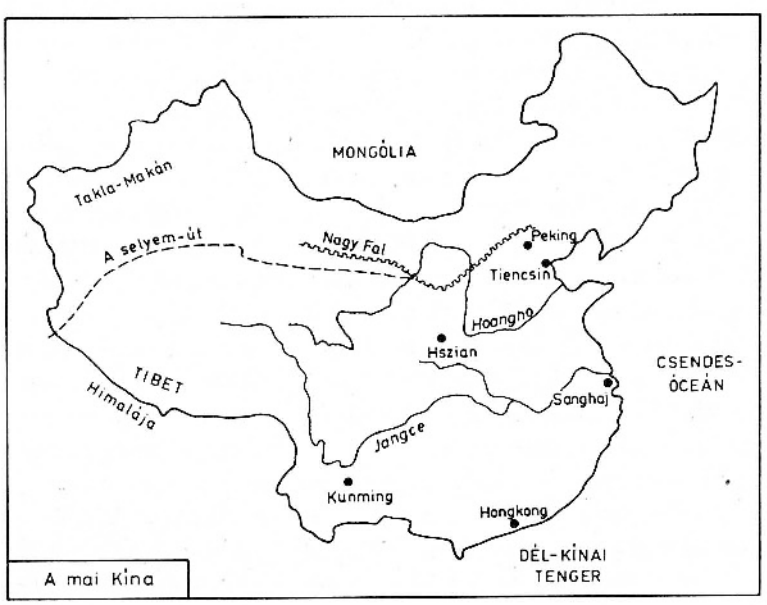
A KELETI KÖZÉPKOR

KÍNA

TÖRTÉNELMI VÁZLAT MATEMATIKAI VONATKOZÁSOKKAL

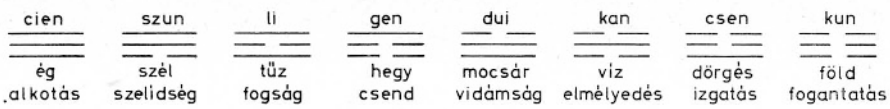
Az ősi kínai monda szerint az özönvíz után két mitológiai lény – félig ember, félig kígyó – hozta újra rendbe a világot. Ez a két lény, NYUIVA és FUSZI látható egy, az i. e. V. századból származó falfestményen. Számunkra ez azért érdekes, mert a képen NYUIVA körzőt és FUSZI szögmérőt tart a kezében, a matematika, egyszersmind a rendcsinálás jelképeit. NYUIVA javította ki az égboltot, hogy ne essék több eső. Követ olvasztott, és betömte azokat a lyukakat, amelyeket egy szörny okozott. A helyrehozott égbolt azonban kissé ferdére sikerült, és ezért a csillagok most elhajlanak északnyugat felé. Az ellenkező irányban, tehát délkeleten egy mély gödör maradt. Ide folytak össze a patakok és folyók, így keletkezett a tenger.

FUSZI megtanította az embereket a tűz használatára, megismertette velük a halászat és a vadászat fogásait, megmutatta, hogyan lehet zeneszerszámokat készíteni. Matematikatörténeti szempontból ez a monda azért figyelemre méltó, mert benne jelentkezik elő-



194. ábra

195. ábra



ször a kínai számmisztika. *Fuszi* ugyanis rajzolt az embereknek 8 háromvonalas ábrát *(195. ábra)* a következőképpen:

A hármas vonalcsoportokban vagy megszakítás nélküli, vagy két részre osztott szakaszok szerepelnek, mégpedig az összes lehetséges sorrendben (két elem harmadosztályú ismétléses variációja). Mind a nyolc vonalhármas az emberi lét ősalapjait és a velük kapcsolatos cselekvéseket, állapotokat jelképezi. Ezek: ég – alkotás, szél – szelídség, tűz – fogság, hegy – csend, mocsár – vidámság, víz – elmélyedés, dörgés – izgatás, föld – fogantatás. Ezt a jelképrendszert később kibővítették, finomították. E jelek akár kezdetleges írásnak is tekinthetők, de a vonalak számával való játék még jóslásra is alkalmasnak mutatkozott. Mint érdekességet említem meg, hogy hasonló, de kétsoros ábrákat láthatunk a kínai porcelánok finomságjelzéseiként.

Fuszi és Nyuiva legendája talán még az 500 000 évvel előbbi pekingi ősemberre vonatkozik, de ismerünk az időben közelebbi meseszerű hagyományokat is. Biztos, hogy Kína szintén az ősi kultúrák egyik bölcsője. Történelmében számunkra egyik nagy csoda, hogy ezen az Európa nagyságú területen egységes kultúra és egységes állam alakulhatott ki, mi több: ez a mai napig fenn is maradt. Ezt csak részben magyarázza a távol-keleti ország földrajzilag elszigetelt volta. Hozzájárult még az uralkodó dinasztiák állandó és tudatos egységesítő törekvése is. Kezdetben ezen az óriási területen éppen úgy törzsi élet folyt, mint másutt. A törzsek közül elsőként az i. e. 3. évezred végén a Hoang-ho (Sárga-folyó) felső folyásának vidékén élők alkottak egységes és a többieket felülmúló civilizációt. Sze-ma Csien (i. e. II. század) *Történelmi feljegyzései* szerint az i. e. 3. évezred elején (2700?, 2600?) fecske alakjában az égből szállt alá Huang-ti, a Sárga Császár. Ő fogta egységbe a sárga lösz medrű Sárga-folyó földművelő népét. Megtanította őket a házépítésre, a kocsikészítésre, a hajózásra, és mindenekfölött arra, hogy az életet adó nagy folyót gátak közé szorítsák, és így megmenekedjenek az időszakos pusztító árvizektől. Felesége pedig, Si Ling-hi császárné 2640 körül meghonosította a selyemhernyótenyésztést. Ennek a legendás Hszia-dinasztiának egyik minisztere, Li Sou 9 számot adott a népnek, írja Sze-ma Csien. Ha ez a 9 szám a kilenc számjegyet jelenti, akkor ez a legenda a 10-es számrendszer bevezetéséről ad hírt. Valószínű, hogy ebből a korból származnak az első kínai csillagászati megfigyelések. A 10-es számrendszernek kézzelfogható nyomai jelentkeznek az i. e. XIV. századból.

Ebből az időből származnak az első kínai írásos és egyben számírásos emlékek: a hívőknek az áldozati teknősök páncéljára karcolt kérései, fohászai, amelyeket isteneikhez intéztek. Ekkor azonban már a Sang-dinasztia, illetve az utána következő Jin-dinasztia uralkodott. A Sang–Jin-korszakban (i. e. 1550–1050) kialakult az öntözéses földművelésre alapozott első városi civilizáció, amely a Jangce folyóig (Kék-folyó) terjedt. Ez a már joggal államnak nevezhető szervezet a két nagy folyó közén határozott fölényben volt a környező törzsekkel szemben. Biztosította ezt fejlett mezőgazdaságuk, a lóhúzta kocsi, eszközeik, fegyvereik hatékonysága, az írástudás és nem utolsósorban a nagyobb szervezettség.

A kínai írás akkor még teljesen képszerű volt. A leírandó tárgy nevét az arra legjellemzőbb alaki tulajdonságokat mutató rajzzal rögzítették. Ebből, az akkori kezdetleges, igen sok jelű képírásból fejlődött ki a mai hieroglifikus szótagírás. Ekkor keletkezett például – és ez a városi élet nagyobb jelentőségét is tükrözi – a város szót jelentő „king" írásjel, amelynek hangértéke ma is felfedezhető Peking, Nanking, Csungking, Anking, Siking és más kínai városok nevében. A Jin-korszak utolsó éveiben – a jóslócsontokra írtak bizonysága szerint – már kialakult a kimondottan „értelmiségi" réteg: orvosokból, elöljárókból, naptárkészítőkből, papokból és jósokból.

A Sang–Jin-korszaknak a környezethez viszonyított jóléte és fejlettebb civilizációja természetesen hatással volt a szomszédos népekre is, részben úgy, hogy azok maguk is fejlődtek, részben pedig úgy, hogy idővel vetélytársakká váltak. Az i. e. XI. században a Hoang-ho nyugati folyása mellett élő csou törzsek igázták le a kialakult „Mennyei Birodalmat". A Csou-dinasztia (i. e. 1050–221) idején az egységesítés tovább folytatódott, és a kultúra is tovább fejlődött. I. e. 1100–1000 táján állt össze könyvvé a *Csou-pi szuan-csing* (Számítási könyv a napóráról). Óvatosabb becslések végleges formájának megszületését későbbi időpontokra teszik. Valószínű, hogy a könyv anyaga nem egyszerre és nem is egy helyütt keletkezett. Erre mutat az is, hogy a mű két részből áll. Mindkettő párbeszédes formájú. Az elsőben CSOUGUNG DAN kormányzó beszélget a számolás tudományában igen járatos miniszterével: SANG HAÓval. A második részben, hat évszázaddal később, CSEN-CE és tanítványa, ZSUNG FANG között folyik az eszmecsere.

A mű címében a csou szó a Csou-dinasztia királyainak fővárosát jelenti (ma Lojang), a pi szó pedig azt a függőleges rudat, amelynek árnyéka jelzi az időt. A két szó egybeolvadva, vagyis a csou-pi, a napórának és minden, azzal összefüggő jelenségcsoportnak, így a csillagászatnak is a neve. A *Csou-pi* valóban csillagászati mű, de a korábban keletkezett első részében közli a szükséges matematikai ismereteket is, mint például a törtekkel való számolást, a Pitago-

Egy kínai „halhatatlan" (1000 táján)

rasz-tételt és olyan számításokat, amelyek valamely megközelíthetetlen távolság meghatározására alkalmasak. Ez utóbbit a második rész fel is használja a Hold–Föld távolság kiszámításánál.

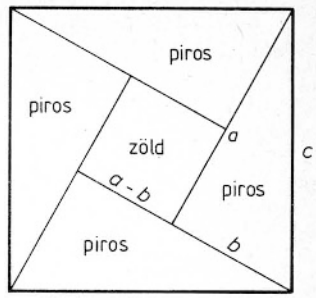
A *Csou-pi* bevezetőjében CSOUGUNG DAN megkérdezi a tudós SANG HAÓT: honnan származnak a számok, honnan a számolás tudománya? SANG HAO felelete: „A számolási módszerek a körből és a négyzetből származnak, a négyzet ered a háromszögből és a háromszög a »kilencszer-kilenc-nyolcvanegy« táblázatból." Ezután SANG HAO elmondja, hogy a számok írása már a teknőccsontok előtt létezett, és hogy ha a 3, 4 és 5 oldalú háromszöget vizsgáljuk, akkor a befogókra emelt négyzetek területösszege 25, és ez éppen az átfogóra emelt négyzet területe. „Íme, FUSZI így javította meg az égboltot, íme, innen származnak a számok." A kissé homályos feleletnek többféle magyarázata született. Az egyik:

FUSZI a háromszög segítségével kapott kört – talán úgy, hogy az átmérőre támaszkodó derékszögek csúcsainak a mértani helyét tekintette. Így származik a háromszögből a kör. A körbe rajzolt négyzet rajza is előállítható az átmérőre rajzolt két egyenlő szárú, derékszögű háromszög segítségével. A számok pedig mind „engedelmeskednek" a szorzótáblázatnak. A számok törvényének van alávetve a kör és a négyzet is, és „a négyzet a Föld, a kör az Ég, az Ég kör alakú, a Föld négyszögű. A négyzet [területének] kiszámítására van szabály, a kör [területe] számára [kell] találnunk a négyzetből." A III. századi CSAO CSÜN-CSING ez utóbbi idézetet így magyarázza: „A dolgok vagy gömbölyűek, vagy szögletesek, a számok vagy párosak, vagy páratlanok. Az égi mozgások kör alakúak, a hozzájuk tartozó számok páratlanok. A nyugvó Föld négyzetes, és számai páratlanok. Mindez következik a jin-jang-elméletből – az ellentétek elméletéből –, és nincs Ég önmagában és Föld Ég nélkül. Sem az Eget, sem a Földet nem szabad egyedülinek tekinteni, amint nem lehet ezeket meghatározni csak körrel vagy csak négyzettel."

Talán nem érdektelen, hogy a derékszögű háromszög oldalainak az elnevezése is a *Csou-pi* idejéből származik. A nevek a napóra részeit jelzik. A hosszabbik befogónak, a napóra függőleges pálcájának a neve „ku", ami szó szerint combcsontot vagy sípcsontot jelent. Az ősi napórának ez a fő alkatrésze nyilván csontból készült. A rövidebbik befogót, a napórának az árnyékrészét „kou"-nak hívták, ami eredetileg kampót jelentett. Az átfogó „cing" neve sokáig a kör átmérőjét is jelentette. Ez talán arra utal, hogy kezdetben a kört és a derékszögű háromszöget valóban szoros kapcsolatban láthatták a régi kínaiak (a kör a háromszögtől származik, Thalész-tétel!). Az átmérő neve csak később változott „szian"-ra, azaz íjhúrra. A Pitagorasz-tételt a két befogó neve után hívták „kou-ku"-módszernek.

CSAO CSÜN-CSING színes szemléltető rajzban mutatta be a „kouku"-módszert, általánosan is. Az a, b, c oldalú derékszögű háromszög c átfogójával mint oldallal rajzolt négyzetbe a *196. ábra* szerint elhelyezte négyszer a háromszöget. Ezek területösszege $2ab$. A kimaradt belső négyzet területe $(a-b)^2$. A c^2 területet kitölti az előbbi két terület, azaz

$$(a-b)^2+2ab=c^2, \quad \text{illetve} \quad a^2+b^2=c^2.$$

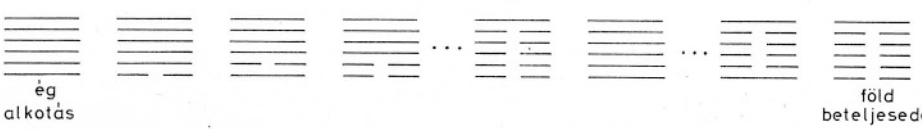


196. ábra

A kínai matematikus a háromszögeket pirosra, a belső kis négyzetet zöldre színezte.

A kínai kultúrtörténet nevezetes alkotása az *Öt könyv*. Ez a cím valóban 5 különálló könyv gyűjtőneve. Ezek közül a kínai kultúrára a legnagyobb hatással volt az *I Csing (Az átváltozások könyve)*, amelyről néhány szót majd szeretnék mondani. A *Su Csing* az első három dinasztia töredékes története. *Si Csing A dalok könyve*, amelyben népdalokat és történelmi eseményekre emlékező verseket találunk. A *Li Csing A szertartások és a törvények könyve*, a *Jü Csing* pedig *A zene könyve*.

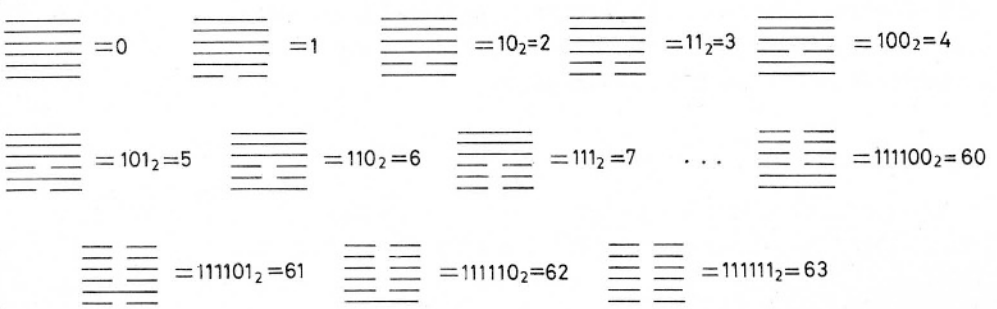
Az *I Csing* az i. e. VIII–VII. században keletkezett, filozófiai értelmezést nyert mű homályos fogalmazású bölcseletek, aforizmák, jelképekkel tűzdelt mondanivalók gyűjteménye. Éppen nehezen érthető volta miatt még jóslásra is felhasználták, bár lehet, hogy összeállítójától ez a cél messze állt. A filozófusok hosszú évszázadokon keresztül belőle olvashatták ki a tanaikat megerősítő tételeket, és ellenfeleik szintén. Matematikatörténeti szempontból a könyv azért említésre méltó, mert minden fejezetét egy-egy hatos vonalcsoport jelképezi *(197. ábra)*. Ezekben ráismerhetünk az ősi, Fuszi-féle folytonos és megszakított szakaszokra. Az itteni hatos csoportok úgy keletkeztek, hogy az eredeti 8 darab hármas csoportot összepárosították az összes lehetséges módon. Így minden hármas csoportból újabb nyolc született, tehát összesen 64. Ezekből néhányat láthatunk a *197. ábrán*. Ezen lényegében két elemnek (—— és ——) hatodosztályú ismétlésesvariáció-csoportjait látjuk, amelyek mindegyikéhez a könyv írója hozzárendelte azt a fogalmat vagy fogalmakat, amelyekről a vonalcsoporttal megjelölt fejezet szól. *Az átváltozások könyvé*ben amint ábráról ábrára az egyik jelkép átváltozik a következőre, olyan fokozatos átmenettel kapcsolódnak össze az általuk képviselt fogalmak, helyzetek, anyagi és lelki jelenségek



197. ábra

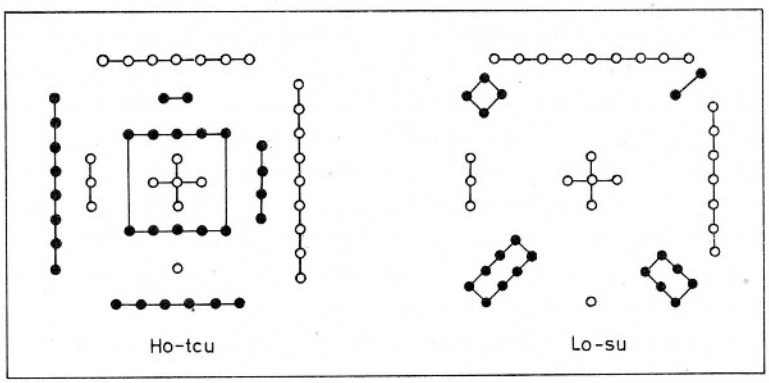
az „Ég"-től a „Föld"-ig, átfogva mindazt, ami a világon az emberi lét számára fontos vagy legalábbis akkor fontos volt. Ha az eddigiekhez még hozzávesszük, hogy a folytonos vonaldarab valamilyen rejtélyes társítási alapon a férfi jellegű 9-es számot, a megszakított pedig a nő jellegű 6-os számot jelentette, akkor biztosan eszünkbe jut a püthagoreusi számmisztika alaptétele: „Minden szám!" A mi szempontunkból figyelmet érdemel az, hogy a műben a variációs csoportok mindegyike szerepel, ami pedig arra utal, hogy a felvett eszmefuttatások számát a variációcsoportok száma határozta meg. Ez biztosan nem úgy történt, hogy a szerző először kirakta az összes csoportot, aztán mindegyikhez megfelelő fogalmat illesztett, hanem inkább úgy történhetett, hogy az alapul választott ősi 8 jelkép egy-egy fogalmából alkotott új fogalmakat. Ennek a ténykedésnek a kombinatorikai vonatkozásai azonban nem tagadhatók.

Roppant érdekes, hogy miként találkozott össze a számmisztikában 3000 év és több ezer kilométer távolságból két, egymástól nagyon eltérő filozófia. Ehhez tudnunk kell, hogy a nagy német tudós, LEIBNIZ – filozófus és igen vallásos ember – fedezte fel a helyi értékes 2-es számrendszerű számírást, amelyhez csak két számjegy szükséges: a 0 és az 1. Ő, aki főleg azért foglalkozott matematikával, hogy abban feltalálja a gondolkodás legáltalánosabb törvényeit, természetes, hogy a 2-es számrendszert is igyekezett beilleszteni filozófiai-teológiai rendszerébe. Csodás párhuzamot látott abban, hogy amint az összes szám felírásához csak az „egy" és a „semmi" szükséges, ugyanúgy a *Biblia* teremtéstörténete szerint Isten a világot a semmiből teremtette. Csak két ősprincípium létezik: Isten és a Semmi. E kettőből jött létre Minden, ahogyan az 1 számjegy a „semmi"-vel létrehozza az összes számot. Ezt a gondolatot kifejtve, elragadtatással írta 1696-ban RUDOLF ÁGOST hercegnek: „Essentiae Rerum sunt sicut Numeri" (A dolgok lényegei a számok). Íme egy püthagoreus 2000 évvel PÜTHAGORASZ után! Egy évvel később LEIBNIZ JOACHIM BOUVET jezsuita hittérítővel való levelezése révén tudomást szerzett az *I Csing* fenti jelképrendszeréről. Természetes, hogy LEIBNIZ, akit abban az időben fogva tartott a 2-es számrendszer és az ahhoz kapcsolt filozófiájának gondolatköre, rögtön



198. ábra

a helyi értékes 2-es számrendszert látta bele az *I Csing* 64 vonalas ábrájába. A folytonos szakaszt a 0 számjeggyel, a megszakítottat pedig az 1-gyel azonosította. Így ezekből összeállnak a 2-es számrendszerben a számok 0-tól 63-ig, amint ezt a *198. ábra* szemlélteti. Az ábrán a 2-es számrendszerben írt számokat a „2" alsó indexszel láttuk el. LEIBNIZ csakugyan azt hitte, hogy az őskínaiak a helyi értékes 2-es számrendszerben írták a számokat. Ebben azonban tévedett. Kínában 100-as, majd 10-es alapú számírás volt, és így a 2-es számrendszer felfedezése marad egyedül LEIBNIZ érdeme.



199. ábra

Az *I Csing* egy másik matematikai érdekességgel is szolgál. Ma már nem deríthető ki, hogy milyen kultikus célokat segített a könyvben található két rajz *(199. ábra)*. Az *I Csing* szerint a Ho-csu egy sárkányló (víziló) lábnyoma. A Lo-su (a Lo folyó írása) eredete pedig KUNG FU-CE *(Kung-ce, Konfucius)* szerint a következő: A gondolataiban elmélyedt JÜ császárnak megjelent a Hi nevű isteni teknősbéka. Ez viselte hátpáncélján a Lo-su ábrát. Nem kell hozzá nagyon éles szem, hogy ezekben az ábrákban meglássuk a számok jeleit. A nagyobb megbecsülésben részesülő, férfi jellegű páratlan számok fehér karikáival elvegyülnek a páros számok fekete köröcskéi. Ebben a jelölésben megnyilvánul Kína ősfilozófiai felfogása. E szerint a világ minden jelensége két ellentétes erőnek, a „jin"-nek és a „jang"-nak a harca. A „jang" jelenti a világosságot (fehér karika), az aktivitást, a pozitív jelleget, a férfias tulajdonságokat, a „jin" pedig a sötétséget (fekete karika), a passzivitást, a negatív jelleget, a női tulajdonságokat. A sárkányló lábnyomán a belső ötöst és a két ötösből álló tízest két körben öleli át az 1, 2, 3, 4, illetve a 6, 7, 8 és 9. Nem tudjuk, mit szimbolizált ez az elrendezés. A teknősbéka hátdíszében viszont felismerhetjük a „világ" első bűvös négyzetét, amelyet a szokott módon mutat a *200. ábra*. A 9 mezős négyzet minden sorában, minden oszlopában és mindkét átlójában a számok összege 15. Az a legalább 3000 évvel előttünk élt

4	9	2
3	5	7
8	1	6

200. ábra

1	4	6
2	9	7
3	5	8

201. ábra

kínai, aki ezt az ábrát szerkesztette, nem volt kezdő a számok tudományában.

Az első 9 mezős mágikus négyzettel kapcsolatban felvetődhet még egy gondolat. Ez különös módon az akkori földművelés megszervezésével függ össze. A Csou-dinasztia idején az állam földje jogilag a királynak, a vangnak a tulajdona volt. Az egész birodalomban a mezőgazdaság alaprendszere az volt, hogy minden 8 család kapott egy négyzet alakú parcellát, amely 9 kis négyzetre oszlott, ahogyan a *201. ábra* mutatja. Minden családnak jutott egy négyzetnyi rész, amit a maga hasznára művelhetett (1-től 8-ig). A középső, kilencedik négyzeten közösen dolgoztak, és ennek a termése adóba ment. Az ezt a földkiszabatot („A nyugvó Föld négyzetes, és számai páratlanok", lásd a 298. oldalon) ábrázoló rajz már majdnem bűvös négyzet, hiszen mindkét középvonalán és az átlói mentén a számok összege 18. Talán egy ilyen elrendezésű tábla lehetett a forrása annak a törekvésnek, hogy a számok elhelyezésénél még a sorok és az oszlopok összege is megegyezzék. Korántsem azt szeretném elhitetni, hogy ennek a földművelési rendszernek egyetlen előnye az első bűvös négyzet megszületése volt. Az is lehetséges, hogy a kettőnek egymáshoz semmi köze sincs.

Az viszont biztos, hogy a közösségi földtulajdonnak ez a formája és későbbi megerősödése megakadályozta a föld magántulajdonba vételét, ami Kínában a civilizációnak az európaitól egészen eltérő irányú fejlődését hozta magával. Ez a rendszer lett az alapja a legtökéletesebb ókori civilizációnak, de ez volt az akadálya az ókort igazán túlhaladó civilizáció megteremtésének is.

A Csou-korszak volt a kínai filozófia kialakulásának a kora. I. e. 500 táján léptek fel azok a filozófusok, akik hosszú időre meghatározták a kínai gondolkodásmódot. Ebben az időszakban a törzsi és nemzetségi különállás még harcolt a dinasztia egységesítő törekvéseivel. Ekkor még a Mennyei Birodalom 71 fejedelemségre oszlott. A csou nemzetség fölényét és e fölény jegyében az egységet csak katonai erővel lehetett biztosítani. Az akkor kialakult két filozófia ezt a két törekvést tükrözi. A taoizmus az i. e. VI–V. században keletkezett irányzat. A tao szó utat jelent. A taoizmus a dolgok útjáról, törvényeiről szóló elveket tanítja. E tanításokat foglalta össze a *Lao-ce (Öreg mester)* című könyv, amelynek címe később *Tao-tö-csing*re *(Az út és az erény könyve)* változott, és a köztudatban úgy terjedt el, hogy e könyv szerzője Lao-ce, pedig ez csupán a könyv eredeti címe volt. A taoizmus ellenzi a nemzetségi önállóság megszüntetését. A kormányt bírálja az adók és a háborúk miatt. Tanítása szerint a bölcs ember a világ kialakult rendjét csak szemléli, de megváltoztatni nem akarja. A tétlen szemlélődés az ideális magatartás.

A másik filozófiai irány megfogalmazója KUNG FU-CE, latinos nevén KONFUCIUS (i. e. 551–479) volt. Tanításait tanítványai foglalták össze a *Lun-jü (Beszélgetések, mondások)* című könyvben. Központi témái: az emberiesség, az igazságosság és az emberi magatartás. Az emberek közti különbség az Ég rendelése, amin változtatni nem lehet. A fiatalok, a gyengék és az alacsonyabb rangúak engedelmeskedjenek az öregeknek, az erőseknek és a magasabb rangúaknak. Az uralmon levők pedig legyenek emberségesek és igazságosak alárendeltjeikkel szemben.

Mindkét filozófiai iránynak számos változata született. Ezekhez érkezett meg Kínába az I. században szellemkialakító erőként a buddhizmus. Ez a három áramlat volt Kína uralkodó filozófiai nézeteinek az alapja, egészen a XX. századig.

Az egységes kínai államnak a Csou-dinasztia idején elkezdett megteremtése már a Csin-dinasztia (i. e. 246–209) érdeme volt. A nemzetiségek váltakozó harcában a Csin Fejedelemség erősebbnek bizonyult a csou törzsnél. JING CSENG, a csin nemzet királya legyőzte a csou népet, és hogy megkülönböztesse magát a többi vangtól, felvette a huang-ti, vagyis a császár nevet. Így lett a címe SI HUANG-TI, vagyis az ELSŐ CSÁSZÁR. Hallatlanul erőszakos, vérengző módszereivel ő teremtette meg két évtized alatt a valóban egységes Kínát. A törzsi, nemzetségi uralkodó osztály helyébe minden fejedelemségben a központi irányítás alatt álló hivatalnokszervezetet ültette. A hivatalok nem öröklődtek, hanem a hivatalnokoknak (mandarinoknak) szigorú vizsgákat kellett letenniük az állások elnyeréséhez. SI HUANG kezdte meg a Kínai Nagy Fal építését. Az emberi építkezések e leghatalmasabbja mintegy 4000 km hosszúságban biztosította a birodalom békéjét az északi ellenséges betörések, főleg a hunok ellen. A fal átlagos magassága 7,5 m, átlagos szélessége 5,4 m. Az ELSŐ CSÁSZÁR könyörtelenül szembefordult a hagyományokkal. A múltba visszahúzó minden szellemi erőt igyekezett megsemmisíteni. Az i. e. 213. évben elégettette az összes korábbi feljegyzéseket, még *A dalok könyvét* is, hogy semmi ne emlékeztessen a régi hagyományokra. A könyvrejtegetők közül több mint 400 tudóst élve eltemettetett, és több ezren a Nagy Falat építették halálukig.

SI HUAN-TI tehát, a Csin-dinasztia egyetlen császára, szó szerint tűzzel-vassal szüntette meg a fejedelemségek torzsalkodását és rakta le a Kínai Birodalom alapjait. Voltaképpen az ő uralkodásától lehet Kínai Birodalomról, illetve kínai civilizációról beszélni, az egész országban érvényes törvényekkel, egységes naptárral, közös pénzzel, mértékegység-rendszerrel és írással. Még az alattvalók öltözetét is szabályozta mind a 36 központilag irányított tartományban. A nagyszerű szervezés diadala azonban a visszájára fordult. A közmunkákra mozgósított hatalmas tömeg és az elviselhetetlen adók

Kung Fu-ce (Konfucius)

általános elszegényedéshez vezettek, végül pedig parasztforradalmakhoz.

A Csin-dinasztia, amelyről Kínát a legtöbb idegen nyelvben elnevezték (az átírások különfélék, de a cin, kin, China, stb. mind ugyanarra a szóra, a „csin"-re mutatnak), átadta helyét a Han-dinasztiának (i. e. 206–i. sz. 220). Ez azonban tovább folytatta a SI HUANG által megkezdett munkát, alatta a birodalom területileg is növekedett. A Sárga-folyó és a Kék-folyó országa kiterjesztette uralmát nagyjából a mai Kína területére. A fejlett csatornarendszer lehetővé tette a rizstermelést és az olcsó, gyors közlekedést. Fellendült a kézművesipar is. Megnyíltak Kína kapui a nyugati világ felé. Kína selyme, kerámiája, lakkfestéke Mezopotámián keresztül eljutott a Földközi-tenger országaiba is. A híres selyemúton a kereskedőkaravánok biztonságára katonaság ügyelt. A mezőgazdasági, ipari és kereskedelmi fellendülés ellenére a Han-dinasztia is megbukott az i. sz. III. században, nem bírt a túlméretezett közmunkákkal. A parasztság harmadrésze váltakozva közmunkán dolgozott, az ipar és kereskedelem hasznát elnyelte a csatornahálózat kiépítése, az utak létesítése és karbantartása, valamint a katonai kiadások. Az ókor legfejlettebb civilizációját megbuktatta a nyomor kiváltotta parasztfelkelések sorozata. Évszázadokra széthullt a Mennyei Birodalom, és csak i. sz. 600 táján szerveződött újra központi irányítás alá, a Tang-dinasztia (i. sz. 618–907) alatt. Ez a 300 év jelentette Kína virágzó korai középkorát, és a virágzás folytatódott a Szung-dinasztia (960–1279) végéig, a XIII. századig. A XI. század hozta a legnagyobb kínai tudományos és technikai felfedezéseket. Ekkor találták fel Kínában a papírt, a könyvnyomtatást, a lőport és az iránytűt, a mezőgazdaság pedig túlszárnyalta a korabeli európai földművelés eredményeit. A mongol uralom utáni, tehát a XII–XIII. századot követő Ming-korszakban (1368–1644), ismét erős központi hatalom alatt, újabb fejlődés következett be főleg a selyemipar és a porcelánkészítés terén. A magas szintű földművelés azonban további hozamra – a fentebb részletezett közösségi rendszer miatt – már nem volt képes. Ugyanakkor a lakosok száma a XII. századtól a XIX.-ig több mint háromszorosára növekedett. A fejlődés a kultúra területén is megtorpant. A hivatalnokrendszer megmerevedett. Minden igyekezet a meglevő állapotok stabilizálására irányult. Kína a XX. századig megrekedt a középkorban.

A KÍNAI SZÁMÍRÁS

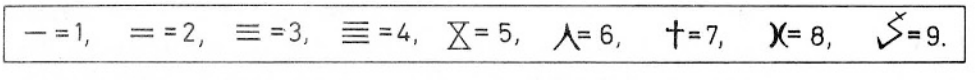
Mint a világon mindenütt, Kínában is az első számjelek arra szolgáltak, hogy hosszabb időre megőrizzék valamilyen vagyontárgy számbavételi eredményét, leltárát. Ennek nyomát őrzik az első kínai számírásos emlékek, az ún. jóslócsontokra (rendszerint marhalapockára) karcolt számjelek az i. e. XIV–XI. századból. Az akkor használt számjelek azonban már nem csupán „strigulákból" állnak, hanem jórészt hieroglifákká alakultak, a szóírásnak megfelelően. Ezek a számjelek a *202. ábrán* láthatók.

Ugyanekkor használtak még három hieroglif jelet is, amelyek a helyi értékeknek megfelelő elnevezések. Ezeket a *203. ábra* mutatja. E három jel világosan utal a 10-es számrendszerre. A számokat úgy írták le, hogy a számjel után írták a jel értékének megfelelő három hieroglifa valamelyikét, például úgy, ahogyan a *204. ábra* szemlélteti. Olyan ez, mintha a 7546-ot úgy írnánk, hogy 7e5sz4t6, ahol az *e* az ezres, az *sz* a százas és a *t* a tízes szó rövidítése. Ez már majdnem helyi értékes 10-es számrendszerű írásmód, csakhogy a „számjegy" aktuális értékét nem a helye, hanem az utána írt szójel fejezi ki. Szokás ezt kiírt helyi értékes számírásnak is nevezni. A kínai számírásban a nagyobb „helyi értékek" után következtek rendre a kisebbek, de vagy felülről lefelé, vagy jobbról balra. Mi a további példáinkban is balról jobbra írunk.

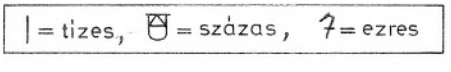
Az i. e. X–III. században a kínai számjelek csak kevéssé változtak, amint ezt a korabeli eszközök és pénzérmék feliratai tanúsítják.

Az i. e. II–i. sz. XII. században fejlődött ki a „függőleges és vízszintes" pálcikákból összeállított számjelekkel való számírás. Ez az akkoriban elterjedt valódi pálcikákkal végzett számolásból eredt. Ezeket a számjeleket a *205. ábrán* láthatjuk, a *206. ábra* pedig néhány példát mutat a „pálcikás" számírásra.

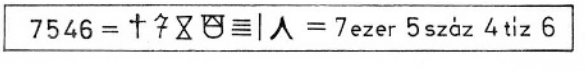
Ez már kétségkívül helyi értékes számírás, de nem 10-es, hanem 100-as alapú. Az üres helyi értéket kezdetben csak egy nagyobb közzel jelölték, később – amint a mi példánkban is – egy négyzettel, majd egy köröcskével töltötték ki, ami a számolótábla üres helyiérték-rovatát jelölte. Talán nyilvánvalóbbá válik ennek a „nullának" a bevezetése, ha végignézünk néhány pálcikás, számolótáblán



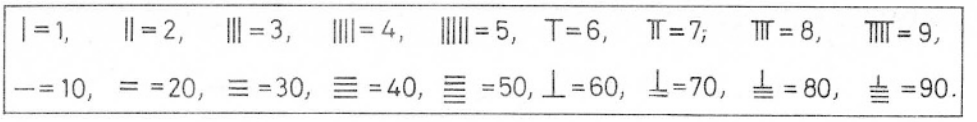
202. ábra



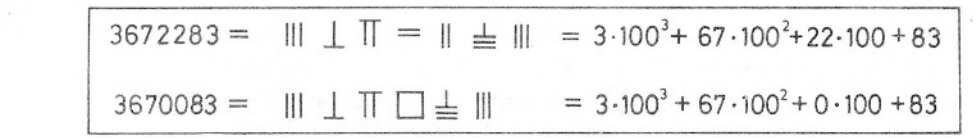
203. ábra



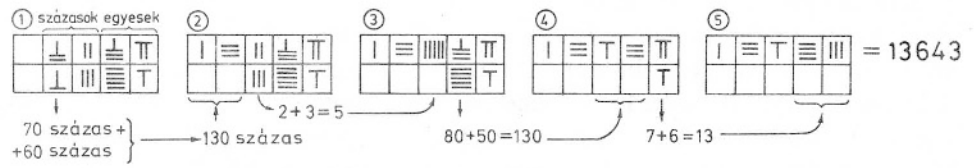
204. ábra



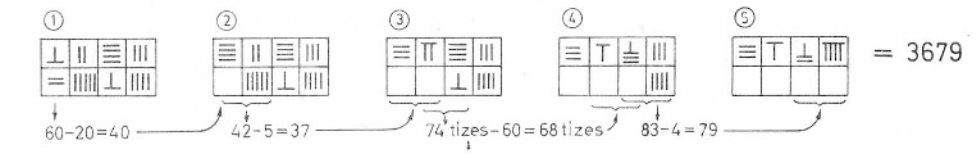
205. ábra



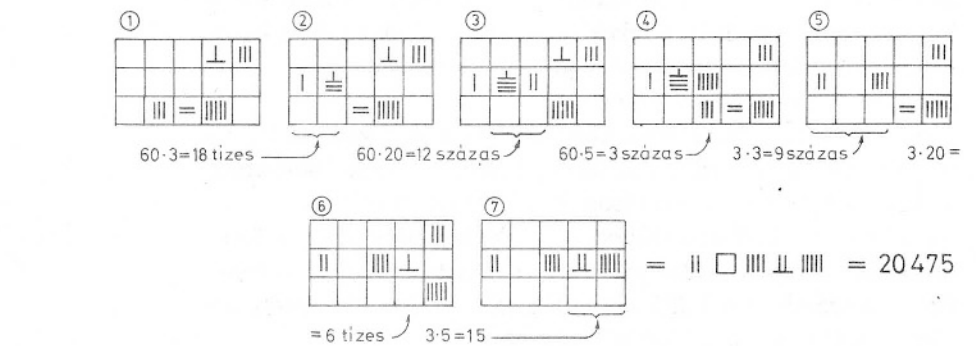
206. ábra



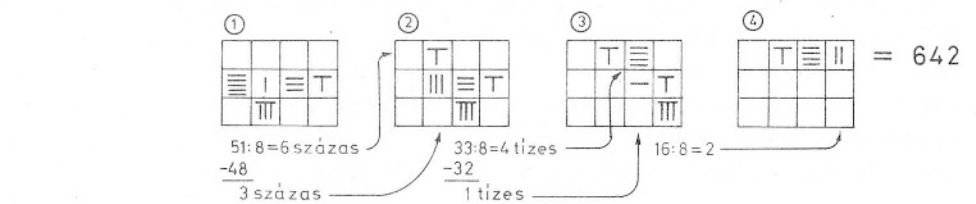
207. ábra



208. ábra



209. ábra

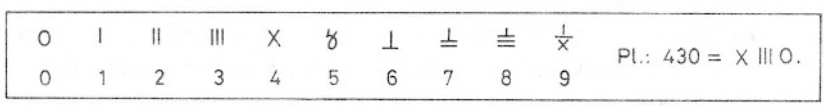


210. ábra

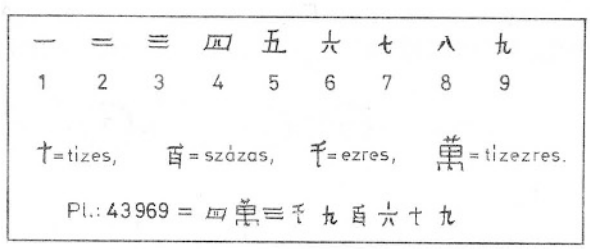
elvégzett műveletet. A *207. ábrán* az összeadás egymást követő mozzanatait látjuk (7287 + 6356 = 13 643). A *208. ábra* mutatja a 6243 − 2564 kivonás egymás utáni lépéseit. A *209. ábrán* kísérhetjük végig a 325 · 63 szorzás végrehajtását. A részletszorzatoknál vigyázni kell a helyi értékekre. Végül a *210. ábra* az 5136 : 8 osztás folyamatát érzékelteti. Az üres helyi értékeknek (a szorzási példánál) a négyzettel való VII–VIII. századi jelölése kb. a XIV. században ment át a körrel való jelölésbe.

Az ógörög számírásnál (73. oldal) említettük, hogy a nulla 0-val jelölése görög találmány, és tőlük vették át a hindu matematikusok. Ez a nézet főként HANS FREUDENTHAL (szül. 1905) holland matematikus kutatásai alapján terjedt el. Kimutatta, hogy a IV. században keletkezett indiai *Szúrja Sziddhánta* című csillagászati műben számos görög eredetű szakkifejezés található, sőt mi több, a mű a bolygóknak az Apollóniosz-féle epiciklusos elméletére támaszkodik. Más jelek is arra vallanak, hogy a III–VI. században számos görög matematikai és csillagászati ismeret hatolt be Indiába közvetlenül és mezopotámiai közvetítéssel is. Valószínű, hogy ekkor vették át a görög 0 használatát is. A kínai matematikatörténet alapján azonban más elképzelés is lehetséges. Láttuk, hogy a kínai 10-es alapszámú írásban is jelentkezik az üres helyi értéknek négyzettel vagy köröcskével való kitöltése. Amikor Indiában a 0 felhasználásával kialakult a mai számírás őse, vagyis amikor oda a görög nulla ismerete beszivároghatott, akkor a hinduk a kínaiakkal is elég szoros kapcsolatban álltak. India a közönséges törtek írásmódját, a helyi értékek sorrendjét és a 0 használatát átvehette Kínától is éppen olyan valószínűséggel, mint a görögöktől vagy a babiloniaktól. Ezt a nézetet főként LI JANG kínai és JOSEPH NEEDHAM angol matematikatörténész képviseli.

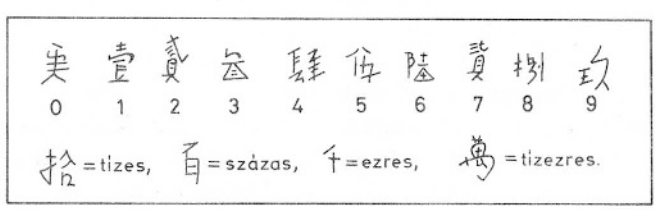
A kínai számírás jelei és jegyei az idők folyamán sokat változtak, de meglepő, hogy ma is nagyjából háromféle számírást használnak. A hétköznapi életben, a műveletlen emberek helyi értékes 10-es alapú számrendszerben írnak. Számjegyei a pálcikajelekből fejlődtek ki. Ezeket mutatja a *211. ábra*. A műveltebbek a leegyszerűsödött hieroglif számjeleket kiírt helyi értékkel használják, a *212. ábrá*nak



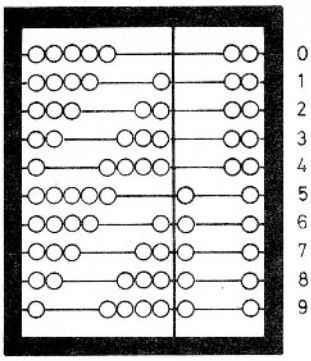
211. ábra



212. ábra



213. ábra



214. ábra

megfelelően. A hivatalos életben (a hamisítások megnehezítésére) a bonyolult hieroglif számjelekkel írnak, szintén kiírt helyi értékes 10-es alapú számrendszerben, a *213. ábra* szerint.

A XV. században a kínai számolótábla pálcikáinak a szerepét átvették az abakusz golyói. A golyós számológép ekkor már egész Kínában elterjedt, számolást könnyítő eszköz volt. A kínai abakuszt *(214. ábra)* egy, a golyókat tartó rudakra merőleges elválasztó fal két részre osztja. Minden rúd egy-egy 10-es helyi értéket képvisel. Az elválasztó falnak az ábra szerinti bal oldalán az 5 golyó mindegyike 1-et ér, a jobb oldalon levő két golyónak egyenként 5 egység az értéke. Rajzunk rudanként mutatja rendre a 0, 1, 2, . . ., 9 alaki értékeknek megfelelő golyóállásokat.

A golyós számológépen tizedes törtekkel is lehet számolni az egyesek rúdjának alkalmas megválasztásával. A tizedes törteket Kínában valóban ismerték. Ugyanúgy írták azokat is, mint az egész számokat, tehát kiírt helyi értékekkel (tized, század, ezred).

Európában a tizedes törtek használatáról először SIMON STEVIN (1548–1620) holland matematikus írt a *De Thiende (A tizedes egység)* című könyvében 1585-ben. Előtte AL-KÁSI arab matematikus *Az aritmetika kulcsa* című munkájában már 1427-ben ismertette a tizedes törtekkel való számolást. Elég kézenfekvő gondolatnak látszik, hogy AL-KÁSI, aki ULUGBEK szamarkandi obszervatóriumában dolgozott, felfigyelt a már akkor is több száz éves kínai hagyományok alapján kialakult tizedes törtek használatára. Érdekes párhuzamot vonni a kínai, az al-Kási-féle és a Stevin-féle tizedestört-jelölések között. Amint említettük, a kínaiak minden számjegy után egy hieroglif jellel megnevezték a helyi értéket. Arra is van példa, hogy más színnel írták a tizedesjeleket. AL-KÁSInál ugyanezek a jelölésmódok megtalálhatók. Olykor a tizedesjegyeket piros számmal írta, néha megnevezte a helyi értéket, és sokszor az egészeket a tizedesektől függőleges vonalkával választotta el. STEVIN minden tizedesjegy után (vagy fölött) egy bekarikázott számmal jelölte a helyi értéket (10-nek az oda tartozó negatív kitevőjével), például:

$$6{,}2567 = 6\,\textcircled{0}\,2\,\textcircled{1}\,5\,\textcircled{2}\,6\,\textcircled{3}\,7\,\textcircled{4}$$

vagy

$$6{,}2567 = 6\ \overset{\textcircled{1}}{2}\ \overset{\textcircled{2}}{5}\ \overset{\textcircled{3}}{6}\ \overset{\textcircled{4}}{7}\,.$$

STEVIN lényegében ugyanúgy járt el, mint a kínaiak, csak a hieroglif jel helyett bekarikázott szám jelölte a helyi értéket. A háromféle kor e háromféle jelölésének az összhangja – ha még néhány hasonló érv is mellette szólna – elég meggyőzően támogatná azt a feltevést,

Kínai porcelán váza

hogy a kínai tizedes törtektől AL-KÁSI közvetítésével STEVINig egyenes út vezet.

A kínai aritmetikában a tizedes törtek és a mértékegységek kialakulása erősen kötődött a helyi értékes számolótábla használatához. A mind nagyobb pontosságot igénylő mérések végett mind kisebb és kisebb mértékegységek bevezetése vált szükségessé, ugyanakkor kívánatos volt, hogy ezekkel a számolódeszkán ugyanolyan módon lehessen számolni, mint az egész számokkal. Ez a két követelmény egyszerre úgy valósítható meg, ha a mértékegység-rendszer 10-es alapú, vagyis mindegyik 10-szer kisebb a nála közvetlenül nagyobbnál. LI JANG matematikatörténész szerint erősen közrejátszott a kínai tizedes törtek megteremtésében az a kívánalom, hogy az osztás és a négyzetgyökvonás műveletét a számolótáblán tetszőleges

pontossággal el lehessen végezni úgy, hogy ne kelljen megváltoztatni az egész számoknál bevált eljárásokat. A tizedes törtek fogalma Kínában már az i. sz. III. században megjelent, bár a fogalom teljes letisztulása csak a nyugati matematika behatolása után történt meg.

A SZUAN CSING

SI HUANG nagy könyvégetésének esett áldozatul Kína első igazi matematikakönyve, a *Csiu csang szuan su (Matematika kilenc fejezetben)* is. Ez a könyv még a Csou-dinasztia idején, az i. e. 250 körüli években keletkezett összefoglaló mű, amelyből megismerhető Kína egész matematikája. Egyes kutatók a könyv anyagának összegyűjtését és egybeformálását az i. e. 150 táján élt CSANG CANnak (?–i. e. 152?), a tekintélyes államférfinak tulajdonítják. Könnyen hihető, hogy a könyvégetés után a mű anyagát valóban össze kellett szedni és rendezni az esetleg megmaradt, sérült, hiányos néhány pélt dány alapján. Az biztos, hogy amíg végleges tartalmát és alakjá-el nem nyerte, addig többen átdolgozták és kiegészítették. Ezek között meg kell említenünk az I. századból KENG CSOU-CSANGot és LI SZINt, a III. századi LIU HUJt, a VI. században élt CSEN LUANt és a VII. századi LI CSUN-FENGet. Különösen kiemelendő LIU HUJ, aki a könyv 9 fejezetét kiegészítette egy tizedikkel *Haj tao szuan csing (Matematikai értekezés a tengeri szigetről)* címen. Az így 10 részesre bővült könyv címe: *Szuan csing (Matematikakönyv)*, amelyet az irodalomban szokás még a *Tíz Klasszikus* néven is idézni.

