JÁTÉK A VÉGTELENNEL

Matematika kívülállóknak

ÍRTA: PÉTER RÓZSA

Hetedik kiadás

TYPOTEX

Budapest, 1999

TARTALOM

ELŐSZÓ A 7. KIADÁSHOZ

Örömmel és fájdalommal teszek eleget a megtisztelő felkérésnek, hogy előszót írjak Péter Rózsa világsikert aratott *Játék a végtelennel* című könyvének a Typotex Kiadónál megjelenő új kiadásához. Örömmel, mert a könyvet (természetesen) én is a matematikai ismeretterjesztő irodalom egyik csúcspontjának tartom, de ugyanakkor fájdalommal is, hiszen olyasmit teszek, amihez igazában csak a könyv szerzőjének volna joga; de hát Őt, sajnos, 1977 óta már elhunyt nagyjaink között tarthatjuk csak számon.

Miért remekmű ez a könyv? Erre az a felületes válasz, hogy hiszen lefordították számos nyelvre, és e fordítások számottevő része több kiadásban is megjelent. A mélyebbre ásó válasz azonban arra kísérel meg magyarázatot találni, vajon a könyvnek mely tulajdonságai indokolják ezt a tényekkel alátámasztott sikert.

Matematikai ismeretterjesztés csak a matematika formalizmusának teljes vagy csaknem teljes mellőzésével, a logikai szigorúság matematikai művekben joggal megkívánt lazításával, szemléletes képekkel való helyettesítésével végezhető hatékonyan; enélkül nem ismeretterjesztő mű, hanem szakkönyv jön létre, amelyet csak matematikusok, esetleg csak a matematika valamely szűkebb ágának szakértői tudnak megérteni és méltányolni. Aki *valóban* a nemmatematikus (sőt a hajlamánál, neveltetésénél fogva magát a matematikától távolállónak érző, esetleg éppen a matematikával szemben elfogult) olvasó számára ír, annak mindezeket a matematikai irodalomban meg nem engedett lazaságokat lépten-nyomon alkalmaznia kell, de eközben *nem szabad a matematikai gondolatokat meghamisítania*.

Ahhoz, hogy ez a tojástánchoz hasonlítható feladat sikeresen megvalósítható legyen, a szerzőnek mindazt, amiről ír, a kutató tudós mélységéig kell ismernie. Előfordul, hogy valaki, esetleg a legteljesebb jóhiszeműséggel, megkísérli az olvasmányaiból megismert eredményeket közvetíteni anélkül, hogy mindezeket az alkotó tudós azonosulásának szintjéig magáévá tette volna, s ebből óhatatlanul félrevezető pontatlanságok jönnek létre. Péter Rózsa könyvének nagyszerűsége éppen abból ered, hogy ő maga alkotó matematikus volt, aki szerelmének tárgyát (melyik igazi tudós nem szerelmes az általa művelt tudományba?) kívánta (legalábbis a lehetőséghez képest) ismertté és vonzóvá tenni a kívülállók számára. Természetesen az a körülmény, hogy Péter Rózsa a matematikai kutatás aktív művelője volt, csak egyik szükséges feltétele az elért eredménynek (nem minden alkotó matematikus képes ilyen magas szintű ismeretterjesztésre), de mindenesetre alapvetően fontos, nélkülözhetetlen feltétele a sikernek.

Legyen szabad most egy kissé szubjektívnek lennem. A *Játék a végtelennel* első kiadása, tudjuk, 1945 nyarán jelent meg. Én akkor mint későbbi feleségemnek hadifogságból éppen hazatért friss vőlegénye, megvettem és neki ajánlottam a könyvet, amely azután kettőnk egyik kedvenc olvasmányává vált. Belelapozva az első kiadásba, észrevettem egy apró különbséget a későbbi kiadásokhoz képest. Az első kiadásban a Bevezetés egyik mondata így szól: „Én nem azért szeretem a matematikát, mert – így mesélték nekem – alkalmazni lehet a technikában, hanem azért, mert szép." Ez a mondat a negyedik (1969-es) kiadásban így hangzik: „Én nemcsak azért szeretem a matematikát, mert alkalmazni lehet a technikában, hanem főleg azért, mert szép." A szerző egyébként gondosan és matematikushoz illő pontossággal felsorolja az újabb kiadásokban mutatkozó változtatásokat, mert hiszen a könyv a matematika legfrissebb eredményeit is be akarja mutatni az olvasónak, és ezek az újabb és újabb kiadások között is fejlődtek, amit a szöveg (természetesen) figyelembe vett, a bevezetésnek ezt a kis módosítását azonban nem említi. Anélkül, hogy ehhez a húsz évnél régebben elhunyt szerző hozzájárulását elnyerhetném, legyen szabad feltételeznem, hogy Péter Rózsának 1945 és 1969 között belső viszonyulása változott meg a matematika alkalmazásaihoz; amitől 1945-ben még távol állt, azt 1969-ben már magáénak érezte, sőt – mint a halála előtt kevéssel megjelent, a matematikai logikának a számítógéptudományban való alkalmazásairól szóló monográfiájából kitűnik – alkotóan művelte.

