tartozik, ami a természetes skálák tiszta kvintjének megfelelő $1,5$ aránytól csupán 2 ezreddel különbözik. Ezt a normál *á* rezgésszámára átszámítva, 1 Hertznél kisebb eltérést kapunk, amit a a fül még nem érzékel.

A temperált skála hangköze mind a természetes skála félhangintervallumától, mind a kromatikus félhangokétól eltér. A diatonikus félhanghoz tartozó $16/15$ arány tizedestört alakja $1,0667$, ami a temperált skála félhangközének megfelelő $1,0595$ aránytól 7 ezreddel különbözik. A kromatikus félhangok közül a $\frac{25}{24}$ aránynak megfelelő számérték $1,042$, a $\frac{135}{128}$ arányhoz tartozó félhangköz pedig $1,055$ értéknek felel meg. Ezekről az adatokról leolvasható, hogy a temperált skála félhangköze a természetes skála félhangintervalluma és a kromatikus félhangoknak megfelelő hangközök között helyezkedik el.

Arányok a zenemű szerkezetében

A zeneszerző egy zenemű megkomponálása közben akaratlanul is arányokba ütközik. A mű időbeli terjedelmének megfelelően kell meghatároznia az ütemek szerkezetét, a tételeknek megfelelően az ütemek számát és a teljes zenemű felépítését. Például egy 80 ütemet tartalmazó zenedarab két tételre való felosztása történhet szimmetrikusan, fele-fele arányban, ahol az egyes tételekre 40–40 ütem jut, de lehetséges 3 : 5 arányú felosztás, amikor is az első tétel 30, a zárótétel 50 ütemből áll.

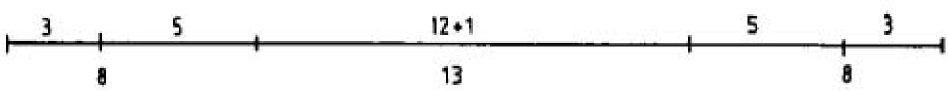
Ha az első tételt 3 : 2 arányban tovább osztjuk, az első rész 18, a második 12 ütemet tartalmaz. A második tétel több lehetséges felosztása közül a $19+31$ bontás olyan aszimmetrikus aránynak felel meg, melyben az első 19 elem $12+7$ bontása harmonizál az első tétel 12 ütemével. A kapott $7, 12, 19, 31$ sorozat olyan Fibonacci típusú sorozat, (*Lucas-sorozat,* melynek első két eleme 1 és 2, a többi elemét pedig az előző két elem összege adja (13.9 ábra).



13.9 ábra

A klasszikus zeneszerzők szerkesztésmódjára általában a *szimmetria* jellemző: a bécsi klasszikusok többnyire 8–8, illetve 4–4 ütemre periodizált szerkesztésmóddal dolgoztak. A modern zenére jellemző az *aszimmetrikus* formaalkotás. Ezek között kiemelkedő jelentőségű az *aranymetszés*nek megfelelő szerkesztési mód, mely egyes zeneszerzők, így *Bartók* műveiben is jellegzetes módon jelentkezik. Bartóknál az aranymetszés tudatos alkalmazása zenedarabjainak megkomponálásánál nemcsak a harmóniában, az akkordok felépítésében, hanem a zenemű egyes részeinek arányában, formai tagolódásában is jelentkezik.

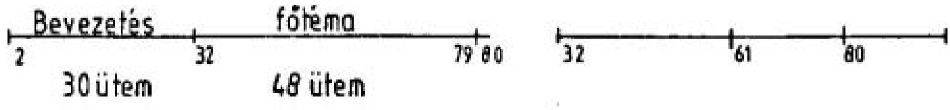
Bartók egynemű karra írt *Kánon*-ja három olyan részre tagolódik, melyek közül az első és a harmadik 8–8, a középső 13 ütemet tartalmaz (13.10 ábra). Az első 8 ütemet tartalmazó rész 3 : 5, a harmadik 5 : 3 arányban tovább tagolható, így a zenemű felépítése a *Fibonacci-számoknak* megfelelően az *aranymetszés* szabályait követi.