Az ó- és középkori kínai matematika megismeréséhez tanulságos a *Szuan csing* átlapozása. A könyv kérdés-felelet formában 246 feladatot tartalmaz. Mindegyik feladatnak közli a megoldási módját, megfogalmazza – olykor általánosan is – az eredményhez vezető utat. Magyarázat, megokolás azonban nincs. Ugyanúgy receptszerűen közli a szükséges eljárásokat, mint ahogy tették ezt az óbabiloni vagy az óegyiptomi szerzők. A 10 fejezet mindegyike különkülön is megállná a helyét, köztük szoros kapcsolat, egymásra építettség nem található, bár bizonyos nehézségi sorrendet figyelembe vesz. Tekintsük át az egyes fejezetek tartalmát.

Az I. fejezet címe: *A mezők mérése (Fang tien)*. A fejezet címében szereplő „tien" szó, illetve hieroglifa eredeti jelentése mező, később azonban a matematikában általában síkidomot jelent. A fejezet *Fang tien* címe tehát olyan árnyalattal „mező mérése", mint ahogy a görög geometria „földmérés". Amint tehát a címből sejthető, a fejezet főleg területszámítási feladatokat ölel fel. Az első felében példákat ad az egyenes szakaszokkal határolt különböző síkidomok területének kiszámítására, majd a körrel és a kör részeivel:

körcikkel, körszelettel és körgyűrűvel foglalkozik. Mivel az idomok oldalait hol egész, hol törtszámokkal adja meg, azért bevezetésképpen megmutatja a közönséges törtekkel való számolást is, pontosabban a négy alapműveletet. A mai módszerektől lényegileg csak a törtnek törttel való osztása különbözik. Ezt mindig előzetes közös nevezőre hozással végzi el. Pontosan csak a négyzet, a téglalap, a trapéz és a háromszög esetében számol. Más síkidomnál megelégszik közelítő eredménnyel, például az általános négyszög területét úgy számítja ki, hogy a két szemben fekvő oldal számtani közepét megszorozza a másik két oldal számtani közepével. A kör területének meghatározásánál ez a valószínűleg legrégibb fejezet a π értékét 3-nak veszi. A két párhuzamos húrral határolt körszelet területét úgy számítja, mintha trapéz lenne. Más, körívekkel vagy görbe vonallal határolt síkidomot is helyettesít a területszámításnál egyenes vonalú síkidommal. A fejezet ősi voltát mutatja az is, hogy terület-mértékegységül annak a téglalapnak a területét választja, amelynek egyik oldala 15 pu (lépés), a másik pedig 16 pu. Ugyancsak az anyag ősi eredetét árulja el a minden feladat végén visszatérő mondat: „Az a kérdés, hogy mekkora a mező?" A terület szót még nem használja, mert a feladat keletkezésekor külön a terület fogalma még nem létezett és a térfogaté sem. Csak a számolások közben alakult ki, hogy az eredetileg csupán a „csi" szóval jelölt eredmény megkülönböztetendő a terület és a térfogat esetén. A „csi" jelentését úgy lehetne visszaadni, hogy a feladat hosszúságadatainak a „szorzata". Idővel a területszámítás eredményét a „csi" hieroglifához csatlakozó „mian" jel fejezte ki, tehát a mian-csi (síkszorzat) szó vette át a terület jelentését. Hasonló módon a „ti-csi" (tér-szorzat) a térfogatot jelenti. Az idők folyamán ugyanilyen értelemváltozáson, illetve kiegészülésen ment át a „tien" jel is. Mint említettem, kezdetben mező, aztán általában a síkidom írásjele volt, később pedig új hieroglifák csatlakozásával speciális síkidomokat jelentett; például a fejezetcím, a fang-tien a négyzet, a csi-tien (ferde mező) pedig a trapéz szónak a megfelelője. Ez a kis kitérő talán elég meggyőzően mutatja, hogy a gyakorlati számítások közben új meg új fogalmak születnek, a régiek átalakulnak, finomulnak, esetleg többfelé ágaznak. A számolás és a fogalmak fejlődésének ez a kölcsönös egymásra hatása jól érzékelhető már a *Szuan csing* keretein belül is, a különböző korokban keletkezett fejezeteket figyelve.

Következzék e fejezet törtekkel kapcsolatos néhány feladata: „Egy mező szélessége $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}$ pu. A mező [területe] 1 mu. Az a kérdés, hogy mekkora a hosszúság? Felelet: $88+\frac{232}{761}$ pu." A mu területmérték, mégpedig 1 mu $=240$ pu^2.

A megoldáshoz először a szélességet kell kiszámítani. Ehhez törteket kell összeadni. A kínaiak a közönséges törtet úgy írták, mint mi, de törtvonal nélkül. A megoldási utasítás így szól: „A szabály a következő: Van nyolc tört, végy az 1 helyett 840-et, az $\frac{1}{2}$ helyett 420-at, az $\frac{1}{3}$ helyett 280-at, az $\frac{1}{4}$ helyett 210-et, az $\frac{1}{5}$ helyett 168-at, az $\frac{1}{6}$ helyett 140-et, az $\frac{1}{7}$ helyett 120-at és az $\frac{1}{8}$ helyett 105-öt. Add össze ezeket. Kapsz 2283-at. Ez a számláló." E részletes számolási utasítás természetesen a számolótáblára vonatkozik: „Rakd ki sorba az 1 put és a törtek számlálóit és nevezőit!"

1	1	1	1	1	1	1	1
	2	3	4	5	6	7	8

„Az 1 put és a törtek számlálóit szorozd meg sorban a legkisebb tört nevezőjével!" Ez 8, tehát:

8	8	8	8	8	8	8	8
	2	3	4	5	6	7	8

Ezután egyszerűsítünk:

8	4	8	2	8	4	8	1
		3		5	3	7	

Most a 7-tel való szorzás következik:

56	28	56	14	56	28	56	7
		3		5	3	7	

Az $\frac{56}{7}$ egyszerűsítése után 5-tel szorzunk:

280	140	280	70	56	140	40	35
		3			3		

Végül szorzunk 3-mal.

840	420	280	210	168	140	120	105

Most válik érthetővé a legelső „szabály": Végy 1 helyett 840-et, $\frac{1}{2}$ helyett 420-at stb. E műveletek után a 9 tört számlálója sorakozik a számolótáblán. Ezek összege, a 2283 a végeredmény számlálója. A közös nevező pedig: $8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3 = 840$. Tehát a „mezőnek" nevezett téglalap szélessége $\frac{2283}{840} = \frac{761}{280}$ pu. A hosszúság pedig:

$$240 \text{ pu}^2 : \frac{761}{280} \text{ pu} = 88 + \frac{232}{761} \text{ pu}.$$

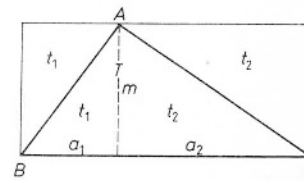
A törtműveletek begyakorlására szolgáló feladatsorban sok olyan feladat van, amelyekre azt mondhatjuk, hogy álgyakorlati feladatok, és a realitással nem törődve, csak gyakorlásra valók. Ilyenekből idézünk kettőt.

A 17. feladat: „7 ember között el kell osztani $8\frac{1}{3}$ pénzérmét. Kérdés: hányat kap mindegyik? Felelet: 1 és $\frac{4}{21}$ pénzt."

A 18. feladat: „$3\frac{1}{3}$ ember között felosztandó $6+\frac{1}{3}+\frac{3}{4}$ pénz (cjan). Kérdés: Mennyit kapnak egyenként? Felelet: Egy ember kap $2\frac{1}{8}$ pénzt."

Már Liu Huj (III. század) keze nyomát viseli az az eljárás, amely a háromszög és a trapéz területének a meghatározására ad „képletet". A módszer az *ABC* háromszög területének kiszámítása esetén szemlélhető a *215. ábrán*. E szerint a háromszög *T* területe:

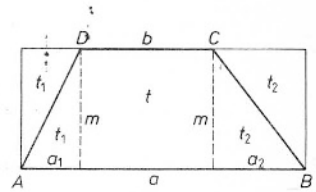
$$T=t_1+t_2=\frac{1}{2}a_1m+\frac{1}{2}a_2m=\frac{1}{2}m(a_1+a_2)=\frac{am}{2}.$$



215. ábra

A *216. ábra ABCD* trapézánál hasonló a módszer. Ennek területe:

$$T=t_1+t_2+t=\frac{1}{2}a_1m+\frac{1}{2}a_2m+bm=$$
$$=\frac{1}{2}m(a_1+a_2)+bm=\frac{1}{2}m(a-b)+\frac{1}{2}\cdot 2bm=\frac{a+b}{2}m.$$



216. ábra

A *Szuan csing* II. részének a címe: *A különböző gabonafajták viszonya*. Mezőgazdasági tárgyú feladatokat sorakoztat fel, olyanokat, amelyek az ún. hármasszabállyal oldhatók meg. Hármasszabálynak nevezzük az aránypár egyik tagjának a kiszámítását az adott három tagból. A fejezet megismertet az űrmértékekkel, a különböző árucikkek értékének a meghatározásával, az adózással kapcsolatos számításokkal stb. Általában olyan feladatokat találunk itt, amelyek az egyenes arány körébe tartoznak. Bemutatunk innen is két feladatot:

1. Vásároltunk 18 cserepet 160 pénzért. Mennyibe került 1 darab?

2. Van 1 dou kölesünk. Mennyi durván hántolt kölest kapunk érte? Felelet: 6 sen durva kölest. (1 dou = 10 sen, űrmértékek.) A felelet megadásához szükséges a fejezet bevezetésében közölt táblázat, amelyből a különböző fajta gabonák egyenértékeit kiolvashatjuk. A táblázat néhány adata:

köles	50
durván hántolt köles	30
finom köles	27

apró dara	13,5
bab, borsó, búza	45
kása	90
komló	175

A megoldási utasítás így hangzik: „Szabály: Vedd a köles mennyiségét, válaszd ki a durva köles mennyiségét, osszál $\frac{5}{3}$-dal." Kissé félreérthetetlenebbül: A táblázatban a köles egyenértéke 50, a durva kölesé 30. A kettő hányadosa $\frac{5}{3}$. Ezzel az $\frac{5}{3}$-dal kell osztanod az 1 dout, illetve a 10 sent: $10 : \frac{5}{3} = 6$.

Az arányos elosztás című III. fejezet feladatai főleg arányos osztásra vezetnek, és alkalmazzák az összetett hármasszabályt is. Ízelítőül innen is kiválasztottunk néhány feladatot:

1. Egy ügyes szövőnő mindennap kétszer többet sző, mint az előzőn. 5 nap alatt 5 csi szövetet készített. Kérdés: Mennyit készített naponta? Felelet: Az első napon $1\frac{19}{31}$ cunt, a következőn $3\frac{7}{31}$ cunt, a harmadikon $6\frac{14}{31}$ cunt, a negyediken 1 csi és $2\frac{28}{31}$ cunt és a legutolsó napon 2 csi és $5\frac{25}{31}$ cunt. (1 csi = 10 cun, hosszmértékek. Az arányszámok összege $1+2+4+8+16=31$. Így 1 rész $\frac{50}{31} = 1\frac{19}{31}$ cun. Stb.)

2. Öt különböző rangú vadász 5 szarvast ejtett el. A rangok szerint osztozkodtak, $5:4:3:2:1$ arányban. Kérdés: Hány szarvas jutott egyre? Felelet: A rangok szerint sorban $1\frac{2}{3}$, $1\frac{1}{3}$, 1, $\frac{2}{3}$ és $\frac{1}{3}$ szarvas.

Ennek a fejezetnek két olyan feladata van, amely vagy hiányos – talán ez a valószínű –, vagy hibás. Mind a kettő fordított arányosságra példa. Ezek közül az egyik:

A-nak van 3 sen kölese, *B*-nek 3 sen durván hántolt kölese és *C*-nek 3 sen főzni való kölese. Kérdés: mennyit kapott mindegyik, ha köleseiket összekeverték, és azután a keveréket újra elosztották?

Mivel a könyv elején található egyenérték-táblázatból az olvasható ki, hogy 50 egység közönséges köles 30 egység durván hántolt, illetőleg 75 egységnyi étkezési kölest ér, azért, ha a beadott köles értéke szerinti arányban osztoznának a keveréken, akkor az *A*, *B*, *C* sorrendet tekintve az osztási arány $50:30:75$ lenne. A feladathoz csatolt rövid utasítás szerint azonban az osztási arány

$\frac{1}{50}:\frac{1}{30}:\frac{1}{75}$. E szerint vagy a megoldás rossz, vagy a feladat szövegéből hiányzik egy követelmény, amely a reciprok arányszámokat indokolja. Ez utóbbit feltételezve, ha a 9 sen keveréket elosztjuk az arányszámok összegével, kapunk 135-öt. Ennek az arányszámokkal való szorzata rendre megadja a fordított arányú elosztás adagjait. Így A kap $\frac{135}{50}=2\frac{7}{10}$, B pedig $\frac{135}{30}=4\frac{1}{2}$ és C $\frac{135}{75}=1\frac{4}{5}$ sen keverék kölest. BEREZKINA szovjet matematikatörténész feltételezi, hogy a feladat megoldása a számolótáblán pálcikákkal a következőképpen történhetett: Kirakták először az 50, 30 és 75 számokat. Aztán ezek közül kettőt-kettőt összeszoroztak:

$$30\cdot 75=2250,\quad 50\cdot 75=3750,\quad 50\cdot 30=1500.$$

Innen 5-tel való egyszerűsítés után nyerték a 450, 750 és 300 számokat. Ekkor az ismeretlenek:

$$x_A=\frac{9\cdot 450}{1500}=2\frac{7}{10},\quad x_B=\frac{9\cdot 750}{1500}=4\frac{1}{2}\quad \text{és}\quad x_C=\frac{9\cdot 300}{1500}=1\frac{4}{5}.$$

Végül még egy III. fejezetbeli feladat: Egy ember 14 csin nyers selyemért kapott 10 csin selyemszövetet. Most beadott 45 csin és 8 lan nyers selymet. Kérdés, mennyi selyemszövetet kapott érte? (16 lan = 1 csin, súlymértékek.)

A *Szuan csing* IV. fejezete *(Sao kuang)* az első rész feladatainak a megfordításait tárgyalja. Ezek megoldásához szükség van a négyzetgyök- és a köbgyökvonásra is. Megmutatja tehát, hogyan lehet ezeket a műveleteket elvégezni a számolótáblán. Ebben a részben kétféle szövegezésű négyzetgyökvonási, illetve köbgyökvonási feladat szerepel. Egyik részük adott négyzethez keresi a négyzet oldalát, a másik csoportjuk adott területű kör sugarának vagy kerületének kiszámítását kívánja. Az utóbbi feladatokban a π értékét mindig 3-nak kell venni. Ezeknek megfelelően a köbgyökvonásra szánt feladatokban egy adott térfogatú kocka élét kell kiszámítani, illetve ismert térfogatú gömb sugarát. A gömbre vonatkozóan π értékét $\frac{27}{8}$-nak (3,375-nek) kell tekinteni, bizonyára a köbgyökvonás kényelmesebb elvégzése érdekében. A fejezet meglepő érdekessége, hogy a gyökvonásnak a számolótáblán való elvégzésére olyan utasítást ad, amelyben a ma Horner-elrendezésnek nevezett eljárást ismerhetjük fel. Amint az eddigi számítási szabályoknál, itt sem találunk semmi magyarázatot. A módszer megokolása csak a XIII. században bukkan fel CSIN CSIU-SAO *Su su csiu-csang* (A matematika 9 fejezete) című kéziratos munkájában, de még így is WILLIAM GEORG HORNER (1786–1837) előtt 500 évvel. A VII. száza-

di VANG HSZIAO-TUNG magyarázat nélkül ugyan, de a Horner-módszerrel, vagy találóbban a kínai-Horner-módszerrel harmadfokú egyenletek közelítő megoldásait határozta meg. A kínaiak „fang fa" módszernek nevezték (fang=gyökvonás, négyzetoldal, fa=osztó), aminek olyasmi jelentése lehetett, hogy az osztás segítségével végzett gyökvonás. Azért, hogy a kínai ókori matematika e felfedezését még jobban értékelhessük, gondoljuk végig mai eszközeinkkel, miként lehet eljutni a kínai gyökvonás számolótáblára kidolgozott eljárásához.

Legyen x fogyó hatványai szerint rendezett n-ed fokú polinom a

$$P_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_2x^2+a_1x+a_0.$$

Rendezzük át ezt a polinomot az $(x-p)$ fogyó hatványai szerint, ahol p pozitív állandó. Az új elrendezésben természetesen az a_i együtthatók helyett valamilyen más, b_i együtthatók szerepelnek:

$$P_n(x)=b_n(x-p)^n+b_{n-1}(x-p)^{n-1}+\ldots+b_2(x-p)^2+b_1(x-p)+b_0.$$

Egyenlőségünk jobb oldalán emeljük ki az $(x-p)$ tényezőt az első n tagból:

$$P_n(x)=$$
$$=(x-p)[b_n(x-p)^{n-1}+b_{n-1}(x-p)^{n-2}+\ldots+b_2(x-p)+b_1]+b_0,$$

vagy áttekinthetőbben, ha a szögletes zárójel kifejezését $P_{n-1}(x)$-szel jelöljük:

$$P_n(x)=(x-p)P_{n-1}(x)+b_0.$$

Innen leolvashatjuk, hogy a $P_n(x)$-nek az $(x-p)$-vel való osztásakor a maradék éppen b_0. Ugyanakkor az is látszik, hogy a $P_n(x)$ helyettesítési értéke az $x=p$ helyen b_0, azaz $P_n(p)=b_0$. A $P_n(x)$ polinom helyettesítési értéke tehát az $x=p$ helyen éppen a $P_n(x):(x-p)$ osztás maradéka. Ha történetesen ennek az osztásnak a maradéka, azaz a b_0 zérus, akkor p a $P_n(x)=0$ egyenlet egyik gyöke.

Rendezzük most a $P_{n-1}(x)$ polinomot is az x fogyó hatványai szerint, amikor is az új együtthatókat c_i-vel jelöljük. Így:

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_2x^2+a_1x+a_0=$$
$$=(x-p)(c_{n-1}x^{n-1}+c_{n-2}x^{n-2}+\ldots+c_2x^2+c_1x+c_0)+b_0.$$

A jobb és bal oldal együtthatói között fennállnak a következő összefüggések:

$$\begin{array}{lll} a_n=c_{n-1} & \text{ahonnan} & c_{n-1}=a_n \\ a_{n-1}=c_{n-2}-pc_{n-1} & \text{ahonnan} & c_{n-2}=a_{n-1}+pc_{n-1} \\ a_{n-2}=c_{n-3}-pc_{n-2} & \text{ahonnan} & c_{n-3}=a_{n-2}+pc_{n-2} \\ \ldots & & \ldots \end{array}$$

$$a_2=c_1-pc_2 \quad \text{ahonnan} \quad c_1=a_2+pc_2$$
$$a_1=c_0-pc_1 \quad \text{ahonnan} \quad c_0=a_1+pc_1$$
$$a_0=b_0-pc_0 \quad \text{ahonnan} \quad b_0=a_0+pc_0.$$

A második oszlop szerint tehát a $P_n(x):(x-p)$ osztás $P_{n-1}(x)$ hányadosának a c_i együtthatói és a b_0 maradék a c_{n-1}-től kezdve rendre kiszámíthatók. Ennek a számításnak a célszerű elrendezését nevezzük „Horner"-elrendezésnek, amelyet, mint látni fogjuk, méltán nevezhetnénk kínai módszernek is. A mondott elrendezés sémája:

$$\begin{array}{cccccccc}
 & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_2 & a_1 & a_0 \\
x-p & \downarrow & +pc_{n-1} & +pc_{n-2} & \dots & +pc_2 & +pc_1 & +pc_0 \\
 & & \nearrow\downarrow & \nearrow\downarrow & & \nearrow\downarrow & \nearrow\downarrow & \nearrow\downarrow \\
 & c_{n-1} & c_{n-2} & c_{n-3} & \dots & c_1 & c_0 & b_0
\end{array}$$

Példaképpen a

$$P_4(x)=2x^4-x^3-10x^2+14x-12$$

polinomot osszuk el $(x-3)$-mal!

$$P_4(x)=(x-3)P_3(x)+b_0.$$

A sablon szerint a $P_3(x)$ együtthatóinak és a b_0-nak a meghatározása így történhet:

$P_4(x)$ együtthatói:	2	−1	−10	14	−12
Az osztó: $x-3$, $p=3$		6	15	15	87
$P_3(x)$ együtthatói és b_0:	2	5	5	29	75

Tehát: $2x^4-x^3-10x^2+14x-12=(x-3)(2x^3+5x^2+5x+29)+75.$

Ha $(x-2)$-vel osztottunk volna, akkor az eredmény

$$P_4(x)=(x-2)(2x^3+3x^2-4x+6)$$

lenne, amiből látszik, hogy a $P_4(x)=0$ egyenlet egyik gyöke 2.

A kínaiak a lényeg szerint – jelölés szerint nem – a bemutatott módszert arra használták, hogy az x valamely polinomját átrendezzék $(x+p)$ szerint. Ha tehát az átrendezendő polinom:

$$P_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_2x^2+a_1x+a_0,$$

akkor az átrendezett polinom:

$$\begin{aligned}
&P_n(x)= \\
&=b_n(x+p)^n+b_{n-1}(x+p)^{n-1}+\dots+b_2(x+p)^2+b_1(x+p)+b_0= \\
&=(x+p)[b_n(x+p)^{n-1}+b_{n-1}(x+p)^{n-2}+\dots+b_2(x+p)+b_1]+b_0= \\
&=(x+p)P_{n-1}(x)+b_0.
\end{aligned}$$

Amint láttuk, a b_i együtthatók meghatározhatók, hiszen b_0 a $P_n(x):(x+p)$ osztás maradéka. Ugyanígy b_1 a $P_{n-1}(x):(x+p)$ maradéka, és hasonlóan folytatva b_2 a $P_{n-2}(x):(x+p)$ osztás maradéka stb. Itt a

$$P_{n-2}(x)=b_n(x+p)^{n-2}+b_{n-1}(x+p)^{n-3}+\ldots+b_3(x+p)+b_2$$

úgy jött létre, hogy a $P_{n-1}(x)$ első $n-1$ tagjából kiemeltük az $(x+p)$ tényezőt:

$$P_{n-1}(x)=$$
$$=(x+p)[b_n(x+p)^{n-2}+b_{n-1}(x+p)^{n-3}+\ldots+b_3(x+p)+b_2]+b_1.$$

Röviden: $P_{n-1}(x)=(x+p)P_{n-2}(x)+b_1$.

A módszer alkalmazására figyeljük meg, hogyan rendezhető át a

$$P_4(x)=2x^4-x^3-10x^2+14x-12$$

polinom az $(x+2)$ fogyó hatványai szerint.

$$\begin{array}{lrrrrl}
p=-2 & 2 & -1 & -10 & 14 & -12 \\
 & & -4 & 10 & 0 & -28 \\
\hline
 & 2 & -5 & 0 & 14 & \underline{-40=b_0} \\
 & & -4 & 18 & -36 & \\
\hline
 & 2 & -9 & 18 & \underline{-22=b_1} & \\
 & & -4 & 26 & & \\
\hline
 & 2 & -13 & \underline{44=b_2} & & \\
 & & -4 & & & \\
\hline
 & 2 & \underline{-17=b_3} & & & \\
 & \underline{2=b_4} & & & &
\end{array}$$

Az átrendezett polinom tehát:

$$P_4(x)=2(x+2)^4-17(x+2)^3+44(x+2)^2-22(x+2)-40.$$

Ezek után nézzük meg, hogy egy harmadfokú egyenletnél hogyan használták fel a módszert a kínaiak az egyenlet egyik gyökének a megközelítésére. Megkeresendő például a

$$2x^3-3x^2+5x-22=0$$

egyenlet egyik gyöke!

Először próbálgatással megállapították, hogy az egyenlet egyik gyöke a 2 és a 3 között van, hiszen az egyenlet polinomjának az $(x-2)$-vel való osztási maradéka -8, az $(x-3)$-mal való osztás maradéka pedig $+20$. Így az egyenlet egyik gyöke

$$x=2+y, \quad \text{ahol} \quad 0<y<1.$$

Helyettesítsük most az egyenletbe x helyébe az $(2+y)$-t, és rendezzük y, azaz $(x-2)$ szerint:

$$
\begin{array}{r|rrrr}
p=2 & 2 & -3 & 5 & -22 \\
 & & 4 & 2 & 14 \\
\hline
 & 2 & 1 & 7 & -8=b_0 \\
 & & 4 & 10 & \\
\hline
 & 2 & 5 & 17=b_1 & \\
 & & 4 & & \\
\hline
 & 2 & 9=b_2 & & \\
 & 2=b_3 & & &
\end{array}
$$

Így az y ismeretlenű egyenlet:

$$2y^3+9y^2+17y-8=0.$$

Most ismét próbálgatással megállapítható, hogy $0{,}3<y<0{,}4$, mert az $(y-0{,}3)$-del való osztási maradék $-2{,}036$, és az $(y-0{,}4)$-del való osztás maradéka $+0{,}368$. Így tehát

$$y=0{,}3+z, \quad \text{ahol} \quad 0<z<0{,}1.$$

Írjunk most az egyenletbe y helyébe $(0{,}3+z)$-t, és rendezzünk z, azaz $(y-0{,}3)$ szerint!

$$
\begin{array}{r|rrrr}
0{,}3 & 2 & 9 & 17 & -8 \\
 & & 0{,}6 & 2{,}88 & 5{,}964 \\
\hline
 & 2 & 9{,}6 & 19{,}88 & -2{,}036=c_0 \\
 & & 0{,}6 & 3{,}06 & \\
\hline
 & 2 & 10{,}2 & 22{,}94=c_1 & \\
 & & 0{,}6 & & \\
\hline
 & 2 & 10{,}8=c_2 & & \\
 & 2=c_3 & & &
\end{array}
$$

Az új egyenlet tehát:

$$2z^3+10{,}8z^2+22{,}94z-2{,}036=0.$$

Újabb próbálgatással kiderül, hogy z értéke a 0,08 és 0,09 között van, mert a $z=0{,}08$ esetén a helyettesítési érték $-0{,}130\,656$, $z=0{,}09$ esetében pedig $+0{,}117\,538$.

Ha megelégszünk század pontossággal, akkor az eredeti egyenlet egyik gyöke:

$$x=2+y=2+0{,}3+z\approx 2{,}38.$$

Az eljárás folytatásával a gyök tetszőleges pontossággal kiszámítható.

Határozzuk meg példaképpen $\sqrt{620}$ értékét két tizedes pontossággal, azaz oldjuk meg az

$$x^2-620=0$$

egyenletet. Az x értéke 24 és 25 között van, tehát

$$x=24+y, \quad \text{ahol} \quad 0<y<1.$$

Az egyenletnek y-ra, azaz $(x-24)$-re rendezése:

$$\begin{array}{r|rrr}
24 & 1 & 0 & -620 \\
 & & 24 & 576 \\
\hline
 & 1 & 24 & -44=b_0 \\
 & & 24 & \\
\hline
 & 1 & 48=b_1 & \\
\hline
 & 1=b_2 & &
\end{array}$$

Az y meghatározására szolgáló egyenlet tehát:

$$y^2+48y-44=0, \quad \text{ahol} \quad 0<y<1.$$

A bal oldal helyettesítési értékei az $y=0{,}8$-nél és az $y=0{,}9$-nél: $-4{,}96$, illetve $+0{,}01$, tehát $0{,}8<y<0{,}9$, vagyis

$$y=0{,}8+z, \quad \text{ahol} \quad 0<z<0{,}1, \quad \text{és ahonnan} \quad z=y-0{,}8.$$

A z-t meghatározó egyenlet c_i együtthatóinak kiszámítása:

$$\begin{array}{r|rrr}
0{,}8 & 1 & 48 & -44 \\
 & & 0{,}8 & 39{,}04 \\
\hline
 & 1 & 48{,}8 & -4{,}96=c_0 \\
 & & 0{,}8 & \\
\hline
 & 1 & 49{,}6=c_1 & \\
\hline
 & 1=c_2 & &
\end{array}$$

A z ismeretlenű egyenlet tehát:

$$z^2+49{,}6z-4{,}96=0, \quad \text{ahol} \quad 0<z<0{,}1.$$

Az újabb próbálgatás azt mutatja, hogy ha $z=0{,}09$, akkor a bal oldal helyettesítési értéke $-0{,}4879$, vagyis negatív. A z keresett értéke tehát a 0,09 és 1 között van, azaz

$$z=0{,}09+t, \quad \text{ahol} \quad 0<t<0{,}01, \quad \text{és ahonnan} \quad t=z-0{,}09.$$

A t szerint rendezett egyenlet együtthatóinak kiszámítása:

$$\begin{array}{r|rrr}
0{,}09 & 1 & 49{,}6 & -4{,}96 \\
 & & 0{,}09 & 4{,}4721 \\
\hline
 & 1 & 49{,}69 & -0{,}4879=d_0 \\
 & & 0{,}09 & \\
\hline
 & 1 & 49{,}78=d_1 & \\
\hline
 & 1=d_2 & &
\end{array}$$

A t-re vonatkozó egyenlet tehát:

$$t^2+49{,}78t-0{,}4879=0, \quad \text{ahol} \quad 0<t<0{,}01.$$

Az újabb próbálgatás eredménye az, hogy $0{,}009 < t < 0{,}01$. Ha az eljárás folyamán ezen a ponton megállunk, akkor nyerjük, hogy

$$x = 24 + y = 24 + 0{,}8 + z = 24{,}8 + 0{,}09 + t \approx 24{,}899 \approx 24{,}90.$$

Próbaképpen: $24{,}9^2 = 620{,}01$.

A kínai-Horner-módszer elegendő számú ismétlésével tehát a gyökvonás tetszőleges pontossággal elvégezhető, csupán a négy alapművelet felhasználásával, tehát a kínai számolótábla, illetve az abakusz segítségével is.

A IV. fejezet fentebb jellemzett gyökvonási feladataiban mindig teljes hatványból kell gyököt vonni, tehát a művelet pontos eredményhez vezetett. SZUN-CE (III. század) és később a VI. században CSANG CSIU-CSIEN közelítő formulákat is alkalmazott. SZUN-CE szerint:

$$a + \frac{b}{2a} > \sqrt{a^2 + b} > a + \frac{b}{2a+1}.$$

Ennek az egyenlőtlenségnek az első fele azt mutatja, hogy a babiloni matematikai ismeretek nem voltak idegenek a kínaiak előtt, hiszen ez az egyenlőtlenség először Mezopotámiában bukkant fel. (lásd a 23. oldalon.)

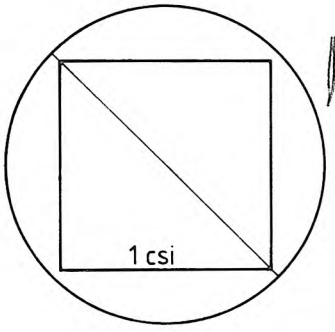
CSANG CSIU-CSIEN pedig a köbgyökvonásra adta a

$$\sqrt[3]{a^3 + b} \approx a + \frac{b}{3a^2 + 1}$$

közelítő formulát.

Érdemes még néhány szót vesztegetni a IV. fejezetben előforduló π-értékekre is. Egyazon fejezeten belül kétféle π-érték használata nem annyira a pontosságra törekvésről, hanem inkább a kényelmességről árulkodik. Lehet azonban az is, hogy itt a fő cél a gyökvonás begyakorlása volt, és a műveletet a π jobb megközelítése valamennyire bonyolítaná, tehát talán didaktikai szempont magyarázhatná a π megválasztásában mutatkozó következetlenséget. Lehet, hogy így van, hiszen Kínában az ősi $\pi = 3$ értéket sokszor használták még akkor is, amikor pontosabb közelítés is rendelkezésükre állt.

Forgalomban volt az említetteken kívül még több π-érték is. LIU CI (i. e. 50–i. sz. 23) csillagász 3,15-dal számolt. CSANG HENG (76–139) csillagász a π helyett $\sqrt{10}$-et vagy $\frac{92}{29} \approx 3{,}1724$-et vett. VANG FAN a π-t $\frac{142}{45} \approx 3{,}1556$-nek számította. A Han-dinasztia (i. e. 206–i. sz. 220) nevezetes reformátor politikusa, VANG MANG elrendelte, hogy a mértékegységeket egységesíteni kell az egész birodalomban. Az egységesítést LIU CI hajtotta végre. Elkészíttette a mértékegységek rézetalonját, és definíciójukat törvénybe iktatták.



217. ábra

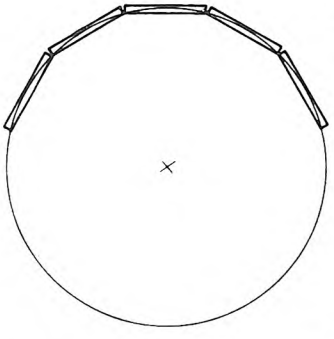
Ekkor a π értékét is „rendeletileg" 3,154 6645≈3,1547-nek állapí-tották meg. Ez a szám úgy jött ki, hogy a régi mérőedények vizsgá-lata alapján meghatároztak egy 1,62 területegység (csi²) területű kört. Ebbe berajzolták a *217. ábrán* látható módon az egységnyi területű négyzetet. A kör átmérője és a négyzet átlója közti különb-ség fele, amit „résnek" neveztek, 0,0095 csinek mutatkozott. Ezek-ből az adatokból a kör átmérője:

$$d=\sqrt{2}+2\cdot 0{,}0095\approx 1{,}4332.$$

Mivel a kör területének a mérőszáma 1,62, azért a

$$\pi\cdot\frac{d^2}{4}=1{,}62,\quad \text{illetve a}\quad \pi\cdot\frac{1{,}4332^2}{4}=1{,}62$$

egyenletből $\pi\approx 3{,}1547$.



218. ábra

Törvény ide, törvény oda, azért akadtak Kínában is matematiku-sok, akik más, pontosabb π-közelítéseket kerestek. Ezek köz-tartozott LIU HUJ is. Ez a III. századi matematikus egy 10 egységnyi sugarú körbe szabályos 192 oldalú sokszöget rajzolt. Így a kör terü-letének alsó közelítő értékét $313\frac{584}{625}$-nek találta. Felső közelítésnek azt a területet vette, amelyet úgy nyert, hogy a beírt sokszög terü-letéhez hozzáadta a kimaradt körszeletek köré írt téglalapok te-rületösszegét *(218. ábra)*. Ekkor $314\frac{64}{625}$-öt kapott. E két érték számtani közepe pedig közelítőleg 314,0184. Ezen eredmény alap-ján π-t 3,14-nek vette. A legpontosabb számítást CU CSUNG-CSE (429?–500) hajtotta végre. Ő LIU HUJ módszerét a körbe írt 12 288 és 24 576 oldalú szabályos sokszögekre alkalmazta. Ilyen módon azt kapta, hogy

$$3{,}141\,5926<\pi<3{,}141\,5927.$$

Érdekes, hogy a már említett CSANG CSIU-CSIEN egy évben ugyanannál a feladatnál kétféle utasítást adott. Először számolt a $\pi\approx\frac{27}{8}=3{,}37$ értékkel, aztán a jóval pontosabb $\pi\approx\frac{22}{7}\approx 3{,}142$ közelítéssel. Erre a feladatra hivatkozva a VII. századi LI CSUN-FENG a pontosabb $\frac{22}{7}$ értéket használta a *Matematika kilenc fejezetben* átdolgozásánál.

A π sokféle közelítő értékének egy időben való előfordulása meg-erősíti azt a feltevést, hogy az ókori és középkori Kína matemati-kusai egymástól elszigetelten, egymás eredményeiről nem vagy csak nagyon későn értesülve dolgoztak.

A *Szuan csing* V. fejezete a *Munka értékelése* címet viseli, és ennek megfelelően olyan számítási feladatokat sorakoztat fel, amé-lyek különböző építési munkálatokkal kapcsolatosak. Fő tárgyai

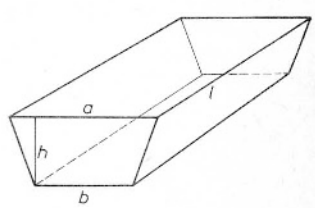
Iránytűkészítés Kínában

a térfogatszámítás, a szükséges anyag és munkaerő meghatározása, a szállítóeszközökkel és általában a szállítással összefüggő számítási kérdések. Ezek közül mutatunk be néhányat.

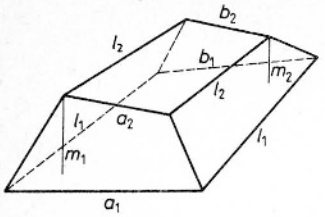
A fejezet 6. feladata: Egy parasztárok. (Szimmetrikus trapéz alapú egyenes hasáb, *219. ábra.*) A felső szélessége 1 csan 6 csi 3 cun, az alsó szélessége 1 csan, mélysége 6 csi 3 cun, hossza 13 csan 2 csi 1 cun. Kérdés, mekkora a térfogat? (1 csan = 10 csi = 100 cun, 6 csi = = 1 pu.) A megfelelő utasítást a

$$V=\frac{a+b}{2}hl$$

képlettel írhatjuk le.



219. ábra

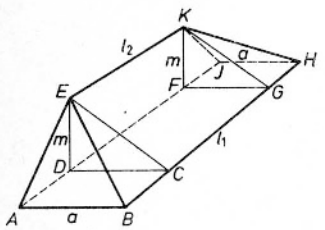


220. ábra

Az V/21. feladatban érdekes közelítő eljárással találkozunk. A számolási utasítás mindig számtani közepekkel igyekszik gondolkozni. A feladat egy eltorzított hasáb alakú földtömegnek *(220. ábra)* az elszállításáról szól, ahol ismertek a torz hasáb rajzon látható adatai. Adott még a szállítási távolság, a szállítókosár térfogata, egy ember napi teljesítménye, és arra kell válaszolni, hogy mekkora a föld térfogata, valamint hány ember szükséges a munka elvégzéséhez. A feladatkészítő a torz hasáb térfogatát a következő képletnek megfelelő közelítő utasítással számolja:

$$V=\frac{1}{2}\left(\frac{a_1+a_2}{2}+\frac{b_1+b_2}{2}\right)\frac{m_1+m_2}{2}\cdot\frac{l_1+l_2}{2}.$$

Ha ezt a receptet téglatestre alkalmazzuk, azaz az adatokat úgy választjuk, hogy $a_1=a_2=b_1=b_2=a$, $l_1=l_2=l$ és $m_1=m_2=m$ legyen, akkor a képlet átmegy a $V=aml$ alakba.

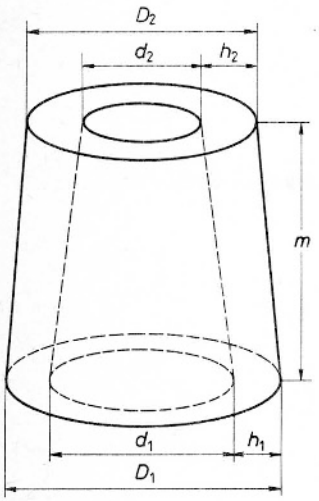


221. ábra

Az V/18. feladat annak a háztető alakú *ABHJKE* testnek a térfogatát kérdezi, amelyet a *221. ábra* szemléltet, az ismert a, m, l_1 és l_2 oldalakkal. A számolási képlet elárulja, hogy a megoldó a *DCGFKE* hasáb térfogatához hozzáadta az *FGHJK* gúla térfogatának a kétszeresét:

$$V=\frac{am}{2}l_2+2a\frac{l_1-l_2}{2}\cdot\frac{m}{3}=\frac{(2l_1+l_2)am}{6}.$$

Ennek a tárgykörnek a befejezéséül említünk még egy példát, amely tanúsítja, hogy az ókínai matematika tisztában volt a csonka gúla és a csonka kúp térfogatának a kiszámításával. Ebből a korból származik a *222. ábrán* felvázolt lyukas test térfogatának kiszámítási utasítása, amely képletszerűen:



222. ábra

$$V=\frac{(2a_1+a_2)b_1+(2a_2+a_1)b_2}{4}m,$$

ahol

$$a_1=\frac{D_1+d_1}{2},\quad a_2=\frac{D_2+d_2}{2},\quad b_1=h_1\quad\text{és}\quad b_2=h_2.$$

Könnyű kimutatni, hogy a $\pi=3$ esetre érvényes

$$V=\frac{m}{4}[D_1^2+D_1D_2+D_2^2-(d_1^2+d_1d_2+d_2^2)]$$

képlet teljesen azonos az ókínai számítási eljárással.

A könyv VI. fejezetének címe: *Az arányos osztás.* Tárgykörét tekintve, hasonló kérdésekkel foglalkozik, mint a III. fejezet, de az itteniek bonyolultabb, sokszor hosszadalmasabb számolást igényelnek. Különösen érdekesek és az eddigiekhez képest újszerűek a so-

rozatok ismeretét kívánó feladatok. Ilyen ennek a résznek a 17. feladata. Ez így hangzik:

5 csi hosszú aranyrúdnak levágtak az aljából 1 csit. Ennek a súlya 5 csin. Aztán levágtak a tetejéből 1 csi hosszúságú darabot, amely 2 csin súlyú volt. Mekkora a súlya minden egyes csinek?

A megoldási utasítás számunkra különös. Így szól:

1. Keresd meg a „különbségkoefficienst"!

$$k=a_n-a_1.$$

2. Határozd meg a „fokot"!

$$n_1=(n-1)a_1 \quad \text{és} \quad n_i=(n-1)a_1+(i-1)k.$$

3. Számítsd ki rendre az egyes elemeket!

$$a_i=\frac{(n-1)a_1+(i-1)k}{(n-1)a_1}\cdot a_1.$$

Hogyan jutottak ehhez a megoldási eljáráshoz? Az utasításokat persze képletek nélkül kell elképzelnünk. A megoldásra – véleményem szerint – sok konkrét példa elemzése vezette rá a módszer feltalálóját, mégpedig az arányosság gondolatától indíttatva. Az alapötlet a következő: Ha sikerül olyan $\frac{n_i}{n_1}$ hányadosokat találni, amelyekre igaz, hogy $\frac{n_i}{n_1}=\frac{a_i}{a_1}$, ahol a_i a számtani sorozat i-edik és a_1 a sorozat első eleme, akkor

$$a_i=\frac{n_i}{n_1}\cdot a_1.$$

Tegyük fel, hogy egy számtani sorozatnak ismerjük az első és az n-edik elemét, tehát a_1-et és a_n-et, továbbá az elemek számát, n-et, akkor képezhető az $a_n-a_1=k$ különbség. Az $n_i:n_1$ hányadosokban szerepeltessük az adatokat, tehát n-et és k-t. Hajtsuk ezt végre egy konkrét sorozat esetében. Legyen például ez a sorozat:

$$2, 5, 8, 11, 14, \quad \text{ahol} \quad a_1=2, a_5=14,$$

tehát $k=a_5-a_1=14-2=12$.

Osszuk végig a sorozat elemeit $a_1=2$-vel:

$$\frac{2}{2}, \frac{5}{2}, \frac{8}{2}, \frac{11}{2}, \frac{14}{2}.$$

Az $n_i:n_1$ arány e törtek valamelyik bővített alakja lehet. Bővítsünk minden elemet $n-1=(5-1)$-gyel:

$$\frac{(5-1)2}{(5-1)2}, \frac{(5-1)5}{(5-1)2}, \frac{(5-1)8}{(5-1)2}, \frac{(5-1)11}{(5-1)2}, \frac{(5-1)14}{(5-1)2}.$$

Alakítsuk át a számlálókat úgy, hogy azokban fellépjen az $a_1=2$, a $k=12$ és az illető elem sorszáma:

$$\frac{(5-1)2}{(5-1)2},\ \frac{(5-1)2+12}{(5-1)2},\ \frac{(5-1)2+24}{(5-1)2},$$
$$\frac{(5-1)2+36}{(5-1)2},\ \frac{(5-1)2+48}{(5-1)2},$$

illetve

$$\frac{(5-1)2}{(5-1)2},\ \frac{(5-1)2+(2-1)12}{(5-1)2},\ \frac{(5-1)2+(3-1)12}{(5-1)2},$$
$$\frac{(5-1)2+(4-1)12}{(5-1)2},\ \frac{(5-1)2+(5-1)12}{(5-1)2}.$$

Általában az i-edik elem:

$$\frac{n_i}{n_1}=\frac{(n-1)a_1+(i-1)k}{(n-1)a_1}.$$

Ha igaz például, hogy

$$n_3 : n_1 = a_3 : a_1,$$

akkor

$$a_3=\frac{n_3}{n_1}\cdot a_1=\frac{8+24}{8}\cdot 2=8.$$

A 10. elem:

$$a_{10}=\frac{n_{10}}{n_1}a_1=\frac{4\cdot 2+9\cdot 12}{4\cdot 2}=\frac{116}{8}\cdot 2=29.$$

Valóban:

$$a_{10}=a_1+(n-1)d=2+9\cdot 3=29.$$

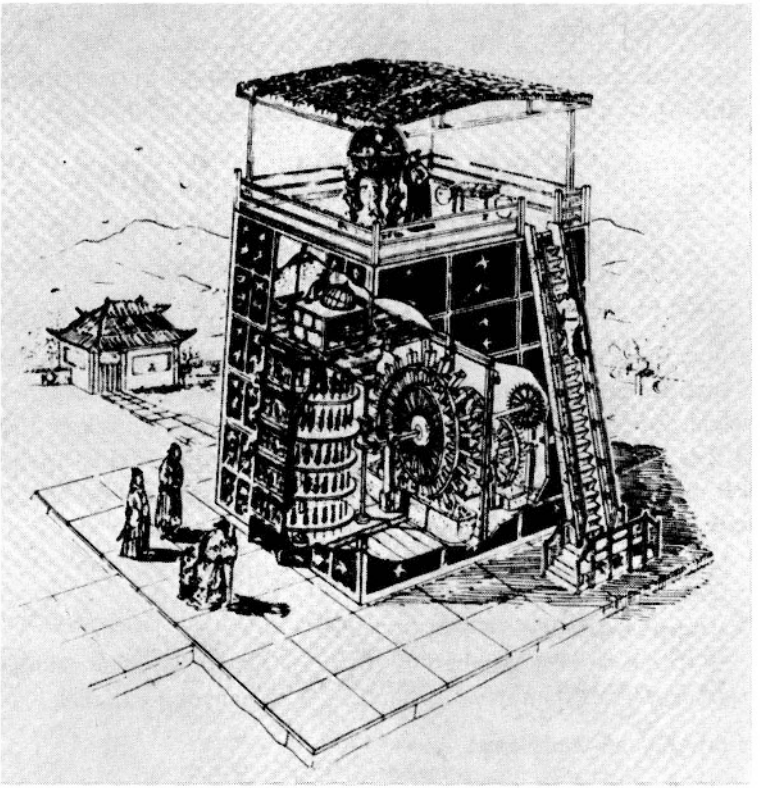
Sok ilyen számtani sorozat hasonló vizsgálata után születhetett meg a megoldási utasítás.

Az idézett feladat ugyan nem mondja, hogy a benne szereplő rúd egymás utáni, 1 csi hosszú darabjainak a súlya számtani sorozatot alkot, de a megoldás ezt igazolja. Ez esetben tehát:

1. A „különbségi koefficiens": $k=a_n-a_1=2-4=-2$.
2. A „fok": $n_1=(n-1)a_1=4\cdot 4=16$
   és $n_i=(n-1)\ a_1+(i-1)k=16+(i-1)(-2)$.
3. Az elemek:

$$a_2=\frac{16+(-2)}{16}\cdot 4=3\frac{1}{2},$$
$$a_3=\frac{16+2(-2)}{16}\cdot 4=3,$$
$$a_4=\frac{16+3(-2)}{16}\cdot 4=2\frac{1}{2},$$
$$a_5=\frac{16+4(-2)}{16}\cdot 4=2.$$

A rúd 1 csi hosszúságú darabjainak a súlya tehát csökkenő sor-



Su Sung
csillagászati órája (XI. sz.)

rendben: 4, $3\frac{1}{2}$, 3, $2\frac{1}{2}$ és 2 csin. A kínai feladatmegoldó nem látta meg a sorozat differenciájának számolást egyszerűsítő szerepét, és így az $a_n = a_1 + (n-1)d$ összefüggés helyett a bonyolultabb arányos osztásra alapozott módszert alkalmazta.

Ugyancsak érdekesen gondolkozott e fejezet 18. feladatának a megválaszolásánál is. A feladat szerint 5 pénzt kell elosztani 5 ember között úgy, hogy a részek egy számtani sorozat szomszédos elemei legyenek, és az első két ember összesen ugyanannyit kapjon, mint a többi három összesen.

Mi valahogy így gondolkoznánk:

A részek: a_1, a_1+d, a_1+2d, a_1+3d, a_1+4d.

Ezek összege: $5a_1+10d=5$.

A második követelmény szerint: $2a_1+d=3a_1+9d$.

Az a_1-re és d-re nyert

$$a_1+2d=1$$
$$a_1+8d=0$$

egyenletrendszerből:

$$a_1=\frac{4}{3} \quad \text{és} \quad d=-\frac{1}{6}.$$

A részek tehát: $\frac{4}{3}, \frac{7}{6}, 1, \frac{5}{6}, \frac{2}{3}$.

A kínai szabály ez esetben így hangzik: Rakjunk ki (a számolótáblára) $5+4+3+2+1=15$ pénzt „piramidálisan", tehát így:

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 \\ & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & \\ & & 1 & & 1 & & 1 & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & & & 1 & & & & \end{array}$$

Adjuk össze az első két sor pálcikáit. Ez 9. Összegezzük az utolsó 3 sort. Az összeg 6. Ezek nem egyenlők, tehát a feladat második feltételét nem teljesítik. A két összeg különbsége 3. Ha a kirakott 5, 4, 3, 2 és 1 részek mindegyikéhez ezt a 3-at hozzáadjuk, akkor az első két rész összesen 6-tal, a többi három pedig összesen 9-cel növekszik, és így a második kikötés is teljesül. A részek ekkor:

$$8, \quad 7, \quad 6, \quad 5, \quad 4.$$

Valóban: $8+7=6+5+4$.

A részek összege azonban most nem 5, hanem 30, tehát minden részt osztani kell annyival, ahányszor a 30 nagyobb az 5-nél, azaz 6-tal. Így az eredmény: $\frac{4}{3}, \frac{7}{6}, 1, \frac{5}{6}, \frac{2}{3}$.

A következő, 19. feladat megoldása lényegileg megegyezik a ma szokásossal. A feladat így szól:

Egy bambuszrúdon 9, bütyökkel elválasztott íz van. Az alsó 3 íz térfogata 4 sen, a legfelső 4 íz térfogata pedig összesen 3 sen. Kérdés: Mekkora a térfogatösszege a középső két íznek, ha minden íz térfogata az előzőtől ugyanannyival különbözik?

Az alsó három íz térfogatösszege:

$$3a_1+3d=4.$$

A legfelső négy íz térfogatösszege:

$$4a_1+26d=3.$$

Ezekből:

$$a_1=\frac{95}{66} \quad \text{és} \quad d=-\frac{7}{66}, \quad \text{és így} \quad a_4+a_5=\frac{141}{66} \text{ sen.}$$

Ugyancsak a VI. fejezetben fordulnak elő ún. mozgási feladatok is. Ezek közül a 13. így szól:

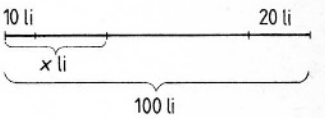
Egy lassan haladó kezdetben megtett 10 li utat. Ekkor indult egy gyorsabb, és 100 li megtétele után 20 livel elhagyta. Kérdés: Menynyi utat tett meg a gyorsabb, mielőtt a lassabban haladót utolérte?

Felelet: 33 és $\frac{1}{3}$ lit.

A megoldási szabály: „Azt a 10 li utat, amelyet a lassan haladó megtett, add a 20 li úthoz, amellyel elhagyta a gyorsabb. Ez az osztó. A lassúbb 10 li útját szorozd meg a gyorsabb 100 li útjával. Ez az osztandó. Oszd el az osztandót az osztóval, és megkapod liben."

E szerint tehát: $x=\frac{10\cdot 100}{10+20}=33\frac{1}{3}$.

A szabály elárulja, hogy a kínaiak ügyesen bántak az aránypárokkal. Valószínű ugyanis, hogy az eredeti gondolatmenet a *223. ábra* alapján született meg. Feltéve, hogy mindkét gyalogló állandó sebességű, egyenlő idők alatt a megtett utak aránya állandó. Ha tehát a gyorsabb x li utat tett meg a találkozásig, akkor közben a lassúbb $(x-10)$ li utat tett meg. E két út aránya: $x:(x-10)$. Továbbá: Miközben a gyorsabb megtette a 100 li távolságot, aközben a lassúbb csak $(100-10-20)$ lit hagyott maga mögött. E két út aránya: $100:(100-30)$. A két arány egyenlő, tehát:



223. ábra

$$x:(x-10)=100:(100-30).$$

Valamely aránypárban azonban az első tag úgy aránylik az első és a második tag különbségéhez, mint a harmadik tag a harmadik és a negyedik tag különbségéhez. Így:

$$x:10=100:30.$$

Innen:

$$x=\frac{10\cdot 100}{10+20},$$

ami megfelel a kínai „szabálynak".

Amint látjuk, a VI. fejezet az arányos osztást nemcsak kimondottan „gyakorlati" feladatok megoldásában alkalmazza, hogy ti. hogyan kell a közös jövedelmet „igazságosan" elosztani, tekintetbe véve a rangot, a hivatali állást és a végzett munka egyéb körülményeit. Így mintegy átmenetet képez a VII. fejezetnek, az előbbiekhez hasonlítva, lényegesen elméletibb feladatai felé, ahol a felvetett kérdések megválaszolásához lineáris egyenletek, egyenletrendszerek megoldása szükséges. Sokszor kerül alkalmazásra a már megismert „regula falsi" egészen mechanikus változata (lásd 59. oldal). Mielőtt erre néhány példát hoznánk fel, előbb kísérjük figyelemmel a kínai recept megokolását. Oldjuk meg ezért az

$$ax+b=c$$

egyenletet! Válasszunk x számára két tetszőleges (hamis) értéket. Legyenek ezek x_1 és x_2. Számítsuk ki e két értékkel az $ax+b$ helyettesítési értékét:

$$ax_1+b=c_1$$

és

$$ax_2+b=c_2.$$

Az eredeti és a most kapott első egyenlet különbsége:

$$a(x-x_1)=c-c_1=k_1. \tag{1}$$

Az eredeti és a második egyenlet különbsége:

$$a(x-x_2)=c-c_2=k_2. \tag{2}$$

A két utóbbi egyenlet hányadosa:

$$\frac{x-x_1}{x-x_2}=\frac{k_1}{k_2},$$

ahonnan:

$$x=\frac{x_1k_2-x_2k_1}{k_2-k_1}.$$

Ugyanezt a „képletet" használja a *Szuan csing* VII. fejezete a kétismeretlenes lineáris egyenletrendszer megoldására is. Tekintsük ugyanis az

$$a_1x+b_1y=c_1$$
$$a_2x+b_2y=c_2$$

egyenletrendszert. Az elsőből

$$y=\frac{c_1-a_1x}{b_1}.$$

Ezt a második egyenletbe írva:

$$a_2x+b_2\frac{c_1-a_1x}{b_1}=c_2, \tag{3}$$

és így:

$$(a_2b_1-a_1b_2)x+b_2c_1=b_1c_2.$$

Rövidebben:

$$Ax+B=C,$$

ahol

$$A=a_2b_1-a_1b_2 \quad \text{és} \quad B=b_2c_1 \quad \text{és} \quad C=b_1c_2.$$

Legyen most $x=x_1$, akkor $Ax_1+B=b_1c_2'=C_1$, továbbá, ha $x=x_2$, akkor $Ax_2+B=b_1c_2''=C_2$.

Ha most

$$C-C_1=b_1(c_2-c_2')=b_1k_1$$

és

$$C-C_2=b_1(c_2-c_2'')=b_1k_2,$$

akkor

$$x=\frac{b_1k_2x_1-b_1k_1x_2}{b_1k_2-b_1k_1},$$

azaz

$$x=\frac{k_2x_1-k_1x_2}{k_2-k_1}. \tag{4}$$

A képlet tehát x számára ugyanaz, mint előbb, de a k_1 és a k_2 kiszámítása a (3) egyenlet alapján történjék. A már meghatározott x értéket az egyenletrendszer valamelyik egyenletébe behelyettesítve, ismét egyismeretlenes elsőfokú egyenlet áll rendelkezésünkre az y kiszámítására.

A könyv VII. fejezete 20 feladatot tartalmaz. Ebből az első 8 mind

$$a_1x-y=c_1$$
$$a_2x-y=c_2$$

alakú egyenletrendszerre vezet, ahol tehát $b_1=b_2=-1$. Ezeknél a fejezet írója azt tanácsolja, hogy először írjuk fel az

$$\begin{matrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{matrix}$$

táblázatot, és azután mechanikus „keresztbe szorzásokkal" végezzük el az alábbi képleteknek megfelelő műveleteket:

$$y=\frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_2-a_1} \quad \text{és} \quad x=\frac{c_2-c_1}{a_2-a_1}.$$

Ezekről a feladatokról nyerte ez a fejezet a *Felesleg - hiány (Jing bu cu)* címet. A címadó feladatok közül egy:

Valamit közösen vásároltak. Ha minden ember fizet 8 pénzt, akkor a felesleg 3 pénz. Ha pedig mindenki fizet 7 pénzt, akkor a hiány 4 pénz. Kérdés: Hányan vásároltak közösen, és mennyi volt az áru ára? Felelet: 7 ember, az áru értéke pedig 53 pénz.

A VII. fejezet második részéből 2 feladatot ismertetünk, a 16-at és a 18-at. Az első:

Van egy jáspiskocka, az éle 1 cun, súlya 7 liang, egy kőkocka minden éle 1 cun, súlya 6 liang. Van még egy kőkocka 3 cun élekkel, és abban egy jáspisdarab, súlyuk együtt 11 csin. Kérdés: Mennyi a kő és mennyi a jáspis súlya? (1 csin = 16 liang.)

Ha a kőkockában levő jáspis térfogata x cun^3 és a kocka többi, kőrészének a térfogata y cun^3, akkor:

$$x+y=27$$

és

$$7x+6y=176.$$

A megoldási szabály a (4) képleten alapul. Legyen $x_1=27$, akkor az első egyenletből $y_1=0$. Ha pedig $x_2=0$, akkor szintén az első egyenletből $y_2=27$. Beírva az egymáshoz tartozó értékpárokat a második egyenlet bal oldalába:

$$c_2'=7\cdot 27=189 \quad \text{és} \quad k_1=176-189=-13,$$

illetve

$$c_2''=6\cdot 27=162 \quad \text{és} \quad k_2=176-162=14.$$

A (4) képlet szerint:

$$x=\frac{14\cdot 27}{14+13}=14 \text{ liang}, \quad \text{és} \quad y=13 \text{ liang}.$$

A 18. feladat: 9 rúd arany súlya annyi, mint 11 rúd ezüsté. Ha 1 aranyrúd helyett 1 ezüstrudat és 1 ezüstrúd helyett 1 aranyrudat teszünk, akkor a második csoport 13 lianggal nehezebb lesz, mint az első. Kérdés: Mennyi egy-egy rúd súlya?

A megoldáshoz vezető egyenletrendszer:

$$\begin{aligned} 9x&=11y \\ 7x-9y&=-13, \end{aligned}$$

amelyben x jelenti 1 aranyrúd súlyát, y pedig 1 ezüstrúdét. A kínai eljárás szerint:

Legyen $x_1=3$, akkor az első egyenletből $y_1=\frac{27}{11}$.

Legyen $x_2=2$, akkor az első egyenletből $y_2=\frac{18}{11}$.

Az x_1-et és y_1-et a második egyenletbe írva:

$$c_2'=-\frac{12}{11} \quad \text{és} \quad k_1=c_2-c_2'=-13+\frac{12}{11}=-\frac{131}{11}.$$

Az x_2-t és y_2-t a második egyenletbe írva:

$$c_2''=-\frac{8}{11} \quad \text{és} \quad k_2=c_2-c_2''=-13+\frac{8}{11}=-\frac{135}{11}.$$

Tehát $x=\frac{k_2x_1-k_1x_2}{k_2-k_1}=\frac{-135\cdot 3+131\cdot 2}{-135+131}=\frac{143}{4}$ liang és $y=\frac{117}{4}$ liang. Az eredeti megoldásban – nem tudni, miért – a szerző liang helyett csinekben számolt, és így az eredmények: 1 aranyrúd súlya $2\frac{15}{64}$ csin és 1 ezüstrúd súlya $1\frac{53}{64}$ csin (1 csin = 16 liang).

A *Szuan csing* legnagyszerűbb része a VIII. fejezet. Ez bizonyára a legkésőbbiek közül való. Itt olvasható a lineáris egyenletrendszerek megoldására szolgáló „fang-cseng" szabály. Ez a fejezet címe is. A „fang" szó négyzetet is jelent, jelen esetben az egyenletrendszer együtthatóiból alkotott mátrixot. A fang-cseng szabály tehát egy bizonyos mátrixos megoldási módszer. Európában csak a XVII. században, LEIBNIZnél jelentkezett először a determináns, illetve a mátrix fogalma. A mátrixműveleteknél elkerülhetetlen a negatív szám ismerete. Ez a rész valóban bevezeti az előjeles számokat és közli az összeadás és kivonás „cseng-fu" szabályát is (cseng-fu = pozitív-negatív).

A fang-cseng módszer a következő:

Legyen a megoldandó lineáris egyenletrendszer:

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n&=c_1\\
a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n&=c_2\\
&\vdots\\
a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n&=c_n
\end{aligned}
$$

Az első lépésben a kínaiak felírták az egyenletrendszer együtthatóinak a mátrixát úgy, hogy az utolsó egyenlet együtthatói a mátrix első oszlopát alkossák, és így tovább.

$$
\begin{pmatrix}
a_{n1} & a_{n-1,1} & \ldots & n_{21} & a_{11}\\
a_{n2} & a_{n-1,2} & \ldots & a_{22} & a_{12}\\
\vdots & & & & \\
a_{nn} & a_{n-1,n} & \ldots & a_{2n} & a_{1n}\\
c_n & c_{n-1} & \ldots & c_2 & c_1
\end{pmatrix}
$$

Az egyenletrendszer gyökei nem változnak, ha az egyik egyenlet k-szorosát hozzáadjuk vagy kivonjuk egy másik egyenletből. Ezért a gyökök megváltoztatása nélkül szabad ezt tennünk a mátrix oszlopaival is. Ennek az észrevételnek az alapján a kínaiak úgy alakították át az egyenletrendszer mátrixát, hogy az $a_{11}-a_{nn}$ diagonális fölött csupa 0 legyen. Az átalakítást tehát úgy végezték el, hogy egy alkalmas oszlop valahányszorosát hozzáadták vagy kivonták egy másik oszlopból mindaddig, míg végül egy ilyen mátrixot kaptak:

$$
\begin{pmatrix}
0 & 0 & \ldots & 0 & b_{11}\\
0 & 0 & \ldots & b_{22} & b_{12}\\
\vdots & & & & \\
b_{nn} & b_{n-1,n} & \ldots & b_{2n} & b_{1n}\\
e_n & e_{n-1} & \ldots & e_2 & e_1
\end{pmatrix}
$$

A következő lépésben felírható ennek a mátrixnak megfelelő egyenletrendszer. (Ez a kínaiaknál nem volt külön művelet, hiszen a számolótáblán az egyenletrendszert éppen annak az együtthatóiból alkotott mátrixszal írták fel.) Az új egyenletrendszer tehát:

$$
\begin{aligned}
b_{11}x_1+b_{12}x_2+\ldots+b_{1n}x_n&=e_1\\
b_{22}x_2+\ldots+b_{2n}x_n&=e_2\\
&\vdots\\
b_{n-1,n-1}x_{n-1}+b_{n-1,n}x_n&=e_{n-1}\\
b_{nn}x_n&=e_n
\end{aligned}
$$

Ezek után az utolsó egyenlettől elindulva, lépésenként meghatározhatók az ismeretlenek. Az elmondottak alapján figyeljük meg a VIII. fejezet 1. feladatának megoldását!

3 jó minőségű kévéből, 2 közepesből és 1 silányból kaptunk összesen 39 tou gabonát. 2 jó, 3 közepes és 1 silány kéve adott összesen 34 tou gabonát. 1 jó, 2 közepes és 3 silány kévéből nyertünk összesen 26 tou gabonát. Kérdés: Hány tou gabonát ad különkülön 1 jó, 1 közepes és 1 silány kéve? Felelet: 1 jó kéve $9\frac{1}{4}$ tou, 1 közepes $4\frac{1}{4}$ tou és 1 silány $2\frac{3}{4}$ tou gabonát ad.

Ha x, y és z betűkkel jelöljük a jó, közepes és silány kévék hozamát, akkor a megoldást szolgáltató egyenletrendszer:

$$\begin{aligned} 3x+2y+\ z&=39\\ 2x+3y+\ z&=34\\ x+2y+3z&=26. \end{aligned}$$

Amint említettük, ezt a kínaiak az együtthatók mátrixával írták le, illetve rakták ki számolópálcáikkal a számolótáblára. A mátrix első oszlopába kerültek a harmadik egyenlet együtthatói, a következő oszlopba a második és a harmadik oszlopba az első egyenletbeli együtthatók. Így:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 2\\ 3 & 1 & 1\\ 26 & 34 & 39 \end{pmatrix}.$$

Az átalakítás első lépése: A 2. oszlop 3-szorosából vonjuk ki a 3. oszlop 2-szeresét. A második lépésben a kínai számoló az 1. oszlop 3-szorosából kivonta a 3. oszlopot. Mi a két lépést egyszerre hajtjuk végre, és így kapjuk a

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3\\ 4 & 5 & 2\\ 8 & 1 & 1\\ 39 & 24 & 39 \end{pmatrix}$$

mátrixot. A végső lépésben az 1. oszlop 5-szöröséből vonjuk ki a 2. oszlop 4-szeresét. Az átalakított mátrix:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3\\ 0 & 5 & 2\\ 36 & 1 & 1\\ 99 & 24 & 39 \end{pmatrix},$$

amelyben a 36 – 5 – 3 diagonális fölött már mindenütt 0 van. Írjuk

most fel ennek a mátrixnak megfelelő egyenletrendszert! (A mátrix oszlopai az egyenletrendszer sorainak felelnek meg.)

$$\begin{aligned} 36z &= 99 \\ 5y + \quad z &= 24 \\ 3x + 2y + \quad z &= 39. \end{aligned}$$

Így

$$z = \frac{11}{4} = 2\frac{3}{4}, \quad y = \frac{17}{4} = 4\frac{1}{4} \quad \text{és} \quad x = \frac{37}{4} = 9\frac{1}{4}.$$

Elérkeztünk a *Szuan csing* utolsó két fejezetéhez. A IX. címe: „Összefüggés a derékszögű háromszög oldalai között" (Kou-ku). A cím elárulja, hogy ebben a fejezetben főleg a Pitagorasz-tétel alkalmazásaival találkozunk. E fejezethez a III. századi kitűnő kínai matematikus, Liu Huj írt kommentárt, sőt – mint említettük – kiegészítette a könyvet egy tizedik fejezettel is *Haj tao szuan csing (Matematikai értekezés a tengeri szigetről)* címmel. A kissé rejtélyes cím ügyes utalás mind a két fejezet tartalmára. Egyik is, másik is meg nem közelíthető távolságok meghatározására sorol fel példákat. E két geometria tárgyú fejezet azért is érdekes, mert tartalmazzák a pitagoraszi számhármasok egy képzési módját és másodfokú egyenletre vezető feladatokat. A másodfokú egyenletek megoldási receptje teljesen megfelel a mi megoldóképletünknek. Lássunk e két fejezetből is néhány jellemző feladatot.

A IX/11. és a IX/12. feladat kimondottan mezopotámiai kapcsolatokra utal. Mindkettő megoldási ötlete megegyezik a 28. oldalon mutatott babiloni feladatéval, pontosabban: a megoldó az

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= a^2 \\ y - x &= b \end{aligned}$$

egyenletrendszerbe az új t ismeretlent vezeti be úgy, hogy

$$y = t + \frac{b}{2} \quad \text{és} \quad x = t - \frac{b}{2}$$

legyen. Ekkor a második egyenlet teljesül, az első pedig

$$\left(t - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(t + \frac{b}{a}\right)^2 = a^2,$$

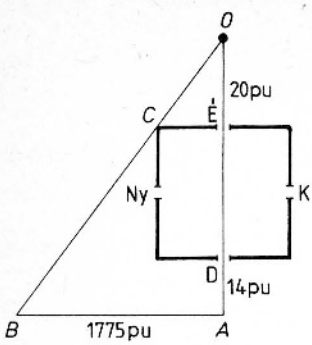
illetve

$$2t^2 + 2\left(\frac{b}{2}\right)^2 = a^2,$$

ahonnan

$$t = \sqrt{\frac{a^2 - 2\left(\frac{b}{2}\right)^2}{2}} \quad \text{és} \quad x = t - \frac{b}{2}, \quad y = t + \frac{b}{2}.$$

Ez a két képlet teljesen azonos a kínai megoldási utasítással.



224. ábra

A IX/20. feladat: Egy várost négyzet alakban veszik körül a városfalak *(224. ábra)*. Mindegyik négyzetoldal közepén kapu nyílik. Az északi kapu előtt 20 pu távolságra áll egy oszlop. Ha eltávozunk a déli kaputól dél felé haladva 14 pu távolságra, és azután nyugatra fordulva haladunk 1775 put, akkor megpillantjuk az oszlopot. Kérdés: Milyen hosszú a városfal? Felelet: 250 pu.

A megoldó felhasználta az *ABO* és *ÉCO* derékszögű háromszögek hasonlóságát. Így

$$\frac{x}{2} : 20 = 1775 : (x+34),$$

tehát meg kellett oldania az

$$x^2 + 34x = 7100$$

egyenletet. A megoldás teljes négyzetre kiegészítéssel történt. A feleletül adott 250 pu azonban kevesebb a helyes 275,8 pu közelítő értéknél!

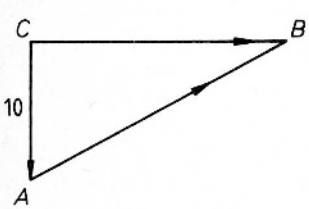
A pitagoraszi számhármasok érdekes alkalmazására találunk az egyik feladatcsoportban. Ez bizonyítja, hogy a kínaiak ismerték az olyan a, b és c egész számok egyik előállítási módját, amelyek kielégítik az

$$a^2 + b^2 = c^2$$

egyenletet. Tudták ugyanis, hogy ha p és q azonos paritású egész számok, akkor az

$$a = \frac{p^2 - q^2}{2}, \quad b = pq \quad \text{és} \quad c = \frac{p^2 + q^2}{2}$$

pitagoraszi számhármast alkotnak (vö. a 92. oldallal). A szóban forgó feladatcsoportban mozgási feladatok szerepelnek, és ezekben p és q mindig sebességet jelent. Így a 14. feladatban is:



225. ábra

Két ember elindul ugyanazon pontból (a *225. ábra C* pontja). Az *A*-val jelölt ember sebessége (a járás normája) 7 és *B* sebessége 3 egység. *B* elindul keletre. Ugyanakkor indul *A*, és déli irányban megtesz 10 pu utat, aztán nagyjából északkelet felé fordul, és addig megy, míg *B*-vel találkozik. Kérdés: Mekkora utat tett meg *A* és *B* külön-külön?

A kínai megoldás szerint először keressünk a sebességek segítségével egy, a kiszámítandóhoz hasonló derékszögű háromszöget. Ennek oldalai:

$$x = \frac{p^2 - q^2}{2} = \frac{7^2 - 3^2}{2} = 20, \quad y = pq = 7 \cdot 3 = 21$$

és

$$z = \frac{p^2 + q^2}{2} = \frac{7^2 + 3^2}{2} = 29.$$

A keresendő háromszög hasonló lévén a 20, 21 és 29 oldalú háromszöghöz:

$$10 : BC : AB = 20 : 21 : 29.$$

Innen:

$$BC = \frac{10 \cdot 21}{20} = 10{,}5 \text{ pu}, \quad AB = \frac{10 \cdot 29}{20} = 14{,}5 \text{ pu}.$$

Eszerint A megtett útja 24,5 pu, és azalatt B kelet felé megtette a 10,5 pu távolságot.

A *Szuan csing* áttekintéséből kitűnik, hogy tartalmazza mindazokat a matematikai ismereteket és számolási eljárásokat, amelyek a kínai gyakorlati élethez szükségesek voltak. Ezért lett ez a mű, illetve sok része a hivatalnokok tankönyve. A Tang-dinasztia alatt, tehát a VII–VIII. században, de azután is sok száz esztendőn át a hivatalok elnyeréséhez szükséges vizsga egyik fontos része a *Szuan csing* volt.

A VIII–XI. század Kínában nagy kulturális és technikai fellendülést hozott. Ez volt a puskapor, a nyomtatás, a papír és az iránytű felfedezésének a korszaka. Közben azonban a matematika lényegesen nem fejlődött tovább. Inkább csak a régi számítástechnikai eljárások csiszolódtak. Születtek ugyan újak is, de a feladatok tárgyköre alig-alig bővült. Maradt minden a *Tíz Klasszikus* keretei között, pedig Kína hatalmas területén ezekben a századokban több matematikus is élt, de egymástól elszigetelten dolgoztak, egymásról nem tudva. Egyik körül sem alakult ki olyan matematikai iskola, amely a továbbfejlődés alapja lehetett volna. Ezek az elszórtan, egymástól függetlenül működő matematikusok mégis említésre méltók.

VANG HSZIAO-TUNG (VII. század)

Kínai csillagász és matematikus. Életének pontos dátumai nem ismeretesek. Neve szerepel a Tang-dinasztia (618–907) történetében. Egyike volt azoknak, akik más csillagászokkal együtt kijavították a korabeli kínai naptár hibáit. Ebben a munkakörben igen sikeres állami hivatalnoknak bizonyult. A matematikatörténetben megőrizte nevét a *Matematikai értekezés a régi módszerek fejlesztéséről (Csi ku szuan csing)* című műve. Ez a kora szokásának megfelelően feladatsorokat tartalmazó könyv az egyetlen kínai munka, amely harmadfokú egyenletek megoldásával is foglalkozik. A művéből megmaradt mintegy 20 feladat közül, ilyen szempontból, főleg a 15–20. feladat jelentős. Ezek geometriai tartalmúak, főleg a Pitagorasz-tételt alkalmazzák, de harmad- vagy negyedfokú egyenlethez vezetnek. VANG HSZIAO-TUNG az első ismert olyan matematikus, aki az ilyen egyenleteket a „fang-fa", azaz az osztással vég-

Ku Kai-csi:
A feleségét vádoló férj,
kínai selyemfestés (406)

zett gyökvonás módszerével oldotta meg. Ez a módszer egyenértékű azzal, amelyet ma WILHELM GEORG HORNER nevéhez szokás kapcsolni. Amint ezt BEREZKINA szovjet matematikatörténész kiemeli, az említett 6 feladat egymásra épülő párokra bomlik, igen ügyes szerkesztéssel. A kínai-Horner-módszert VANG HSZIAO-TUNG alkalmazta először, de magyarázatát nem adta. Műve alapján úgy tűnhet, hogy a kínai matematikusok már előtte is használták az eljárást. A módszer magyarázatát először CSIN CSIU-SAónál találjuk meg (316. oldal).

CSIN CSIU-SAO (1202?–1261?)

A kínai matematika egyik nagy alakja. Mint kormányzó és miniszter lelkiismeretlenül hatalmas vagyont harácsolt össze az alatt a 100 nap alatt, amíg hivatalát viselte. Megmaradt nagy, kéziratos műve, *A matematika 9 fejezete (Su su csiu csang)*. Szerepelnek benne számelméleti részek, magasabb fokú egyenletek, sorozatok és geometriai feladatok. CSIN CSIU-SAO oldott meg olyan feladatokat is, amelyeket ma kongruencia-rendszerrel szokás felírni. Tőle való az a feladat, amely az

$$x \equiv 1 \pmod{12}$$
$$x \equiv 14 \pmod{17}$$
$$x \equiv 1 \pmod{19}$$

kongruencia-rendszerrel fogalmazható meg. x tehát olyan szám, amely a 12-vel és 19-cel osztva maradékul 1-et ad, és a 17-tel való osztási maradéka 14. Ha e követelményeket egyenlet alakban írjuk fel, akkor az

$$x = 12a + 1$$
$$x = 17b + 14$$
$$x = 19c + 1$$

határozatlan egyenletrendszerhez jutunk, amelyben a, b és c pozitív egész számok. Bizonyára ennek a megoldása árán jutott a szerző a megoldási recepthez. Egy lehetséges eljárás:

Az első és a harmadik egyenlet szerint: $12a = 19c$, tehát a osztható 19-cel, vagyis $a = 19k$ alakú. Így

$$12 \cdot 19k = 19c,$$

vagyis $c = 12k$ alakú.

Az első és a második egyenletek miatt:

$$17b + 14 = 12a + 1,$$

azaz

$$17b = 12a - 13 = 228k - 13,$$

tehát

$$b = \frac{228k - 13}{17} = 13k + \frac{7k - 13}{17}.$$

b azonban pozitív egész szám, tehát $\frac{7k-13}{17} = l$ is az. Innen $k = \frac{17l + 13}{7} = 2l + 1 + \frac{3l+6}{7}$. k azonban szintén egész szám, tehát a $\frac{3l+6}{7} = m$ is az. Innen pedig $l = \frac{7m-6}{3} = 2m - 2 + \frac{m}{3}$.

Ilyen módon m osztható 3-mal, tehát $3t$ alakú. Az elmondottak szerint

$$m = 3t, \quad l = 7t - 2, \quad k = 17t - 3.$$

Ekkor pedig:

$$a = 19k = 323t - 57,$$
$$b = \frac{228k - 13}{17} = 228t - 41$$
$$c = 12k = 204t - 36,$$

ahol $t = 1, 2, 3, \ldots$

Ha például $t = 1$, akkor $a = 266$, $b = 187$, $c = 168$ és $x = 3193$.

Ehhez hasonló kongruencia-rendszereket oldott meg már a III–IV. században SZUN-CE is.

SZUN-CE (III–IV. század)

Kínai matematikus, aki összeállított egy feladatgyűjteményt, amely sokban hasonlít a *Szuan csing*hez, de szűkebb tárgykörű. Számos önálló feladat található benne, és az átvett feladatokat is az eredetinél jóval részletesebb és ilyen értelemben magyarázóbb jellegű megoldási szabályok kísérik. A mű néhány számelméleti feladat mellett táblázatokat, arányossági számításokat, lineáris egyenleteket és négyzetgyökvonást tartalmaz. SZUN-CE értekezésének egy kongruencia-rendszerre vezető feladata a következő:

Melyik az a szám, amely 3-mal, 5-tel, 7-tel osztva rendre 2-t, 3-at, 2-t ad maradékul? A válasz megfelel az

$$n \equiv 2 \pmod 3$$
$$n \equiv 3 \pmod 5$$
$$n \equiv 2 \pmod 7$$

kongruencia-rendszer megoldásának. A kongruenciák GAUSS által bevezetett jelölését feloldva:

$$n = 3k + 2$$
$$n = 5h + 3$$
$$n = 7m + 2,$$

ahol k, h és m tetszőleges egész számok. A megoldás lépései: Szorozzuk az első egyenletet $5 \cdot 7$-tel, a másodikat $3 \cdot 7$-tel és a harmadikat $3 \cdot 5$-tel:

$$\left.\begin{aligned} 35n &= 105k + 70 \\ 21n &= 105h + 63 \\ 15n &= 105m + 30 \end{aligned}\right\} \quad \text{vagy} \quad \left\{\begin{aligned} 35n &\equiv 70 \pmod{105} \\ 21n &\equiv 63 \pmod{105} \\ 15n &\equiv 30 \pmod{105}. \end{aligned}\right.$$

Vonjuk most ki a második és a harmadik egyenlet összegéből az elsőt:

$$n = 105(h + m - k) + 23 \quad \text{vagy} \quad n \equiv 23 \pmod{105}.$$

n tehát olyan számokat jelent, amelyek 105-tel osztva maradékul 23-at adnak. Ilyen számok: 23, 128, 233 stb.

CSANG CSIU-CSIEN (V. század)

A *Szuan csing* 246 feladata közül 92 CSANG CSIU-CSIENé. Ezek a feladatok az ősi kínai matematika és a XIII. század algebrája közti időszakot jellemzik. SZUN-CEnél alaposabban foglalkozott számelméleti kérdésekkel, sorozatokkal és magasabb fokú egyenletekkel. Életéről semmit sem tudunk. Feladatgyűjteményének előszavát így írta alá: „Tisztelettel CSANG CSIU-CSIEN Cincéből." Ez nem sokat árul el róla, de talán annyit mégis, hogy szerény ember volt.

Háromrészes művéből néhány feladat elveszett, mert könyve elrongyoltan, hiányos állapotban maradt meg. Az első rész 22, a második 32 és a harmadik 38 feladatot tartalmaz. Ezzel a 92 feladattal több mint harmadrészben tekinthető a *Szuan csing* szerzőjének.

Számelméleti jellegűek a határozatlan egyenletei. Ezekre jellemző a napjainkban is fel-felbukkanó, következő feladat: 1 kakas 5 pénzbe, 1 tyúk 3 pénzbe, 3 csirke 1 pénzbe kerül. 100 pénzen vettünk (a felsoroltakból) 100 szárnyast. Kérdés: Külön-külön hány kakast, tyúkot és csirkét vásároltunk?

Ha az ismeretleneket a feladat sorrendjében x, y és z betűvel jelöljük, akkor a megoldás az

$$5x+3y+\frac{z}{3}=100$$
$$x+y+z=100$$

határozatlan egyenletrendszer alapján nyerhető.

Innen $x=4k$, $y=25-7k$ és $z=75+3k$, ha $k=1, 2, 3$. Ekkor x, y és z pozitív egész számok.

CSANG CSIU-CSIEN számtanisorozat-feladatainak a kínai irodalomban úttörő szerepük van. Nála találkozunk először a számtani sorozat összegképletével. Az elődök a számtani sorozatra vonatkozó feladatokat többségükben arányos osztással (325. oldal), tehát aritmetikai módszerrel oldották meg. CSANG CSIU-CSIENnél bukkan fel először a közvetlen algebrai eljárás, a sorozat differenciájának tudatos felhasználásával. A másodfokú egyenleteket úgy kerülte el, hogy S_n helyett az $\frac{S_n}{n}$-et tekintette ismeretlennek.

Feladataiban még az is értékelendő, hogy nála kaptak először hangsúlyos szerepet a közönséges törtekkel való műveletek a régebbi, mértékegységekre alapozott tizedes törtek mellett. A négyzetgyökvonásnál a

$$\sqrt{a^2+b}\approx a+\frac{b}{2a+1}$$

közelítő „képletet" használta a régebbi

$$\sqrt{a^2+b}\approx a+\frac{b}{2a}$$

helyett, amelyet valószínűleg babiloni mintára SZUN-CE használt. CSANG CSIU-CSIEN feladatai között szerepelnek terület- és térfogatszámítási feladatok is.

CSEN LUAN (VI. század)

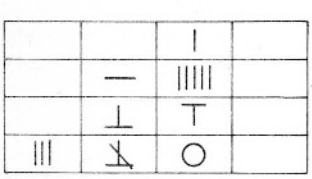
A Csou-dinasztia csillagászaként működött. Részt vett a Tian-féle naptár készítésében. Megismerkedett a buddhizmussal, és írt egy ilyen tárgyú értekezést is. Egyik összeállítója és kommentátora volt a *Szuan csing*nek. A *Matematika öt könyvben (U csing szuan su)* című tanulmányok egyik részének ő a szerzője. CIAN BAO-CUNG kínai matematikatörténész szerint CSEN LUAN írta az *Elfelejtett matematikai írások (Su su csi i)* és az *Öt hivatal matematikai tanulmánya (U cao szuan csing)* című munkát is. Sokan azonban úgy vélik, hogy ez utóbbi szerzője ismeretlen.

LI JE (1178–1265)

Kortásra volt CSIN CSIU-SAónak. Érdekes, hogy egymástól függetlenül az algebrának ugyanazon a területén dolgoztak. LI JE főleg adott feladatoknak egyenletekkel való megfogalmazásával törődött, míg CSIN CSIU-SAO az egyenletek gyökeinek kiszámítására adott részletes szabályokat. Írásaik jól kiegészítik egymást. LI JEnek két művét ismerjük. Az elsőt 1248-ban írta. Ennek címe *A körmérés tengeri tükre (Cö jüan haj csing)*. Benne részletes geometriai bevezetést adott, és mintegy 170 feladatot szerkesztett, a körbe és a kör köré írható derékszögű háromszögekre vonatkozókat. Másik könyve algebrai tárgyú, 1259-ből való, és címe: *Új lépések a matematikában (Ji ku jen tuan)*. Ezekben a művekben fordul elő az „égi elemek módszere" (tien-jüan-su) szakkifejezés, amely a magasabb fokú egyenletek megoldási eljárását jelenti, jelen esetben a kínai-Horner-módszert. Ezt az elnevezést a kortárs CSIN CSIU-SAO nem használta. A kínaiak képszerű nyelvén az „égi elem" a keresendő ismeretlen neve volt. A kínai szimbolikával kapcsolatban megemlítjük, hogy LI JE a negatív számokat úgy jelölte, hogy utolsó jegyüket egy ferde vonással áthúzta, míg CSIN CSIU-SAO és LIU HUJ a pozitív számokat piros, a negatívokat fekete színnel írta. LI JE az egyenleteket táblázatos alakban rögzítette, amelyben az ismeretlen különböző fokú tagjainak az együtthatói szerepeltek. Például az

$$x^3+15x^2+66x-360=0$$

egyenletet a *226. ábrán* látható módon írta fel. Az egyenletek felírására LI JE más módszert is kitalált. Az x, x^2, x^3, ... és az x^{-1}, x^{-2}, x^{-3}, ... és az állandó tag számára kijelölt 19 hieroglif jelet, és a pozitív kitevőjű tagokat a konstans tag elé, a negatív kitevőjűeket pedig az állandó tag után írta.



226. ábra

1260-ban KUBILÁJ kán kormányzói állást ajánlott fel LI JEnek, de ő ezt nem fogadta el.

CSU SI-CSIE (1280?–1303?)

A Szung-dinasztia utolsó nagy matematikusa volt. A mai Pekinghez közeli Jensanban lakott. Életéből mintegy 20 évet vándormatematikusként töltött el. Kenyerét a matematika tanításával szerezte. Két műve maradt fenn. Az elsőt 1299-ben írta. Ennek címe: *Bevezetés a matematikába (Szuan-hszio csi meng)*. Ezt a sokáig elveszettnek vélt könyvet a XIX. században találták meg. A maga idejében nagy hatással volt a japán és a koreai matematikusokra. Másik munkája, *A négy elem jáspis tükre (Sze jüan jü csien)* 1303-ból való. A négy elem a négyismeretlenes egyenletrendszer négy ismeretlenjét jelentette. Ezek: az égi elem (x), a földi elem (y), az emberi elem (z) és az anyagi elem (u). Az egyenletek felírására érdekes módot vezetett be. Például az

$$x+2y+3z+4u=5$$

egyenletet a *227. ábra* első része mutatja, az

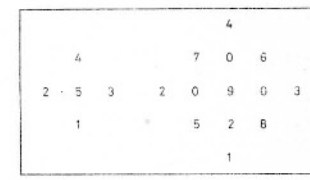
$$x^2+2y^2+3z^2+4u^2+5xy+6zu+7yu+8xz+2x+9=0$$

egyenletet pedig az ábra második fele.

A negatív számokat Csu Si-csie is úgy jelölte, mint Li Je, vagyis az utolsó számjegyet ferdén áthúzta. Mesterien oldott meg az „égi elem" (Horner) módszerével magasabb fokú egyenleteket. Nem csupán az egész számú megoldásokat kereste, hanem kiszámította például az

$$576x^4-2640x^3+1729x^2+3960x-1\,695\,252=0$$

egyenlet összes racionális gyökét.



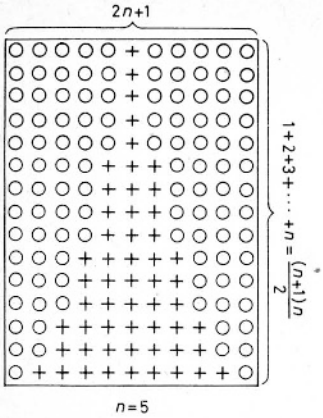
227. ábra

Sokat foglalkozott a sorozatokkal is. *A négy elem jáspis tükrében* szerepel az első n természetes számnak és a következő sorozat első n elemének az összegképlete:

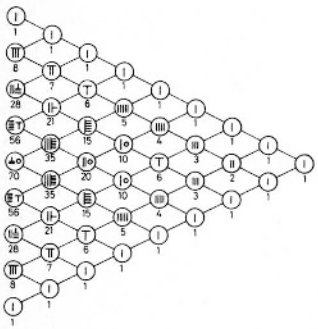
$$1+8+30+80+\ldots+\frac{n^2(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3}=$$
$$=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(4n+1)}{5!}.$$

Könyvéből kitűnik, hogy a középkori kínai matematikusok ismerték az első n négyzetszám összegképletét is. Ehhez a *228. ábrára* alapozott gondolatmenettel jutottak el:

$$1^2=1$$
$$2^2=1+3$$
$$3^2=1+3+5$$
$$4^2=1+3+5+7$$
$$5^2=1+3+5+7+9$$



228. ábra



229. ábra

$$\cdot$$
$$\cdot$$
$$\cdot$$

$$n^2 = 1+3+5+7+9+\ldots+(2n-1)$$
$$S_n = n\cdot 1+(n-1)3+(n-2)5+\ldots+1\cdot(2n-1),$$

ahol S_n az első n négyzetszám összege. Az ábra azt mutatja, hogy az S_n-re kapott eredmény éppen a kereszttel jelölt helyek száma. A körökkel jelölt helyek száma láthatóan $2S_n$, tehát a négyzetszámok összege a téglalap jeleinek a száma osztva 3-mal, vagyis:

$$S_n = 1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 = \frac{(2n+1)(n+1)n}{6}.$$

A kombinatorikai elemek felbukkanása észlelhető Csu Si-csie szóban forgó könyvében, amikor az $(a+b)$ egész kitevős hatványainak az együtthatóit pillantjuk meg, mégpedig a Pascal-háromszög elrendezésében *(229. ábra)*. Ezt is találóbb lenne tehát *Csu Si-csie*-háromszögnek nevezni. Csu Si-csie nem állítja ugyan, hogy az együtthatóknak ilyen összeállítása a saját leleménye volna, de elődöket sem nevez meg. A binomiális együtthatók Jang Huj könyvében is szerepelnek.

JANG HUJ (XIII. SZ.)

Művei csak részben maradtak meg. Magasabb fokú egyenleteket oldott meg a Horner-módszerrel. Írt egy kommentárt a *Tíz Klaszszikus*hoz. Ebben a másodfokú egyenletek alapos elméletét adja. Kifogásolja, hogy a régi kínai matematikusok számítási eljárásaikat nem magyarázzák meg. Megadta a páratlan számok összegét 1-től $(2n+1)$-ig. Nála is megtalálhatjuk a négyzetszámok összegét és a háromszögszámok összegét (89. oldal). Ez utóbbi:

$$1+3+6+\ldots+\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

A KÍNAI MÉRTÉKEGYSÉGEK

Szun-ce a III. században állította össze az alapmértékegységek táblázatát, nevezetesen a hosszúságét, a térfogatét és a súlyét. A táblázat elkészítésében két szempont vezette. Az egyik az, hogy az alapegységek lehetőleg megfeleljenek a gyakorlati életnek, a másik pedig az, hogy amennyire lehet, illeszkedjenek a 10-es szám-

Kao Ko-kung:
Eső után (XIII. sz.)

rendszerhez. A hosszúság egységéül választotta a „hu"-t (jelentése selyemhernyó), a súly mértékegységéül a „su"-t (eredeti jelentése: kölesmag), és a térfogat mértékéül a „szu"-t (mag). SZUN-CE táblázata kis kiegészítéssel:

A hosszúság mértékegységei:

10 hu	= 1 sze	8 csi	= 1 szjun
10 sze	= 1 hao	5 csi	= 1 mo
10 hao	= 1 li	40 csi	= 1 pi
10 li	= 1 fen	50 csi	= 1 duan

10 fen = 1 cun	6 csi = 1 pu
10 cun = 1 csi	240 pu^2 = 1 mu.
10 csi = 1 csan	
10 csan = 1 jin	

A táblázat utolsó sorában a mu területmérték részletesebben: 1 mu = 15 pu · 16 pu = 240 pu^2.

A súlymértékegységek:

10 su = 1 le
10 le = 1 csu
24 csu = 1 liang
16 liang = 30 csin
4 csin = 1 tan.

A térfogat mértékegységei:

6 szu = 1 huj	10 sao = 1 he
10 huj = 1 co	10 he = 1 sen
10 co = 1 csao	10 sen = 1 tou
10 csao = 1 sao	10 tou = 1 hu.

A kínai mértékegységek egy része korok és helyek szerint változott. Például a kincstári liang = 37,312 g. Ezzel mérték az ezüstöt. A sanghaji liang ugyanakkor csak 36,592 g volt, a hajós liang pedig 37,783 g. A csi hosszúság is változott 0,175 m-től 0,308 m-ig. Majdnem minden iparág ugyanazon elnevezéssel más értékű egységet használt még 1911-ben is. SZUN-CE táblázatának egyik célja éppen a sokféle mértékegység egységesítése volt, bár törekvése kevés eredménnyel járt.

A KÍNAI MATEMATIKA KORSZAKAI

Összefoglalásként tekintsük át még egyszer a kínai matematika fejlődésének történetét LI JANG kínai matematikatörténész időfelosztása szerint. Ő a kínai matematika történetét 6 korszakra osztotta. Ezek:

1. A „boldog" őskor: HUANG-TITől a Han-dinasztia kezdetéig (i. e. 2700–i. e. kb. 210).
2. Az ókor: A Han-dinasztia végéig (i. e. kb. 210–i. sz. kb. 600).
3. A késői ókor: A Tang-, a Szung- és a Juan-dinasztiák ideje (kb. 600–1368).
4. Az újkor: A Ming-dinasztia kora és a Csing-dinasztia uralkodásának a közepéig tartó időszak (1368–1750).
5. Az újabb kor: 1750-től 1949-ig.
6. A jelenkor: 1949-től.

Ezek közül a leglendületesebb matematikai fejlődést a késői ókor mutatta fel. CSIN CSIU-SAO, CSU SI-CSIE, LI JE neve valóban a középkori kínai matematika csúcsait jelöli. Ebben a korszakban a kínai kereskedelmi és kulturális élet széles körű kapcsolatokat teremtett számos országgal: Indiával, Mezopotámiával és azon keresztül a közép-keleti országokkal, továbbá hatással volt Korea és Japán művelődésének fejlődésére is.

A LI JANG által újkornak nevezett időszak az előzőekhez képest megmerevedést, hanyatlást hozott. Ekkor jelentős új eredmények nem születtek. Ebben az időben jelentkezett a hittérítők révén a nyugati hatás: megismerkedtek a kínai matematikusok EUKLEIDÉSZ *Sztoikheiá*jával.

Az újabb korban a kínai matematikusok egy része még mindig a régi, receptszerű számítási szabályok gyártásában merült ki, de már volt egy, a nyugati matematikát befogadó csoport is. Az ő eredményességüket jelzi, hogy 1859-ben LI SAN-LAN és VAILI megírták az első kínai nyelvű differenciál- és integrálszámítást.

Körülbelül az 1950-es évekig, a népi demokratikus Kína megszületéséig a jelentős kínai matematikusok nem hazájukban, hanem külföldön szereztek nevet maguknak és a kínai matematikának.