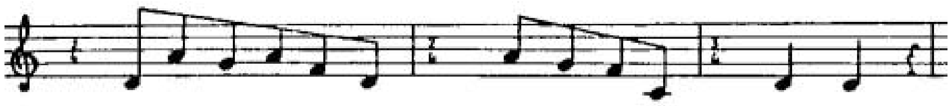
13.10 ábra

A *Szonáta két zongorára és ütőhangszerekre* című teljes Bartók-mű aranymetszete az első és második tétel határvonala. A 78 taktusból álló bevezetés és főtéma kisebbik aranymetszete a 32. taktusnál van, a visszatérő főtag a 61. taktus (13.11 ábra), mely a főtémát 3 : 5 arányban osztja.

A *népdalok* ősi rétegeiben az *aranymetszési arányok* és az *aszimmetria* nemcsak a hangok viszonyában, hanem sok esetben az ütemek felépítésében, a zenemű szerkezeté-



13.11 ábra



13.12 ábra

ben is kimutathatók. Ennek illusztrálására álljon itt az *Egy gyenge kismadár* kezdetű ősi népdalunk néhány üteme (13.12 ábra).

A sor tiszta *lá-pentaton* skálának megfelelő hangokból építkezik, ugyanakkor az első három ütem negyedekben mérve a $3:2:3$ arányt mutatja, ami a 2, a 3, a $2+3=5$, és a $3+2+3=8$ számokat, illetve összegeket tekintve éppen a Fibonacci-sorozat elemeit adják. Ez utóbbi összecseng a magyar nyelv ősi versformájával, az *ősi nyolcasssal*, melynek természetes megoszlása a szimmetrikus $4+4$ alakon túl az $5+3$ megoszlás, 3 pedig csak $1+2$ (illetve $2+1$) módon bontható tovább két részre.

Irodalom

1. Berger, R.: *A festészet felfedezése*, Gondolat Kiadó, Budapest, 1984.
2. Bognár – Soltész: *Tanuljunk zenét*, Editio Musica, Budapest, 1961.
3. Child, I.L.: *A művészi élmény hatása*, Művészetpszichológia, Gondolat Kiadó, Budapest, 1983.
4. Church, A.H.: *On the Interpretation of Phenomen of Phillotaxis*, Oxford Press, London, 1920.
5. Clark, K.: *Nézeteim a civilizációról*, Gondolat Kiadó, Budapest, 1985.
6. Csorba G,: *Modigliani*, Corvina Kiadó, Budapest, 1976.
7. Danielson, B.: *Gauguin élete Tahitin*, Gondolat Kiadó, Budapest, 1967.
8. Ehrenzweig, A.: *A New Psychological Approach to Aesthetics*, British Journal of Aestheteics, 1962, 2.
9. Gerőcs, L.: *A Fibonacci sorozat általánosítása*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1988
10. Géczy, B.: *Őslénytan*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1989.
11. Gombrich, E. H.: *A művészet története*, Gondolat Kiadó, Budapest, 1983
12. Hajós, Gy.: *Bevezetés a geometriába*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1960.
13. Halász L.: *Művészetpszichológia* (szerk.: Lénárd F.) Gondolat Kiadó, Budapest, 1984.
14. Hambidge, J.: *Practical Application of Dynamic Symmetry*, Yale Press, New Haven, 1932.
15. Hargittai, M. – Hargittai, J.: *Fedezzük fel a szimmetriát*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1989.
16. Harding, D. W.: *Az őskori Európa*, Helikon Kiadó, Budapest, 1986.
17. Hoppál – Jankovics – Nagy – Szemadam: *Jelképtár*, Helikon Kiadó, Budapest, 1985.