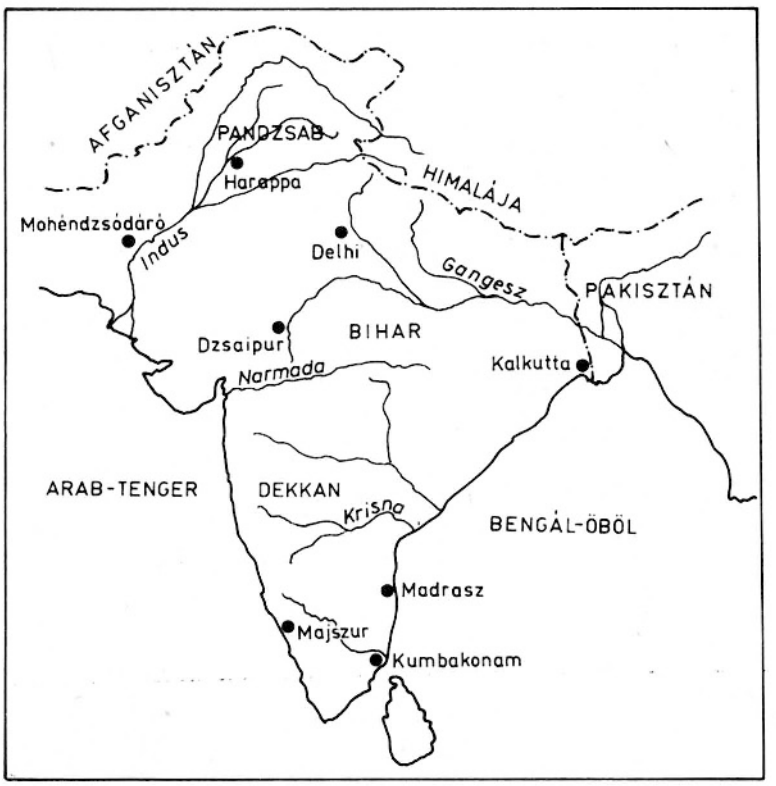
INDIA

INDIA ŐSI KULTÚRÁJA

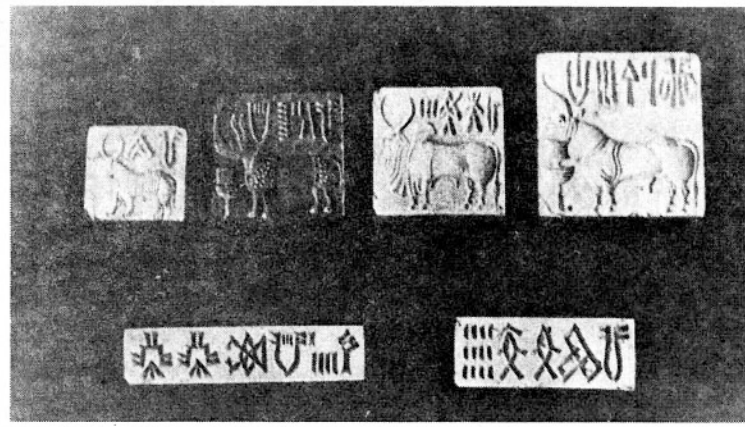
A magát árjának nevező nép az i. e. 2. évezred közepén érkezett Indiába valahonnan a mai Irán területéről. Nyelve az indoárja nyelvcsoporthoz tartozik, amely maga is egyik ága az indoeurópai nyelvcsaládnak. Az indoárják őshazája ismeretlen. A legtöbb vélekedés szerint valahonnan északról származnak. Az árják Indiában már magas fokú civilizációval találkoztak. Sajnos ezt az ősi, Indus-völgyi civilizációt az érkezők lerombolták, a romokat aztán az Indus folyam beborította 5–6 m vastag iszapréteggel, és egészen a XX. századig létezésüket is alig sejtettük. Az 1925–1926-ban megindult régészeti feltárások azonban India északnyugati részén magas szintű ősi kultúra nyomaira bukkantak. Ezek a ma is folyó és sok meglepetést hozó kutatások két, akkori méretekkel mérve világváros romjait hozták napvilágra. Az egyik Pandzsáb tartományban Harappa mellett virágzott, a másik pedig Mohendzsodáro az Indus alsó folyásánál. Mindkettő valamikor az i. e. 3. évezredben élte fénykorát, de már a 4. évezredben is léteztek. A két, főváros jellegű település egyenes, rendezett utcáival, emeletes, fürdőszobás házaival, a valószínűleg kultikus célokat is szolgáló közfürdőivel, szennyvízcsatornáival igen fejlett civilizációról tanúskodik, legalább olyan szintűről, mint a korabeli mezopotámiai. Az ásatások nyomán felszínre került építészeti, kerámiai, szobrászati alkotások mellett igen fontos a pecsételők vallatása. Ezek a zsírkőből, cserépből, csontból készített táblácskák rajzok, feliratok negatív véseteit hordozzák, és nedves agyagra nyomva pecsétszerűen létrehozzák a vésetek pozitív lenyomatát. A pecsétek bizonyára afféle cégjelzések szerepét töltötték be. Kétféle szempontból is jelentősek: egyrészt feliratait az akkori írásról – talán a számírásról is – elárulnak valamit, másrészről pedig azt igazolják, hogy tulajdonosaik más országokkal, így Mezopotámiával is élénk kereskedelmi és kulturális kapcsolatban voltak. Az Indus-völgyi pecsételők lenyomatai ugyanis előkerültek a mezopotámiai Ur városából és Elámból is. Igen valószínű, hogy a kereskedelmi kapcsolatba került népek értesültek egymás kulturális vívmányairól, köztük matematikai ismereteiről is. A pecsételők szövegének megfejtése azonban még várat magára. A nehézséget főleg az okozza, hogy hasonló írásjelek a pecsételőkön

kívül máshonnan nem kerültek elő, és a pecsételők szövege aránylag rövid. Ezekről eddig 386 írásjelet sikerült összegyűjteni. Ez kevés ahhoz, hogy azokat hieroglif jeleknek tekinthessük, viszont túl sok ahhoz, hogy a mi írásunkhoz hasonlóan hangokat jelöljenek. Ennek az ismeretlen nyelvnek a megfejtése, ismeretlen írásjelek alapján szinte a lehetetlennel határos.

A második világháború utáni ásatások nyomán az a kép alakult ki, hogy az Indus-völgyi kultúra gyökerei behálózták az Indus és a Gangesz közötti területet a mai Pakisztántól Kelet-Pakisztánig. A népnek azonban, amely e hatalmas területet egységes civilizációjával összefogta, szinte nyoma veszett, csak sejtjük, hogy a feltárt ősi városokat a dravidák lakták, talán azoknak a dravidáknak az árja pusztításból megmenekült ősei, akik ma Dél-Indiában élnek, vagy kis szigetekként az északi terület egy-egy jól megvédhető, eldugott zugában. Ha így van, akkor a dravida kultúra fejlődése az árják hódításával az i. e. 2. évezred közepén-végén megszakadt, bár bizonyos, hogy számos eleme beleépült az indoárja kultúrába. Ennek sok jele van, például az egyes pecsételők ábrája. Az egyiknél például szabályos jógaülésben meditáló embert láthatunk, fejét bikaszarvak díszítik, és a jógipózba merevedő alakot vadállatok veszik körül.



230. ábra



Pecsételők lenyomatai az Indus völgyéből (i. e. III–II. évezred)

Ennek a pecsételőnek az elkészítése után csak mintegy 1500 évvel később fejlődött ki a Siva-kultusz, amelynek pontosan a felsorolt elemek a szimbolikus jelei. Sivát, az állatok urát is jógaülésben szokás ábrázolni, hajában holdsarlóval, amely könnyen azonosítható a kettős bikaszarvval. A pecsételőkön sűrűn ismétlődő szimbólumok (bika, oroszlán, tigris stb.) azt jelzik, hogy az ősi Indus-völgyi kultúra világszemlélete a csillagos égbolt ősi szimbolikájában jutott kifejezésre, mint sok más korabeli népnél is (Egyiptom, Mezopotámia, Kréta, Kína stb.). Számos párhuzam bizonyítja, hogy a dravida vallási kultusz istenalakjai, jelképei tovább élnek az árja hódítók isteneiben, szertartásaiban. Joggal gondolhatjuk, hogy India mai kultúrájának megalapozói az ősi kultúrából sok egyéb más értéket is átvettek, megőriztek, átformáltak. Ismerünk olyan véleményeket is, amelyek szerint az indiai 10-es számrendszer már az ősi Indus-völgyi civilizáció vívmánya, tehát legalább az i. e. 2000-es évekből származik. Erre azonban gyenge bizonyíték annak a kagylóhéjból készült „mérőlécnek" a darabja, amelyen 9 beosztás olvasható, hiszen például ugyanabból a korból Harappában olyan bronzból készült teljes mérőrúd is előkerült, amely nem 10-es beosztású.

Biztosra vehetjük, hogy a régészeti ásatások nyomán az elkövetkező években még számos olyan lelet birtokába jutunk, amelyek az ősi dravida kultúráról alkotott képünket a mainál tágabbá és megbízhatóbbá szélesítik. Nem csodálkoznánk, ha kiderülne, hogy az i. e. 2. évezredben a Mezopotámiával érintkező dravidák, az északnyugati szomszédokhoz hasonlóan, fejlett matematikai ismeretekkel rendelkeztek.

AZ INDOÁRJA KULTÚRA

Az i. e. 1500-as években az első árja törzsek szarvasmarhatartó pásztornépként érkeztek Indiába, új legelőket keresve. A szarvasmarhán kívül nagy becsben tartották az Indiában akkor még ismeretlen lovat is. Valószínű, hogy kezdetben harc nélkül, megegyezéses alapon kaptak az őslakosságtól legelőket. Aztán újabb és újabb törzsek érkeztek, akiket birtokszerző vágyuk a már megtelepedett rokonokkal is szembeállított. A hinduk legősibb irodalmi műve, a *Rig-véda* hírt ad a döntő, nagy ütközetről. E szerint az újonnan érkezett törzsek szembeszálltak a régebben jöttekkel. Ez utóbbiak, úgy látszik, hogy már túlságosan is otthonosan érezték magukat, mert az őslakó dravidák nem velük, hanem a később jöttekkel kötöttek szövetséget. A Harappa (Harujipija) melletti nagy csatában azonban a már megtelepedett, régebbi árja törzsek szövetsége győzött, ami a békés őslakók számára a megsemmisülést jelentette.

A *Rig-véda*, az 5 *Véda* közül a legrégibb, homályos, jelképes leírását adja az indiai árják régmúltjának, és dicsőíti az árják ősi isteneit. A főisten, Indra mellett jelentős szerep jutott az indiai ókori vallási kultuszban Szúrjának, a napistennek, Csandrának, a Hold istenének és Agninak, a tűzistennek. Agni már vadonatúj indiai istenség, míg a többiek még az Indiába való beözönlés előtti időkben születtek. Szúrjától és Csandrától származott az a két, legendás család, amely főszereplője a hinduk két nagy eposzának, a *Mahábháratá*nak és a *Rámájaná*nak. A véda szó tudást, mágikus tudást jelentett. A 10 énekből álló, ősi *Rig-védá*t az idők folyamán még 4 *Véda* követte. Ezekben a „védavallás" brahmana papjai az isteneket dicsőítő himnuszok mellett leírták az áldozati szertartásokat, a különböző varázsigéket, eljárásokat és dalokat, amelyek megszerzik az emberek számára az istenek segítségét. A *Védák* nyelve a hétköznapitól mindinkább elszakadó „egyházi" nyelv. Belőle fejlődött ki a későbbi szanszkrit, a szent szövegek nyelve. A szanszkrit szövegek számjegyei édestestvérei az általunk használt, hindu-arab számjegyeknek. Mind a kettő – a keleti arab számjegyekkel együtt – a hindu bráhmi számjegyekből ered.

Az Indiába érkező árják térhódítása több száz éven át folyt, és az i. e. 1000. év táján már uralmuk alá hajtották India egész északi részét, a Gangesz alsó folyását is beleértve. Csak ezután fordultak dél felé, és elérték a mai Dekkán területét. A legerősebb Kuru törzs, szövetségeseivel együtt Közép-Indiában telepedett le a Jamuna és Szaraszvati folyók között. Ekkor kezdődött el a máig is fennálló kasztrendszer kialakulása. A kasztok csúcsán az árja brahmanák álltak. Ebből a rendből kerültek ki a papok, a törvényhozók, a tudósok, a költők, egyszóval ez volt az értelmiségi kaszt. Még nevükben is a későbbi főistennek, Brahmának a hatalma tükröződik.

Ugyancsak a hódító árják rendje volt a katonák kasztja. Ennek tagjai, a ksatriják adták a kormányzókat, a hadvezéreket más katonai és közigazgatási parancsnokokkal együtt. A meghódított, leigázott népek fiai alkották a legalacsonyabb kasztokat. Ezek, a súdrák végezték a nehéz fizikai munkákat, amelyekre az uralkodó osztályok tagjai nem vállalkoztak. A legalsó és a legfelső osztályok között helyezkedtek el a ranglétrán a különböző foglalkozások (kereskedők, iparosok, kézművesek stb.) kasztjai. Ma e kasztok száma 2000 körül van. Korántsem szabad azonban az indiai kasztrendszert leegyszerűsíteni úgy, hogy az a kizsákmányolók és a kizsákmányoltak osztályaiból áll. A különféle kaszti törvények áttekinthetetlenül bonyolulttá teszik az indiai emberi viszonyokat. Ha például csak arra gondolunk, hogy a brahmanák nem érintkezhetnek a súdrákkal, akkor ebből az is következik, hogy egy előkelő brahmana család szakácsa is brahmana kell hogy legyen, tehát egyazon háztartáson belül megvalósulhat az úr–szolga viszony két brahmana között is.

Kétségkívül a brahmanák bölcsességének köszönhető, hogy a hatalmas területű Indiában – ahol több állam alakult ki és amelynek déli felén az őslakó dravidák is alkottak államot árja fennhatóság alatt – a sokféle törzsi, árja és nem árja kultúra egységes és tipikusan indiai kultúrává ötvöződött, amelyben tovább élhettek az ősdravida elemek is, összefonódva a legújabb irányzatokkal. Ez az egység a brahmanizmus jegyében született meg, amely vallás is, társadalmi forma is, vagy még inkább vallási alapokra épült társadalmi forma.

Az i. e. VIII. században terjedt el Indiában az írás tudománya. Ez a bráhmi írásmód, és a belőle sarjadt későbbi is, szótagírás volt, amelyet maga Brahma főisten ajándékozott híveinek. Ma úgy tudjuk, hogy az isteni beavatkozásnál lényegesebb szerepet játszottak azok a hindu kereskedők, akik megismertették honfitársaikat a föníciai írással. A föníciai írásból fejlődött ki ugyanis a bráhmi írás. Természetes, hogy az írás meghonosodásától kezdve sokkal jobban ismerjük a hindu történelmet, mint a régebbi korokét.

Az i. e. VI. században két olyan hindu próféta született, akinek tanai döntően befolyásolták a hindu világnézetet és művelődési alapokat. Az egyik VARDHAMÁNA MAHÁVÍRA, a másik GAUTAMA SZIDDHÁRTHA. MAHÁVÍRÁt követői DZSINÁnak, azaz Győzedelmesnek nevezték, tanainak foglalatát pedig dzsainizmusnak. A dzsainizmus alapvető tanítása, hogy a lélekvándorlás újraszületési láncából csak úgy szabadulhat az ember – bármely kasztba tartozzék is –, hogy legyőzi saját vágyait. A dzsainizmus Indiában ma is élő vallás. A másik történelmi jelentőségű próféta BUDDHA az első buddha volt, ami megvilágosodottat jelent. A Himalája tövében, Nepál vidékén élt a kis királyságot alkotó sákja törzs. Ennek fővárosában,

Buddha elhagyja otthonát (II. sz.)

Kapilavasztuban született GAUTAMA SZIDDHÁRTHA királyfi. Apja, SZADDHÓDA király csak az élet örömeit és szépségeit igyekezett megmutatni fiának, elzárva őt minden szomorúságtól és csúftól. Amikor azonban – neveltetése ellenére – a királyfi rájött, hogy az életben megmásíthatatlanul a fény kísérője az árnyék, elvonult a rengetegbe, és iszonyú aszkézis árán rájött, hogy nem a szélsőségek vezetnek a lélek felszabadulásához, hanem – amint tanát is nevezte – a középső út, amely mentes a test érzéki szenvedélyeitől, de távol áll az aszkézistől is. A szenvedés megszűnését vágyaink megsemmisítésével érhetjük el. Nemcsak uralkodnunk kell vágyainkon, hanem azoktól teljesen meg is kell szabadulnunk. Tanai világvallássá lettek, és érdekes módon ma már főleg Indián kívül toborozza híveit.

BUDDHA idejében, a perzsák hadjáratával (DAREIOSZ i. e. 520-ban csatolta birodalmához Északnyugat-Indiát) kerülhetett el Indiába PÜTHAGORASZ, akinek filozófiájában valóban számos indiai tanítást fedezhetünk fel. Indiában sok matematikát nem tanulhatott, mert a hindu matematikai kultúra a számírás bevezetésénél tarthatott. Ekkor a számfogalom kialakulásának a kezdetén, mint mindenütt, Indiában is a nagy számok varázsában éltek. Emlékeztet ez az állapot a gyermeki versengésre : ki tud nagyobb számot mondani? Ezt a kort tükrözi a *Lalitavisztara* eposzban az a jelenetsor, amely

Buddha-fej (III. sz.)

leírja GAUTAMA SZIDDHÁRTHA herceg leánykérését. A szép GOPA királylány kezéért öt kérő versengett, és ezeknek az akkori szokás szerint össze kellett mérniük erejüket vívásban, úszásban, futásban, nyilazásban, írásban és számolásban. Amikor GAUTAMA királyfi minden számban ügyesebbnek bizonyult a vetélytársaknál, akkor a bölcs ARDZSUNA a következő kérdést tette fel: „Hogyan folytatódnak a számok százasával koti (10^7) után?" A királyfi így felelt: „Száz koti neve ajuta, száz ajutáé nijuta, száz nijutáé kankara, száz kankaráé vivara...". Így sorakoztatott fel húsz nevet, de ennyivel sem érte be, mert még nyolc, hasonló sorozatot sorolt elő. Talán érdemes észrevenni, hogy az eposz szerinti elnevezések a 100-as számrendszert idézik. Ez a különben elég ritka számrendszer ugyanabban az időben a kínai pálcikás számírásban (305. oldal) is megjelent. Könnyen lehetséges, hogy a hinduk a kínaiaktól vették át.

Amikor a perzsa uralmat NAGY SÁNDOR megdöntötte, akkor Indiát is birodalmához csatolta, de váratlan halála után CSANDRAGUPTA sorra szabadította fel az elfoglalt területeket. Bölcs tanácsadójával, KAUTILJÁVAL az erős kezű király India északi részét egységes állammá szervezte. Leverte ugyan a görög helyőrségeket, kiűzte a hódító katonákat, de a perzsa és a görög telepeket meghagyta, és általuk a hellén művészet és tudomány is termékenyítőleg hatott a fejlődőben levő hindu kultúrára, sőt az Égei-tenger népeivel további kapcsolatokat is biztosított. Ez nemcsak a hindu művészetre hatott üdvösen azzal, hogy hellén mintára a hindu építészek és szobrászok akkor kezdték az időálló kő használatát, hanem a hindu matematika és csillagászat is hasznát látta a görög szellem beáramlásának. CSANDRAGUPTA unokája, a legendás ASÓKA király (i. e. 272–232) kegyetlen hódító háborúkkal növelte birodalmát. Eredményesebb volt azonban a véres háborúktól megkeseredett lelkű király bűnbánó elhatározása, hogy erőszak helyett szeretettel uralkodjék. Azon ritka királyok közé tartozott, aki valóban a szelídség és a szeretet hatalmával egyesíteni tudta szinte egész Indiát. Ezt az időszakot élénk kereskedelem, ipari élet, civilizációs és kulturális fejlődés kísérte. ASÓKA halála után azonban kis fejedelemségekre esett szét az ország, a rádzsák és a maharadzsák uralma alatt. India csak az i. sz. IV. században vált ismét egységes állammá a Gupta-családnak több mint 200 éven át tartó uralkodása alatt.

A virágzó Gupta-korszaknak (320–600) a fehér hunok betörése vetett véget. Amikor azonban a VI. században a turkesztáni törökök a hun birodalmat megdöntötték, akkor az Indiában rekedt hunokat beolvasztotta az indiai nép. A Gupta-család azonban már nem nyerte vissza régi hatalmát, igaz, hogy a Gupta-kor magas szintű kultúrája akkorra már megtermékenyítette egész India tudományos és művészeti életét. India északi részén HARSA király tudott

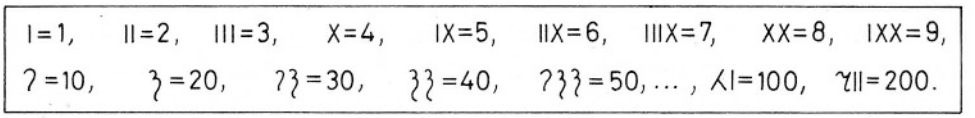
még egyszer erős központi irányítású államot szervezni. A mintegy négy évtizedes Harsa-korszak újabb kulturális fellendülést hozott. E rövid életű állam felbomlása (698) után azonban ismét fejedelemségekre darabolódott India hatalmas északi területe. Nem volt jobb a helyzet délen sem, bár itt nagyobb országok alakultak ki, mint északon. Az egymással is torzsalkodó kis államok a X. században nem tudtak ellenállni a Gaznavidák által vezetett muzulmán támadásnak. A XI. század első felében különösen MAHMÚD AL-GAZNAVI szultán, „a bálványok ledöntője" okozott helyrehozhatatlan kárt a hindu művészeti emlékekben. Fegyveresei kérlelhetetlen kegyetlenséggel pusztították India népét, leöldösve és rabszolgasorsra juttatva sok tízezer hindut. A XIII. század iszlám uralkodói tovább folytatták az erőszakos „térítést", aminek India népe, ha fegyverrel nem is tudott ellenállni, de a minden szenvedést eltűrő, viszont meg nem alkuvó „passzív ellenállás" tehetetlenné tette az erőszakot, amint az a hindu szellemnek, a hindu kulturális értékeknek a megsemmisítésére tört. A muzulmán iga a XVI. századig tartott. Az 1500-as évek elején India a mongolok hatalmába került. Az indiai Mogul Birodalom alapjait AKBAR (1556–1605; a NAGY AKBAR) rakta le. AKBAR türelmes uralkodó volt, és igyekezett kibékíteni a vallási ellentéteket. Még fia, DZSEHÁNGIR is hindubarát szellemben uralkodott, de a XVII. század második felében apját a trónról letaszító ALAMGIR már újra az iszlám vallási fanatizmusával üldözte és sanyargatta a hindu „hitetleneket". A XVIII. században a hatalmas muzulmán birodalom összeomlását követő zűrzavar jól előkészítette az európai gyarmatosítók térhódítását. Közülük az angolok váltak a legeredményesebbé. Az 1600-ban, tehát még AKBAR életében megalakult Brit Kelet-indiai Társaság közreműködésével a „felszabadító" Brit Királyság 1859-ben átvette a hatalmat India fölött. 1876-ban Indiát császársággá nyilvánították, ahol a kormányzói teendőket a brit alkirály gyakorolta. Az angol gazdasági kizsákmányolás ellenére, India Angliának köszönheti újjászületését. Az angol uralom Indiában egységet hozott létre, belevitte az államot a kapitalista fejlődésbe, számos hindu ifjú korszerű iskoláztatáshoz jutott, ugyanakkor a gyarmati elnyomás megérlelte a nemzeti öntudatot, és a hindu felszabadító mozgalmak, valamint a két világháború okozta politikai viszonyok végül is 1947-ben megteremtették az egységes, önálló Indiát.

A HINDU SZÁMÍRÁS

India sokat szenvedett népe hogyan járult hozzá az emberiség egyetemes kultúrájának fejlődéséhez? A kérdésre csak nagyon leszűkített feleletet adhatunk. Nem térhetünk ki a hindu vallás, filozófia,

művészet stb. nagy értékeinek az ismertetésére, csupán az indiai matematika történetére összpontosítjuk figyelmünket.

A hindu számírás első emlékei az i. e. III. századba visznek vissza bennünket, a legendákkal övezett Asóka király korába. Ebben az időben a hinduk kétféle számjelet használtak, kétféle írásuknak megfelelően. A perzsa uralom alatt elterjedt Észak-Indiában a sémi eredetű, jobbról balra haladó kharosti írás, amelynek számjeleit a *231. ábra* szemlélteti.

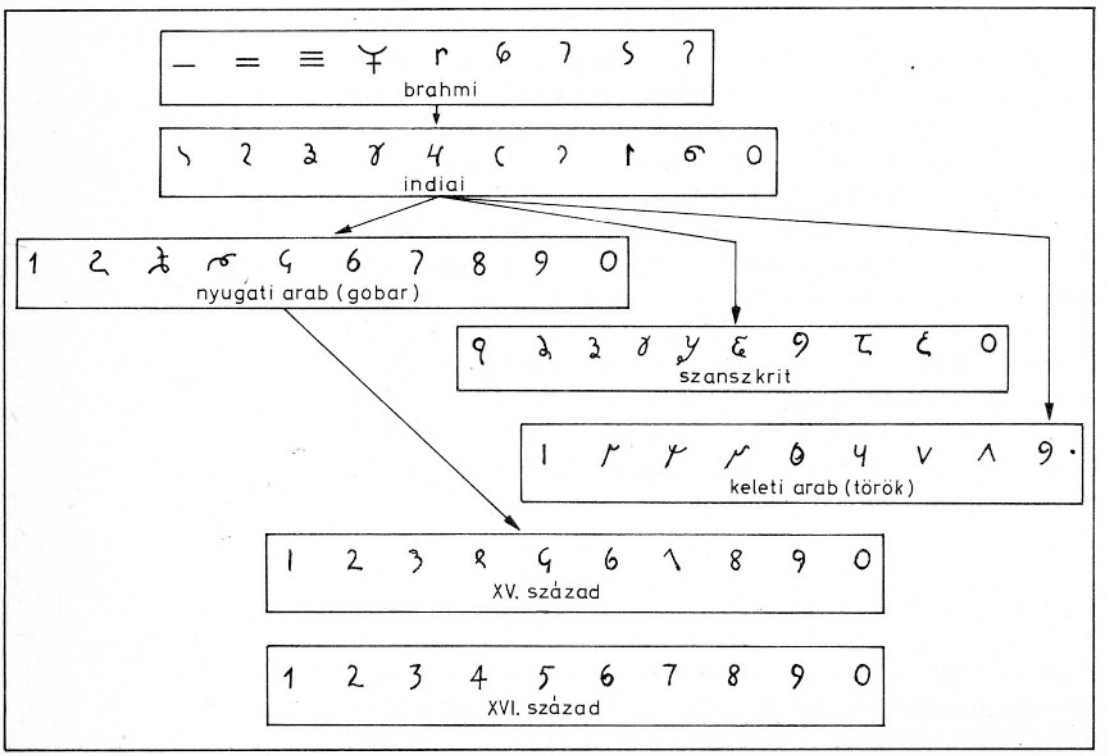


231. ábra

A mi szempontunkból jelentősebbek a már előbb kialakult, ún. bráhmi számjelek. Ezekből fejlődtek tovább az indiai számjegyek, és ez utóbbiakból származnak a nyugati arab (gobár), a szanszkrit és a keleti arab számjegyek. A nyugati arab, vagyis gobár számjegyekből lettek az európai-hindu-arab számjegyek, a keleti arab számjegyeket pedig ma is használják például a törökök (*232. ábra* táblázata).

Az indiai számjelek számjegyekké fejlődését nagyban könnyítette, hogy többségük egyetlen, tehát nem összetett jel. A hinduk a

232. ábra



számjegyek helyi értékének a fogalmát minden bizonnyal Mezopotámiából vették át, bár az i. sz. 500 körül dolgozó ÁRJABHATTA, az első ismert hindu matematikus és tanítványai, a kínai kiírt helyi értékű számíráshoz igen hasonló módon írták a számokat. Írásmódjukban a mássalhangzók jelentették a számjegyeket. Mintha mi megállapodnánk a

$$b=1,\ c=2,\ d=3,\ f=4,\ g=5,\ h=6,\ j=7,\ k=8,\ l=9$$

jelölésben. Ha a leírt számjegy egyest vagy tízest jelentett, akkor utánaírtak egy *a* betűt. Tehát a 23-at így írták: *cada*. A százasokat és az ezreseket az *i* magánhangzó jelölte. Így például 2345= =*cidifaga*. Hasonló módon a tízezresek és a százezresek jele az *u* betű volt. E szerint például 234 567=*cudufigihaja*. Ez a számírás két szempontból is emlékeztet a kínaira. A kínaiak a helyi értéket egy hieroglifával jelezték, ÁRJABHATTA egy magánhangzó betűjével. A kínaiaknál a pálcikás számírás (amely nem mutatta a helyi érték nevét) 100-as számrendszerű volt. ÁRJABHATTA számírásánál az, hogy ugyanazt a magánhangzót két szomszédos tízes helyi értékhez rendelte, szintén a 100-as csoportosításra utal. Ugyancsak kínai emlékeket ébreszt, hogy ÁRJABHATTA jobbról balra írta a számokat, mint a kínaiak. ÁRJABHATTA egyik tanítványa, BHÁSZKARA (520 táján) már elhagyta a helyi értékeket jelző magánhangzókat, határozottan 10-es helyi értékeket használt, és a mássalhangzók helyett a már kialakult bráhmi számjegyeket írta, de a helyi értékek sorrendjét meghagyta, tehát jobbról balra írt. Alig egy-két évtized múlva DZSINABHADRA GANI (537 körül) fordította meg ezt a sorrendet, bizonyosan mezopotámiai hatásra. Ehhez a számíráshoz azonban már nélkülözhetetlenné vált a 0 használata. A hindu „szunja" szó, ami nullát jelent, már a III. századi hindu szövegekben előfordult. A nulla jelét azonban a hinduk vagy a görögöktől, vagy a kínaiaktól vették át (lásd a 307. oldalt). A görög csillagászok jól számoltak a mezopotámiai helyi értékes 60-as számrendszerben, és annak tökéletesítésére, vagyis az üres helyi érték kitöltésére vezették be a görög *ὀυδεν* (uden)=semmi szónak az első betűjelét, az omikront. Ugyanebben az időben már Kínában is használták a nulla jelölésére a köröcskét. India tehát ekkor mind a görögöktől, mind a kínaiaktól átvehette a 0 használatát. A lényeg az, hogy az Indiában született bráhmi számjegyek, a Mezopotámiában létrejött helyiérték-fogalom és a görög vagy kínai nulla használata Indiában állt össze a helyi értékes, 10-es alapú számírássá, amely aztán arab közvetítéssel világszerte elterjedt. Különbség csak a számjegyek alakjában mutatkozik: az arab országokban a hindu eredetű ún. keleti arab számjegyek, Kínában, Japánban hieroglif jelek, máshol pedig a szintén hindu eredetű nyugati arab számjegyek vannak használatban, de mindenütt a helyi értékes 10-es alapú számrendszer keretein

Hindu ezüst kancsó (III. sz.)

Egy sztúpa domborműve
(III–IV. sz.;
Gink Károly felvétele)

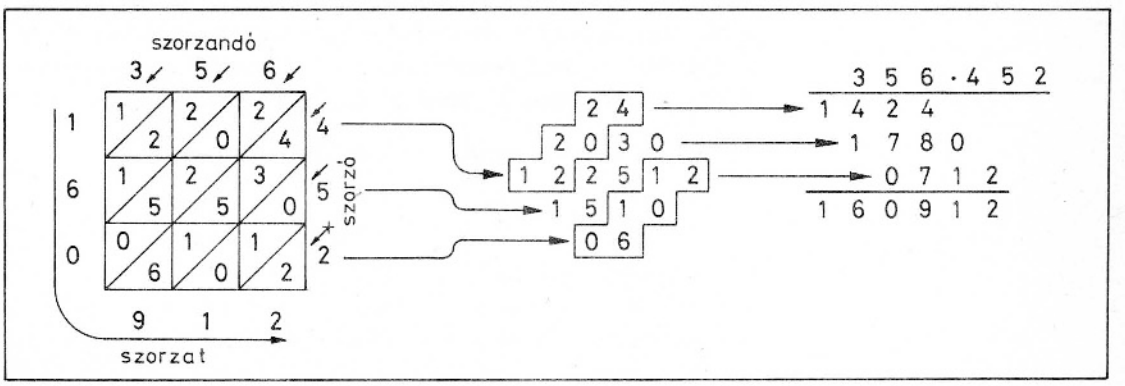
belül. Az Indiából diadalútra indult számírás jelentősége abban van, hogy hallatlanul megkönnyítette az írásban való számolást. Már az Égei-tenger vidékén elterjedt abakusznak, a kínai számolótáblának és a golyós számológépnek is az volt a haszna, hogy szinte észrevétlenül átfogalmazta a műveleteket a helyi értékes 10-es alapú számrendszer nyelvére, és így már az írástudatlanok is el tudták végezni a négy alapműveletet. A maga korában a helyi értékes 10-es alapú számrendszer olyan forradalmat jelentett a számítástechnikában, mint később a logaritmus, majd a mechanikus számítógépek, és korunkban az elektronikus számítógépek.

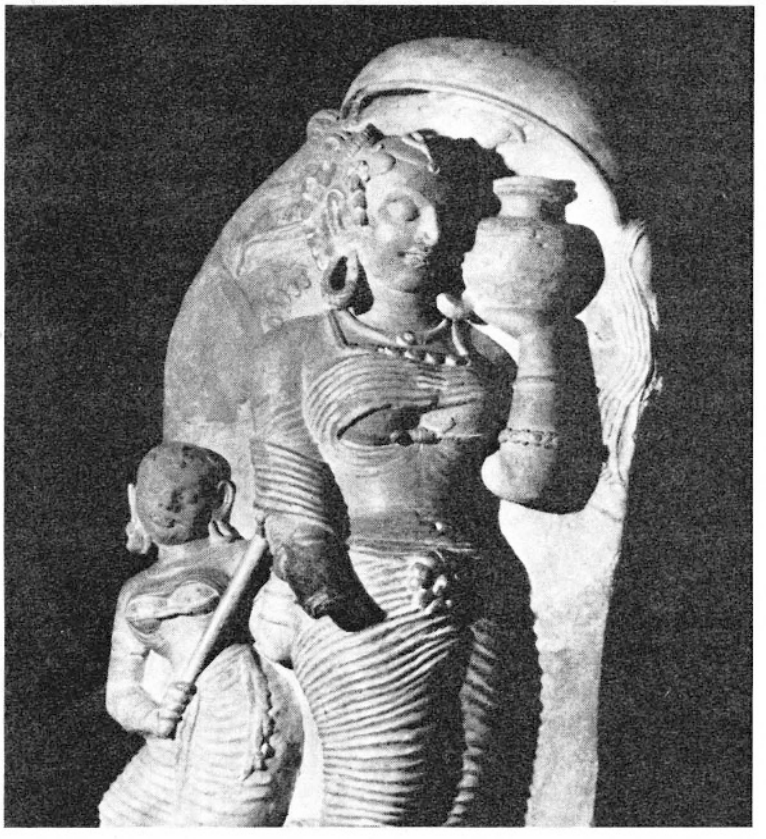
AZ INDIAI SZÁMÍRÁS ELTERJEDÉSE. A MAGYAR SZÁMÍRÁS

Az indiai számjegyekkel felírt első ismert 10-es helyiérték-rendszerű szám a 346. Ez a szám egy 595-ből származó hindu adománylevélen olvasható. Európában a hindu számírás nagyon nehezen terjedt el. Itáliában és a Földközi-tenger vidékén a római, nem helyi értékes számírás volt honos, kiegészítve az abakusz nevű számolótáblával. Az első könyv, amely sikeresen hívta fel a figyelmet az indiai számjegyekre, LEONARDO PISANÓnak vagy más nevén FIBONACCInak a *Liber abaci* című könyve volt (450. oldal). Ez már csak a hindu számírást használta. Nagy szolgálatot tett az új számírás meghonosodása érdekében a francia GERBERT szerzetes (950?–1003), a későbbi II. SYLVESTER pápa, aki az Ibér-félsziget arab egyetemeit látogatva ismerkedett meg a helyi értékes 10-es számrendszerrel. Mindezek ellenére Firenzében még 1294-ben is rendeletileg tiltották az indiai számjegyek használatát az üzleti könyvekben, mert ezek hamisítása könnyebb volt. Még az 1400–1500-as években is elkeseredett harcot vívtak az abakuszt használó „abacisták", az indiai módon számoló „algoritmikusokkal". A legrégibb európai kézirat, amelyben hindu-arab számjegyek vannak, a 976-ból számazó spanyolországi *Codex Vigilianus*. Az első, hindu-arab számjegyekkel lapszámozott könyv az 1471-ben megjelent Petrarca-kiadás.

Annak az illusztrálására, hogy a hindu helyi értékes 10-es számrendszerű számírás mennyire megkönnyítette az írásban való számolást, bemutatok egy, a hindu középkorban kialakult szorzási módszert. Ezt a rácsos szorzásnak nevezett eljárást szemlélteti a *233. ábra* a 356 szorzandó és a 452 szorzó esetén. Minden kis négyzetben a négyzet oszlopának számát megszorozzuk a négyzet sorához tartozó számmal, például az első kis négyzet esetén $3 \cdot 4 = 12$. A kapott részletszorzatot a kis négyzetbe írjuk az ábra szerint. Ezután összeadjuk őket a nyilak irányában, a csillagos nyíltól kezdve. A négyzet két szabad oldalán a 160 912 szorzat leolvasható.

233. ábra





Jamuná folyóistennő
(V. sz.; Gink Károly felvétele)

Ha a részletszorzatokat az ábra további részén kissé átrendezzük, akkor ráismerhetünk a gyermekkorunkban beidegzett mai szorzási eljárásra.

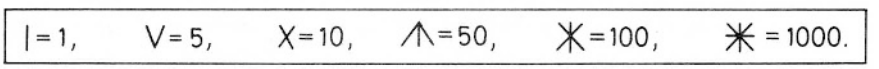
Hazánkban a XV. században kezdték használni a 10-es helyiérték-rendszerű számírást. Azt megelőzően mindenki római számjegyekkel írt és abakuszon számolt, aminthogy akkor még Nyugat-Európa minden országában így írtak és számoltak.

Az ősmagyar számírásra vonatkozólag nincsenek emlékeink. A magyar számnevek eredetére is csak nyelvészeti következtetéseink vannak. Az összehasonlító nyelvészet megállapította, hogy a 2, 3, 4, 5 és 6 számok nevei elég meggyőző hasonlóságot mutatnak a finnugor nyelvekben, a következő táblázat tanúsága szerint:

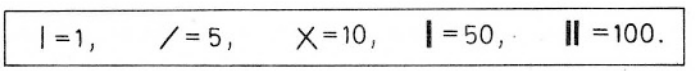
	magyar	*vogul*	*osztják*	*finn*
2	két	kit	kat	kakszi
3	három	churum	chulem	kolme
4	négy	nyila	nyal	nelja
5	öt	at	wet	viszi
6	hat	chót	chut	kuszi
100	száz	szát	szot	szata

Az a megfigyelés, hogy a négy nép számnevei hatig jó megegyezést mutatnak, arra utal, hogy amikor ezek a szavak keletkeztek, akkor a felsorolt népek még együtt éltek az őshazában, és hogy számaikat valószínűleg nem helyi értékes, 7-es számrendszerben írták. Ez a feltételezés HUNFALVY PÁL (1810–1891) finnugor nyelvésztől származik. Ugyancsak a nyelvészek szerint a régi mesék „hétfejű" sárkánya, „hérmérföldes" csizmája, „hetedhét" országa is egy valamikori 7-es számrendszer használatára mutat. Az, hogy a 7-et jelentő szó a finn nyelvben nem, de az ugor nyelvekben a 7 napból álló időtartamot is jelenti, valószínűvé teszi, hogy a hét számnév kialakulásakor a finnek már elváltak az ugor népektől.

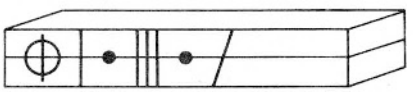
Úgy tudjuk, hogy a *tíz* szavunk perzsa eredetű, és eredetileg 10 darabot jelentett. Ha például a 10 darabra még ráteszünk kettőt, akkor az tizenkettő lesz. A 8 és 9 számnevek régies írásában, a nyoltzban és kilentzben egyes magyarázatok szerint a szóvégi „z" a tíz szó „z"-je, és arról árulkodik, hogy a 10-es számrendszerre való áttéréskor a nyolcat és a kilencet a tízből visszafelé képezték. A vogul nyelv ma is úgy mondja a 8-at, hogy kettő a tízből, a 9-et pedig: egy a tízből. Hasonló módon alakulhatott ki a harmintz szó is a „három tíz"-ből. A *száz* és az *ezer* szavunkat szintén a perzsákkal való kereskedés alkalmával vették át a finnugor népek. Sokan állítják, hogy a honfoglaláskor már a 10-es számrendszert használtuk, de előzőleg az ötöst. Az 5-ös számrendszert sejteti a rovásírásnál használt számrovás. A számrovásra vonatkozó legkorábbi emlékeink a XII. századból valók. A pásztorok használták, és a Hortobágyon ma is ismerik. A rovásjeleket rendszerint téglalap vagy négyzet keresztmetszetű fapálcikára, rúdra vésték. A legtöbb helyen a *234. ábra* számjeleit használták. A számot az egymást követő számjelek összege jelentette. A hortobágyi pásztorírás jelei a *235. ábrán* láthatók.



234. ábra



235. ábra



236. ábra

Érdekes különlegességnek számít az ún. páros számrovás. Ezt azok a pásztorok használták, akik legeltetésre vettek át állatokat. A farudacskára került a tulajdonos jele, utána pedig megszabott sorrendben a bikák, tehenek, borjak száma, amint azt a *236. ábra* szemlélteti. Az ábra azt a tényt rögzíti, hogy a ⊕ jelű gazdától a

pásztor átvett egy bikát, három tehenet és öt borjút. A vésés befejeztével az ábra szerint a rudat hosszában kettéhasították. Az egyik fele maradt nyugtaként a gazdánál, a másik ellennyugta gyanánt a pásztornál. Az állatok visszaszolgáltatásakor a két félrúd összeillesztésével vitamentesen megtörténhetett az elszámolás.

A nulla szavunk a latin nullus szónak a nőnemű alakja. A XVI. században azonban a nulla kifejezésére az arab „zifr" szóból származó „cziphra" szót használta az 1577-ben megjelent *Debreceni Arithmetica*. Valószínűleg a német Ziffer szó közvetítette hozzánk az arab „zifr"-t, amelyből származik még például a francia chiffre= =szám, számjegy szó és az orosz cifra=számjegy szó is. 1653-ban APÁCZAI CSERE JÁNOS már a cziphra helyett czifrát írt. ÓNADI JÁNOS tankönyvében jelentkezett először 1693-ban a nulla szó. 1743-ban MARÓTHI GYÖRGY váltakozva használja a nulla, a tzifra, a semmi és a zifrből olasz közvetítéssel keletkezett zéró vagy zérus szót. Később a cifra szó jelentése a magyar nyelvben átalakult. Bevezetésükkor a különös alakú új számjegyeket, köztük a 0-t, azaz a „cifrát" is, sokszor használták rajzok díszítésére, és lassan a „cifra" a „díszes" egyik árnyalata lett. BOLYAI FARKAS 1830-ban hol a semmi, hol pedig a zéró szót használta.

A HINDU MATEMATIKA

Az indiai kultúra igen változatos, megsemmisülésekkel és újjászületésekkel teletűzdelt történelmi körülmények közt fejlődött, és ez megmutatkozik az ókori és a középkori hindu matematika történetében is. Csillogó eredmények váltakoznak sikertelen korszakokkal, sőt még az egyes matematikusok munkájában is jól megférnek egymás mellett a nagyszerű új felismerések és a nyilvánvaló tévedések. Számtalan külső hatás irányította India matematikáját. Sokat köszönhet a babiloni, a kínai és a görög matematikának. A szomszédok ismeretei azonban sohasem fedték el a hindu szellem eredetiségét és formálóerejét.

Mint annyiszor, most is, az első ismert indiai könyv, amely matematikai vonatkozásokat tartalmaz, vallási könyv: a *Szulvaszutra*. A szulva vagy szulba szó mérőzsinórt, a szutra pedig olyan művet jelent, amely szabályokat, szertartásokat, életviteli előírásokat, vallási tanításokat örökít meg. A cím tehát azt fejezi ki, hogy a könyvben a vallási élettel összefüggő ismeretek olvashatók, amelyekhez azonban mérőzsinór is szükséges, azaz a templomépítéssel, a templom berendezésével kapcsolatos geometriai ismereteket tárgyal. A *Szulvaszutra* három változata közül legismertebb az, amelyet egy ÁPASZTAMBA nevű bölcs írt. A könyvek az i. e. VI–V. század táján keletkeztek, tehát PÜTHAGORASZ, illetve MAHÁVÍRA és BUDDHA ide-

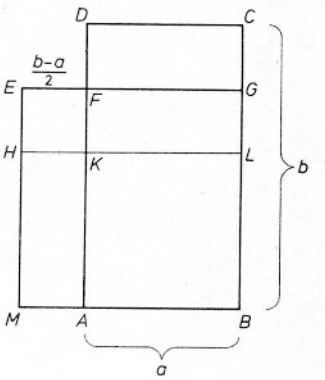
jében. Az Ápasztamba-féle *Szulvaszutra* ismerteti a derékszög kijelölésére alkalmas kötélhosszakat, amelyek derékszögű háromszöget fognak körül. Itt felsorolja a 3, 4, 5, az 5, 12, 13, a 8, 15, 17 és a 12, 35, 37 pitagoraszi számhármasokat. A Pitagorasz-tétel geometriai megfogalmazása valószínűleg Mezopotámiából származik. Feltűnő módon szerepel a könyvben egy olyan geometriai szerkesztés, amely szinte azonos egy, az EUKLEIDÉSZ *Elemek* című művéből ismeretessel. A feladat a következő:

Szerkesztendő az $ABCD$ téglalapéval egyenlő területű négyzet *(237. ábra)*! A megoldás: Mérjük fel a téglalap rövidebb $AB=a$ oldalát a hosszabb $BC=b$ oldalra. A különbségként mutatkozó LC szakaszt felezzük meg (G), és a BG szakasszal mint oldallal szerkeszszük meg az $MBGE$ négyzetet. Húzzuk meg végül az LKH szakaszt is. A rajzról leolvasható, hogy

$$BG^2-EF^2=t_{MBGFKH}=t_{ABCD}, \quad \text{mert} \quad t_{MAKH}=t_{FGCD}.$$

A t az indexében látható síkidom területét jelenti. Másként:

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{b-a}{2}\right)^2=ab=x^2,$$



237. ábra

ahol x jelenti a keresendő négyzet oldalát. Az összefüggés szerint $\frac{b-a}{2}$ és x annak a derékszögű háromszögnek a két befogója, amelynek az átfogója $\frac{a+b}{2}$. Ez a háromszög pedig már megszerkeszthető, és abból leolvasható az $x=\sqrt{ab}$ is. Talán felesleges írnom, hogy a *Szulvaszutrák*ban csak a feladat megoldási utasítása szerepel, magyarázat nélkül. A *Szulvaszutrák*ban a számírás 10-es számrendszerű, de nem helyi értékes, tehát külön számjelek voltak az 1, 2, 3, ..., 9, 10, 20, 30, ..., 90, 100, 200, 300, ..., 900, 1000, 2000, 3000, ... számára.

Matematikatörténeti szempontból fontos könyvek a *Sziddhánták*. A „sziddhánta" szó rendszert jelent, mégpedig csillagászati vonatkozásban. Az öt *Sziddhánta (Szúrja Sziddhánta, Paulisa Sziddhánta, Vasziszista Sziddhánta, Pajtamáha Sziddhánta* és *Romanka Sziddhánta)* az i. sz. III–V. században keletkezett csillagászati művek. Ezek között időrendben az első a *Szúrja Sziddhánta* (A Nap rendszere), amelyet a hagyományok szerint maga Szúrja, a napisten írt. Az öt közül teljes egészében csak a *Paulisa Sziddhánta* maradt meg. Ennek szerzője VARÁHA-MIHIRA (505 körül). A mű annyira görög hatást mutat, hogy AL-BÍRÚNI arab matematikus véleménye szerint a szerzője is egy alexandriai görög csillagász lehetett. Kétségkívül sok részlete emlékeztet PTOLEMAIOSZ *Almagesztj*ének csillagászati és trigonometriai fejezeteire. Biztosra vehetjük, hogy a

Álló Buddha
(Gink Károly felvétele)

Sziddhánták nem eredeti hindu művek. Anyaguk tekintélyes része Mezopotámiából, Görögországból, esetleg Kínából származik. Ne gondoljunk azonban teljesen szolgai átvételre. A hinduk sokat fejlesztettek, módosítottak az importált ismereteken. Erre meggyőző példával szolgál éppen a *Szúrja Sziddhánta,* amely először beszél a szinusz szögfüggvényről a mai értelemben. Még PTOLEMAIOSznál is a szinusztáblázatot joggal nevezhetjük húrtáblázatnak, hiszen abból a kör középponti szögeihez tartozó húrhosszak olvashatók ki. A *Szúrja Sziddhánta* húrtáblázata azonban már a mai értelemben is szinusztáblázat. Ez a középponti szög feléhez rendeli hozzá a középponti szög húrjának a felét. A szinusz szó maga is a hindu „jiva" = húr szó hibás fordításából ered. Az arab fordító ezt a szót „jibá"-nak vette át. Az arab írás azonban a magánhangzókat nem tünteti fel, tehát a jiba szót csak „jb"-nek írja. Az arabról latinra fordító ROBERT CHESTER a jb-t jaib-nak olvasta jiba helyett. Az arab jaib szó pedig azt jelenti, hogy öböl, és ezt CHESTER a latin szinusz szóval fordította, amelynek jelentése öböl, öl. Így történhetett, hogy a magyarosítás korában a szinusz szóból kebel lett, a cosinusból pótkebel és az arccosból visszáspótkebel a KAZINCZY korabeli diákok nagy örömére. Ma már a szinusz szó matematikai szakkifejezés, amelyről a matematikusok zöme tudni véli, hogy húrt jelent.

Az indiai földön jó talajra találtak a beszivárgott matematikai ismeretek. Az V. és VI. században már Indiának is megvoltak a maga matematikusai, de az óriási területen elszórva, egymástól elszigetelten dolgoztak. Mégis, a hindu matematikának is alakult ki valamelyes központja, kettő is. Az egyik Közép-Indiában Udzsain, a másik Dél-Indiában Majszur.

ÁRJABHATTA (476–550?)

Neves indiai matematikus és csillagász. Kuszumapurában született, az akkori nagy tudományos központban. Sajnos ugyancsak Észak-kelet-Indiában és ugyanazon évtizedekben két ÁRJABHATTA élt, és nem tudjuk, hogy a kettő közül melyik írta a 499-ben elkészült *Árjabhatija* nevű könyvecskét. Ebben a szanszkrit nyelvű csillagászati és matematikai munkában a könyv születésének a dátumát a szerző jelölte meg, és azt is, hogy 33 éves korában írta. E szerint ÁRJABHATTA 476-ban született. A könyvecske, amint ezt az akkori hindu hagyományok megkövetelték, verses formában foglalta össze az akkori csillagászati és matematikai ismereteket. Terjedelme 123 stanza. Ez ugyanaz a versforma, amelyben ARANY JÁNOS írta a *Bolond Istók*ot, azaz *abababcc* rímképletű, nyolcsoros versszak.

Az *Árjabhatiját* némelyek EUKLEIDÉSZ *Sztoikheiá*jához szokták hasonlítani. A hasonlóság alapja azonban csupán annyi, hogy

A Napisten szekerének egyik kereke (Gink Károly felvétele)

mindkettő összefoglaló mű. A *Sztoikheia* kimondottan matematikai tartalmú és igen szigorú rendszerességgel, jó pedagógiai érzékkel felépített könyv. Ez az *Árjabhatijá*ról nem mondható el. A hindu műnek csak mintegy harmadrésze matematika, és a *Sztoikheiá*hoz viszonyított rendszertelensége mellett még sok hibás állítást is tartalmaz. A könyv matematikai fejezete a hatványfogalommal kezdődik. Felsorolja 10 hatványait 10^{10}-ig. Ezután ismerteti a négyzetgyök- és a köbgyökvonást, majd terület- és térfogatszámítási feladatok következnek. A háromszög területét helyesen számolja ki, de a piramis térfogatát a háromszögtől vett helytelen analógiával úgy határozza meg, hogy az alapterületet megszorozza a magasság felével. A kör területéhez úgy jut el, hogy a kerületet szorozza a fél sugárral. Ez jó, de már a gömb térfogatát úgy számítja, hogy a gömbi főkör területét megszorozza a négyzetgyökével, ami pedig rossz. A jó és rossz eredmények e párhuzamát találhatjuk a négyszögek területszámításánál is. Egymás mellett sorakoznak az *Árjabhatija* matematikai felében a helyes és a helytelen állítások. A π értékét PTOLEMAIOSZhoz hasonlóan 3,1416-nek vette az egyik feladatnál, de 10 négyzetgyökének a másiknál. Sokszor indokolatlanul elfogadja a közelítő értéket akkor is, amikor a pontos érték

meghatározása sem kerülne fáradságba. Ez különben más hindu matematikusoknál is előfordul. Van azonban arra is példa, hogy tudatosan különböztetik meg a pontos és a gyakorlatnak még megfelelő közelítő értéket. Az *Árjabhatija* kitér a számtani sorozatokra is, hoz példát az összeg és az elemek számának a meghatározására. Egy kamatszámítási feladat kapcsán eljut a másodfokú egyenlethez. Ezt a mai képletnek megfelelő előírással oldja meg. A matematikai rész második fele gömbi trigonometriával foglalkozik. A könyvben van egy szinusztáblázat, amely olyan körre vonatkozóan tartalmazza a félhúr-értékeket, amelynek a kerülete $360 \cdot 60 = 21\,600$ egység, vagyis rádiusza 3438 egység, amikor is π értékét 3,054-nek vette. E táblázatban a szinuszértékek $3{,}75 = 90 : 24$ fok szögintervallumokként következnek. Ha ezeket elosztjuk 3438-cal, akkor közelítőleg a mai táblázatok szinuszértékeit nyerjük. Mint említettem, ÁRJABHATTA a számokat szótagokkal írta, más-más magánhangzókat használva a helyi értékek jelölésére. Ehhez igen kevés változtatás kellett, hogy kialakuljon a helyi értékes 10-es számrendszerű számírás. Könyvében olvasható is egy mondat, amely ösztönzésül szolgálhatott a helyi értékes írásmód kialakítására. Olyan mennyiségekről beszél, amelyekre igaz, hogy „helyről helyre, mindegyik tízszerese az előtte állónak". A könyv kiegészül a bolygórendszer ismertetése mellett az időszámítással és más, a csillagászathoz szükséges számítási eljárásokkal.

BRAHMAGUPTA (598–660)

ÁRJABHATTA után mintegy száz évvel BRAHMAGUPTA volt India legkiválóbb matematikusa. A közép-indiai Udzsainban élt és dolgozott. Ő is verses formában írta meg nagy, 20 kötetes művét a *Brahmasphuta Sziddhántát*, amit Brahma tökéletes rendszerének lehetne fordítani. E 20 kötetből 12-ben aritmetikát és geometriát tárgyal. Kiemelendő, hogy elsőként ismertette részletesen az előjeles számok műveleti szabályait. A pozitív számokat vagyonnak, a negatívokat pedig adósságnak tekintette. Ezzel a felfogással szemléletesen fogalmazta meg a négy alapművelet előjelszabályait. Elsőként tekintette a nullát is számnak, és megkísérelte tisztázni a zérussal végzett műveleteket. Ő sem tudott azonban megszabadulni a hindu matematika átkától, ő is keverte a jót a rosszal. Azt állította, hogy $0 : 0 = 0$, és hogy „Pozitív vagy negatív osztva zérussal, olyan tört, amelynek a nevezője nulla". *Brahmagupta* is, mint a hindu matematikusok általában, kedvelte a határozatlan egyenleteket. Az $ax + by = c$ alakú lineáris diophantoszi egyenlettel már ÁRJABHATTA is foglalkozott, de az általános megoldás először BRAHMAGUPTÁnál található. Biztos, hogy a határozatlan egyenletekkel a görögök is-

mertették meg a hindukat, de még DIOPHANTOSZ sem dolgozta ki általános elméletüket. BRAHMAGUPTA már tudta, hogy az $ax-by=c$ (ahol a, b és c egész számok) egyenlet gyökeit megtalálhatja, ha az $ax-by=1$ egyenlet gyökeit c-vel megszorozza. Az $ax-by=1$ egyenlet egész gyökeit pedig lényegében a ma is használatos módszer szerint kapta meg:

Ha a nagyobb, mint b, akkor az egyenletet rendezzük y-ra, a kisebb együtthatójú ismeretlenre:

$$y=\frac{ax-1}{b}.$$

Ha a és b relatív prímek, akkor $a=nb+r$, ahol n egész szám, tehát

$$y=\frac{nbx+rx-1}{b}=nx+\frac{rx-1}{b}, \quad \text{ahol } r<b.$$

Mivel y egész szám kell hogy legyen, azért

$$z=\frac{rx-1}{b}$$

is egész szám.

Visszajutottunk tehát az eredeti $rx-bz=1$ alakhoz, de ebben már kisebb együtthatók szerepelnek, hiszen $r<b<a$. Az eljárást ismételve, végül is olyan egyszerű egyenlethez jutunk, amelynek egész gyökei leolvashatók, és azokat visszafelé helyettesítve megkaphatjuk x és y értékeit. Kísérjük végig az eljárást egy számpéldán:

Legyen a megoldandó egyenlet

$$15x-17y=1,$$

amelynek egész gyökeit keressük. Az előbbiek szerint:

$$x=\frac{17y+1}{15}=y+\frac{2y+1}{15},$$

ahol

$$z=\frac{2y+1}{15}$$

egész szám. Innen

$$y=\frac{15z-1}{2}=7z+\frac{z-1}{2},$$

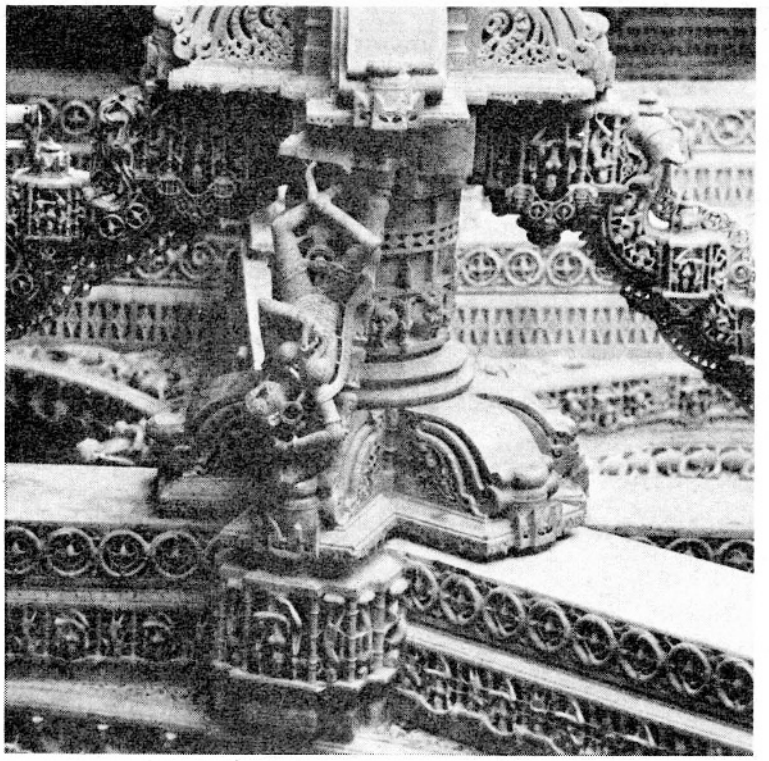
ahol

$$t=\frac{z-1}{2}$$

egész szám. Innen

$$z=2t+1.$$

Ha most t helyébe egész számokat írunk, akkor z is és vele együtt x és y is egész számok lesznek.



Tédzspála templom, részlet a tánccsarnokból (XIII. sz.; Gink Károly felvétele)

Ha $t \quad -2, 0, 1, 2, \ldots,$
akkor $z = -3, 1, 3, 5, \ldots,$
$y = -23, 7, 22, 37, \ldots,$
és $z = -26, 8, 25, 42, \ldots$

BRAHMAGUPTA elfogadta a negatív megoldásokat is. Azt is tudta, hogy az $ax+by=c$ diophantoszi egyenletnek mindig van megoldása, ha a és b relatív prímek, sőt a megoldások $x=p+nb$, $y=q-na$ formuláit is ismerte.

BRAHMAGUPTA foglalkozott még az $y^2=ax^2+1$ alakú, másodfokú diophantoszi egyenlettel is, amit tévesen Pell-féle egyenletnek szokás nevezni. Ezzel azonban csak néhány száz évvel később, kitűnő honfitársa, ÁCSÁRJA BHÁSZKARA tudott boldogulni. BRAHMAGUPTÁról érdemes még megjegyezni, hogy az aritmetikai műveletekre már külön jelölései voltak. Az összeadást egyszerűen egymás mellé írással jelölte. A kivonásnál is ezt az elhelyezést használta, de a kivonandó fölé pontot tett. Az osztás osztóját az osztandó alá írta, de törtvonal nélkül. A szorzás, a gyökvonás és az ismeretlen jelölésére a megfelelő szó rövidítését használta.

BRAHMAGUPTA geometriájában megkülönböztette a közelítő és a pontos eredményre vezető eljárásokat. Az egyenlő szárú háromszög területét úgy számította ki, hogy az alap felét megszorozta a szár

hosszával; az általános háromszög területét pedig úgy, hogy az egyik oldal felét szorozta a másik két oldal számtani közepével. Ha viszont pontosan akart számolni, akkor a Hérón-féle formulát használta. A háromszög köré írható r sugarú körben ismerte az $a = 2r \sin \alpha$ összefüggést, ahol a a háromszög egyik oldala és α az ezzel szembeni szög. Nevezetes eredménye a Hérón-formula általánosítása négyszög esetére. E szerint, ha egy négyszög oldalai a, b, c és d, valamint s a fél kerülete, akkor a négyszög területe:

$$t = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}.$$

A szép eredményhez azonban nem jegyezte meg, hogy a közölt képlet csak a húrnégyszögekre ad pontos eredményt. (Tetszőleges négyszög esetén a képlet:

$$t = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd \cdot \cos^2 \alpha},$$

ahol α a négyszög két szembeni szögének a számtani közepe.)

Foglalkozott a pitagoraszi számhármasok előállításával is. A racionális mérőszámú oldalakkal rendelkező derékszögű háromszög meghatározására az

$$a = p, \quad b = \frac{p^2 - q^2}{2q}, \quad c = \frac{p^2 + q^2}{2q}$$

képleteket használta. Itt is megpróbálkozott az általánosítással, amikor is olyan négyszögeket keresett, amelyeknek oldalait, átlóit és területét racionális szám méri. Erre a már idézett területképletet használta, az átlók kiszámítására pedig a

$$\sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)}{ad+bc}}, \quad \text{valamint a} \quad \sqrt{\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}}$$

formulákat. Egyik példájában $a = b = 25$, $c = 39$ és $d = 60$ volt. Így a két átlóra 56-ot és 63-at kapott, de pontatlan területképletével a helyes 1764 helyett 1933,75-ot.

ÁCSÁRJA BHÁSZKARA (1114–1185?)

Ő volt a BRAHMAGUPTA után következő első nagy hindu matematikus. Ugyanott működött, ahol nagy elődje – Udzsainban. Ő is írt egy nagy összefoglaló művet *Sziddhánta Sirómani* címen, amit A csillagászat koronájának lehetne fordítani. A mű négy részből áll. A két utolsó kizárólag csillagászattal foglalkozik, de az első kettő matematikával. Az első rész önálló műnek is tekinthető, és *Lilávati* (Elbűvölő) a címe. A hindu legenda szerint BHÁSZKARA a csillagok állásából megállapította azt a legkedvezőbb időpontot, mégpedig órára pontosan, amely egyedül alkalmas arra, hogy leánya férjhez

menjen. Közelegvén a kijelölt óra, az izgatott ara a vízóra fölé hajolva figyelte az idő múlását, nehogy elmulassza a kedvező pillanatot. Nem vette észre, hogy fejdíszéből egy gyöngyszem a vízórába pottyant, és elzárta annak kifolyócsövét, azaz, hogy az óra „megállt". Mire a hibát észrevették, addigra azonban a megjósolt pillanat elröpült, és így a leányka pártában maradt, mert más időpont már csak szerencsétlen házasságot hozott volna. A kétségbeesett leány vigasztalására és szórakoztatására az apa egy 13 fejezetből álló feladatgyűjteményt írt. Így született meg a *Lilávati*. Feladatainak szövege valóban elbűvölő. Közöttük található a letört bambuszra vonatkozó feladat: A szél letörte a 32 láb magas bambusznádat úgy, hogy a törés fölötti rész lehajlott, és vége a víz alatt a talajt a nád tövétől 16 láb távol éri. Milyen magasan tört el?

Egy másik feladat: Egy oszlop tetején páva ült. Az oszlop tövében lakott egy kígyó. A páva meglátta a hazaigyekvő kígyót, amely az oszlop tövétől háromszor olyan távol volt, mint az oszlop magassága. A páva egyenes vonalban lecsapott a kígyóra, és elérte, mielőtt elbújhatott volna. Ha a páva és a kígyó találkozásáig mindkettő ugyanakkora utat tett meg, akkor milyen messze voltak az oszlop tövétől a találkozás pillanatában?

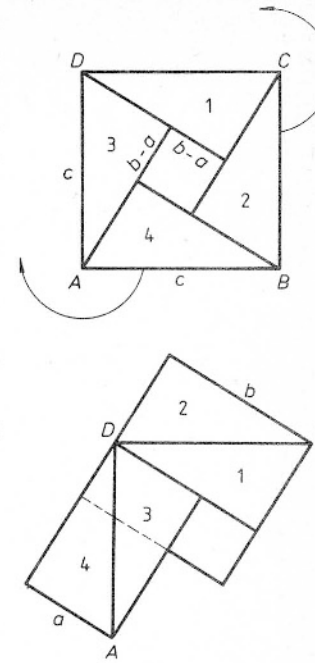
Egy algebraibb jellegű feladat: A játszadozó majmok nyolcadrészének a négyzete az erdőben ugrált. A fennmaradó 12 a zöld dombok felé igyekezett. Hányan voltak összesen?

A következő feladatot a felsorolt műveletek visszapergetésével oldotta meg: Melyik az a szám, amely hárommal szorozva, azután a szorzat háromnegyed részével növelve, majd héttel osztva és harmadrészével csökkentve, azután az eredeti számmal szorozva és 52-vel csökkentve, végül az eredmény négyzetgyökénél nyolccal nagyobb számot tízzel osztva – kettőt ad?

Végül, még egy kérdés: A méhraj nyolckilenced része elrepült. A megmaradt méhek egy csoportja a közeli jázminbokorra szállott. Ebben a méhek száma az egész rajban levők felének a négyzetgyöke volt. Egy méhecske pedig a lótuszvirágba esett társának a segítségére sietett. Hány méhből állt az egész raj?

A felsorolt ízelítő példák az egész mű hangulatáról akkor adnának hű képet, ha mindezt versbe szedve, a hinduk virágos és költői kifejezéseit használva tolmácsoltam volna. Annyi azonban talán így is kivehető, hogy főleg egyenletmegoldásokat kívánó feladatgyűjteményről van szó, amely a maga korában igen nagy népszerűségnek örvendett. A *Lilávati*t 1587-ben perzsára is lefordították, és 1832-ben kiadták Kalkuttában. Feladatai felölelik a mértékegységek ismertetését, az egész és törtszámokkal való műveleti szabályokat a négyzetgyökvonásig bezárólag, az arányosrész-számítást, a keverékszámítást és a sorozatok összegezését. A geometriai rész területszámítással, térfogat-meghatározással és a Pitagorasz-tételre alapo-

zott problémákkal foglalkozik. Igen szép, szemléletes bizonyítást mutat be a Pitagorasz-tételre. A szó legszorosabb értelmében *bemutatja* az igazolást két szomszédos ábrán, amelyekről a tétel magyarázat nélkül leolvasható *(238. ábra)*. Általában még BHÁSZKARA sem változtatott az egyiptomi vagy kínai módszeren, ugyanis a feladatmegoldás lépéseit receptszerűen, magyarázat nélkül közli. Ha a *238. ábra* első részén a 2-es és a 4-es háromszögeket a nyíl irányában 270°-kal elforgatjuk, akkor az ábra második részét nyerjük, és valóban leolvasható, hogy $c^2=a^2+b^2$. A műben felbukkannak kombinatorikai részek is.



238. ábra

A *Sziddhánta Sirómani* második része szintén önálló könyv, címe *Vidzsa Hanita* (Elemző számtan, algebra; vidzsa=elem, hanita=számtan). Ez túlnyomórészt algebrai tartalmú rész. Kezdődik az előjeles számok műveleti szabályainak az ismertetésével, folytatódik az első- és másodfokú határozott és határozatlan egyenletek megoldásával, végül lineáris egyenletrendszerekre vezető feladatokat is tartalmaz. BHÁSZKARÁnak ez a munkája az első olyan hindu írás, amely felveti a végtelen problémáját, mégpedig a nulla osztóval kapcsolatban. A következőket írja:

„Az osztandó 3. Az osztó 0. A hányados a $\frac{3}{0}$ tört. Ez a tört, amelynek a nevezője 0, egy végtelen mennyiséget jelent. Ilyen mennyiség, amelynek az osztója 0, nem változik, bármit adunk hozzá vagy bármit vonunk ki belőle: aminthogy nem változtat helyet a végtelenben az örökkévaló Isten." BHÁSZKARA azonban e világos megjegyzés ellenére sem látta át a nullával való osztás problémáját. Ezt mutatja egy következő kijelentése, amely szerint $\frac{a}{0}\cdot 0=a$.

Tanulságosnak ígérkezik, ha megnézzük, miként oldott meg BHÁSZKARA két, másodfokú kétismeretlenes határozatlan egyenletet. Az egyik az

$$xy=ax+by+c.$$

Először rendezte, és mindkét oldalához hozzáadott *ab*-t:

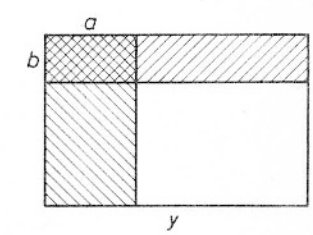
$$xy-ax-by+ab=c+ab.$$

Ezután egy ábráról *(239. ábra)* leolvasta, hogy

$$xy-ax-by+ab=(x-b)(y-a),$$

tehát

$$(x-b)(y-a)=c+ab.$$



239. ábra

Az így átalakított egyenlet jobb oldalát két egész szám szorzatára bontotta, azután a jobb és bal oldal megfelelő tényezőinek egyen-

lőségéből meghatározta x-et és y-t. E gondolatmenetet alkalmazva az

$$xy=3x+2y+34$$

egyenletre, az $(x-2)(y-3)=40$ egyenlethez jutunk. A 40-nek két különböző, egész tényezős szorzattá alakítása szerint nyolc különböző megoldáspárt nyerünk.

A másik kétismeretlenes másodfokú határozatlan egyenlet az ún. Pell-féle egyenlet. BHÁSZKARA ezen a területen kiemelkedő eredményt ért el, PELL előtt 500 évvel. Sajnálhatjuk, hogy ciklikus megoldási módszerét nem ismertette, mert így csak hiányos képet nyerhetünk a korabeli hindu matematikusok bizonyára gazdag számelméleti ismereteiről. Úgy hiszem, hogy nem hiábavaló, ha egy konkrét példán kísérjük figyelemmel az

$$y^2=ax^2+1$$

alakú Pell-egyenlet megoldását, illetve egész gyökeinek megkeresését, BHÁSZKARA receptje szerint. (A Pell-egyenletek elméletét az érdeklődők megtalálhatják a TURÁN PÁL előadásai nyomán összeállított *Számelmélet* című egyetemi jegyzetben, amelyet LÁNCZI ISTVÁNNÉ állított össze, és a Tankönyvkiadó adott ki 1964-ben.)

Az $y^2=ax^2+1$ egyenletben legyen a természetes szám. Ebben az esetben BHÁSZKARA utasításai a következők:

Először próbálgatással keressünk olyan x_1, y_1, b_1 természetes számokat, amelyekre igaz, hogy

$y_1^2=ax_1^2+b_1$, ahol x_1 és b_1 relatív prímszámok.

Ezután válasszunk olyan z és x_2 természetes számokat, hogy teljesüljön az

$$x_1z+y_1=b_1x_2 \tag{1}$$

egyenlet. Ez lehetséges, ha x_1 és b_1 relatív prímszámok (367. oldal).

Ekkor $\dfrac{z^2-a}{b_1}=b_2$ egész szám és $ax_2^2+b_2$ négyzetszám. Ez a következők miatt igaz:

A fentiek szerint az (1) egyenletből meghatározott

$$z=\frac{b_1x_2-y_1}{x_1}$$

(az x_2-vel együtt) egész szám. A b_2 pedig akkor egész szám, ha z^2-a osztható b_1-gyel. Nézzük meg, így van-e.

$$z^2-a=\left(\frac{b_1x_2-y_1}{x_1}\right)^2-a=\frac{b_1^2x_2^2-2b_1x_2y_1+y_1^2-ax_1^2}{x_1^2}.$$

Mivel azonban az $y_1^2-ax_1^2=b_1$, azért

$$z^2-a=\frac{b_1^2x_2^2-2b_1x_2y_1+b_1}{x_1^2}=b_1\,\frac{b_1x_2^2-2x_2y_1+1}{x_1^2},$$

tehát a z^2-a egész szám osztható a b_1 egész számmal, és így a $b_2=\frac{z^2-a}{b_1}$ maga is egész szám.

Ugyanekkor az $ax_2^2+b_2$ is egész szám, sőt

$$ax_2^2+b_2=a\left(\frac{x_1z+y_1}{b_1}\right)^2+\frac{z^2-a}{b_1}=$$

$$=\frac{ax_1^2z^2+2ax_1y_1z+ay_1^2+b_1z^2-ab_1}{b_1^2}=$$

$$=\frac{z^2(ax_1^2+b_1)+2ax_1y_1z+a(y_1^2-b_1)}{b_1^2}=$$

$$=\frac{z^2y_1^2+2ax_1y_1z+a^2x_1^2}{b_1^2}=\left(\frac{zy_1+ax_1}{b_1}\right)^2$$

egy egész számnak a négyzete. Jelöljük ezt y_2^2-nel. Ilyen módon eljutottunk az

$$y_2^2=ax_2^2+b_2.$$

egyenlethez, amely éppen olyan alakú, mint az eredeti

$$y_1^2=ax_1^2+b_1.$$

Ha most $b_2=1$, akkor x_2 és y_2 az

$$y^2=ax^2+1$$

egyenlet egyik megoldáspárja, ha pedig a b_2 különbözik 1-től, akkor is elértük, hogy kisebb, mint az első segédegyenlet b_1 állandó tagja. Ekkor az eljárás ismétlésével a b konstansok csökkenő sorozatát nyerhetjük. A megoldás nyilván a $b=1$ esetben jelentkezik.

BHÁSZKARA olyan Pell-egyenletet oldott meg, amelyben az a együttható értéke rendre 8, 11, 32, 61 és 67 volt. Példaképpen válasszuk ki az

$$y^2=32x^2+1$$

egyenlet.

BHÁSZKARA algoritmusa szerint először próbálgatással megállapítjuk, hogy az

$$y^2=32x^2+41$$

egyenlet egyik gyökpárja az $x_1=5$, $y_1=29$, amikor is $b_1=41$.

A következő lépésben megoldjuk az

$$5z+29=41x_2$$

határozatlan egyenletet. Az egész megoldásokat keresve, kell hogy a

$$z=\frac{41x_2-29}{5}=8x_2-5+\frac{x_2-4}{5}$$

egyenletben a $t=\frac{x_2-4}{5}$ egész szám legyen, tehát az

$$x_2=5t+4$$

egyenletben válasszuk t értékét olyan, lehetőleg kis egész számnak, amelynél z, majd b_2 pozitív egész számok lesznek. Legyen ezért:

$$t=0, \quad x_2=4 \quad \text{és} \quad z=27.$$

Az utasítás harmadik lépéseként:

$$b_2=\frac{z^2-a}{b_1}=\frac{27^2-32}{41}=\frac{729-32}{41}=17.$$

Most meggyőződhetünk arról, hogy az

$$y^2=32x^2+17$$

egyenlet két gyöke:

$$x_2=4, \quad y_2=23, \quad \text{és itt} \quad b_2=17.$$

Ismételjük meg az eljárást a megoldás második lépésétől kezdve, azaz keressük meg az

$$x_2z'+y_2=b_2x_3$$

egyenletnek megfelelő, azaz a jelen esetben a

$$4z'+23=17x_3$$

határozatlan egyenlet alkalmas gyökeit! Az egyenletből

$$z'=\frac{17x_3-23}{4}=4x_3-5+\frac{x_3-3}{4}.$$

Kell, hogy $t=\frac{x_3-3}{4}$ egész szám legyen, ezért az

$$x_3=4t+3$$

összefüggésben a t-t alkalmas, kis egész számnak választjuk. Legyen

$$t=0, \quad \text{és ekkor} \quad x_3=3, \quad z'=7.$$

Ez a választás azért szerencsés, mert így

$$b_3=\frac{49-32}{17}=1.$$

Elérkeztünk tehát oda, hogy az

$$y^2=32x^2+1$$

egyenlet egyik megoldáspárját megtalálhatjuk. Ha ugyanis az

$$x=x_3=3, \quad \text{akkor} \quad y=17.$$

Az indiai matematikusokhoz kapcsolódik még az a gondolatmenet is, amellyel a Pell-egyenleteknek nem az egész, hanem a racionális megoldásait keresték.

Tegyük fel eszerint, hogy két tetszőleges x_0 és y_0 értékre igaz, hogy

$$ax_0^2-y_0^2=b_0,$$

ahol b_0 az x_0 és y_0 megválasztásától függ. Alakítsuk most az egyenlet bal oldalát szorzattá:

$$(x_0\sqrt{a}+y_0)(x_0\sqrt{a}-y_0)=b_0.$$

Mindkét oldalt négyzetre emelve:

$$(ax_0^2+y_0^2+2x_0y_0\sqrt{a})(ax_0^2+y_0^2-2x_0y_0\sqrt{a})=b_0^2.$$

Innen:

$$(ax_0^2+y_0^2)^2-a(2x_0y_0)^2=b_0^2.$$

Végül osszunk b_0^2-tel:

$$\left(\frac{ax_0^2+y_0^2}{b_0}\right)^2=a\left(\frac{2x_0y_0}{b_0}\right)^2+1.$$

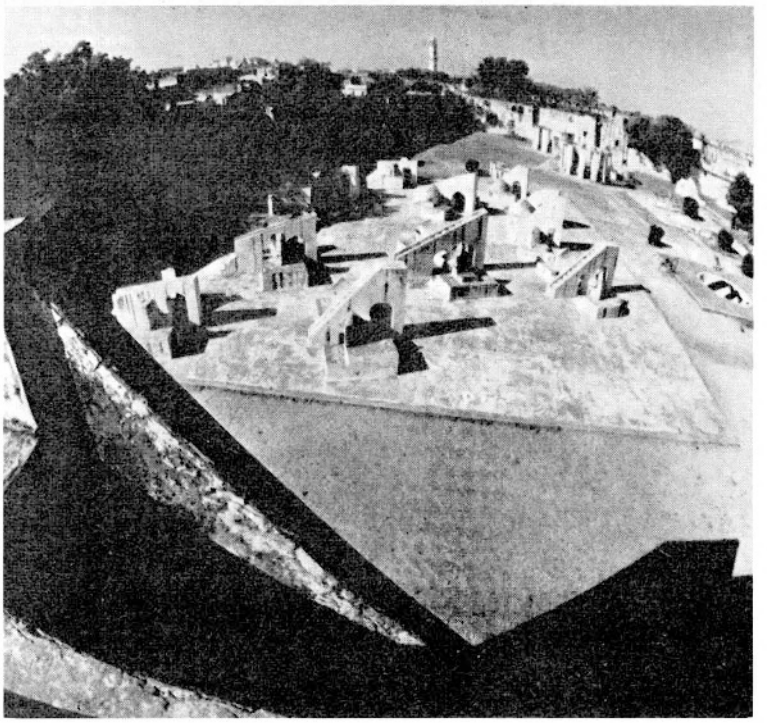
Eredményünket összehasonlítva az $y^2=ax^2+1$ egyenlettel, kitűnik, hogy az

$$x=\frac{2x_0y_0}{b_0}, \quad y=\frac{ax_0^2+y_0^2}{b_0}$$

értékpár kielégíti az $y^2=ax^2+1$ egyenletet.

Az elmondottakból megállapítható, hogy az ókori, középkori hindu matematika geometriai része az egyszerű gyakorlati élethez kapcsolódott, viszont az algebrai módszereket jelentős mértékben fejlesztették, főleg az egyenletmegoldási eljárásokkal. Kár, hogy az a nagyfokú bizonyítási igény, amely a kortárs görögöknél már természetes, a hinduknál nem talált követésre. Szinte visszaestek az egyiptomi, a babiloni és a kínai receptgyártáshoz, a magyarázatokat teljesen mellőzve. Habár módszereiknek kétségen kívül meglehetett a logikai alapja, de ennek közlése nélkül ma úgy látszik, hogy matematikájukban sok az intuitív tényező. Ennek persze az is oka lehet, hogy olyan mélyen látták, átértették azokat a fogalmakat, amelyekre alapoztak, hogy sokszor a részletes logikai lépések megtétele nélkül is mintegy előugrottak az eredmények.

Valamivel kiegészül a hindu matematikáról alkotott képünk, ha megemlítjük, hogy matematikusaik tisztában voltak a számtani sorozat összegzésével, meg tudták határozni az első n természetes szám négyzetösszegét, és ismerték a Pascal-háromszöget is. A legáltalánosabban ismert érdemük az, hogy összeolvasztották a 10-es



A dzsaipuri csillagvizsgáló a XVII. században (Gink Károly felvétele)

számrendszer, és a helyi érték fogalmát a nulla használatával, és így az arabok közvetítésével és számjegyformálásával Indiából indulhatott diadalútjára a számoknak a helyi értékes 10-es számrendszerben való írásmódja, és ezáltal ugrásszerűen megkönnyebbedett az alapműveletek írásban való elvégzése.

SRÍNIVÁSZA AIJANGÁR RAMANUDZSAN (1887–1920)

BHÁSZKARA után kereken 700 év telt el, míg India földjén említésre méltó, nagy matematikus született. Ez ugyan az időben igen nagy ugrás, de mert a hindu matematikáról később már nem lesz szó, most ragadom meg az alkalmat, hogy egy csodálatosan tehetséges, a hindu lélek minden tulajdonságát hordozó, eredetiségben is párját ritkító hindu matematikusról megemlékezzem. RAMANUDZSAN apja Brit India Madrász tartományában egy szegény bráhmi posztókereskedő, anyja pedig szintén bráhmi kishivatalnok lánya volt. Sokáig nem született gyermekük, és ezért az asszony apja buzgó imával kérte a szomszédos Namakal város jószívű istenét, Namagirit, hogy leányát ajándékozza meg gyermekkel. Namagiri megszánta az imádkozó apát, és nem sokkal később megszületett SRÍNIVÁSZA RAMANUDZSAN. Így mesélte el RAMANUDZSAN szüle-

tését a nagy matematikus első életrajzírója és barátja, a hindu SESHU AIJAR.

A fiúcska szülővárosában, Tanjorében végezte elemi tanulmányait, majd 7 éves korától Kumbakonam városban tanult, az ottani középiskolában. Tanárait és tanulótársait nemegyszer ejtette csodálatba bámulatos memóriájával. Hosszú számsorokat vagy számára érthetetlen szanszkrit szövegeket képes volt minden erőlködés nélkül hibátlanul felidézni. 15 éves korában egy matematikakönyv került a kezébe, amely olthatatlan érdeklődést keltett benne. A könyv elolvasása – minden segítség nélkül –, komoly felfedező munkát jelentett. Hatására először algebrával kezdett foglalkozni, és kiváló érzékkel, szinte teljesen intuitív úton számos eredménye született, amelyeket csak később igazolt. Azt állította, hogy álmában Namagiri isten súgja meg matematikai tételeit, és neki nincs más dolga, csak az, hogy felébredve lejegyezze és igazolja azokat. 16 éves korában érettségizett. Ekkor a továbbtanuláshoz ösztöndíjat kapott, amit azonban már az első vizsgáján elveszített, mert angolból nem felelt meg, mivel csak szerelmével, a matematikával foglalkozott.

Srínivásza Aijangár Ramanudzsan

Ezután – nyomorúságos körülmények között – matematikai kutatásokba kezdett. Alkalmi munkákkal csak annyit igyekezett keresni, amennyi szerény élelmére kellett. Minden időt sajnált, amit nem a matematikával töltött. Amikor azonban 1909-ben megnősült, állás után kellett néznie. Egyik barátja ajánlotta be a matematikáért rajongó számvevőnek, RAMACSANDRA RAónak, aki azonban nagyon vegyes érzelmekkel fogadta a borotválatlan, faragatlan modorú, rendetlen külsejű fiatalembert. Az első alkalommal, amikor az ifjú két agyonrongyolt füzetéből magyarázni kezdett, a derék számvevő semmit sem értett, de mert lelkiismeretes ember volt, nem akarta vendégét végleg elutasítani. A következő alkalommal RAMANUDZSAN is észrevette, hogy reménybeli pártfogója nem tudja követni, azért beszélgetésüket a legegyszerűbb eredményeinek bemutatásával kezdte. RAMACSANDRA nemcsak a magyarázatot értette meg, hanem azt is, hogy egy kivételes tehetséggel hozta össze a sors, sőt Madrász városban szerény állást is szerzett számára, amely mellett még matematikával is tudott foglalkozni.

RAMANUDZSAN, barátai biztatására, 1913 januárjában levéllel fordult a cambridge-i Trinity College akkor már híres professzorához, GODFREY HAROLD HARDYhoz. Levelében a következőket írta:

„Bemutatkozom önnek, mint a Madras Port Trust hivatalnoka, évi 20 font fizetéssel. 23 év körüli vagyok. Egyetemi képzésben nem részesültem, de a szokásos iskolákat elvégeztem. Iskoláim után, szabad időmben matematikával foglalkoztam. Nem mentem át a szabályszerű, konvencionális fokozatokon, amelyek az egyetemi kurzusokon szokásosak, de rábukkantam egy nekem való ösvény-

A táncoló Síva (XIII–XIV. sz.; Gink Károly felvétele)

re. Különleges vizsgálatokat végeztem általában a divergens sorok területén...

Szeretném kérni, hogy nézze át a mellékelt írást. Szegény lévén, ha ön úgy véli, hogy írásomban van valami érték, akkor szeretném eredményeimet publikálni. Nem adtam meg levezetéseket, de jeleztem az utat, amelyen jártam. Tapasztalatlan lévén, nagyra értékelném véleményét. Végezetül bocsánatot kérek a zavarásért."

RAMANUDZSAN levelében elküldte HARDYnak 120 új vagy újnak vélt tételét. HARDY először szélhámosságra vagy beugratásra gondolt, de az ifjú hindu szerencséjére ő is lelkiismeretes ember volt, és a közölt eredményeket alaposan átvizsgálta. Ennek az lett a következménye, hogy RAMANUDZSANt meghívta Cambridge-be. A RAMACSANDRA által kijárt ösztöndíj lehetővé tette az utazást, és RAMANUDZSAN 1913 májusában megérkezett Angliába. HARDY nagyon tapintatosan kezdett foglalkozni ezzel a hindu őstehetséggel, akinél a ragyogó eredmények mellett elképesztő hiányokat is felfedezett. Úgy tanította RAMANUDZSANt, hogy – HARDY szavaival élve – ő maga talán még többet tanult tanítványától. Különösen a számelmélet területén volt gyümölcsöző a két tudós közös munkája. Ennek több önálló és közös cikk lett az eredménye.

1917-ben azonban RAMANUDZSAN megbetegedett és kórházba

került. Csak 1918 őszére jött olyan állapotba, hogy ismét rendszeresen dolgozhatott. Betegsége időszakában történt, hogy HARDY, amikor egyszer meglátogatta, megjegyezte, hogy az 1729-es számú autóbuszon utazott, és ez a szám valahogy elkedvetlenítette. RAMANUDZSAN így vigasztalta: Az 1729 egyáltalában nem baljós szám, sőt van egy roppant érdekes tulajdonsága, az, hogy ez a legkisebb szám, amely kétféleképpen bontható két köbszám összegére (1^3+12^3 és 9^3+10^3). Ez a rá oly jellemző megjegyzés mutatja, hogy a természetes számok – amint ezt JOHN EDENSOR LITTLEWOOD egyszer megállapította – személyes jó barátai voltak.

1918-ban a Royal Society tagjául választotta, és a Trinity College tanárának hívta. A félig gyógyult tudós azonban, amikor tudományos munkái már mindenütt elismerésre találtak és szinte valamennyi jelentős tudóstársaság igyekezett tagjává választani, 1919-ben hazament Indiába. Angliába visszatérni már nem tudott. Ebben megakadályozta a következő évben bekövetkezett halála.

Módszereit tekintve szokatlan volt káprázatos számolási készsége, gyorsasága és biztossága, hihetetlenül jó memóriája, valamint páratlanul fejlett általánosítási érzéke. Különösen az analitikus számelmélet és az analízis területén ért el kiugró eredményeket. A számelméletben érdekelte a prímszámoknak a természetes számok közti eloszlása. Kereste azokat a számokat, amelyek négyzetszámok összegeként állíthatók elő. Foglalkozott a hipergeometriai sorok elméletével, a lánctörtekkel, a divergens sorok összegzésével, határozott integrálok kiszámításával, az elliptikus és a moduláris függvények elméletével. Sok jelentős és meglepő felfedezésének jellemzésére kiragadunk egyet:

Tekintsük az

$$1+\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n-1)}+\ldots$$

végtelen sort és az

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{1+\cfrac{3}{1+\ldots}}}}$$

végtelen lánctörtet. Külön-külön egyik sem hozható összefüggésbe sem π-vel, sem az e számmal, de RAMANUDZSAN igazolta, hogy összegük éppen $\sqrt{\frac{\pi e}{2}}$.

AZ ARABOK

A KULTÚRAMENTŐ ARABOK

A filozófia és a természettudományok területén a VI. és XIII. század közötti araboknak jutott az a kultúrtörténeti szerep, hogy a görög és hellenisztikus tudomány értékeit átmentsék Európába. Tevékenységük azonban nem szorítkozik pusztán a közvetítésre. A hellenisztikus szemlélettől igen eltérő világnézetű arabok a görög kultúrát nemcsak átvették, hanem módosították is, továbbfejlődésre alkalmassá tették azzal, hogy igyekeztek elkerülni azokat a buktatókat, „dogmákat", amelyek a görög tudományos gondolkozás korlátait jelentették. Így például elvetették az eleai filozófia hatása alatt kifejlődött számfogalmat (172. oldal), és ezzel szükségtelenné vált a matematika teljes geometrizálása, tehát út nyílt az aritmetika és az algebra továbbfejlődése előtt. A kémia kibontakozását sem akadályozta tovább például a kézművesmunka lebecsülése, tehát az arab vegyészek lényeges szerepet biztosíthattak a kísérletezésnek.

Az arabok elsősorban a görög filozófiai, csillagászati és orvosi munkák iránt érdeklődtek. A filozófiát sokan megkísérelték a valláshoz idomítani (Ibn Rusd), mások (például al-Gazáli) tiltakoztak ez ellen. Az előbbiek a filozófia fejlődését tették lehetetlenné, az utóbbiak számára pedig két igazság létezett: az egyik a vallási hit igazsága, amellyel nem lehetett vitába szállni, a másik pedig az értelem igazsága. Végeredményben mind a két irányzat megmerevedést eredményezett, ami elkerülhetetlenül kulturális hanyatláshoz vezetett. Az arabok csillagászati érdeklődése sürgette a görög matematikai ismeretek felújítását és természetesen a csillagászati megfigyelések folytatását. Az orvostudományban szükségessé vált a kémia (Ibn Dzsábir, lepárlás) és az optika (Alhazen). Főként a kémia területén értek el a klasszikus eredményeket túlszárnyaló, új felfedezéseket. Az életelixír keresése mellett már ipari méreteket öltött például a szóda, a timsó és a salétrom gyártása.

A klasszikus képzőművészet és irodalom az arabokat nem érdekelte. Vallásuk tiltotta az emberábrázolást, ezért a klasszikus szobrászat, festészet nekik nem felelt meg. Mondákban, legendákban gazdag irodalmuk pedig feleslegessé tette, hogy a görög-római irodalomból merítsenek. A klasszikus művészetet nem ők, hanem az

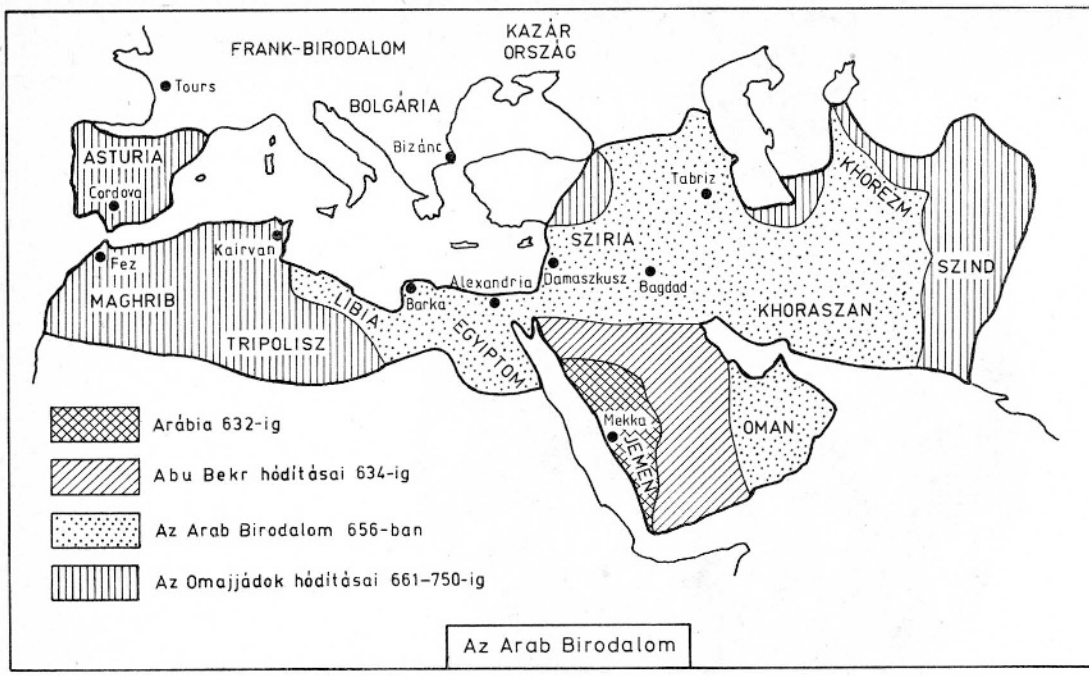
Korai asztrolábium.

európai reneszánsz fedezte fel, arab közvetítés nélkül. Az, hogy a klasszikus kultúra ún. humán és reál értékei más-más úton és időben hatoltak be Európába – legalábbis részben –, oka lett a kétféle kultúra elkülönülésének, amely napjainkra már-már tragikus méreteket öltött.

A középkori arabok a görög mellett kínai és indiai műveket is fordítottak, így elsőként ötvözhették a hellén és a távol-keleti tudományok eredményeit és módszereit. A görög civilizáció és kultúra jórészt csak a Földközi-tenger környékét fogta át, viszont az arab művelődés a mai Spanyolországtól egészen Kínáig terjedt. Az akkor ismert világ számára az arabok tették igazán egyetemessé a művelődési alapokat. Nagy kár, hogy az arabra átültetett kínai és indiai műveket nem követték latin fordítások, és így azok Európa kultúrájától idegenek maradtak.

RÖVID TÖRTÉNELMI VÁZLAT

Az V. és VI. században, MOHAMED fellépése előtt az arabok nem éltek egységes államkötelékben. Az analfabéta, nomád beduin törzsek a mai Arab-félszigeten, a „Boldog Arábiá"-ban (Arabia Felix) kóboroltak. Rabló kalandozásaikkal állandó rettegésben tartották a környező népeket, és ugyanakkor napirenden voltak az egymás



240. ábra

közötti csatározások is. Ez a törzsekre tagolódott, önmagát is irtó nép az akkor már kialakult erős államok gyűrűjében előbb-utóbb menthetetlenül valamelyik szomszédjának zsákmánya lett volna. Igaz, a nomád arab törzseket ekkor még elválasztotta a szomszédoktól az arabság letelepedett része, amely a VI. század elején már igyekezett békés kereskedőéletet élni. Ez azonban valójában az arabok még nagyobb mérvű megosztottságát is jelentette.