18. Horváth, V.: *Az indiai művészet évezredei*, Corvina Kiadó, Budapest, 1982.

19. Jakob – Jáger – Ohmann: *Botanikai Kompendium*, Mezőgazdasági Kiadó, Budapest, 1985.

20. Karátson, G.: *Miért fest az ember?* (műhelytitkok) Corvina Kiadó, Budapest, 1970.

21. Kákosy, L.: *Ré fiai*, Gondolat Kiadó, Budapest, 1979.

22. Kákosy, L.: *Fény és káosz*, Gondolat Kiadó, Budapest, 1984.

23. Kelényi, Gy. – Kiss, I.: *Építészeti stílusok*, Budapest, 1978.

24. Keitler, H. – Keitler, Sch.: *Psychologie of Arts*, Dutee Universig Press, Durham, North Carolina,

25. Kohlneder, W.: *Bach lexikon*, Gondolat Kiadó, Budapest, 1988.

26. Lendvay, E.: *Bartók stilusa*, Zeneműkiadó, Budapest, 1955.

27. Lendvay, E.: *Bartók dramaturgiája*, Zeneműkiadó, Budapest, 1964.

28. Lewey, M.: *A festészet rövid története*, Corvina Kiadó, Budapest, 1983.

29. Mohainé Katanics, M.: *Bartók 27 egynemű kara*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1982.

30. Morris, D.: *The Biology of Art, Conclusions*, The Biology of Art, London, 1962.

31. Norden, H.: *Proportion and the Composer*, Fibonacci Qarterly, 10/1972.

32. Northrop, E. P.: *Rejtélyek a matematikában*, Gondolat Kiadó, Budapest, 1960.

33. Palladio, A.: *Négy könyv az építészetről*, Képzőművészeti Alap Kiadóvállalat, Budapest, 1982.

34. Piper, D.: *A művészet élvezete*, Helikon Kiadó, Budapest, 1984.

35. Podani – Lexa: *Trópusi csigák és kagylók*, Móra Ferenc Kiadó, Budapest, 1988.

36. Prüfer, H.: *Projektiv Geometria*, Akademische Verlag, Leipzig, 1953.

37. Rittelmayer, Ch.: *Dogmatismus, Intoleranzia und die Beurteilung*, Kölner Zeitschrift für Soziologie und Sozialpshichologie, 1969.

38. Sain, M.: *Matematikatörténeti ABC*, Tankönyvkiadó, 1987.

39. Sain, M.: *Nincs királyi út*, (matematikatörténet) Gondolat Kiadó, Budapest, 1986.

40. Szalay, Z.: *A kockától az aktig*, Múzsák Közművelődési Kiadó, Budapest, 1986.

41. Szentkirályi, Z.: *Az építészet világtörténete*, Képzőművészeti Alap Kiadóvállalat, Budapest, 1980.

42. Steinhaus, H.: *Matematikai kaleidoszkop*, Művelt Nép Kiadó, Budapest, 1951.

43. Struik, D.J.: *A matematika rövid története*, Gondolat Kiadó, Budapest, 1958.

44. Wareing, P.F. – Phillips, I.D J.: *Növényi növekedés–élettan*, Mezőgazdasági Kiadó, Budapest, 1983.

45. Weber, J. P.: *A művészet dominánsai*, Művészetpszichológia, Gondolat Kiadó, Budapest, 1983.

Képek jegyzéke

1. Cézanne, Paul: Tálaló (Buffet). Szépművészeti Múzeum, Budapest.
2. Boltraffio, Giovanni Antonio: Mária gyermekével. Szépművészeti Múzeum, Budapest.
3. Bernáth Aurél: Esti parkban. Magyar Nemzeti Galéria, Budapest.
4. Leonardo da Vinci: Angyali üdvözlet. Galleria Uffizi, Firenze.
5. Tiziano: Égi és földi szerelem. Galleria Uffizi, Firenze.
6. Wildens, Jan: Mocsárvidék. Szépművészeti Múzeum, Budapest.
7. Renoir, August: Nő a Békástanyán. Louvre, (Jeu de Paumes), Párizs.
8. Seurat, Georges: A cirkusz. Louvre, Párizs.
9. Albers, Josef: Világosszürke fal. Szépművészeti Múzeum, Budapest.
10. Barcsay Jenő: Íves ablakok szürkében. Barcsay Gyűjtemény, Szentendre.
11. Egyiptomi színes festett fatábla. Szépművészeti Múzeum, Budapest.
12. Feketealakos attikai görög amfóra: Pallasz Athéné születése. Szépművészeti Múzeum, Budapest.
13. Vörösalakos görög külix-váza: A szomját oltó Héraklész. Szépművészeti Múzeum, Budapest.
14. Sassetta, Stephano di Giovanni: Aquinói Szt. Tamás imádkozik. Szépművészeti Múzeum, Budapest.
15. Neer, Aert van der: Utca falun. Szépművészeti Múzeum, Budapest.