Ilyen helyzetben kezdte terjeszteni vallási tanait az 570 táján Mekkában született MOHAMED. Utazásai során érintkezésbe került keresztényekkel és zsidókkal is. Ezek tanításaiból ötvözte össze az iszlám néven ismert vallást, amelynek lényege az egyistenhit: „Egy az Isten: Allah", és természetesen „Mohamed az Ő prófétája". Az iszlám kezdetben türelmes vallás volt, kiváltképpen a zsidókkal és a keresztényekkel szemben. Bölcs erkölcsi törvényei közül az arabságra nézve különösen fontos a vérbosszú eltörlése, amely az arab törzsek közti ellentét fő oka volt. MOHAMED diplomatikusan tanai közé vett számos olyat, amely kedvezett a gazdagoknak, például megengedte a többnejűséget. A szegényeket pedig megnyerte azzal, hogy Allah előtt mindenki egyenlő. Híveinek száma Mekkában rohamosan nőtt, annyira, hogy kihívta a hatalmukra féltékeny vezetőség haragját. MOHAMED 622-ben kénytelen volt Medinába menekülni. Ekkortól kezdődik a mohamedán időszámítás annak megfelelően, hogy valóban ez a dátum jelzi az arab világhatalom kezdetét. Az elűzött próféta Medinában már nem a békés fantasz-

tának mutatkozott, hanem rövid idő alatt híveiből ütőképes hadsereget szervezett, és meghirdette a szent háborút, amelynek végső célja minden arab megtérítése volt. A Paradicsom ígéretével fanatizált hívők egymás után hódították meg a csak önmagukra utalt törzseket. A közös vallás, amely minden hívének kötelességévé tette az igaz hit terjesztését, megteremtette az arab egységet, mégpedig a folytonos harcokban megedzett, hadseregére is bizton számító arab államot, amelynek minden polgára szent feladatának tekintette hitének, ha kell, akár erőszakos úton való terjesztését is. Amikor MOHAMED 632-ben váratlanul meghalt, már Bizánc meghódítását tervezték. Ez ugyan elmaradt, de MOHAMED utódai, a kalifák egymás után hajtották uralmuk alá Szíriát, Mezopotámiát és Egyiptomot.

Az arabok 641-ben birtokukba vették a tudományok és a művészetek egykor oly csodálatos fellegvárát, Alexandriát is. A hódító háborúk e korszakában még nyoma sem volt az arabok kultúrszomjának. Az Alexandriát elfoglaló OMAR kalifa azzal tette nevét hírhedtté, hogy elrendelte a Nagykönyvtár anyagának elégetését. Szállóigévé vált e rendeletének indoklása: A könyvek tartalma vagy megegyezik a *Korán*nal, és akkor feleslegesek, vagy ellenkezik vele, akkor pedig károsak. Így elégetésük mindenképpen indokolt. A könyvek állítólag hónapokon át melegítették a közfürdők vizét, ami azonban nehezen hihető, hiszen JULIUS CAESAR i. e. 47-ben már felgyújtatta a könyvtárat, 390-ben pedig CIRILL szerzetesei dúlták fel a pogány tudományok e kincsesházát. OMAR közfürdői számára már nemigen jutott tüzelő a valamikor 700 000 művet számláló könyvtárból.

A VII. és VIII. században a hódító háborúk sikeresen folytatódtak, és az Arab Birodalom az Omajjád kalifák alatt elérte legnagyobb kiterjedését az Ibér-félsziget déli részétől Egyiptomon, Perzsián át Indiáig. Ennek az óriási birodalomnak az egysége nem politikai, hanem sokkal inkább gazdasági alapokon nyugodott, amelyet mindinkább átfogott a kialakuló arab kultúra. Az arabok a meghódított területeken meghagyták a közigazgatási apparátust, és a különböző egyházak is folytathatták tevékenységüket. Megmaradtak a szír, örmény, keresztény és zsidó egyházi vezetők is. Az arab nyelvet azonban mindenütt beszélték, a vezető réteg tagjai feltétlenül. Az „arab csoda" azonban nem is ennek a hatalmas birodalomnak a megteremtése volt, amelynek kereskedői a legkülönfélébb árukat szállították Kínától Hispániáig és Perzsiától Madagaszkárig, hanem az a csodálatos tudásszomj, amellyel a hódítók hihetetlenül rövid idő alatt magukévá tették a meghódított népek kultúráját. Birodalomszerte hatalmas, vigázó kultúrcentrumok létesültek: A Babilon közelében megépült Bagdad, azután Mekka, Szamarkand, Kairó, Córdoba, Toledo, Sevilla, hogy csak a leg-

nagyobbakat említsük. Itt mindenütt könyvtárak, egyetemek, csillagvizsgálók működtek.

Kezdetben a tudományos művek arabra fordítását szorgalmazták. Már 766-ban *Szinhind* néven elterjedt az Indiából átültetett két csillagászati mű, a *Szúrja Sziddhánta* és a *Brahmasphuta Sziddhánta*. Ezeket 733-ben AL-FÁZÁRI fordította arabra. Ugyanebben az időben látott napvilágot PTOLEMAIOSZ asztrológiai művének, a *Tetrabüblosz*nak a fordítása is. A fordítási láz még akkor is tartott, amikor a VIII. században már jelentkeztek az Arab Birodalom felbomlásának jelei. MOHAMED írásban nem rögzítette tanait, és csak halála után született meg az iszlámnak a dogmákra, az életvitelre és az erkölcsi magatartásra vonatkozó törvénygyűjteménye, a *Korán*. E vallási törvénykönyvnek azonban éppen az erkölcsi szabályait sokféleképpen lehetett magyarázni, és emiatt az iszlám világban ellentétek, majd szakadások léptek fel. Amint a történelemben mindig, akkor is, az elvi ellentétek valójában különböző csoportok hatalmi törekvéseit leplezték. Horászánban, Irán keleti részén kitört a síita (szakadár) felkelés. Ennek gyakorlati eredménye az lett, hogy egyetlen kivétellel kiirtották az Omajjád-dinasztia minden tagját. A megmenekült szerencsés a birodalom másik felében, Hispániában megalapította az első, a többitől független arab államot. A kiirtott Omajjádok helyét MOHAMED nagybátyjának egyik leszármazottja, ABUL-ABBÁSZ foglalta el. Az Abbászida kalifák erős zsoldos hadsereget szerveztek. Ez biztosította hatalmukat, és a jól megszervezett hivatali apparátus. Új fővárosukban, Bagdadban összegyűjtötték Szíria és Irán összes tudósát, de szívesen fogadták a zsidó és a nesztoriánus keresztény tudósokat is.

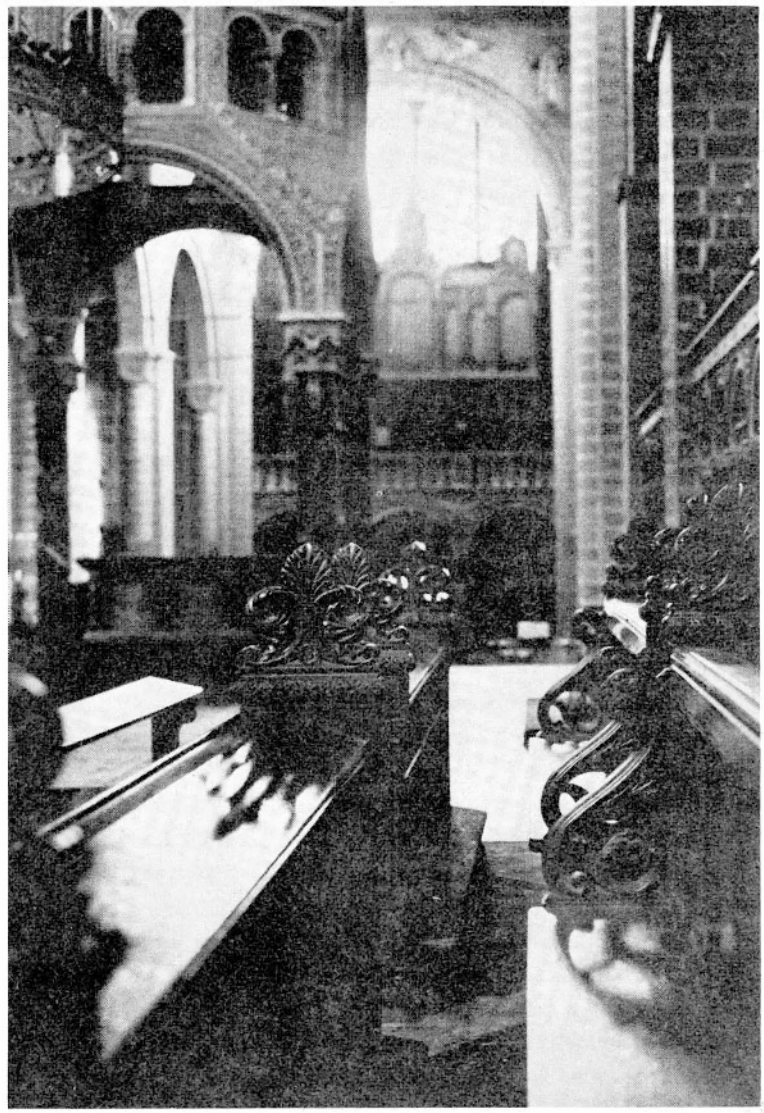
A nesztoriánusoknak különösen fontos szerep jutott a klasszikus eredmények átültetésében. Még az V. század elején NESTORIUS szíriai szerzetes azt tanította, hogy KRISZTUSban egyszerre van jelen az isteni és az emberi természet, és hogy MÁRIÁtól csak az utóbbit örökölhette, tehát MÁRIA nem lehet anyja Isten fiának, azaz a Krisztus-Istennek. Ezért a HÜPATIÁT megölető CIRILL előterjesztésére 431-ben az ephezoszi zsinat NESTORIUSt és követőit, a nesztoriánusokat eretnekeknek nyilvánította. A nesztoriánus eretnekség mögött tulajdonképpen a Bizánci Császárság-ellenes szír nemzeti mozgalom bújt meg. NESTORIUS követői az üldöztetés elől Perzsiába, Káldeába és Indiába menekültek, sőt néhányan Kínában kötöttek ki. Az Abbászidák nemcsak megtűrték a nesztoriánusokat, hanem főleg csillagászati és orvosi ismereteik miatt nagy megbecsülésben részesítették őket. A nesztoriánus telepek a gundisapuri királyi udvar közelében épültek fel, és így tudósaik a csillagvizsgálót is használhatták. Tulajdonképpen ők kezdték meg a görög auktorok fordítását az arabokéval rokon szír nyelvre, ahonnan az arab fordítók már könnyen átvehették. A nesztoriánusoknak tehát két-

ségkívül volt a görög hagyományok terjesztésében egy nagyon megbecsülendő katalizáló ténykedése. Jelentősen meggyorsították a görög szerzők arabra való fordítását. Hasonló szerep jutott az athéni filozófiai iskola utolsó tudósainak is, miután 529-ben JUSTINIANUS Akadémiájukat bezáratta. Ők is keleten kerestek és kaptak menedéket. Az arabok tehát birodalmuk keleti felében, de Egyiptomban is számos görög kulturális magot találtak, amelyek nagyban elősegítették a hellén műveltség átvételét.

Az Abbászida kalifák (750–833), köztük különösen AL-MANSZÚR, az *Ezeregyéjszaka meséi*ből ismert és népszerű HARUN AL-RASÍD, majd AL-MÁMÚN, Bagdadban létrehoztak egy új Alexandriát. AL-MÁMÚN a fővárosban felépítette a Tudomány Házát (Bait al Hikma), ahol az alexandriai Muszeion mintájára nagy könyvtárat rendeztetett be, és összegyűjtötte korának legnagyobb tudósait. Különösképpen pártfogolta a görög művek fordítását. A legenda szerint, egyszer álmában megjelent neki ARISZTOTELÉSZ. Akkor felébredve megfogadta, hogy minden elérhető görög művet lefordíttat arabra. A kalifa jó érzékkel választotta az első lefordítandó művek közé PTOLEMAIOSZ *Megalé szüntaxiszát* – amely éppen az arab fordítástól nyerte a végleges *Almageszt* címet (263. oldal) – és EUKLEIDÉSZ *Sztoikheiáját*. A szomszédos Bizánci Császárság készségesen támogatta a vele békességben élő kalifa kulturális törekvéseit.

Az Abbászidák azonban szintén nem tudták kiküszöbölni a belső villongásokat. A birodalomban az egyik felkelés a másikat követte. Ezek fő oka a parasztság és a városi szegénység nyomora volt. A sorozatos lázongások elnyomása meglehetősen nagy katonai erőket kötött le. Így vált lehetővé, hogy akkor, amikor a spanyolországi Andalúzia Omajjád uralom alá került, a berber Magreb is leszakadt a birodalom testéről, majd nemsokára Tunisz is önállósította magát. A kalifák mindinkább kényszerültek a török zsoldosokra támaszkodni, ugyanakkor az egyre zsugorodó kalifátus mind kevésbé tudta azok követeléseit teljesíteni. Végül is egyfajta katonai arisztokrácia nőtte ki magát, amely egész tartományokat kerített hatalmába. A X. században az Arab Birodalom három részre szakadt, ami alkalmat adott a Bizánci Császárságnak arra, hogy elfoglalja Szíriát. Ekkor kellett onnan a nesztoriánusoknak is menekülniük.

A részekre hulló arab állam nem tudott ellenállni a török hódításoknak. Az egyik török fejedelem Irán keleti határán erős, feudális jellegű országot hívott életre Gazna központtal. A Gaznavidák alatt azonban az iszlám kultúra még nagy fellobbanással virágzott. Ebben a korszakban élt IBN SZÍNA (AVICENNA, 980–1037), a híres orvos és természettudós, EUKLEIDÉSZ és ARISZTOTELÉSZ egyik fordítója. Kortársa volt az ugyancsak Gaznavida pártfogásban álló



Részlet
a pécsi székesegyházból
(XII–XIII. sz.;
Csák Miklós felvétele)

AL-BÍRÚNI, a nagy geográfus, csillagász és matematikus. Ekkor írta FIRDAUSZI (932–1021) a csodálatos *Sáhnámét*.

1039-ben (I. ISTVÁN királyunk halála utáni évben) a szeldzsuk törökök uralma még egyszer nagy területen egyesíteni tudta a felbomló iszlám birodalmat, de már utoljára. A széthullási folyamat csak átmenetileg állt meg. A XII. századra már nagyjából körvonalazódtak azok az egymástól független, önálló arab államok, amelyek a mai térképeken is megtalálhatók.

AZ ARAB MATEMATIKA KORSZAKAI

Az előző részben vázolt történelmi keretben működtek az arab matematikusok is. Egy tudomány fejlődésében a korszakokra bontás mindig egy kicsit erőltetett, de a nagyobb áttekinthetőség kedvéért az iszlám matematika fejlődésében nagyjából 4 korszak különíthető el:

1. A görög, egyiptomi, mezopotámiai és indiai hagyományok összegyűjtése és azok arabra fordítása igénybe vette a VIII. századot, súllyal az Abbászida-kort. A bagdadi Tudomány Házában könyvtár, csillagvizsgáló állt a kutatók rendelkezésére. Az Ibérfélszigeten Córdoba a tudományos központ.

2. A IX. században megkezdődik a lefordított művek kommentálása, egyben azok alapján sajátos arab színezetű fejlődés indult meg. A kor kiemelkedő matematikusai: AL-HVÁRIZMI, AL-KINDI, SZÁBIT IBN KURRA, AL-MAHANI. Fejlődik az aritmetika, a geometria, a trigonometria, az algebra és a közelítő számítások módszere.

3. A X–XII. században a csillagászattal összefüggésben az érdeklődés a trigonometria és a közelítő számítások felé fordul, de tovább fejlődik az algebra is. A korszakot fémjelző matematikusok: ABUL-VAFA, AL-KARADZSI, AL-BÍRÚNI, OMAR HAJJÁM, ABU KÁMIL és AL-BATTÁNI.

4. A XIII–XV. században igen erős kínai hatás alatt, főleg a numerikus módszerek jöttek előtérbe. Az ekkori kiváló matematikusok: AT-TÚSZI, AL-KARHI, AL-MAGRIBI, IBN AL-HAISZAM és AL-KALASZÁDI.

AZ ARAB MATEMATIKUSOK

AL-HVÁRIZMI, MUHAMMAD IBN MÚSZA (800 előtt–850?)

A Tudomány Házában számos csillagász és matematikus között dolgozott AL-HVÁRIZMI is. Amint a neve is jelzi, Hvárezm (Horezm) városban született, a mai Üzbég Köztársaság területén (Híva). Ez a perzsa-arab tudós több mint fél tucat csillagászati és matematikai művet hagyott hátra. Csillagászati munkái között vannak táblázatok és értekezések. Írt tanulmányt a napóráról és az asztrolábiumról.

Az asztrolábium, amelyet planiszfériumnak is neveznek, az arabok jellegzetes csillagászati eszközévé vált. Valószínűleg HIPPARKHOSZ találta fel, de sokan APOLLÓNIOSZnak tulajdonítják ez érdemet (137. oldal). Megszerkesztésénél mindenesetre közreját-

Tycho de Brahe

szott az APOLLÓNIOSZ által felfedezett sztereografikus projekció, amely pontból síkra való szögtartó leképezés (267. oldal). Az asztrolábium az armillagömb (sphaera armillaris, abroncsos gömb) leképezése. Ez egy, a Földet modellező gömb, amelyet különböző gyűrűk rendszere vesz körül. Ezek a gyűrűk az ekliptikát (égi egyenlítőt), a hosszúsági és a szélességi köröket ábrázolják. Az armillagömböt HIPPARKHOSZ már használta és a XVI. században TYCHO BRAHE tökéletesítette. Ebből úgy nyerték az asztrolábiumot, hogy vetítették sztereografikus projekcióval egy meghatározott földrajzi szélességi kör síkjára. Így tehát minden szélességi körhöz más-más asztrolábiumkorong tartozik. Az így kapott eszköz egy forgatható tárcsáján (rete) láthatók az állatövi képek egy-egy fényesebb csillaggal. A műszer része még egy cserélhető tárcsa a magassági körökkel, és egy kétnézőkéjű forgatható átmérő (mutató), amellyel az égitestek magassága mérhető. Az asztrolábium segítségével megállapítható többek közt az északi irány és a földrajzi hosszúsághoz tartozó pontos idő, valamint az égitestek magassági és szélességi adata. Az arabok főleg az irány- és az időmeghatározásra használták, hiszen a hatalmas területű birodalomban meghatározott időkben és Mekka felé fordulva kellett a kötelező naponkénti öt imát elmondani.

A matematikatörténet szempontjából AL-HVÁRIZMInek két fontos művét kell megemlítenünk. Az egyik csak latin fordításban maradt ránk, címe: *De Numero Indorum* (A hindu számokról). Ebben a szerző feltehetően BRAHMAGUPTA művére támaszkodva ismerteti a helyi értékes 10-es számrendszerű számírást és a vonatkozó műveleti szabályokat. A latinra fordítás felületessége miatti szótorzítás következtében a könyv címe előtt szereplő szerző neve AL-HVÁRIZMIről algorithmusra változott. Az algoritmus szó, ez az elferdített név ma már nem a könyv írójának a nevét idézi, hanem így hívnak minden, valamely előírt módon és sorrendben végrehajtandó számolási eljárást, például a legnagyobb közös osztó kiszámítására szolgáló euklideszi algoritmust. AL-HVÁRIZMI könyvének nyomán terjedt el az a vélemény, hogy a helyi értékes 10-es számrendszert a szerző találta fel, bár erre ő nem tartott igényt. A mű hatását mutatja az is, hogy számos európai nyelvben valamilyen formában meghonosodott az arab zifr szó, amelynek jelentése: üres, semmi, nulla. Amint említettem (362. oldal), innen ered a mi cifra szavunk is. A hindu-arab számírást két jól követhető úton a *De Numero Indorum* indította el. Az egyik a spanyolországi arab egyetemeken át vezetett, a másik pedig az akkor arab kézen levő Szicíliától Itálián át hatolt északra. Ezzel kapcsolatban már említettük a francia GERBERT (359. oldal) nevét, de fontos szerepet töltött be e téren a bathi ADALBERT (Adelard, 1090?–1160?) is. Ez a spanyolországi

Perzsa könyv egy oldala (XI. sz.)

zsidó tolmács álruhában látogatta az arab egyetemeket, és számos arab munkát fordított latinra, köztük AL-HVÁRIZMI könyvét is.

Az arab matematikus másik nevezetes munkája az egyetlen olyan, amely arab nyelven maradt meg. A címe: *Kitáb al-dzsabr valmukábala,* azaz *A helyreállítás és az egyszerűsítés könyve.* A dzsabr (kiegészítés, helyretétel) szó megfelel annak a műveletnek, amely-

lyel az egyenletben egy tagot „átviszünk" a másik oldalra. A mukábala az egyszerűsítést, az összevonást jelenti. Amint AL-HVÁRIZMI neve önálló életet kezdett élni az algoritmus szó formájában, úgy alakult át a névelőjével együttes al-dzsabr szó algebrává, ami sokáig a matematika egyenletekkel foglalkozó ágát jelölte, ma pedig inkább az algebrai struktúrákkal foglalkozó tudomány. A *Liber algebrae et almucabola* latin cím elárulja, hogy a fordító nem volt egészen tisztában a dzsabr és a mukábala szavak értelmével, és azért meghagyta azokat nagyjából eredeti alakjukban. A könyv hatását jól érzékelteti az algebra szó szépirodalmi pályafutása. CERVANTES (1547–1616) *Don Quijote* című regényében az író algebristának nevezi a sebészt, aki a sérült csontokat „helyére rakja".

AL-HVÁRIZMInek ez a 825-ben megjelent algebrakönyve elsődlegesen hindu hatást mutat, főleg BRAHMAGUPTÁt juttatja eszünkbe. Vannak azonban olyan részei, különösen a geometriai jellegű szemléltetések vagy inkább megokolások, amelyek kétségkívül görög befolyásról árulkodnak. Ezek a hatások valószínűleg erősen áttételesek lehettek. Erre következtethetünk abból, hogy AL-HVÁRIZMI egyáltalában nem használ szimbólumokat sem DIOPHANTOSZ példájára, sem úgy, ahogyan BRAHMAGUPTA élt velük. Teljesen viszszatért az ún. retorikus algebrára, azaz mindent szavakkal fejezett ki, semmilyen jelet nem használt, sőt gyakran még a számokat sem számjegyekkel, hanem betűkkel írta ki. Ez visszalépést jelent akár DIOPHANTOSZhoz, akár BRAHMAGUPTÁhoz képest. A könyvében tárgyalt problémák is egyszerűbbek a diophantoszi határozatlan egyenletekkel kapcsolatos kérdéseknél. Mindazonáltal AL-HVÁRIZMI könyve az előbbiekhez képest fejlődést is mutat. Ez abban is megnyilvánul, hogy DIOPHANTOSSZAL ellentétben elfogadja a negatív megoldásokat is, bár a másodfokú egyenletek típusokra osztására azért van szüksége, mert itt nem veszi számításba a negatív együtthatókat. Amiben azonban DIOPHANTOSZT és a hindukat is igazán felülmúlja, az a megoldások megokolása, minden lépésének logikus következtetéssel való alátámasztása. Nemcsak egyedi megoldási eljárásokat ír le, hanem általános megoldási módokat dolgoz ki úgy, hogy minden mozzanatukat megmagyarázza, megérteti. Valószínűleg ez a fő oka annak, hogy algebrakönyve évszázadokon át az egyik legnépszerűbb matematikai mű volt.

AL-HVÁRIZMI *Algebrá*jának latin fordítása – ebből hiányzik az eredeti mű előszava, amely dicsőíti MOHAMED prófétát és AL-MÁMÚNt, a hithűség parancsnokát – azzal kezdődik, hogy bevezeti a gyök (x), a négyzet (x^2) és a szám (pozitív szám) fogalmát. Ezután következik hat kis rész, amelyekben a könyv írója sorra veszi az

$$ax=b, \quad ax^2=b, \quad ax^2=bx, \quad x^2+bx=a, \quad x^2+a=bx$$

és a

$$bx+a=x^2$$

egyenletek megoldásait. Amikor a negatív számok fogalma még nem létezett, akkor az első- és másodfokú egyenleteknek valóban ezt a hat típusát kellett egymástól függetlenül tárgyalni. E hat eset különválasztása AL-HVÁRIZMInél azért feltűnő, mert ő már ismerte a negatív számokat, sőt a másodfokú egyenletek megoldásánál azt is észrevette, hogy abban az esetben, amikor az a mennyiség, amit ma diszkriminánsnak nevezünk, negatív, akkor az egyenletnek nincs megoldása. Bizonyára a hat típust gépiesen vette át az elődöktől, és nem gondolt rá, hogy a negatív szám fogalmát és az azzal való számolási szabályokat felhasználva a többféle típus egységesíthető. Ez a jelentős lépés nála még elmaradt.

A másodfokú egyenletek megoldását általában a teljes négyzetté kiegészítés módszerére alapozza, amelyet konkrét példákon mutat be Ezek az egyenletek a mai jelölésekkel:

$$x^2+10x=39,$$

$$2x^2+10x=48$$

és

$$\frac{1}{2}x^2+5x=28.$$

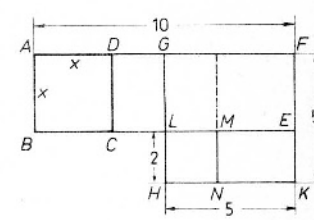
Mindegyiknél csak a pozitív megoldásokat veszi figyelembe. Ennek oka, amint alább majd meglátjuk, a geometriai megokolás.

Ez kiviláglik akkor, amikor a könyv ötödik fejezetében megoldja az

$$x^2+21=10x$$

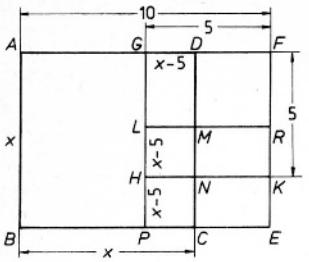
egyenlétet. Ennél feltünteti mind a két pozitív gyököt, tehát az előbbi egyenleteknél azért nem adja meg mind a két megoldást, mert csak az egyik pozitív. Ugyanakkor pontosan az ötödik fejezet idézett feladatánál jegyzi meg AL-HVÁRIZMI, hogy az egyenletnek csak akkor van megoldása, ha az elsőfokú tag együtthatójának a felét négyzetre emelve nem kapunk kisebb számot, mint a konstans tag.

Az egyenlet megoldásának magyarázatára a következő geometriai interpretációt adja: Az egyenlet bal oldalát szemlélteti egy x oldalhosszúságú $ABCD$ négyzettel és annak az egyik oldalához csatolt 21 területegységű $DCEF$ téglalappal, ahol $DF>x$ *(241. ábra)*. Az x^2+21 tehát az $ABCD$ négyzet és a $DCEF$ téglalap területösszege, vagyis az $ABEF$ téglalap területe, amely az egyenlet állítása szerint $10x$, tehát az $AF=BE$ oldal hossza 10 egység. Rajzoljuk most meg az AF oldal felével, tehát 5 egységnyi oldallal a $GHKF$ négyzetet, amelynek így a területe 25 egység. Tüntessük fel végül az $LHNM$ kis négyzetet, amelyben $LM=LH=CL$.



241. ábra

Az $MNKE$ és a $CLGD$ téglalapok egybevágósága miatt a $GLMNKF$ „gnómón" területe 21 egység, tehát az $LHNM$ négyzet területe a $GHKF$ négyzet területének és a gnómón területének a



242. ábra

különbsége, azaz $25-21=4$ területegység. Ebből következik, hogy $LH=CL=2$. Ekkor már leolvasható, hogy $x=BC=5-2=3$. (Lásd az elliptikus illesztést a 154. és 155. oldalon.)

Az egyenlet második gyökének a leolvasásához, illetőleg a számítás geometriai magyarázatához az előbbi ábrát módosítani kell *(242. ábra)*. Rajzoljuk meg most is az x^2 területű $ABCD$ négyzetet, és illesszük az egyik oldalához a 21 területű $DCEF$ téglalapot, de most $DF<x$. E két terület összege, vagyis az $ABEF$ téglalap területe $10x$ területegység. Ekkor pedig a téglalap $AF=BE$ oldala 10 egység hosszú. Ennek G felezőpontjában emeljünk merőlegest az AF szakaszra, és rajzoljuk meg a $GHKF$ négyzetet, amelynek területe 25 egység. Vegyük észre, hogy a $HPCN$ négyszög négyzet, hiszen $PC=HP=x-5$. Vigyük be most ezt a $HPCN$ négyzetet a $GHKF$ négyzetbe úgy, hogy $LHNM \cong HPCN$ legyen, és végül hosszabbítsuk meg az LM oldalt R-ig.

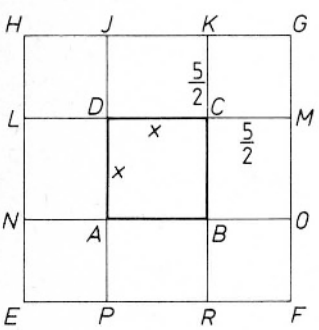
A $GLMD$ és a $CEKN$ téglalapok egybevágósága miatt a $GLMNKF$ gnómón területe akkora, mint a $DCEF$ téglalapé, vagyis 21 területegység. Ilyen módon az $LHNM$ négyzet területe $25-21=4$ területegység, vagyis az egyik oldala 2 egység hosszú. A $HP=HL=2$ miatt: $x=GH+HP=5+2=7$.

E két geometriai „magyarázat" talán megsejteti, hogy miért nem szerepelnek AL-HVÁRIZMInél a negatív gyökök. Ezekre nem tudott geometriai magyarázatot adni.

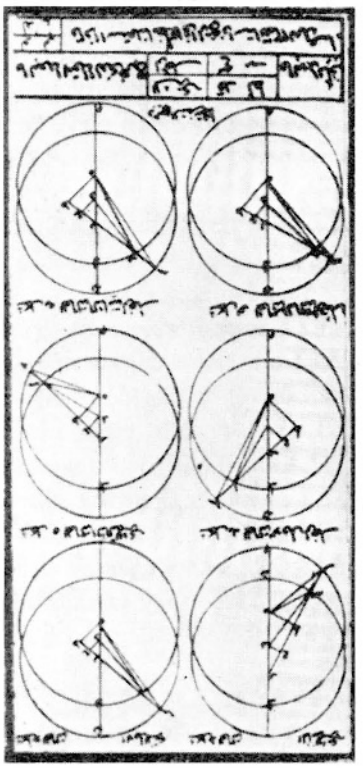
Tanulságos megfigyelni a teljes négyzetté kiegészítés geometriai alakját is. Erre példát mutat AL-HVÁRIZMI az

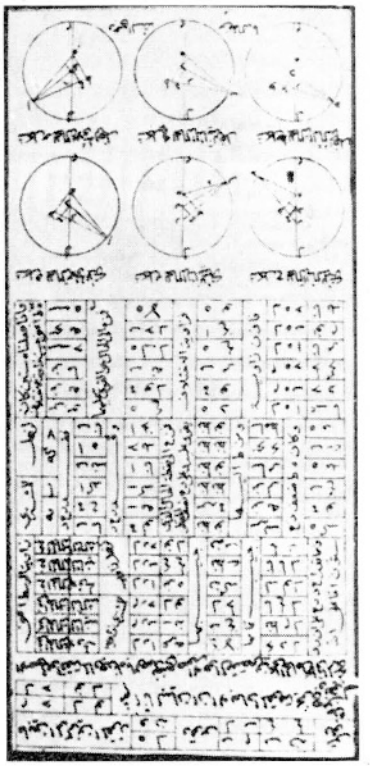
$$x^2+10x=39$$

egyenlettel kapcsolatban. Ezúttal az egyenlet bal oldalát, illetve az azt szemléltető területet úgy állítja elő, hogy az x^2 területű $ABCD$ négyzetet körülveszi olyan egybevágó téglalapokkal, amelyeknek egyik oldala x, a másik pedig $\frac{5}{2}$ hosszú *(243. ábra)*. Ezeknek a négyzet oldalaihoz illeszkedő téglalapoknak a területösszege tehát éppen $10x$. Így tudjuk, hogy a $JDLNAPRBOMCK$ kereszt területe x^2+10x, amiről az egyenlet azt állítja, hogy 39 területegység. Ha most ezt a keresztet az ábra szerint négyzetté egészítjük, vagyis a területéhez hozzáadunk négyszer $\left(\frac{5}{2}\right)^2$, azaz 25 egységet, akkor a $HEFG$ négyzet területe $39+25=64$ területegység lesz. Ennek a nagy négyzetnek tehát egyik oldala 8 egység hosszú, amiből x értéke: $8-5=3$. Ennél a geometriai „bizonyításnál" AL-HVÁRIZMI már nem tudta hasonló módon az egyenlet negatív gyökét, a (-13)-at távolságként előállítani, tehát csak az $x=3$ megoldást találta meg.



243. ábra



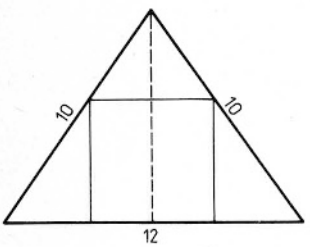


Az Almageszt arab kiadása (XIII. sz.)

AL-HVÁRIZMI *Algebrá*ja az egyenletmegoldások bemutatásán kívül még számos korabeli matematikai, illetve algebrai ismeretet közöl. Ezek között említendők a negatív, illetve az előjeles számokkal való számolás szabályai, és a kéttagú kifejezésekkel végzendő műveleti törvények. Az egyenletmegoldásokkal kapcsolatban kiemelendő, hogy azokat számos és változatos szövegű feladattal illusztrálja. Könyvében könnyű észrevenni idegen hatásokat, amelyek az akkori kozmopolita Bagdadban más területen is felfedezhetők, különösen a csillagászat, az orvostudomány, az alkímia és a filozófia területén. A görög műveket és ismereteket hozták nyugatról, főleg a nesztorianus keresztények, Mezopotámia és India pedig igazán a szomszédban volt. AL-HVÁRIZMI tehát a legkülönbözőbb származású és típusú matematikai ismeretekből válogathatott. A kiválasztott anyagot aztán ügyesen, egységes szempont szerint elrendezte. A számolási szabályokat, amelyek a helyi értékes 10-es számrendszeren alapultak, Indiából vette. Algebrájának témáját, a határozatlan egyenletekkel való foglalkozást görög és hindu példára kedvelte meg. Az egyenletek rendszeres tárgyalása részben mezopotámiai, részben görög hatást mutat. Az egyenletek megoldásának geometriai módja, a geometriai algebra tipikusan görög

módszer. Főleg rendszeres tárgyalásmódja miatt, valamint azért, mert az egyenletek megoldását különválasztotta a matematika más tárgyköreitől, legalább annyira tekinthetjük az „algebra atyjának", mint DIOPHANTOSZT, aki ezt a jelzőt azzal érdemelte meg, hogy megkísérelte az algebrai szimbólumok bevezetését, és egyenletekkel foglalkozott.

A görög tudománynak Babilonba, illetve Bagdadba való áramlását nagyon meggyőzően bizonyítja az a példa, amelyet AL-HVÁRIZMI tagadhatatlanul HÉRÓN nyomán közölt. Még az e feladat szemléltetésére szolgáló ábra és az adatok is azonosak. A feladat egyébként azt kérdezi, hogy mekkora annak a négyzetnek egy oldala, amely olyan egyenlő szárú háromszögbe írható, amelynek alapja 12 és szára 10 egységnyi hosszú? A négyzet egyik oldala feküdjék az alapon *(244. ábra)*. AL-HVÁRIZMI először Pitagorasztétellel kiszámította a háromszög magasságát, ez 8 egység. Ebből a háromszög területét 48 egységnyinek találta. E területet előállította úgy is, mint az eredeti háromszögben levő négyzet és a három háromszög területének az összegét. Tudva, hogy ez az összeg 48, a nyert egyenletből meghatározta az ismeretlen négyzetoldalt: $4\frac{4}{5}$. HÉRÓN és AL-HVÁRIZMI feladatmegoldása között csupán annyi a különbség, hogy HÉRÓN az eredményt, nyilván egyiptomi befolyásra, egységtörtekkel fejezte ki, ami a mai írásmód szerint: $4+\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{10}$.



244. ábra

E példát főleg azért érdemes említeni, mert kitűnően illusztrálja azt az utat, amely Egyiptomból Görögországon, Mezopotámián át elvezet az arab matematikához, és azon keresztül Európához. A tudományok és általában a kultúra fejlődésének a folytonosságát, hézagtalanságát sejthetjük meg egy-egy ilyen példa nyomán. Nagyon valószínű, hogy ott, ahol látszólag a semmiből, hirtelen bukkan fel egy már fejlettnek látszó ismeret, vagy ahol a kultúra fejlődésében hézagok mutatkoznak, ott mindig joggal kereshetők az előzmények, illetőleg a hiányt kitöltő, még fel nem derített, összekötő hidak. Így aztán nem meglepő, ha időnként egy-egy új, ismeretlen vagy elveszettnek vélt mű feltalálása a régebben kialakulthoz képest új megvilágításba helyezi némely könyvnek a tudománytörténetben elfoglalt szerepét és jelentőségét.

Így vagyunk AL-HVÁRIZMI *Algebrá*jával is. Újabban Törökországban találtak egy kéziratot, amelynek a szerzője

IBN TURK AL-KUTALLI, ABD AL-HAMÍD IBN VÁSZI (IX. sz.)

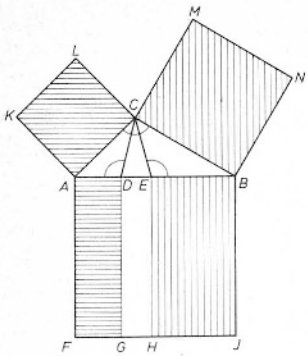
E kézirat címe *Logikai szükségszerűségek a vegyes egyenletekben.* Benne olyan részek találhatók, amelyek előfordulnak AL-HVÁRIZMI *Algebrá*jában is. A kézirat keltezési ideje feltehetőleg megegyezik AL-HVÁRIZMI működésének idejével, de az is lehet, hogy még előtte íródott. Feltűnően azonos a két könyvben az $x^2+21=10x$ egyenlet tárgyalása, sőt ABD AL-HAMÍD művében még többet is adott, mert abban szerepelt a diszkrimináns jelentésének a geometriai magyarázata is. Ebből leolvasható, hogy a másodfokú egyenletnek csak akkor van megoldása, ha a diszkrimináns nem negatív. Nem csupán a feladatok megoldását illusztráló példák kiválasztásában, hanem a két mű rendszerében is sok a hasonlóság. Bizonyára az a helyzet AL-HVÁRIZMI *Algebrá*jával, mint volt EUKLEIDÉSZ *Sztoikheiá*jával. Tárgyköre abban a korban széles területen ismert volt már, többen is írtak ugyanarról a témáról. Ezek között a számos vonásban hasonló művek között azonban az egyik kiugróan jónak bizonyult, és mellette a többi elfelejtődött. AL-HVÁRIZMI kiugróan jó *Algebrá*ja, példásan rendszeres tárgyalási módja és érthetősége miatt, mint kiváló kézikönyv évszázadokon keresztül használt, iránymutató, kedvelt mű lett. Egyetlen hátránya a retorikus módszer, a szimbólumok teljes hiánya, amelyet az arab világ matematikája sohasem haladt túl a középkorban.

ABU KÁMIL SUDZSA IBN ASZLAM IBN MUHAMMED AL-HÁSZIB AL-MISZRIJ (850?–930?)

Egyiptomban született. Kairóban dolgozott. Határozatlan egyenletekkel foglalkozott. Ritkaságszámba menő kéziratát – *Könyv a dzsabrról és a mukábaláról* – Sztambulban őrzik. Habár csak a másodfokú egyenletekig jutott el, az arab matematikában először ő tárgyalt többismeretlenes egyenletet. A kvadratikus irracionalitásokat már számként kezelte. Az algebrai azonosságokat szavakban fogalmazta meg, és számpéldákkal támasztotta alá. Munkái hatással voltak LEONARDO PISANÓra is.

SZÁBIT IBN KURRA, ABUL-HASZAN (836–901)

A IX. század második felében működő, kiváló bagdadi matematikus jelentős szerepet vitt a bagdadi „fordítóiroda" megszervezésében. Ő maga is számos művet fordított arabra. Ezek között volt EUKLEIDÉSZ *Elemei,* úgyszintén ARKHIMÉDÉSZnek, APOLLÓNIOSZnak, PTOLEMAIOSZnak és EUTOKIOSZnak néhány munkája. Egyedül az ő fordítása őrizte meg ARKHIMÉDÉSZnek a szabályos hétszög



245. ábra

szerkesztését bemutató tanulmányát. (Lásd a 211. oldalon.) Ugyanakkor annál jobban képzett matematikus volt, hogy csak szolgai módon fordítson. Az érdeklődését felkeltő tételeket sokszor módosította, általánosította, további vizsgálatainak kiindulásaként használta. Erre egyik példa a Pitagorasz-tétel egyfajta általánosítása: a Szábit-tétel. E szerint, ha a *245. ábra* ABC háromszögének C csúcsából rajzolt CD és CE szakaszok az AB oldallal akkora szöget zárnak be, mint az ABC háromszög C szöge, azaz a *245. ábrán* a megkörívezett szögek egyenlők, akkor

$$AC^2+BC^2=AB(AD+EB).$$

Ez azt jelenti, hogy az AC és BC oldalakkal rajzolt négyzetek területének összege az AB oldalú négyzet területénél a $GHED$ téglalap területével kisebb, ha a C szög tompaszög, és ennyivel nagyobb, ha a C szög hegyesszög. Ha viszont a C szög derékszög, akkor a Szábit-tétel átmegy a Pitagorasz-tételbe. A Szábit-tétel bizonyítása legrövidebben hasonló háromszögek segítségével történhet:

Mivel $ADC\triangle \sim ACB\triangle$, azért $AD : AC = AC : AB$, tehát: $AC^2 = AD \cdot AB$.

Mivel $BEC\triangle \sim BCA\triangle$, azért $BE : BC = BC : AB$, tehát: $BC^2 = BE \cdot AB$.

A két négyzet összege:

$$AC^2+BC^2=AB(AD+BE)$$

Szábit ibn Kurra a baráti számpárokkal (87. oldal) kapcsolatban felfedezte, hogy ha p, q és r törzsszámok, továbbá

$$p=3\cdot 2^n-1,\quad q=3\cdot 2^{n-1}-1 \quad \text{és} \quad r=9\cdot 2^{2n-1}-1$$

alakú, akkor 2^npq és 2^nr baráti számok (n természetes szám).

Az igazolás:

1. 2^nr önmagától különböző osztóinak az összegét jelöljük N-nel. Ekkor:

$$N=(1+2+2^2+\ldots+2^n)+(1+2+2^2+\ldots+2^{n-1})r=$$
$$=2^{n+1}-1+(2^n-1)r.$$

Mivel azonban

$$r=9\cdot 2^{2n-1}-1,$$

azért

$$\begin{aligned}N&=2^{n+1}-1+(2^n-1)(9\cdot 2^{2n-1}-1)=\\&=2^{n+1}-1+9\cdot 2^{3n-1}-9\cdot 2^{2n-1}-2^n+1=\\&=2^n(9\cdot 2^{2n-1}-9\cdot 2^{n-1}+1)=\\&=2^n(9\cdot 2^{2n-1}-3\cdot 2^{n-1}-6\cdot 2^{n-1}+1)=\\&=2^n(3\cdot 2^n-1)(3\cdot 2^{n-1}-1)=2^npq.\end{aligned}$$

Így 2^nr szóban forgó osztóinak az összege éppen $N=2^npq$.

2. Hasonlóképpen: jelöljük a $2^n pq$ önmagánál kisebb osztóinak az összegét M-mel. Ekkor:

$$M=(1+2+2^2+\ldots+2^n)+(1+2+2^2+\ldots+2^n)p+$$
$$+(1+2+2^2+\ldots+2^n)q+(1+2+2^2+\ldots+2^{n-1})pq=$$
$$=(2^{n+1}-1)(1+p+q)+(2^n-1)pq.$$

A p-nek és q-nak a feltételekben megszabott értékeit behelyettesítve:

$$M=(2^{n+1}-1)(1+3\cdot 2^n+3\cdot 2^{n-1}-2)+$$
$$+(2^n-1)(9\cdot 2^{2n-1}-9\cdot 2^{n-1}+1)=$$
$$=2^n(9\cdot 2^{2n-1}+9\cdot 2^n-4-9\cdot 2^n)+6\cdot 2^{n-1}=$$
$$=2^n(9\cdot 2^{2n-1}-1)-3\cdot 2^n+6\cdot 2^{n-1}=$$
$$=2^n(9\cdot 2^{2n-1}-1)=2^n r.$$

Igaz tehát, hogy $2^n pq$ és $2^n r$ baráti számpár.

A bemutatott két példa talán érzékelteti, hogy SZÁBIT IBN KURRA valóban hozzájárult a korabeli matematikához. Ezt tette azokban a munkáiban is, amelyek a henger síkmeteszeteire, a parabolaszeletre, a paraboloidszeletre, a bűvös négyzetekre és a szögharmadolásra vonatkoznak. Ugyanígy volt bátorsága ahhoz is, hogy a ptolemaioszi csillagászati elméletet egyszerűsítse egy új szféra bevezetésével, és a hipparkhoszi napéjegyenpont precessziójának elméletét is pontosítsa.

AL-BATTÁNI, ABU-ABDALLÁH MUHAMMAD IBN DZSÁBIR (ALBATENIUS, 858–929)

A csillagászat keretében művelte a trigonometriát. A mai Törökország délkeleti részén fekvő Harránban (a mezopotámiai Battanban) született, és a mai Irak területén levő Szamarra mellett halt meg. A csillagimádó szabeusok szektájához tartozott. Csillagászati megfigyeléseit Antiokhiában és Araktában végezte. Az utóbbi városról MOHAMEDES ARACTENSISnek is hívták. Egy csillagászati könyve maradt meg: *A csillagok mozgásáról.*

Az ő érdeme, hogy a görög szinuszfogalom (középponti szöghöz tartozó húr) és a hindu szinuszfogalom (egy középponti szöghöz a kétszer akkora középponti szög húrjának a fele tartozik) versengésben a hindu felfogás győzött. Már SZÁBIT IBN KURRA is használta a hindu változatot, mégis az Európába való közvetítés érdeme AL-BATTÁNIé. Annak ellenére, hogy már ismerte a többi szögfüggvényt is, könyvében mégis a szinusz segítségével elég bonyolultan fejezi ki a derékszögű háromszög egyik befogóját:

$$b=\frac{a\sin(90-\alpha)}{\sin\alpha},$$

Arab éggömb 1687-ből,
a maragai csillagvizsgálóból

ahol a és b befogók és α az a-val szembeni szög. A képletet azért érdemes idézni, mert elárulja, hogy kezdetben az egész trigonometria a szinusz szögfüggvényen alapult. Alig egy évszázad múlva ugyanez az összefüggés ABUL-VAFA könyvében már csak $a = b \cdot \operatorname{tg} \alpha$ alakban szerepel. AL-BATTÁNI foglalkozott gömbháromszögtannal is.

Könyvében található egy, a gömbháromszögtani koszinusztétellel egyenértékű törvény.

Csillagászati eredményei közé tartozik a nappálya elemeinek és az év hosszának igen pontos meghatározása. Ez utóbbi egyik alapja volt a hét évszázaddal későbbi, XIII. Gergely pápa által bevezetett naptárreformnak. Igen gondos csillagászati megfigyelő volt. Ebben jól segítették az apja által készített csillagászati eszközök. Csillagászati táblázatait Európában is sokáig használták.

ABUL-VAFA (VEFA), MUHAMMAD AL-BUZDZSÁNI (940–998)

Korának neves csillagásza és matematikusa volt. A keleti kalifátus fővárosában, Bagdadban végezte csillagászati megfigyeléseit és matematikai fordítói, kommentátori munkásságát. Lefordította és magyarázta EUKLEIDÉSZ és DIOPHANTOSZ munkáit. A magyarázatokban fellelhetjük a fordítónak is néhány eredményét. Két önálló munkája maradt ránk. Az egyik gyakorlati jellegű aritmetika, amelynek címe: *Könyv arról, ami az aritmetikából az írnokoknak és az üzletembereknek szükséges.* Jelöléseket könyvében nem alkalmazott. Annak ellenére, hogy a bonyolult számolási eljárásokat is csupán szavakkal írta le, művét a maga korában hasznosnak találták, és sokáig népszerű volt. Az első három fejezetben előrebocsátotta azokat a matematikai ismereteket, amelyekkel olvasóinak meg kellett ismerkedniük: az arány, a szorzás, osztás, általában a műveletek elvégzésének szabályait. Ezután négy részben az alkalmazásokra mutatott példákat a bérek és a kereskedelmi számítások köréből. Olvasóit intette a pontosságra. Új módszerekre tanította a pénzügyi hivatalnokokat és a földmérőket. A másik könyve: *Könyv arról, ami a kézműveseknek kell a geometriából.* Ez főleg a gyakorlatban is használható geometriai szerkesztési feladatokat tárgyal, jórészt görög művek alapján.

Trigonometriájában találjuk az első tiszta igazolását a kétszeres és a félszögekre vonatkozó addíciós formuláknak. A szinusztételt, amelyet már PTOLEMAIOSZ is használt, és amely BRAHMAGUPTÁnál is előfordul, sokan ABUL-VAFA nevéhez kapcsolják, azért a nagyon világos megfogalmazásáért, amely gömbháromszögtanában található. Van, aki a tétel felfedezését az 1000 körül működő ABU-NASZRnak tulajdonítja. Az valószínűnek látszik, hogy a szinusztételt tompaszögű háromszögre először ő bizonyította. Új szinusztáblázatot is készített 15 perces szögugrásokkal, 8 tizedes pontossággal. Alighanem ő állított össze elsőként tangenstáblázatot. Mindenesetre ő volt az első, aki mind a hat szögfüggvényt használta, definiálta azokat az egységsugarú kör segítségével, és ismerte a közöttük fennálló összefüggéseket is. Nemcsak a trigonometriában jeleskedett, hanem

szerzett érdemeket az algebrában is, főleg azzal, hogy kommentálta AL-HVÁRIZMI *Algebráját*, és görögből lefordította DIOPHANTOSZ *Arithmetikáját*.

Volt egy sok eredetiséget nem mutató csillagászati munkája is, főleg PTOLEMAIOSZ *Almagesztjére* alapozva. Ez csak töredékeiben ismeretes. ABUL-VAFA nevét őrzi a Hold egyik krátere is.

AL-KARADZSI, ABU-BAKR MUHAMMAD IBN AL-HASZAN (al-Karhi, ?–1016)

Bagdadi perzsa matematikus. Szülőhelye Karadzs. ABUL-VAFA Diophantosz-fordítása alapján dolgozott. Ennek hatása alatt nem csupán az első- és a másodfokú egyenletekkel foglalkozott, hanem – elsőként az arab matematikusok között – megoldott másodiknál magasabb fokú egyenleteket is. Észrevette, hogy az

$$ax^{2n}+bx^n+c=0$$

alakú egyenletek visszavezethetők másodfokúakra. DIOPHANTOSSZAL ellentétben AL-KARADZSI már számításba vette az irracionális megoldásokat is. Nagy ügyességgel számolt a gyökmennyiségekkel. Tudta például, hogy

$$\sqrt[3]{54}-\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{16} \quad \text{és} \quad \sqrt[3]{54}+\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{128}.$$

Ránk maradt egy nagy aritmetikai és egy szintén terjedelmes algebrai tárgyú tanulmánya. Az egyik címe: *Egy megfelelő könyv az aritmetika tudományáról*. A másikat AL-KARADZSI FAHR AL-MULK vezírnek ajánlotta, ezért lett a címe *Al-Fahri*. Mintegy 250 algebrai feladatot tartalmaz, amelyek közül sok belekerült későbbi feladatgyűjteményekbe is. Ebben a művében megpróbálkozott AL-KARHI a teljes indukció alkalmazásával is. Aritmetikai munkájában foglalkozott a sorozatok első n elemének az összegzésével, nevezetesen a négyzet- és a köbszámok esetében.

Az 1970-es években előkerült Buharában AL-KARHInak egy addig ismeretlen kéziratos műve is. Ez aritmetikán és algebrán kívül geometriát is tárgyal.

AL-BÍRÚNI, ABUR-RAIHÁN MUHAMMAD IBN AHMAD (973–1048)

Polihisztor: csillagász, matematikus, fizikus, történész, geográfus, botanikus, mineralógus, geológus, nyelvész és filozófus. Horezm külvárosában született, amely ma Üzbegisztánban található Híva néven. Kezdetben történelemmel, matematikával és csillagászattal foglalkozott. Első csillagászati megfigyeléseit 17 éves korában vé-

gezte. 25 éves volt, amikor Gurgan uralkodója udvarába rendelte, mint akkor már elismert tudóst. Onnan csak 6 év múlva tért vissza szülővárosába. 1017-ben MAHMÚD AL-GAZNAVI elfoglalta Horezmet, és ekkor több más perzsa tudóssal együtt AL-BÍRÚNI is Gaznába került.

Közbevetőleg szólva ez ugyanaz a MAHMÚD AL-GAZNAVI volt, aki FIRDAUSZInak, a világhírű perzsa költőnek annyi aranyat ígért, ahány sora lesz a költő éppen készülő fő művének, a *Sáhnámé*nak. A 35 évig tartó munkát azonban a szultán csak ezüsttel jutalmazta, amit a sértett költő szolgái között osztott szét, és MAHMÚD szultán fösvénységét kegyetlen szatírában állította pellengérre. Emiatt aztán menekülnie kellett az uralkodó haragja elől. Utolsó napjait szülővárosában, Tuszban töltötte. Az időközben jobb belátásra tért szultán megküldte neki az ígért aranyakat. Ezeknek azonban FIRDAUSZI már nem vehette hasznát. Amikor az aranyakkal érkező küldöncök áthaladtak Tusz egyik kapuján, ugyanakkor kísérték a költő holttestét a város másik kapuján keresztül örök nyugalomra.

Al-Bírúni

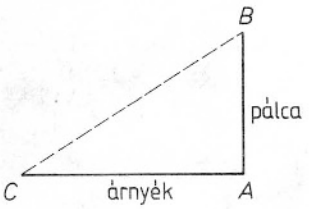
AL-BÍRÚNI nemcsak ismerte, hanem jó barátja is volt IBN SZÍNÁnak, aki Európában AVICENNA néven lett ismert. IBN SZÍNA, korának kiváló természettudósa, elsősorban orvos volt. Kitűnő emlékezőtehetségére jellemző, hogy 10 éves korában már kívülről tudta az egész *Korán*t. Jelentős hasznára volt a matematikának is azzal, hogy EUKLEIDÉSZT arabra fordította, és a fizikában, ahol csak tudta, alkalmazta a matematikát. AL-BÍRÚNI főleg filozófiai vitákat folytatott vele, legtöbbször ARISZTOTELÉSZ filozófiáját boncolgatva.

MAHMÚD AL-GAZNAVI AL-BÍRÚNIt indiai hódító hadjárataira is magával vitte, és így a tudósnak alkalma nyílott India nagy részének megismerésére. Megtanulta a szanszkrit nyelvet, és így behatolhatott a hindu kultúra minden részletébe, beleértve a vallási tanokat is. Nyitott szemmel járt, és kritikus szellemmel dolgozta fel a megismert hindu művelődési eredményeket. A hindu matematikáról, igen találóan, az volt a véleménye, hogy a közönséges köveknek és a csillogó kristályoknak a különös keveréke. Teljes leírását adta a hindu *Sziddhántá*knak és a helyi értékes 10-es számrendszernek. Ismertette BRAHMAGUPTA tételét is, amely a Hérón-tétel általánosítása (270. oldal), de ugyanakkor helyesen jegyezte meg, hogy a tétel csak húrnégyszögekre érvényes. Tőle tudjuk azt is, hogy ARKHIMÉDÉSZ már ismerte a Hérón-formulát.

Avicenna számítógépes koponyaelemzéssel rekonstruált szobra

Utazásai közben tanulmányozta India földtani szerkezetét, és sok helymeghatározást is végzett. Az első nagyobb tudományos könyve a térképészettel is foglalkozott. Ebben használta a félgömbnek a síkra való leképezését. Csillagászati eredményei közül kiemelkedik a nappálya apogeummozgásának a leírása (apogeum = földtávolpont). Nagyon világosan látta a csillagjóslás alaptalanságát, és ezt ki is fejtette az *Értekezés a csillagjóslás kezdetéről* című tanulmá-

nyában. Fontos csillagászati és geográfiai munkájának latin címe: *Canon al Masudi seu tractatus geografico-astronomicus* (A Maszúd szultán számára összeállított földrajzi-csillagászati ismeretek tárgyalása). Írt orvostudományi könyvet is, és elsőnek készített fajsúlytáblázatot. Ez a nagyon széles érdeklődésű tudós a gömbről szóló munkájában bebizonyította a gömbháromszögtani szinusztételt. A *Gnómika* című könyvében ismertette a tangens- és a kotangensfüggvényeket. Amint a mű címe elárulja, az értelmezés a gnómonhoz, a napórához kapcsolódik. A napóra lényege egy vízszintes síklapra állított pálca, amelynek árnyékáról következtettek az időre. A *246. ábrán* a *CA* árnyék hossza viszonyítva az *AB* pálca hosszához, a Nap emelkedési szögének a kotangense. Ennek reciproka az említett szög tangense. Az árnyék által meghatározott *BC* távolságnak és a pálca hosszának az aránya a koszekáns- és ennek reciproka a szinuszérték. Végül, ha a *CB* átfogót az árnyék hosszához viszonyítjuk, akkor a szekáns- és ennek reciprokaként a koszinuszfüggvényt nyerjük. A napórához kötött szögfüggvény-értelmezés kimondottan hindu-arab elképzelés. A szögfüggvények ábrázolására AL-BÍRÚNI is bevezette az egységsugarú kört. A körbe írható szabályos kilencszög szerkesztését visszavezette a



246. ábra

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$

összefüggésen keresztül az $x^3 = 3x + 1$ harmadfokú egyenlet megoldására. Ezt próbálgatásos módszerrel oldotta meg, és hattizedes pontosságú közelítő megoldást kapott ($x \approx 1{,}870\,912\,9$).

AL-BÍRÚNI kultúraközvetítő szerepe kétirányú volt. Nem csupán arab nyelvű munkáiból lehet megismerni a korabeli Indiát, hanem szanszkrit nyelvű írásai a hindukat is megismertették a görög matematikával és csillagászattal.

Alhazen

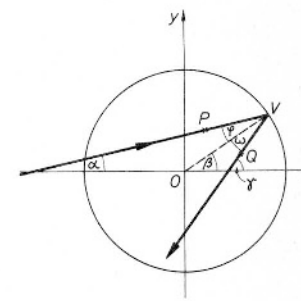
IBN AL-HAISZAM, ABU-ALI HASZAN (ALHAZEN, 965–1039?)

Korának legnagyobb arab fizikusa. A mai Irak területén fekvő Baszra városában született, élt és meghalt Kairóban. A híres fizikus szerette volna felhívni magára az egyiptomi kalifa figyelmét, hogy kutatásaihoz gondtalan életet biztosítson. Ezért merészen kijelentette, hogy képes olyan gépezetet szerkeszteni, amely a Nílus áradásait szabályozza. Amikor ez történt, akkor a Fátimidák családjának AL-HÁKIM nevű szeszélyes, sőt vérengző tagja töltötte be Egyiptomban a kalifa tisztjét. Meg is bízta ALHAZENt a Nílus szabályozásával, de kilátásba helyezte, hogy amennyiben az ígért gépet megépíteni nem tudja, lefejezteti. ALHAZEN kénytelen volt úgy tenni, mintha hozzákezdene a gép elkészítéséhez, és nagy ügyességgel sikerült 5 teljes évig húznia-halasztania a dolgot. Szerencséjére AL-HÁKIM

1021-ben meghalt. Ilyen módon nyert a fizikus ötévi ingyenes, bár korántsem gondtalan ellátást.

ALHAZEN különösen az optikában jeleskedett. A matematikában is azzal örökítette meg a nevét, hogy az egyik fénytani feladatával számos későbbi nagy matematikus is foglalkozott. Ez az ún. Alhazen-probléma az *Optikájában* szerepel: Keressük meg a gömbtükör azon pontját, ahova be kell esnie egy adott pontból kiinduló fénysugárnak, ha azt szeretnénk, hogy visszaverődése után egy másik adott ponton menjen át. Ez geometriailag egyenértékű azzal a feladattal, amely szerint egy kör síkjában két adott ponton át két olyan egyenest kell szerkesztenünk, amelyek a kör kerületén találkoznak és egyenlő szöget zárnak be a kör e pontjához tartozó sugár egyenesével.

Ha feltételezzük, hogy ALHAZEN feladatában homorú gömbtükör szerepelt, akkor legyenek az adott pontok a *247. ábra* szerint a körön belüli $P(x_1; y_1)$ és a $Q(x_2; y_2)$, a tükrön levő beesési pont pedig a $V(x_0; y_0)$. A feltétel szerint a PV fénysugár és a V ponthoz tartozó körsugár φ szöge akkora, mint a VQ fénysugár és az OV körsugár által bezárt ω szög. Jelöljük a PV egyenes irányszögét α-val, az OV irányszögét β-val és a QV irányszögét γ-val. Ekkor:



247. ábra

$$\varphi=\beta-\alpha \quad \text{és} \quad \omega=\gamma-\beta.$$

Mivel pedig a feladat szerint $\operatorname{tg}\varphi=\operatorname{tg}\omega$, azért

$$\frac{\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\alpha}=\frac{\operatorname{tg}\gamma-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\gamma\cdot\operatorname{tg}\beta}.$$

Vegyük most tekintetbe, hogy

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{y_0-y_1}{x_0-x_1}, \quad \operatorname{tg}\beta=\frac{y_0}{x_0} \quad \text{és} \quad \operatorname{tg}\gamma=\frac{y_0-y_2}{x_0-x_2},$$

és ezért:

$$\frac{\dfrac{y_0}{x_0}-\dfrac{y_0-y_1}{x_0-x_1}}{1+\dfrac{y_0}{x_0}\cdot\dfrac{y_0-y_1}{x_0-x_1}}=\frac{\dfrac{y_0-y_2}{x_0-x_2}-\dfrac{y_0}{x_0}}{1+\dfrac{y_0}{x_0}\cdot\dfrac{y_0-y_2}{x_0-x_2}},$$

vagy

$$\frac{x_0y_1-x_1y_0}{x_0^2+y_0^2-x_0x_1-y_0y_1}=\frac{x_2y_0-x_0y_2}{x_0^2+y_0^2-x_0x_2-y_0y_2}.$$

Átrendezés után:

$$(x_0^2+y_0^2)[x_0(y_1+y_2)-y_0(x_1+x_2)]+$$
$$+(y_0^2-x_0^2)(x_1y_2+x_2y_1)+2x_0y_0(x_1x_2-y_1y_2)=0.$$

Vezessük be az ismert adatokra a következő jelöléseket:

$$x_1+x_2=d, \quad y_1+y_2=c, \quad x_1y_2+x_2y_1=a \quad \text{és} \quad x_1x_2-y_1y_2=b.$$

Ekkor kapjuk az

$$a(y_0^2-x_0^2)+2bx_0y_0+(y_0^2+x_0^2)(cx_0-dy_0)=0$$

egyenletet. Mivel azonban a V pont rajta van a körön, azért az $y_0^2+x_0^2$ helyett r^2 írható, tehát egyenletünk végső alakja:

$$a(y_0^2-x_0^2)+2bx_0y_0+(cx_0-dy_0)r^2=0,$$

ami pedig egy hiperbola egyenlete. Amint már említettem, az $(x_0; y_0)$ pont rajta van a körön, tehát koordinátái ki kell hogy elégítsék a kör egyenletét is, azaz az

$$x_0^2+y_0^2=r^2$$

egyenletet. A keresendő V pont tehát e körnek és az előbbi hiperbolának a közös pontja. Általánosságban tehát a kör belsejében adott két ponthoz négy V pont tartozik. ALHAZEN megoldása természetesen nem a koordinátageometria eszközeivel született meg, hanem elemi geometriai úton, de ugyanehhez az eredményhez jutott. Megoldotta e feladatot még úgy is, hogy a P ponton átmenő fénysugár kétszeres visszaverődés után haladt át a Q ponton. E feladat különböző eseteivel számos nagy matematikus foglalkozott, köztük HUYGENS, BARROW és L'HOSPITAL is.

ALHAZEN neve szintén kapcsolatos a párhuzamossági axiómára vonatkozó vizsgálatokkal. Egyike volt azoknak, akik már igen korán úgy gondolták, hogy EUKLEIDÉSZ ötödik posztulátuma nem független a többitől, és azért igyekezett a többi axiómával bebizonyítani. ALHAZEN egy olyan négyszögből indult ki, amelyben három derékszög van (Lambert-féle négyszög), és „bebizonyította", hogy akkor a negyedik szög is derékszög. Ezt azzal „okolta" meg, hogy egy mozgó pont egy adott egyenestől mindig egyenlő távol kell hogy maradjon, ha azzal párhuzamos egyenesen mozog. Nem vette észre, hogy „bizonyítása" valójában az ötödik posztulátumnak csupán egy másik megfogalmazása, azaz arra alapozott, amit bizonyítani szeretett volna.

Ugyancsak ALHAZEN nevéhez fűződik az a számelméleti feladat, amely szerint olyan, 7-tel osztható számokat kell keresnünk, amelyeknek a 2-vel, 3-mal, 4-gyel, 5-tel, 6-tal való osztási maradéka 1. E feladat később felkeltette LEONARDO PISANO (450. oldal) érdeklődését is. ALHAZEN végzett még terület- és térfogatszámításokat is. Ezekben a határozott integrál csíráit láthatjuk meg az ARKHIMÉDÉSznél (188. oldal) tapasztalt szinten.

IBN JÚNISZ, ABUL-HASZAN ALI IBN SZAÍD ABDARRAHMÁN (979–1008)

Röviden emlékezünk meg ALHAZEN e matematikus földijéről és kortársáról, ABUL-VAFA tanítványáról, aki a trigonometriába bevezette a

$$2 \cos x \cdot \cos y = \cos (x+y) + \cos (x-y)$$

képletet, amellyel kezdetben a koszinuszok szorzatát alakították összeggé. Később azonban a logaritmus feltalálása után éppen fordítva alkalmazták. A képletet a XVI. századi első, ilyen célú alkalmazójáról Werner-formulának is nevezik. IBN JÚNISZ volt az első, aki a háromszögtani feladatok megoldásánál segédszög bevezetését használta. Készített szinusz- és tangenstáblázatot 1' szögnövekedéssel PTOLEMAIOSZ módszere szerint (264—266. oldal).

AL-BAGDÁDI, MUHAMMAD IBN ABD AL-BÁKI (?–1100)

Két tanulmánya érdemel említést. Az egyik *A maradékok kiszámításáról* szól, a másik pedig az összemérhető és az összemérhetetlen mennyiségekről. Ezekben EUKLEIDÉSZ *Elemek* című művének a X. könyvében szereplő másodfokú irracionális mennyiségeket vizsgálja, mégpedig olyan geometriai szemléltetéssel, amely a derékszögű koordináta-rendszert juttatja eszünkbe. Ilyen vonatkozásban DESCARTES előfutárának tekinthetjük.

OMAR HAJJÁM (1048–1131)

Tudós perzsa költő, matematikus, csillagász és filozófus. A neve – Hajjám – sátorkészítőt, sátorverőt jelent, azonban mint személynévnek éppen úgy nem lehet értelmet tulajdonítani, mint például a magyar Szabó névnek. Horászán perzsa tartomány Nisápur városában született. Az igen jól képzett ifjú tehetségére felfigyelt a buharai kormányzó, és HAJJÁMOT a szultán udvarába hívták. Azután a szeldzsuk törökök birodalmában élt Iszfahánban, a szultán pártfogoltjaként.

Nevét Európában 1860 táján ismerték meg. Ekkor jelentek meg híres négysoros versei, amelyekből kb. 1000 maradt meg. Ezek az elröppenő élet vidám örömeit, különösen a bor élvezetét dicsőítik. A *Rubáijját* szerzőjének Nisápurban, szülővárosában csodálatosan szép síremléket emeltek. Verseiben olykor mély misztikus áhítat, máskor pedig egyenesen a vallás elleni lázadás nyilvánul meg:

A nagy Mindenható az élet elemeit amikor kimérte,
Mulandóságot és hanyatlást ki mondja meg, belé miért tett?
Hiszen, ha jó az alkotása, akkor miért semmisíti meg?
Ha pedig rossz, amit teremtett, azért a gáncs ugyan kit érhet?

(SZERB ANTAL: *A világirodalom története.* Magvető, 1973. 159. old.)

Versei közül idézek még egyet, amely tartalmában eltér az előbb említettektől:

„Az esztendőt te emberhez szabod" –
Mondjátok, mert a naptárból töröltem
A még világra nem jött holnapot
S a már halálba hullott tegnapot.

(DIRK J. STRUIK: *A matematika rövid története.* Gondolat, 1958. 82. old.)

E vers bizonyára a szerző egyik jeles csillagászati tevékenységét örökíti meg, hogy ti. 1079-ben megreformálta a régi perzsa naptárt. Így a perzsa naptár csak minden ötezer évben tévedett egy napot, míg a mi jelenlegi Gergely-naptárunk 3330 évenként téved egy napot. A perzsák később a holdnaptárt vezették be. Költeményeinek valamikor nagy tisztelete lehetett, mert például a szúfik, az iszlamizmus egyik misztikus hajtásának a hívei (gyapjúból, szúfból készült ruhát viseltek) verseinek szimbolikus, vallásos jelleget tulajdonítottak.

A matematikus OMAR HAJJÁM egyik könyve *Az algebrai feladatok megoldásáról,* amely túlhaladja AL-HVÁRIZMI anyagát, foglalkozik a harmadfokú egyenletekkel is. Ebben az elsők között választja élesen szét a tisztán algebrai módszert a geometriai eljárástól, habár mind a kettőt tárgyalja. Az általános harmadfokú egyenletről úgy gondolta, hogy csak geometriai úton oldható meg. Gondolatmenete szerint az első- és másodfokú egyenletek síkbeli szerkesztéssel oldhatók meg, a harmadfokúak pedig már csak térbeli szerkesztéssel. Így aztán a harmadfokú egyenletek gyökeinek a megkeresésére más eljárás után kutatott, és a kúpszeleteket hívta segítségül. Egy általános harmadfokú egyenlet – mint írta – mindig

$$x^3+bx^2+cx+d=0$$

alakra hozható. Ha most x^2-et helyettesítjük $2py$-nal, akkor nyerjük a

$$2pxy+2bpy+cx+d=0$$

egyenletet, amely egy hiperbola egyenlete. A helyettesítéshez használt $x^2=2py$ viszont egy parabola egyenlete. Az eredeti egyenlet

gyökei tehát e hiperbolának és e parabolának a metszéspontjaihoz tartozó abszcisszák (mondjuk ma). Nyilvánvaló, hogy erre a mintára, ügyes helyettesítésekkel, más kúpszeletpárok metszésére is vissza lehet vezetni a harmadfokú egyenlet megoldását. OMAR HAJJÁM azonban még nem vette számításba a negatív együtthatókat, és ezért az általános harmadfokú egyenleteknek is különböző típusait tárgyalta aszerint, amint a pozitív együtthatók az egyenlet más-más oldalán jelentkeznek. Tehát például az $ax^3+bx^2=cx+d$ egyenletre más eljárást mutatott, mint az $ax^3+cx=bx^2+d$ egyenletre, ahol is az együtthatók mindig pozitív számokat jelentettek, esetleg nullát. Ugyanígy nem vette figyelembe az egyenletek negatív gyökeit sem, azaz nem olvasta le minden metszéspont „abszcisszáját". A harmadiknál magasabb fokú egyenleteket, mint például a negyedfokút is, csupán elméleti jellegűeknek tekintette, amelyek a valóságban nem léteznek, hiszen ezek előállításához, illetve ábrázolásukhoz már háromnál több dimenzió szükséges. Amint látjuk, igaz, hogy OMAR HAJJÁM már nagyon tudatosan elkülönítette a tisztán algebrai módszereket a geometriai eljárásoktól, gondolkozásában azonban ő sem tudta száműzni az algebrából a geometriát. A tisztán algebrai megoldásoknak mintegy bizonyítása volt számára a geometriai megoldás, sőt olykor az utóbbi mint egyetlen út jelentkezett. Mindenesetre az araboknál tűnt fel először az a törekvés, hogy az egyenletmegoldásban elválasszák az algebrai eljárásokat a geometriaiaktól. Ennek az igyekezetnek egyik jelentős képviselője volt OMAR HAJJÁM, aki már megkísérelte körvonalazni az algebrának, ennek a „tudományos művészetnek" a tárgyát és módszereit.

OMAR HAJJÁM érdemei közé tartozik az is, hogy az arányokat is igyekezett számoknak tekinteni, azaz törekedett a racionális szám fogalmának a kialakítására. Ezen túlmenően az irracionális számokra is adott közelítő értékeket, azaz elindította azt a folyamatot is, amelynek révén az irracionális számok később elnyerték a „szám" rangját. Ezzel nagyban hozzájárult a valós számok fogalmának a kialakításához. Tette ezt érdekes módon akkor, amikor a negatív számokat lényegében még nem tudta számoknak tekinteni.

OMAR HAJJÁM *Algebrá*jában megtaláljuk a kéttagú kifejezések négyzetét, köbét, harmadik, negyedik és magasabb hatványait, vagyis a binomiális együtthatók rendszerét, amely már ekkor Kínában a „Pascal-háromszög" elrendezésben ismeretes volt (344. oldal). Valószínűnek látszik, hogy OMAR HAJJÁM a kínaiaktól függetlenül fedezte fel a binomiális együtthatókat, mert az ő idejében Kína és Perzsia között gyakorlatilag nem volt kulturális érintkezés, hacsak arra nem gondolunk, hogy a Perzsián átvivő „selyemút" lehetővé tett bizonyos ismeretátszivárgást is.

Az algebrista költő érdeklődését nagymértékben foglalkoztatta az EUKLEIDÉSZ ötödik posztulátuma körül kialakult problémakör.

Amint azt már ALHAZENnel kapcsolatban említettem, az ötödik posztulátum vagy párhuzamossági axióma a többihez képest annyira bonyolultnak tetszett, hogy a matematikusokban az a nézet alakult ki, hogy az nem is valódi axióma, hanem a többi alapján bebizonyítható tétel. PTOLEMAIOSZ, PROKLOSZ és mások áttekinthetőbb megfogalmazásban mondták ki, helyettesítették az ötödik posztulátumot. ALHAZEN már bizonyítani akarta, mint láttuk, sikertelenül. Az első bírálója éppen OMAR HAJJÁM volt, aki ARISZTOTOTELÉSZ tekintélyére hivatkozva kifogásolta, hogy ALHAZEN a geometriába belekeverte a mozgás fogalmát. OMAR HAJJÁM a *Megjegyzések Eukleidész könyvének nehéz posztulátumához* című művében olyan négyszögből indul ki, amelynek két szembeni oldala egyenlő hosszú, és a harmadik oldalra mindkettő merőleges. Ekkor a másik két szögre, amelyeket egyenlőknek tételezett fel, három feltevés létezik: vagy mindkettő hegyesszög, vagy mindkettő tompaszög, vagy mindkettő derékszög. Így indult el a XVIII. században az olasz GIOVANNI GIROLAMO SACCHERI (1667–1733) is, akiről ezt a négyszöget Saccheri-négyszögnek hívják. OMAR HAJJÁM e négyszögben kizárta azt a két lehetőséget, hogy a meg nem rajzolt szögek hegyes- vagy tompaszögek lennének, mert – ismét ARISZTOTELÉSZre hivatkozva – két egymáshoz hajló egyenes föltétlenül metszi valahol egymást. Beleesett tehát ő is abba a hibába, amelybe ALHAZEN: nem vette észre, hogy az az állítás, amelyre hivatkozott, valójában az ötödik axióma egy más megfogalmazása, azzal egyenértékű, tehát az ötödik axiómát ő is az ötödik axiómával „bizonyította". A alapgondolat termékenységét mutatja azonban az, hogy a XVIII. században SACCHERI, de különösen JOHANN HEINRICH LAMBERT OMAR HAJJÁM, illetve ALHAZEN négyszögeinek a tanulmányozásával már jobban meg tudta közelíteni a probléma lényegét.

Az említetteken kívül ismerjük még OMAR HAJJÁM következő matematikai munkáit: *A párhuzamosok helyes értelméről és bizonyos kétségekről; Az arányokról, arányosságról és helyes értelmükről; Az arányok felállításáról és vizsgálatukról.* Ugyancsak neki tulajdonítják *Az arany és az ezüst meghatározásának a módja az ezekből álló ötvözetben* című munkát, amelyben ARKHIMÉDÉSZ törvénye nyert alkalmazást.

OMAR HAJJÁM halálának idején, a XII. században már nagyon zavaros politikai és társadalmi viszonyok között folyt az élet a távol-keleti arab világban. Vallási villongások, különböző hatalmi törekvések, szekták kialakulása korántsem kedveztek a tudományok fejlődésének. A térség életére erősen rányomta bélyegét a mongol hódítás, de azért ennek a korszaknak is megvoltak a maga tagadhatatlanul tehetséges arab csillagászai, matematikusai.

NÁSZIRADDÍN AT-TÚSZI ABU-DZSAAFAR MUHAMMAD IBN MUHAMMAD (1201–1274)

Nászíraddín at-Túszi

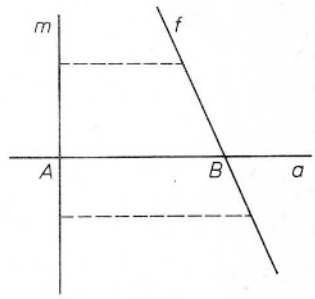
A mai Irán területén, az akkori Horászán tartomány fővárosában Tuszban született. Iskoláit is itt végezte. Ezekre a tényekre utal nevében az at-Túszi jelző. Egy ideig Bagdadban is működött. 1235 és 1256 között az asszaszinok Alamut nevű erődjében élt. Asszaszin egy fanatikus mohamedán szektának a neve, amelynek a jelentése: hasisevő. Ezek egyik ága, az iszmáilita szekta, Perzsia egy részét hajtotta uralma alá, és Alamut ennek a területnek volt a központja. Az asszaszinok céljaik elérésére erőszakos eszközöket alkalmaztak, és nem riadtak vissza az orgyilkosságtól sem. E kegyetlen módszerük annyira jellemző volt, hogy az asszaszin szó számos nyelvben orgyilkost jelent, például az angolban is. Alamutot és a szekta többi sziklavárát a mongolok vették be, akik az asszaszinokat jórészt kiirtották, utolsó főnöküket 1256-ban kivégezték. Ekkor került NÁSZIRADDÍN DZSINGISZ kán unokájának, HULAGU kánnak, az akkori mongol fejedelemnek udvarába. A kán, felismerve képességeit, személyi tanácsadójává tette, és számára Maraga városban, a mai Tabriz mellett, csodálatos csillagvizsgálót építtetett. NÁSZIRADDÍN irányítása alatt ez az obszervatórium tekintélyes természettudományos központtá terebélyesedett, amely támogatta és összefogta az akkori Kelet tudósait, és működési lehetőséget biztosított nekik. Ez az intézet pótolta a mongolok által feldúlt bagdadi Tudomány Házát. A maragai csillagvizsgáló könyvtárában mintegy 400 000 kézirat állt a kutató tudósok rendelkezésére. NÁSZIRADDÍN összegyűjtötte és táblázatba foglalta azokat a csillagászati megfigyeléseket, amelyeket az intézet alapításától, tehát 1259-től tettek. Ez a táblázat tartalmazza a megfigyelési eredményeket egészen 1271-ig. Segítségével meg lehetett határozni a Nap és a bolygók helyzetét. Ezt egészítette ki egy nagy csillagkatalógus, az Elkan-katalógus. Személyes érdeme még NÁSZIRADDÍNnak, hogy nagyon pontosan meghatározta a Föld precesszióját, amelyet 51,4 másodpercnek talált. Természetesnek látszik, hogy mint csillagász, a trigonometriával is foglalkozott. Használta mind a hat szögfüggvényt, és megoldott sok sík- és gömbtrigonometriai feladatot. A szinusz- és a tangensfüggvényekre egyperces szögváltozásokkal hatjegyű táblázatot szerkesztett. Legnagyobb érdeme a trigonometria terén az, hogy elsőként kezelte a trigonometriát a csillagászattól elválasztott, önálló matematikai területként, és tárgyalta rendszeres felépítésben mind a sík-, mind a gömbi trigonometriát. Sajnálatos, hogy ez a szemlélete elszigetelt maradt egészen REGIOMONTANUS felléptéig, mert műveit és eredményeit Nyugaton csak nagyon későn ismerték meg JOHN WALLIS (1616–1703) fordítása alapján. Valószínűleg ebből a fordításból értesült SACCHERI is NÁSZIRADDÍN azon próbálkozásáról,

المقالة العشرون وهي مائة وتسعة

صدر اقسام الكم المتصل خمسة الخط والسطح والجسم التعليمي والمكان والزمان ويقال لها الاعظام فان نسب احد المتجانسين منها الي الآخر من جنسه او قدر احدهما بالاخر يقال له المقدار ۞ والمقادير المشتركه خطوطا كانت او سطوحا او جسما وغيرها هي التي يمكن ان يقدرها مقدار واحد ۞ وغير المشتركه اي المتباينة هي التي لا يمكن ان يقدرها مقدار واحد ۞ والاشتراك في المقادير يخالف الاشتراك في الاعداد فان الاعداد المشتركة هي التي يعدها عدد واحد لا ان يعدها الواحد وذلك لان الواحد في المقادير مقدار والواحد في الاعداد ليس بعدد ۞ والخط طول بالعقل ومربع بالقوة اي يمكن ان يحدث منه مربع ۞ الخط المشتركه في القوة هي التي يمكن ان يقدر مربعاتها سطح واحد ۞ والمتباينة في القوة هي الخطوط التي لا يمكن ان يقدر مربعاتها سطح واحد ۞ واذا وضع مقدار محدود خطا كان او سطحا او جسما او غيرها من المقادير لتقدير ساير المقادير التي من جنسه يصير بوحدته منطقا وكل مقدار قدريه او بجزئه او بجزء جزئه وقع عليه اسم العدد التقديريه ويصير بذلك منطقا ۞ فكل مقدار نسب الي المقدار الموضوع نسبة عدد الي عدد فهو منطق وما نسب اليه من المقادير ۞ ولا تكون نسبته اليه نسبة عدد الي عدد فهو اصم اي لم يسمع كنسبته اليه اسم ينطق به بل ينطق بطريق الحدود لحدر ثلثه وحدر خمسة ومثل ما يقال حدر خمسة ثلث حدر خمسة واربعين وحدر واحد وربع نصف حدر الخمسة وانما يصدق علي المنسوب النصف والثلث وعلي المنسوب اليه الواحد بل [illegible] يصرحه عن حدر الاصم اذا لبس هذا بواسطة اضافته الي المقدار الموضوع الذي هذه الحدور بالنسبة اليه اصم ۞ فاذا وضع خط محدود لتقدير الخطوط به فهي منطق ۞ وكل خط قدر به او بجزئه او بجزء جزئه فهو منطق ايضا ۞ وكل خط لا يمكن ان يقدر به ولا بجزئه ولا بجزء جزئه فهو اصم ۞ ومربع ذلك الخط الموضوع ايضا منطق ۞ وكل سطح يقدر به او بجزئه او بجزء جزئه فهو منطق ۞ وكل سطح لا يمكن ان يقدر به ولا بجزئه ولا بجزء جزئه ۞ ومكعب ذلك الخط الموضوع منطق ايضا ۞ وكل جسم يقدر به او بجزئه او بجزء جزئه فهو منطق ۞ وكل جسم لا يمكن ان يقدر به ولا بجزئه ولا بجزء جزئه فهو اصم ۞ ويتبين في هذه المقالة انه اذا وضع خط محدود

Nászirаddín könyvében
a Sztoikheia ismertetése

amelynek célja az ötödik posztulátum bebizonyítása volt. A párhuzamossági axiómával összefüggő vizsgálatok tehát PROKLOSZon, ALHAZENen, OMAR HAJJÁMon és NÁSZIRADDÍNon keresztül WALLIS közvetítésével jutottak el LAMBERThez és SACCHERIhez, hogy végül is BOLYAI JÁNOS és NYIKOLAJ IVANOVICS LOBACSEVSZKIJ (1792–1856) rátaláljanak a probléma teljes megoldására. Ezen a területen AT-TÚSZI is csak addig jutott el, hogy megállapítsa: Ha egy m egyenes merőleges az A pontban az a egyenesre, és egy f egyenes ferde az a egyeneshez képest a B pontban, akkor az m és f egyenes közötti, a-val párhuzamos szakaszok kisebbek AB-nél, ha azon az oldalon vannak, amelyen az (a, f) szög tompaszög *(248. ábra)*. Amint látható, ez sem bizonyítás, hanem az ötödikkel egyenértékű axióma.

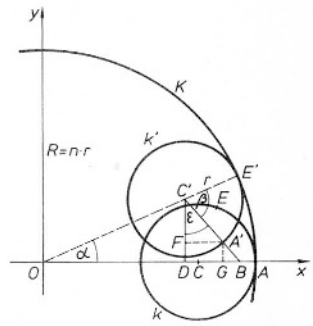


248. ábra

Jó összefoglaló képet nyerhetünk AT-TÚSZI matematikai munkásságáról, ha átlapozzuk a *Kitáb as-sakl al-kita* (Értekezés a teljes négyoldalról, 1260) című könyvét. Ennek első részében kifejti az arányok elméletét, de EUDOXOSZtól és általában a görögöktől eltérően az arányokat ő is, mint OMAR HAJJÁM, számoknak tekinti. A második részben fejti ki a teljes négyoldalak (teljes négyszögek) elméletét. A harmadik rész trigonometriai feladatok megoldási eljárásait tárgyalja mind a síkban, mind a gömbfelületen. A negyedik, befejező részben megmutatja, hogyan lehet egy gömbháromszög oldalait meghatározni a szögei alapján. Feltétlenül érdemei közé tartozik, hogy lefordította, közvetítette az arab világ számára EUKLEIDÉSZ *Sztoikheiá*ját, PTOLEMAIOSZ *Almagesztj*ét és ARKHIMÉDÉSZ műveit. A szolgai fordításokon túl azonban nemcsak magyarázatokkal látta el az említett műveket, hanem tételeiket olykor bizonyította, kiegészítette, általánosította. Ezek között kell említenünk a róla elnevezett Nászirаddín-tételt, amely a mai megfogalmazás szerint így szól: Ha egy kör csúszás nélkül gördül egy másik, kétszer akkora sugarú kör belsejében annak kerületén, akkor a kisebbik kör bármelyik pontja a nagyobb kör egyik átmérőjét írja le.

A Nászirаddín-tételt beláthatjuk a következőképpen: Gördüljön csúszásmentesen az r sugarú k kör az nr sugarú K kör belsejében a K körvonalon *(249. ábra)*. α szögelfordulás után jusson a k kör centruma a C' pontba. Ekkor C' az elgördült k' kör középpontja. Legyenek C' koordinátái az $(x; y)$ derékszögű koordináta-rendszerben x_1 és y_1. Keressük a gördülés alatti A pontok mértani helyét. Evégett határozzuk meg a mértani hely tetszőleges A' pontjának x és y koordinátái közötti összefüggést, azaz a mértani hely egyenletét!

A feltételek szerint tehát a C pont tetszőleges α szögelfordulása után a k kör AE íve legördült a K kör AE' ívén, és a *249. ábra* szerint:



249. ábra

$$\widehat{A'E'} = \widehat{AE} = \widehat{AE'} = nr\alpha = r(n\alpha), \quad \text{azaz} \quad \beta = n\alpha.$$

Így az

$$OC'B\sphericalangle = \pi - \beta = \pi - n\alpha,$$

tehát

$$\varepsilon = \pi - \beta - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{\pi}{2} - (n-1)\alpha.$$

Az ε felhasználásával az A' pont abszcisszája:

$$x = OG = OD + DG = OD + FA' = (n-1)r\cos\alpha + r\sin\varepsilon =$$
$$= (n-1)r\cos\alpha + r\cos(n-1)\alpha.$$
$$x = r[(n-1)\cos\alpha + \cos(n-1)\alpha].$$

Hasonló módon az A' pont ordinátája:

$$y = A'G = C'D - C'F = (n-1)r\sin\alpha - r\cos\varepsilon =$$
$$= (n-1)r\sin\alpha - r\sin(n-1)\alpha.$$
$$y = r[(n-1)\sin\alpha - \sin(n-1)\alpha].$$

A fentiek szerint a keresett mértani hely paraméteres egyenletrendszere:

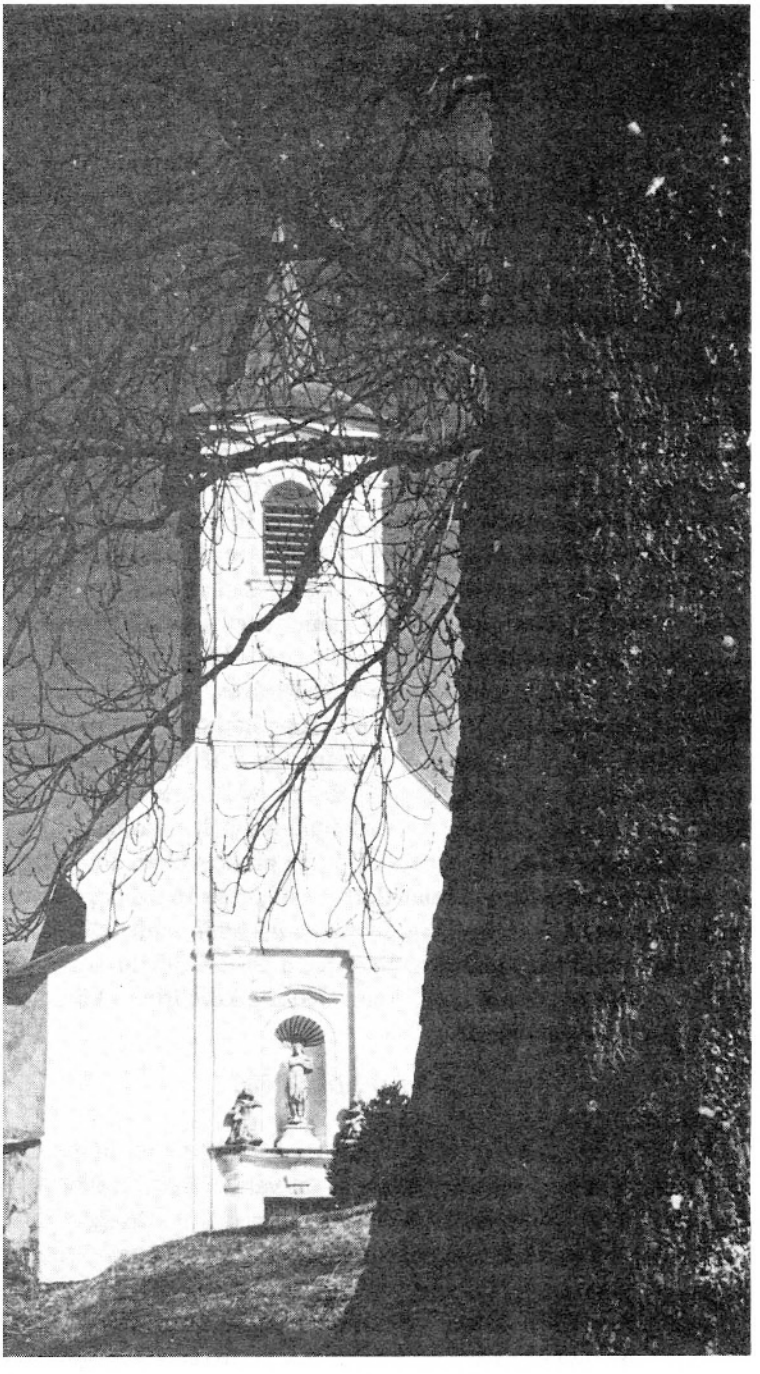
$$x = r[(n-1)\cos\alpha + \cos(n-1)\alpha]$$
$$y = r[(n-1)\sin\alpha - \sin(n-1)\alpha].$$

A Nászíraddín-tétel szerint $n=2$, tehát $x = 2r\cos\alpha$ és $y=0$. A mozgó A pont ordinátája tehát állandóan nulla, az abszcisszája pedig felveszi a $[2r, -2r]$ intervallum minden értékét. A gördülő k kör A pontja tehát valóban a K kör $2AO$ átmérőjét írja le.

Érthető, hogy e tételt, amely szerint tehát két körmozgás eredőjeként egyenes vonalú mozgás is kapható, éppen a nagy csillagász, KOPERNIKUSZ (1473–1543) általánosította.

Azért, hogy a NÁSZÍRADDÍN munkásságáról vázolt kép teljesebb legyen, megemlítjük, hogy eredményesen foglalkozott optikával és filozófiával is.

Habár a VIII. században elkezdődött az a folyamat, amely az Arab Birodalom kisebb részekre, majd országokra bomlását okozta, mégis a sokszor nagyon zavaros politikai, vallási és társadalmi konfliktusok ellenére többször kialakult – rendszerint egy-egy tudományszerető uralkodó körül – olyan tudományos központ, amely folytatta az elődök által abbahagyott munkát, amely képes volt nemcsak megérteni és átvenni a tudományos eredményeket, hanem azokhoz lényegesen hozzá is tudott járulni. Ilyen kulturális centrum alakult ki a mongol hódító, TAMERLAN unokája, a tudós csillagász és matematikus MUHAMMAD GURAGAN ULUGBEK (1394–1449) pártfogásával Szamarkandban is. A centrum központja itt is a nagy csillagvizsgáló volt, amelynek hatalmas megfigyelőívei ma is láthatók. Ebben a szamarkandi obszervatóriumban állították össze az ún. Guragan csillagászati táblázatot az átvizsgált és kijavított



A nagyvázsonyi templom
(XV. sz.;
Csák Miklós felvétele)

ptolemaioszi csillagkatalógus alapján. E táblázatot használta 200 évvel később TYCHO BRAHE is. Sajnos ez a XV. századi imponáló tudományos iskola a hanyatló középkori arab világ utolsó nagy kulturális demonstrációja volt, és ezt állapíthatjuk meg az arab matematikáról is. ULUGBEK pártfogását élvezte a Szamarkandba sereglő tudósok között az utolsó nagy perzsa matematikus és csillagász AL-KÁSI is.

AL-KÁSI DZSAMSID GIJÁSZADDÍN (?–1429)

Mint neve is mutatja, szülőhelye az iráni Kásán. Különösen nagy jártasságra tett szert a numerikus számolás területén. Ez felölelte a harmadfokú egyenleteknek iterációval való megoldását, a „Hornermódszer" alkalmazását, a tetszőleges természetesszám-kitevővel való gyökvonást lineáris interpolációval, a π 16 tizedes pontossággal való meghatározását és trigonometriai táblázatok készítését.

1427-ben jelent meg *Az aritmetika kulcsa* című könyve. Ebben AL-KÁSI ismertette a tizedes törteket, amelyeket saját találmányának tekintett, bár lehetséges, hogy legalább az ötlet Kínából származott (308. oldal). Mindenesetre könyve az első írásos ismertetés a tizedes törtekkel való számolás szabályairól. Kár, hogy ezt a könyvet nagyon későn ismerték meg Európában, így a felfedezés feledésbe merült, és ez a számfajta csak 1585-ben vált ismeretessé SIMON STEVIN *La disme* (A tizedes egység) című munkája nyomán.

AL-KÁSI arra volt a legbüszkébb, hogy pontosabban adta meg a 2π közelítő tizedes törtjét, mint előtte bárki, azaz 16 tizedes pontossággal. Ezt úgy érte el, hogy az *Értekezés a körről* című, 1427 körül megjelent tanulmányában kiszámította a $3 \cdot 2^{28}$ oldalú szabályos sokszög kerületét, és ezt elosztotta a sokszög köré írható kör sugarával. Ilyen módon nyerte a

$$2\pi \approx 6{,}283\ 185\ 307\ 179\ 586\ 5$$

eredményt.

Az érdekesség kedvéért itt jegyzem meg, hogy sok olyan mondóka létezik, amely megkönnyíti a π szám valamelyik közelítő értékének a megjegyzését. Ezek közül idézek egy angol szöveget:

How I want a drink, alcoholic of course, after the heavy lectures involving quantum mechanics. (Mennyire kívánok egy italt, természetesen alkoholt, a nehéz kvantummechanikai előadások után.) Az angol mondat egymás utáni szavainak betűszáma adja rendre a π közelítő tizedes törtjének a számjegyeit: $\pi \approx 3{,}141\ 592\ 653\ 589\ 79$.

ULUGBEK trigonometriai táblázatokat is készített. Ezek összeállításánál felhasználta AL-KÁSI azon eredményét, amelyet a sin 1° számára kapott. AL-KÁSI abból indult ki, hogy az egyenlő oldalú háromszögből ismeri sin 60° értékét, a szabályos tízszög egy közép-

ponti háromszögéből pedig a sin 72°-ét is. E két érték segítségével meghatározta a 12° szinuszát. Ehhez felhasználta a Ptolemaiosz-tételt (264. oldal). A sin 12°-ból, ugyancsak a Ptolemaiosz-tétel igénybevételével, már ki tudta számítani a 6°, abból pedig a 3° szinuszát. A legnagyobb teljesítménye azonban ezután következett, amikor a sin 3° értékéből meghatározta a sin 1° értékét. Erre egy ügyes iterációs eljárást talált, amelyet kissé leegyszerűsítve ismertetek. Az eljárás alapja a $\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$ képlet, vagy hogy csupa pozitív együttható szerepeljen:

$$\sin^3 \alpha + 0{,}25 \sin 3\alpha = 0{,}75 \sin \alpha.$$

Jelöljük sin α-t x betűvel, és legyen $\alpha = 1°$, továbbá a középiskolás szögfüggvénytáblázatból olvassuk ki sin 3° értékét, ami 0,0523. Ebben a speciális esetben egyenletünk így alakult:

$$x^3 + 0{,}013\,075 = 0{,}75x.$$

Foglalkozzunk ezután az ugyanilyen alakú

$$x^3 + p = qx$$

harmadfokú egyenlettel, amelyről tudjuk, hogy p és x azonos nagyságrendben igen kicsi szám. Rendezés után:

$$x = \frac{x^3 + p}{q};$$

Az előbbi kikötés szerint p mellett az x^3 elhanyagolható, azért jogos, ha első megközelítésben az egyenlet gyökét $\frac{p}{q}$-nak vesszük. Legyen tehát

$$x_1 = \frac{p}{q}, \quad \text{és így} \quad x = x_1 + y,$$

ahol y az x_1-hez képest kicsi. Az eredeti egyenlet szerint:

$$x_1 + y = \frac{(x_1 + y)^3 + p}{q}.$$

Mivel y az x_1-nél sokkal kisebb, azért hanyagoljuk el a jobb oldal számlálójában az y-os tagokat. Ekkor második és az előbbinél jobb megközelítésben x számára kapjuk az

$$x_2 = \frac{x_1^3 + p}{q}$$

közelítő értéket, amelyre nézve $x = x_2 + z$, ahol z x_2-nél jóval kisebb.

Az eredeti egyenlet szerint tehát:

$$x_2 + z = \frac{(x_2 + z)^3 + p}{q}.$$

Lévén a z az x_2 mellett kicsiny, megint elhanyagolhatjuk a jobb oldal számlálójában a z-s tagokat, és így x számára újabb, az előbbieknél jobb közelítést kapunk:

$$x_3=\frac{x_2^3+p}{q}.$$

A most vázolt eljárást ismételve nyerjük a mind jobban közelítő értékek következő sorozatát:

$$x_1=\frac{p}{q}$$

$$x_2=\frac{x_1^3+p}{q}$$

$$x_3=\frac{x_2^3+p}{q}$$

$$\vdots$$

$$x=\frac{x_{n-1}^3+p}{q},$$

ahol x_n mind jobban megközelíti az egyenlet gyökét, ha teljesül, mint ahogy a mi konkrét egyenletünknél teljesül, hogy x^3 sokkal kisebb x-nél.

Alkalmazzuk ezt az ismétléses eljárást a mi egyenletünkre. Tekintve, hogy az általunk használt táblázat, amelyből a sin 3° értékét vettük, négyjegyű, azért a megfelelő kerekítéssel egyenletünkben $p=0{,}0131$ és $q=0{,}75$. Ezekkel az adatokkal számolva már az iteráció második lépése után megkapjuk az

$$x=\sin 1^\circ\approx 0{,}017\,473\,7$$

értéket, ami négy tizedesre kerekítve megegyezik a táblázatunkban feltüntetett, $\sin 1^\circ\approx 0{,}0175$ közelítő értékkel.

Al-Kási nálunk pontosabban számolt. Az ő kiinduló harmadfokú egyenlete az

$$x^3+0{;}785\,039\,343\,364\,400\,6=45x$$

volt, amely kétféleképpen tér el a példaképpen bemutatott egyenlettől. Al-Kási szögfüggvényértékei nem az egységsugarú, hanem a 60 egység sugarú körre vonatkoznak. Ez a $\frac{p}{q}$ értékét nem másítja meg. Ezenkívül azonban Al-Kási a sin 3° értékét 16 tizedesjegy pontossággal határozta meg. Az erre alapozott szögfüggvénytani táblázatok 9 jegyre megbízhatóak voltak.

Ugyancsak ügyesen, tulajdonképpen lineáris interpolációval ha-

tározta meg AL-KÁSI az $y=\sqrt[n]{x}$ közelítő értékét, a következőképpen:

Legyen x értéke a t^n és a $(t+1)^n$ között, azaz

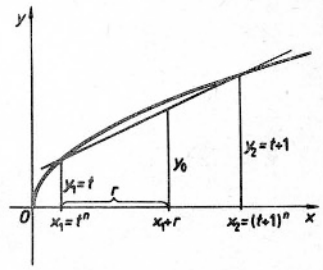
$$x_1=t^n<x<(t+1)^n=x_2.$$

Az x_1 és x_2 „abszcisszáknak" megfelelő „ordinátákat" jelöljük y_1-gyel és y_2-vel *(250. ábra)*, tehát:

Ha $x=x_1=t^n$, akkor $y=y_1=t$, és ha $x=x_2=(t+1)^n$, akkor $y=y_2=t+1$.

Ha most az $y=\sqrt[n]{x}$ görbéjén feltüntetjük az $(x_1; y_1)$ és $(x_2; y_2)$ pontokon átmenő szelőt, akkor ennek egyenlete:

$$y=y_1+\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1).$$



250. ábra

Vegyük most tekintetbe, hogy $x=x_1+r=t^n+r$, ahol $r>0$ és $t^n+r<(t+1)^n$.

Ha behelyettesítjük a szelő egyenletébe az x helyett a (t^n+r) értéket, valamint az x_1, x_2, y_1 és y_2 fentebbi kifejezéseit, akkor természetesen az egyenesnek az x_1+r abszcisszájú pontjához tartozó y_0 ordinátát kapjuk meg. Ez pedig jó közelítéssel megadja az ugyanezen abszcisszához tartozó $y=\sqrt[n]{x}$ keresett értéket. Így:

$$y\approx y_0=t+\frac{t+1-t}{(t+1)^n-t^n}(t^n+r-t^n),$$

azaz

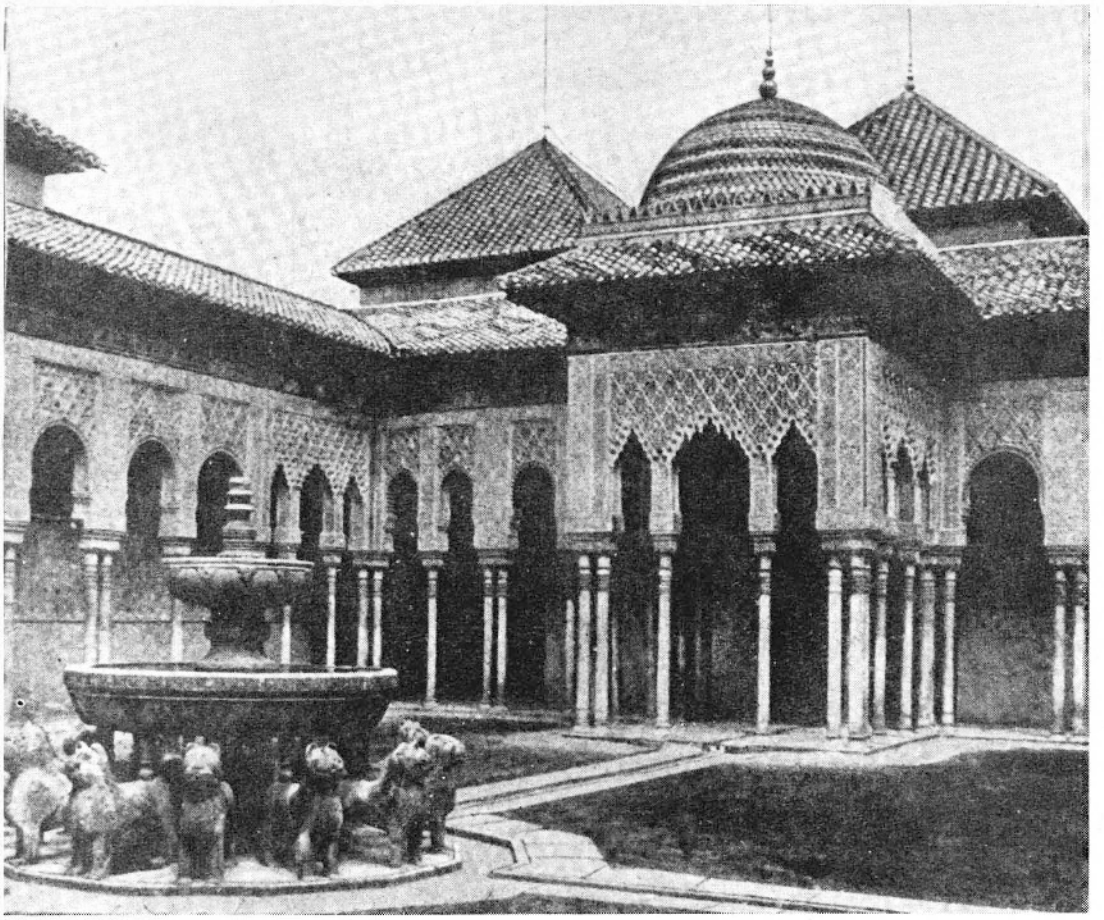
$$y\approx t+\frac{r}{(t+1)^n-t^n},$$

amint azt AL-KÁSI is megállapította.

AL-KÁSI munkáiban szintén megjelenik a „Pascal-háromszög", jeléül annak, hogy ő is ismerte a binomiális tételt pozitív egész kitevőkre.

Mielőtt az utolsó nagy arab matematikussal búcsút mondanánk a középkori arab matematikának, megemlékezünk röviden még két olyan tudósról, akik a valamikori nagy Arab Birodalomnak a nyugati szélén éltek. Az egyik ezek közül AZ-ZARKÁLI (AZARQUEL, 1029–1100), aki a mai Spanyolország déli részén fekvő Toledóban és Córdobában működött. Korának legkiválóbb megfigyelő csillagásza volt. Ő állította össze a híres toledói bolygótáblázatot, és ezzel alapot teremtett az Alfonz-féle táblázatoknak. Sokáig használták trigonometriai táblázatait is.

E megemlékezést teszem főleg azért, hogy felhívjam a figyelmet a Córdobai Kalifátusra. Területén, Córdobában, Granadában, Toledóban és Sevillában élénk kereskedelmi és kulturális centrumok alakultak ki. Az ottani egyetemeken számos európai is tanult. Córdoba



Az oroszlánok udvara a granadai Alhambrából (XIV. sz.)

könyvtára II. AL-HAKAM uralkodása (961–978) alatt egyesek szerint 400 000, más források alapján 600 000 kötetet őrzött: szépirodalmi és tudományos műveket. A X. és a XI. században Európában a tudományosság és a művészetek hordozója a mohamedán Spanyolország volt. Ez nem jelentéktelen befolyást gyakorolt a későbbi nyugat-európai kultúra kibontakozására.

Egy másik spanyolországi arab tudós ABUL-HASZAN ALI IBN MUHAMMAD AL-KALASZÁDI (?–1486). Mauritániai matematikus volt. Először Granadában, aztán pedig Tuniszban dolgozott. Írt egy matematikai művet *A gobár tudomány rejtelmeinek a feltárása* címen, aritmetikai és algebrai tartalommal. Új, önálló eredményei nem voltak, mégis említésre érdemes, mert megkísérelte az algebrai szimbólumok bevezetését. Ez abban állt, hogy a megfelelő szónak a kezdőbetűjét írta le. Így az egyenletben az ismeretlent az együttható fölé írt *s* betű (sai = dolog), a második hatványát az *m* betű (murabba = négyzet) és a harmadikat a *k* betű (ka'b) jelölte.

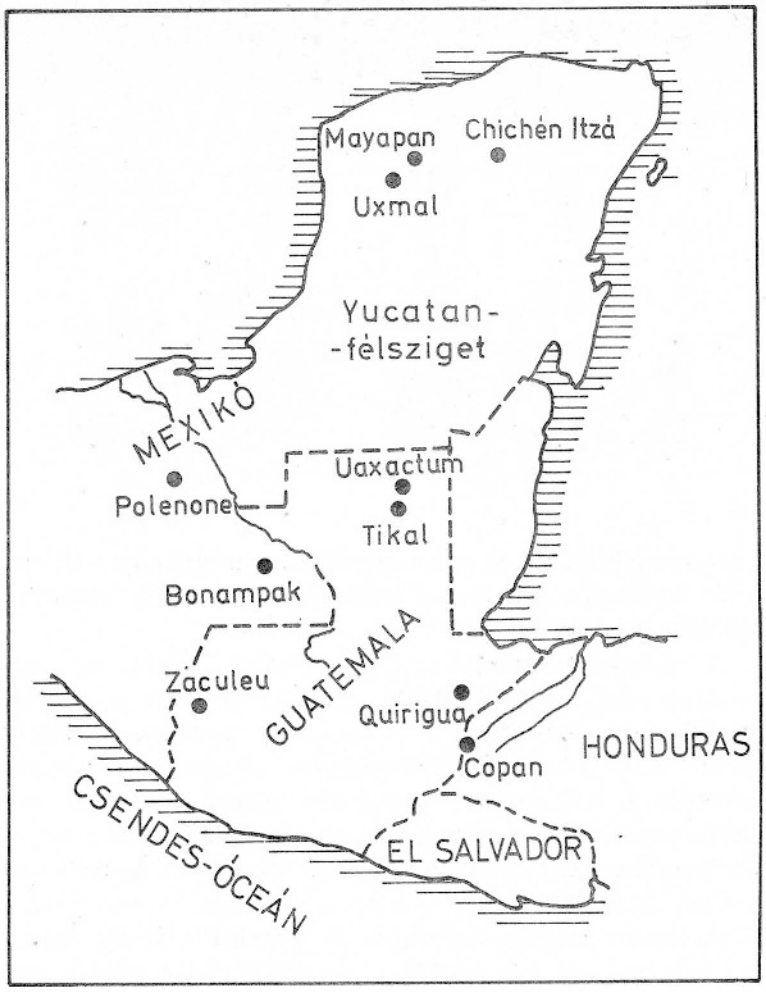
A sajátos arab matematika kimondottan algebrai jellegű volt. Ennek az algebrának jellemzője, hogy geometriai módszerekkel bizonyít, és numerikus példákkal szemléltet. Az előbbi a görög, az utóbbi a hindu hatásra utal. Az arab algebrában a görög elméleti geometriai és a hindu-kínai gyakorlatias irányzatok összeolvadását láthatjuk. Ez eredményezte a trigonometriában a numerikus módszerek kifejlesztését és az algebrában az aritmetikai alapozást. Az arab matematika EUKLEIDÉSZ *Sztoikheiájának* tanulmányozásából, értelmezéséből nőtt ki, legalábbis részben. Ezt a művet a VIII. és a XV. század között mintegy 50 arab matematikus fordította le. Természetesnek tűnik tehát, hogy EUKLEIDÉSZ fő problémái az arab matematikában továbbéltek. Ezek közé tartozik az arányelmélet, az irracionalitás és a párhuzamossági posztulátum kérdése.

A MAJÁK

A MAJA SZÁMÍRÁS

Az eddigiek folyamán biztosan nem estünk a túlságos Európacentrikus szemlélet bűnébe, hiszen szó volt ugyan Dél-Európáról, de mellette, sőt előtte beszéltünk még az ázsiai és afrikai kultúrák bennünket érdeklő történetéről. A következő lépésünk még mindig nem Nyugat-Európába vezet, hanem a tőlünk távoli földrészre, Amerikába. Ez az egyetlen olyan kontinens, ahol nem találták meg az ősember nyomát. Ezért mai tudásunk szerint úgy gondoljuk, hogy benépesedése mintegy 30 000–50 000 évvel ezelőtt bevándorlással történhetett. Ekkor állt elő kétszer is olyan helyzet, amelynél a nagyfokú eljegesedés következtében a tenger szintje olykor 100 m-rel is csökkent, és így száraz lábbal át lehetett jutni a Bering-szoroson át az amerikai kontinensre. A hideg elől délebbre menekülő állatok nyomában volt a vadászó ember is. Az Amerikába átkerült

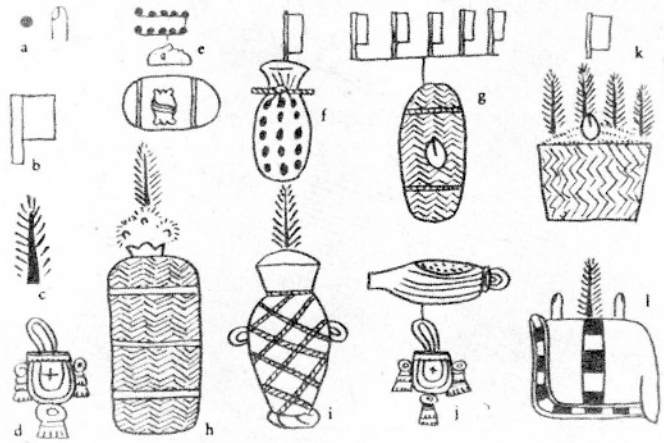
Kőfej az olmék korból



251. ábra

embercsoportok a tavak és folyók mentén mind délebbre vonultak. Ezt az amerikai északi–déli irányú népvándorlást siettette a később érkezők nyomása is. Tudomásunk szerint Közép-Amerikában, azon a területen, amely most bennünket érdekel – pontosabban Mexikó déli részén, a mai Guatemalában és Honduras északi felén –, az első emberi települések kb. 15 000–20 000 évvel ezelőtt keletkeztek. Érdeklődésünk azért fordult most éppen erre, az Észak-Amerikát Dél-Amerikával összekötő földszorosra, mert itt alakult ki az amerikai földrész első és a II–IX. században a legfejlettebb kultúrája.

Ez a kultúra az i. e. 3000–2000 év táján kezdett kibontakozni teljesen önálló módon. Ekkor fedezték fel az itt szétszórtan élő olmék indiánok, hogy miként lehet a trópusi őserdőkkel borított, nedves talajon, az erdőégetéssel szabaddá tett földön kukoricát termelni. Civilizációjuk magas szintjét jelzik azok a 3–4 m magas, egyetlen



Az azték „képszámírás":
a) 1 (pont vagy ujj);
b) 20 (zászló);
c) 400 (haj);
d) 8000 (tarsoly);
e) 10 (maszk);
f) 20 (erszény);
g) 200 (kakaóbabköteg);
h) 400 (gyapotköteg);
i) 400 (szirupos edény);
j) 8000 (levélköteg táskával);
k) 20 (kosár kakaóbabbal);
l) 402 (gyapjútakaró két ujjal)

bazalttömbből faragott, óriási emberfejek, amelyek ezen a kő nem látta és kereket nem ismerő vidéken kivívják a ma emberének döbbent meglepetését.

Az olmék civilizáció az i. sz. 300. évig tartott. Ekkor jelentek meg a színen a maja indiánok. Valahonnan északról jöttek, és megérkezésükkor már meglehetősen magas kultúra hordozói voltak. Ismerték a pontos naptárkészítés titkát, és ez a tudás vált a kezükben hatalommá. A fölégetett őserdő talajába ugyanis szinte napra pontosan kellett elvetni a szemet, hogy még kicsírázása előtt el ne rohadjon a tocsogós talajban. A talaj termőképességét még azzal is fokozták, hogy csatornákat építettek a felesleges víz elvezetésére. Ilyen módon hatalmas mértékben megnövelték a mezőgazdasági termelés hozamát. A papság irányítása alatt egy szinte teljesen elkülönült földműves osztály termelte a kukoricát, krumplit, babot, tököt és maniókát. A bő termés feleslegéből az őserdők mélyén népes városok épültek. A nagy maja városok – Tikal, Uaxactún, Copán, Quirigua, Palenque, Uxmal, Mayapán, Chichén Itzá – magas szintű kultúrája magába ötvözte és továbbfejlesztette a környező indián törzsek kulturális és civilizációs vívmányait. Erre mutat az is, hogy például az olmék és a maja írásjelek, különösen a számírás, nagyon hasonló volt.

A maják nem alkottak egységes államot, hanem szervezetileg egymástól független városállamokban éltek. Gazdagságukat tanúsítják a mindent ellepő őserdőből kiszabadított hatalmas templompiramisok, paloták és a faragott feliratokkal ellepett kőoszlopok. Éppen ezeknek az építményeknek a hieroglifái azok, amelyek a mai napig is titokban tartják a még kőemlékeiben is csodálatos nép történelmét. A maják ma élő utódai már nem ismerik sem őseik írását, sem nyelvét.

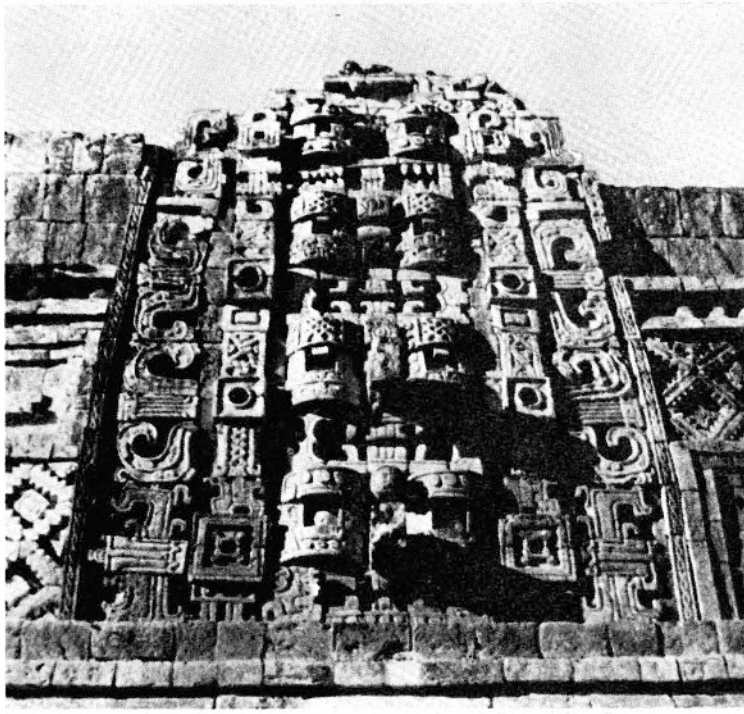
A drezdai maja kézirat „Venus-táblázata", a Venus 3 évszázadra vonatkozó adataival

Valamikor a szó szoros értelmében létezett maja irodalom. A maja kéziratokat, könyveket azonban nagyon alaposan megsemmisítette az emberi butaság. Amikor a XVI. századi spanyol hódítók uralmukba kerítették a Yucatán-félszigetet, akkor az erőszakos hittérítés, legalábbis formailag, kereszténnyé tette az indiánokat, köztük a majákat is. Amikor azonban híre járt, hogy a „megtértek" közül sokan titokban hűek maradtak régi hitükhöz, akkor az inkvizíció vizsgálatot rendelt el. Ennek vezetője DIEGO DE LANDA ferencesrendi szerzetes volt, Yucatán későbbi püspöke. LANDA következetes kegyetlenséggel irtotta a tévelygőket és mindazt, ami a régi vallásra akár csak emlékeztetett is. Ekkor vált a tűz martalékává minden fellelhető szent irat, a papok minden feljegyzése, azaz minden, Yucatánban elérhető írott emlék. Úgy látszik, a kínai könyvégetés (303. oldal) nem áll példa nélkül a történelemben.

Amikor azonban a XIX. században a közép-amerikai őserdő véletlenül megtalált romvárosai kiváltották a csodálatot és a rendszeres régészeti kutatásokat, megindult a nyomozás a maja írások után is. Európa nagy könyvtárainak szinte laponkénti átnézése árán csakugyan előkerült 3 maja kézirat. Az egyik, harmonika módjára összehajtható fikuszháncsra festett iratot Drezdában, a másikat

Landa kéziratából a maja ábécé

Madridban, a harmadikat Párizsban őrzik. Ezeket megelőzően BRASSEUR DE BOURBOURG neves francia kutató a madridi Királyi Történelmi Akadémia könyvtárában megtalálta LANDA jelentését, vagyis a *Yucatánban történt dolgok leírását*, illetve ennek rövidített másolatát. Ebből kitűnik, hogy LANDA igen jó ismerője volt a majáknak életének. Annál különösebb, hogy a maja kultúra e kiváló, de elvakult szakértője megsemmisített minden „ördögi sugallatra" ihletett kéziratot, amelyből az utókor értesülhetett volna e távoli indián nép történetéről. Mégis ez a Landa-féle jelentés adta akaratlanul is az első segítséget a maja írás megfejtéséhez. Megtalálható benne ugyanis a kezdeti nagy reményekkel biztató maja ábécé. Ez a Landa-féle összeállítás azonban maga is rejtélyesnek bizonyult. A maja írás részben szótagírás volt, mint például az egyiptomi, részben pedig képírás. A Landa-féle ábécé csak a szótagjelekről ad felvilágosítást, de azt is olyan módon, hogy megértése csak 1955-

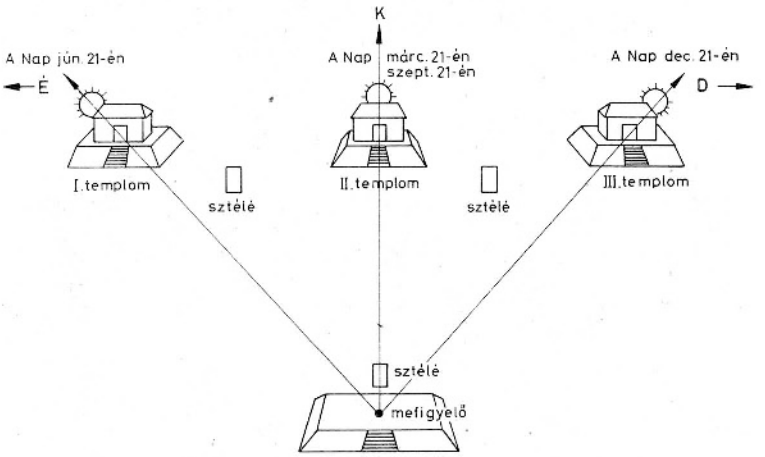


Maja kőmozaik Chiapakból

ben sikerült JURIJ KNOROZOV szovjet kutatónak. Így a maja írások egy részét „kibetűzték", de a képírásos jelek ma is őrzik titkukat.

Legismertebbek a kőoszlopoknak, a sztéléknek a faragott feliratai. A görög eredetű sztélé szó olyan kőoszlopot vagy táblát jelent, amelyre domborműveket: képeket vagy feliratokat vésztek. Ilyen sztélék találhatók a maja földön mindenütt, legtöbb a déli Quiriguában. Ezek arra szolgáltak, hogy hírt adjanak az utókornak egy-egy jelentős történelmi eseményről. Minden oszlopon fellelhető a megörökített esemény napra pontos dátuma, a maja naptárkészítés

A maja csillagász-papok tanácsa



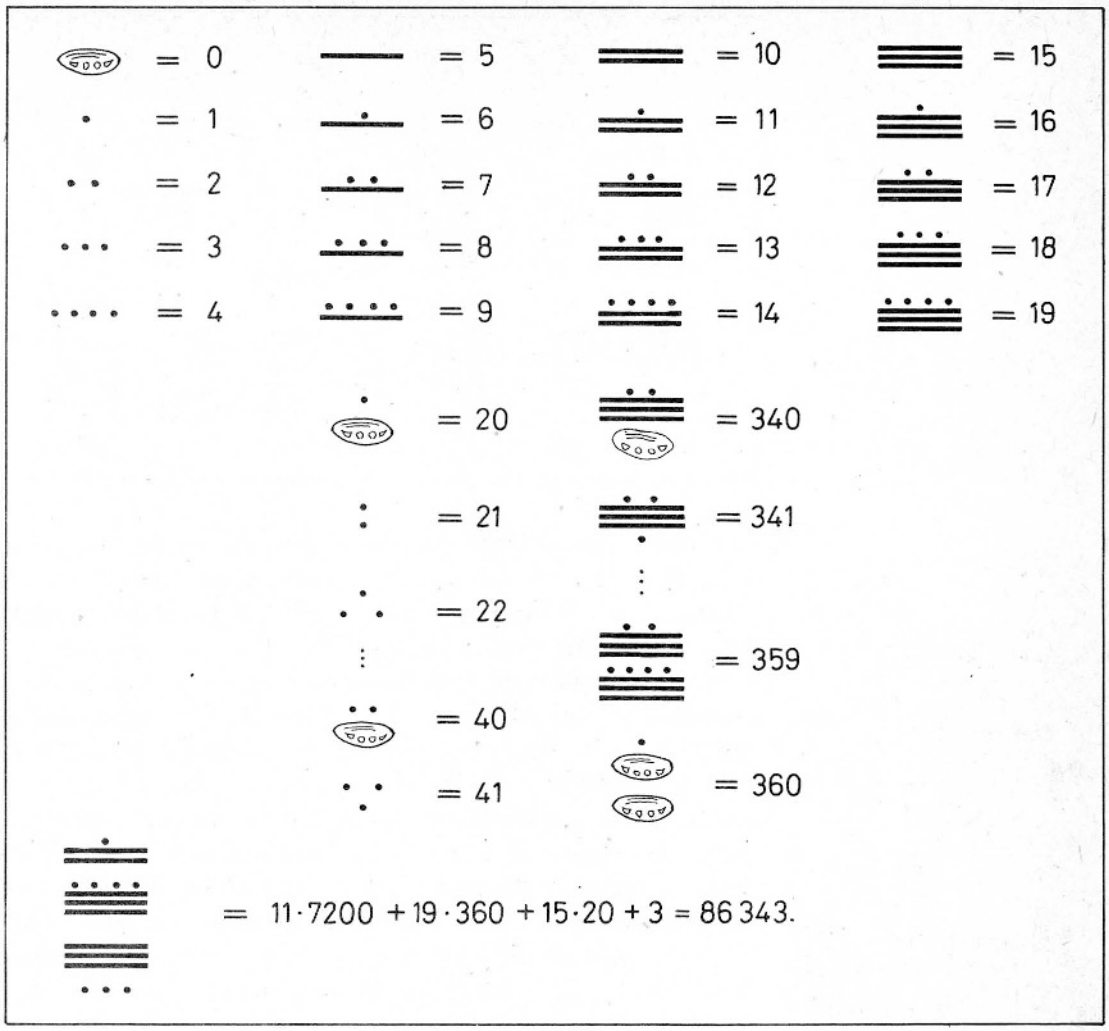
252. ábra

tudományának beszédes tanújele. A naptárkészítés pedig el sem képzelhető gondos csillagászati megfigyelések nélkül. Minden bizonnyal a hatalmas piramistemplomoknak nemcsak kultikus szerepük volt, hanem csillagászati megfigyelőhelyként is működtek. Erre mutat például Chichén Itzá piramisa, amelyre a felvezető lépcsők száma 356, vagy a tikali templomok elhelyezése is, amint azt a *252. ábrá*nk illusztrálja. Arról, hogy a csillagászat milyen fontos szerepet játszott a maják életében, meggyőz a 776-ban Copánban felállított sztélé, amely egy csillagásztalálkozót, valóságos csillagászkongresszust örökít meg. A különböző maja városok csillagász papjai gyűltek ekkor össze, hogy tapasztalataikat kicseréljék, megfigyeléseiket egyeztessék, a naptárkészítés titkait megbeszéljék.

A maják kétféle számírást használtak. Az egyik számjegyei igen könnyen áttekinthetők, viszont az ún. fejszámok olvasása meglehetősen nehéz, és ez a maják világában is a papok tudománya volt. Mind a két számjegyféleséggel a helyi értékes 20-as számrendszerben írtak. Az ötletet minden bizonnyal az ember 20 ujja adta. A húsz szó egyszersmind az egész embert is jelentette. A 20-as számrendszer helyi értékei:

egyesek,
20-asok,
20-szor 20-asok, azaz 400-asok,
20-szor 400-asok, azaz nyolcezresek stb.

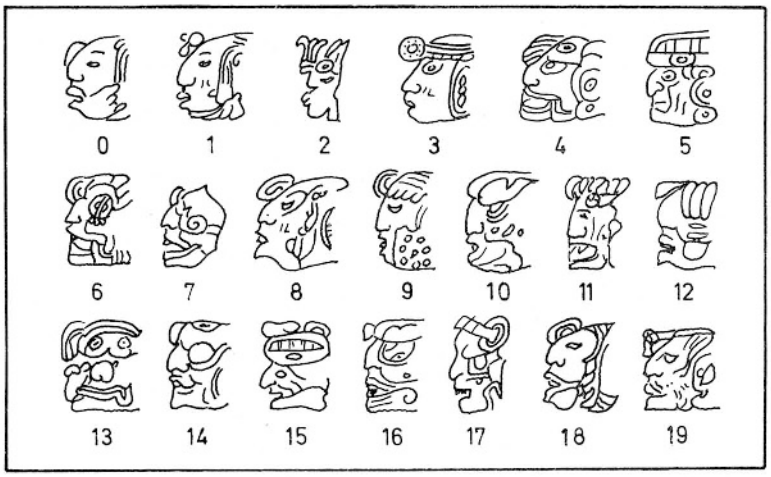
A maják helyiérték-sorozatában azonban közvetlenül a 20-asok után törés tapasztalható. Ennek az oka – mint majd meglátjuk – éppen az volt, hogy számírásukkal elsődlegesen a dátumokat jelölték. A maja helyi értékek:



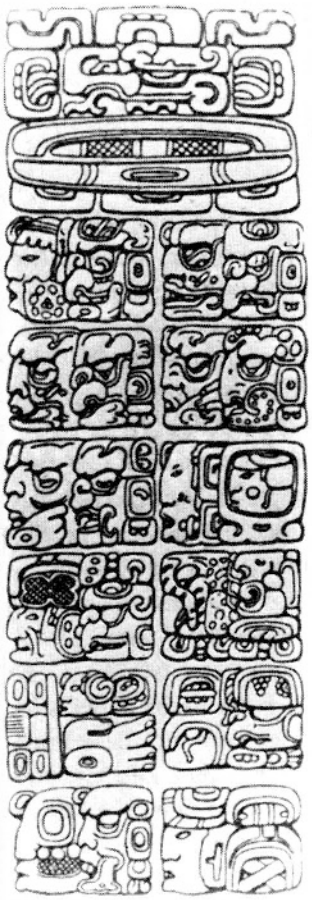
253. ábra

egyesek,
20-asok,
18-szor 20-asok, azaz 360-asok,
20-szor 360-asok, azaz 7200-asok,
20-szor 7200-asok, azaz 144 000-esek stb.

Számírásukban a helyi értékek növekvő sorrendben rendszerint alulról felfelé következtek, tehát függőleges irányban. Az egyszerűbb fajta számjegyeket pontokból és szakaszokból állították össze. A pont értéke 1, a szakaszé pedig 5 egység. Külön kiemelendő, hogy a nulla jelét is használták. Ezzel jó néhány évszázaddal megelőzték a hindu 10-es számrendszerű helyi értékes számírást. A *253. ábrán* látható az említett húsz maja számjegy és néhány, ezekkel felírt szám.



254. ábra



Dátum Quiriguából, amely az 501. év május 18-ának felel meg

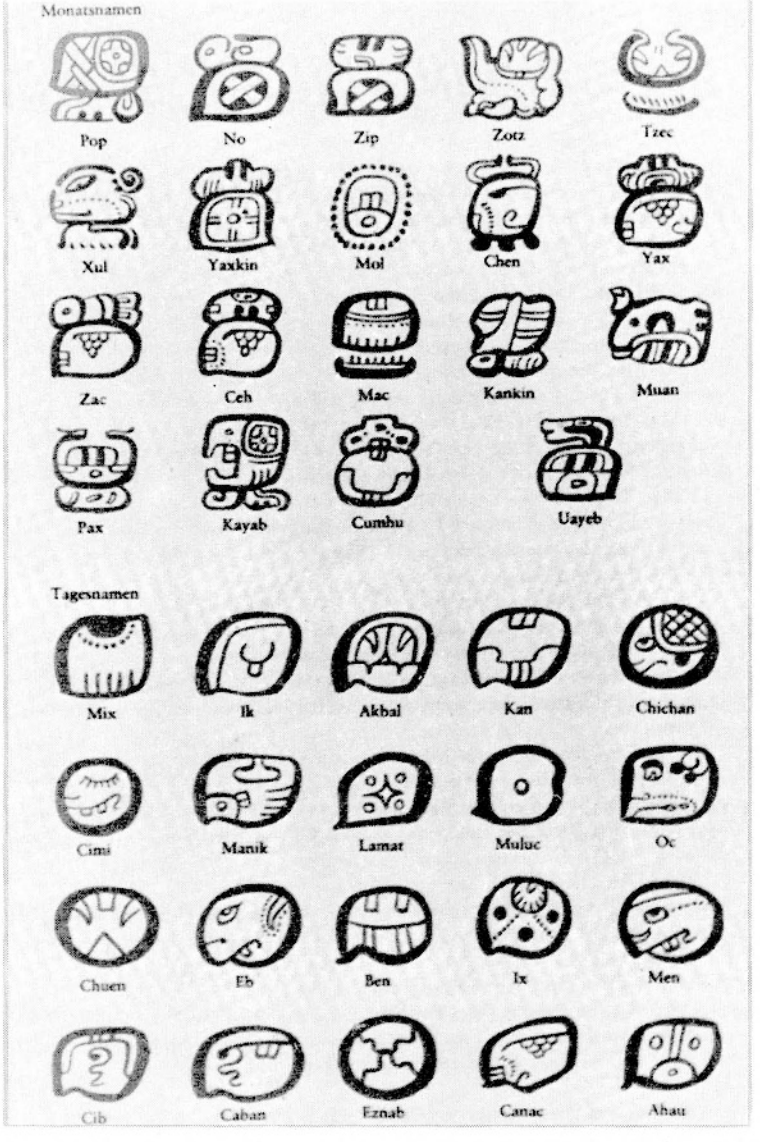
A most bemutatottakhoz teljesen hasonló az ún. fejszámok számjegyeinek a használata. Az elnevezést onnan nyerték, hogy a számjegyeket egy-egy emberi fej rajza jelöli. Ezt a húsz számjegyet szemlélteti a *254. ábra.*

Befejezésül talán nem édektelen azt is megismerni, hogyan alkalmazták e számjegyeket a dátumok felírásában. Ez egyszersmind fényt vet arra is, hogy milyen gyakorlati szempont okozta a 400-as helyi érték 360-asra való felcserélését. A majáknak volt egy, a mi hetünknek megfelelő időtartamegységük, azonban ez 13 napból állt. Ezeknek a napoknak a 13-as héten belül nem volt nevük, hanem csak sorszámuk. A dátum első száma pedig a 13-as hét napjának a sorszáma. A maják az évet 18 húsznapos hónapra bontották. A hónap mind a 20 napjának külön neve volt, és természetesen a hónapon belül az előbbitől független sorszáma is (az első nap a nulladik, az utolsó a tizenkilencedik). A maja dátumban ez a két adat is szerepelt, és végül megnevezték a hónapot is. A hónapok nevei rendszerint az akkor esedékes mezőgazdasági teendőkre vagy az időjárási viszonyokra vonatkoztak. Például a 2. hónap a betakarítás, a 12. pedig a vihar hónapja volt. A keltezésben tehát a következő négy adatot tüntették fel az előbbi sorrendben:

1. a napnak a 13-as héten belüli sorszáma,
2. a nap neve,
3. a napnak a hónapon belüli sorszáma,
4. a hónap neve.

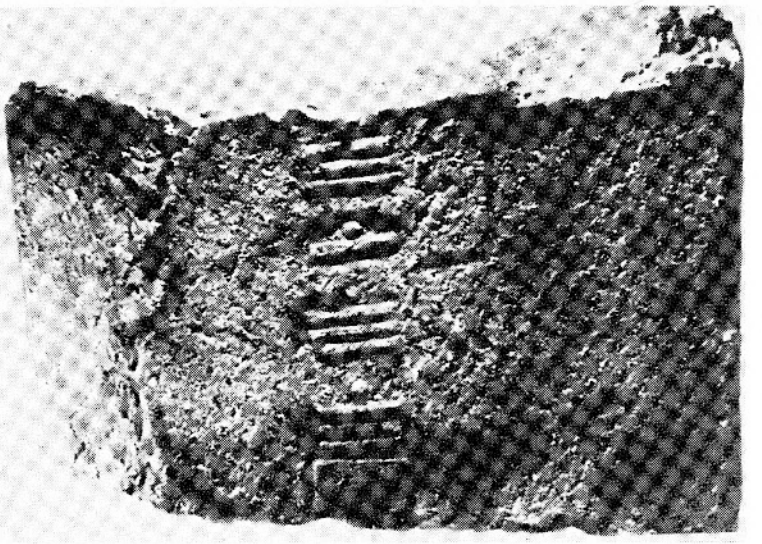
Mit jelent például az *5 lamat 6 muan* dátum? Ez vonatkozik a muan nevű hónap hatodik, lamat nevű napjára, amely az akkor folyó hét ötödik napja.

Az általunk megszokott keltezéshez képest a majákét határozottan hiányosnak érezzük: hiányzik az évszám. Nálunk a hónap neve és valamelyik napjának a sorszáma, tehát a napnak e két határozója



A hónapok és a napok maja jelei

évenként ismétlődik, tehát csak egy megjelölt éven belül ad pontos időmegjelölést. Gondoljuk át, hogyan van ez a maja naptárban! A nap neve és a hónapon belüli sorszám mindig kölcsönösen és egyértelműen kapcsolódnék össze, ha a maja év pontosan 360 napos lenne. Azonban a maja csillagászok is rájöttek arra, hogy a Nap-év hossza nem 360, hanem – amint ezt kőbe vésett jeleik is megerősítik – 365,2420 nap. A Gergely-naptár szerint a Nap-év hossza 365,2425 nap, a jelenlegi csillagászati mérések szerint valójában 365,2422 nap. A maják tehát egy tízezred nappal jobban megközelítették a valóságos értéket, mint a mai Gergely-naptár. A maják ezért minden 18 hónap után beiktattak az évbe 5 napot, amelyek

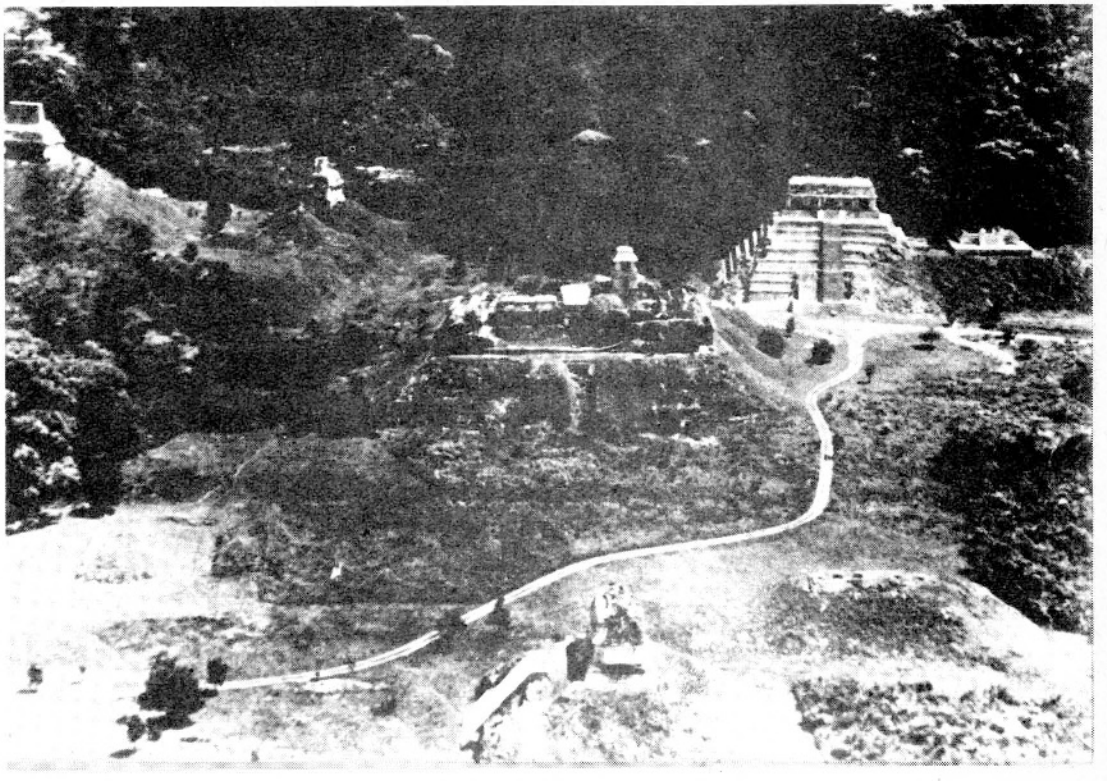


Olmék vagy maja szám
Trez Zatopecből

(15 · 7200 + 6 · 360 + 16 · 20 + 16)

náluk a nem szerencsés napok közé tartoztak. Így aztán a napok neve a hónapra vonatkozó sorszámhoz képest évenként öttel eltolódott. Ez azt jelenti, hogy 4 évnek kellett eltelnie, hogy a sorozatos 5 napi eltolódásból összejöjjön egy teljes hónap, azaz valamely napnév és a hónapon belüli sorszáma 4 évenként találkozott. Közben ezzel párhuzamosan változtak a 13-as hétre vonatkozó napsorszámok. Ilyen módon – mivel 365-ben a 13 megvan 28-szor és még marad 1 – minden év első napjának a hétre vonatkozó sorszáma 1-gyel ugrott, tehát csak 13 év múlva kerültek ugyanolyan kapcsolatba a hétre és a hónapra vonatkozó sorszámok. Az elmondottak szerint: 4 éves periódus hozta ugyanolyan helyzetbe a napneveket és a hónapra vonatkozó sorszámokat, ugyanakkor 13 éves periódusonként kerültek ugyanazon párba a hétre és a hónapra vonatkoztatott sorszámok, tehát 13-szor 4, azaz 52 éves ciklusonként fordult elő egyszer, hogy egy napnak mind a három, illetve négy „koordinátája" megegyezzék valamelyik előtte valóval. A példának felhozott *5 lamat 6 muan* dátum tehát 52 évre pontosan definiálta a napot.

Természetesen ennél hosszabb távra választanunk kell egy kezdeti időpontot is, ahonnan az időt számítjuk. Ez nálunk KRISZTUS születési éve. Ehhez hasonlóan a majáknál is megvolt az időszámítás kezdete, mégpedig az i. e. 3113 év. Nem tudjuk, hogy milyen nevezetes eseménynek köszönheti ez az időpont a kezdet szerepét. Azért, hogy az 52 éves periódusok se tegyék kétségessé valamely nap meghatározását, a maják bevezették a következő időegységeket:



Templompalota Palanqueből

1 kin	= 1 nap		
20 kin	= 1 vinal		
18 vinal	= 1 tun	=	360 kin
20 tun	= 1 katun	=	7 200 kin
20 katun	= 1 baktun	=	144 000 kin
20 baktun	= 1 piktun	=	2 880 000 kin
20 piktun	= 1 kalabtun	=	57 600 000 kin
20 kalabtun	= 1 kincsiltun	=	1 152 000 000 kin.

Az elnevezéseket a majakutatók adták, az eredeti ősi neveket nem ismerjük. Mit jelent a mai időszámítás szerint például a 8 baktun 5 katun 12 tun 3 vinal 12 kin?

8 baktun	=	8 · 144 000 kin	=	1 152 000 nap
5 katun	=	5 · 7 200 kin	=	36 000 nap
12 tun	=	12 · 360 kin	=	4 320 nap
3 vinal	=	3 · 20 kin	=	60 nap
12 kin	=	12 kin	=	12 nap
		összesen:		1 192 392 nap.

Ebben 1 év napjainak a száma (számoljunk 365,25 nappal) 3264-szer van meg (maradt még kb. 216 nap). Mivel a maja kezdő év

Atahualpa (1495–1533), az utolsó inka fejedelem

i. e. 3113, azért a mi naptárunk szerint a fenti dátum az i. sz. 151. évre vonatkozik.

A most bemutatott keltezési mód mellett megmaradt a régebbi, 52 éves periódus is. Például egy korai maja történelmi dátumot őriz az ún. leideni lemez. Ezen a mi írásunkkal ez olvasható:

8 baktun 14 katun 3 tun 1 vinal 12 kin 1 eb 0 jaskin.

A felirat négy utolsó tagját nem tekintve az i. sz. 322. évre kell gondolnunk. A négy utolsó rész azonban olyan eb nevű napra mutat rá, amelynek a hétre és a jaskin nevű hónapra vonatkozó sorszáma is az első. Meg kell tehát keresnünk a 322. év környékén ezt a legközelebbi napot, és így az évszám i. sz. 317-re alakul.

A most olvasottak alapján nagy biztonsággal állíthatjuk, hogy a maja indiánok számírását szinte teljesen kisajátította a csillagászat, illetve a naptár. Sajnos még nem áll rendelkezésünkre egyetlen olyan megfejtett maja szöveg sem, amely e számírásra alapozott aritmetikának, vagy akár valamilyen gyakorlati szükségletet szolgáló más matematikai ismeretnek a létezésére utalna.

Ahogyan a maják megjelenése a kultúra színpadán rejtélyekkel teli, ugyanúgy azt sem tudjuk, miért hagyták el hirtelen, majdnem egyszerre a hihetetlen munkával és pompával felépített városaikat, hogy befedje azokat a mindent elnyelő őserdő.