Ebből az apró szövegváltoztatásból, talán nem túlozva, szeretnék egy a matematika és a valóság viszonyának (súlyos filozófiai kérdéseket felvető) problémájáig eljutni. A matematikának számos (a régebbi századokban szinte valamennyi) kérdésköre a mindennapi élet vagy más tudományok felvetette feladatok megoldásának szándékából eredt. Előfordul azonban, hogy egy-egy matematikai kérdés nem kívülről, hanem a matematika belső problémáiból fakadt, és ilyenkor hosszú ideig úgy tűnt, hogy az élettől távol álló, alkalmazásokhoz sohasem vezető, és ezért sokak részéről elutasított gondolatkörről, esetleg egész elméletről van szó. Aki azonban elég türelmes és képes kellő ideig várni, mindig rájön, hogy az élettől elrugaszkodottnak tűnő matematikai elméletek előbb-utóbb megtalálják alkalmazásukat. Így volt ez a Péter Rózsától elsősorban művelt kérdéskörrel, a rekurzív függvények elméletével is, amely indulásakor pusztán a matematikai logika szempontjából látszott érdekesnek, de alig néhány évtized elteltével a számítógép-tudomány egyik fontos és hasznos fegyverévé vált. A fejlődésnek ezt az állomását még éppen megérte Péter Rózsa, s (talán éppen ezért) törölte az „így mesélték nekem" félmondatot.

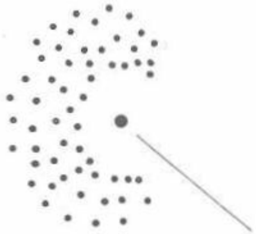
Sok élvezetes percet kívánok az új kiadás olvasóinak.

Budapest, 1999. áprilisában
Császár Ákos

BEVEZETÉS

Eszembe jut egy régi beszélgetés. Egy írónk, aki igen kedves emberem, panaszolta nekem, hogy hiányosnak érzi műveltségét, mert nem tud matematikát. A saját területén érzi ennek a hiányát, írás közben. Mert például a koordináta-rendszerre még emlékszik az iskolás matematikából és ezt már képben, hasonlatban is felhasználta. Úgy érzi, hogy még sok ilyen felhasználható anyag van a matematikában, és a kifejezőképessége szegényebb attól, hogy nem meríthet ebből a gazdag forrásból. De mindez reménytelen panasz, mert abban bizonyos, hogy a matematikába nem tudna behatolni.

Ez a beszélgetés azóta sokszor feléledt bennem, gondolatokat, terveket ébresztően. Hogy itt tennivaló van, azt az első pillanatra beláttam, hiszen abban, amit a matematika az én számomra jelent, mindig a hangulati elem volt a döntő és ez bizonyára közös forrás, amiből az író, a művész is meríthet. Eszembe jut egy példa diákkoromból: Több egyetemi társammal együtt Shaw egyik színművét olvastuk. Ott tartottunk, ahol a hős megkérdezi a hősnőt: mi a titka, hogy tudja olyan jól vezetni és megnyerni a legnehezebben kezelhető embereket is? A hősnő elgondolkozik: Talán az a magyarázata ennek, hogy ő valójában egy kicsit távol van mindenkitől. Erre a felolvasó társnőm (Benkő Ica) felkiált: „Ez ugyanaz, mint a ma tanult matematikai tétel!" A matematikai kérdés ugyanis ez volt: lehet-e egy ponthalmazhoz egy kívül fekvő pontból úgy közeledni, hogy egyszerre valamennyi pontjához közeledjünk? A felelet: Ennek az a feltétele, hogy a kívül fekvő pont elég messze essék az egész halmaztól:



innen nem lehet, míg egyes pontokhoz közeledünk, a többitől távolodunk;

innen már lehet.

Az író másik állítását: hogy nem tudna behatolni a matematikába, például sohasem tudná megérteni a sokat emlegetett differenciálhányados fogalmát, nem akartam elhinni. Megpróbáltam széttagolni e fogalom bevezetését a lehető legegyszerűbb, világos lépésekre. A válasz nagyon meglepő volt: A matematikus el sem tudja képzelni, hogy a laikusnak a legegyszerűbb képlet is milyen nehézségeket okozhat. Ahogyan a pedagógus sem érti, hogy lehet az, hogy a nebuló már huszadszor silabizálja, hogy b . . . a . . . b és még mindig nem látja, hogy babról van szó; itt pedig nem is babról van szó.

Ez ismét nagyon elgondolkoztató tapasztalat volt számomra. Mindeddig azt hittem, hogy a közönség matematikai tájékozatlanságának az az oka, hogy senki sem írt jó népszerű könyvet, például a differenciálszámításról, a nagyközönség számára. Hiszen az érdeklődés szemmel láthatóan megvan, a közönség valósággal szétkapkodja, amit e nemben juttatnak neki, de hivatásos matematikus mindeddig nem írt ilyen könyvet. Igazi szakemberre gondolok, aki pontosan tudja, hogy milyen mértékben lehet leegyszerűsíteni valamit, anélkül, hogy ez hamisítás volna, aki ért ahhoz, hogy ne a régi keserű orvosságot adja be valami tetszetős tálalásban (hiszen az iskolás matematika a nagy többségnek keserű emléke), hanem magát a lényeget tudja annyira megvilágítani, hogy egészen szembeszökővé válik, és aki maga is ismeri a matematikai alkotás örömét, ez ad az írásának olyan lendületet, hogy az olvasót is magával ragadja. Most már kezdem azt hinni, hogy sokak számára még az igazi népszerű könyv sem lesz hozzáférhető.

Talán éppen ez a döntő matematikustulajdonság: az út keserves voltának vállalása. „A matematikához nem vezet királyi út" – mondta Euklidész az érdeklődő uralkodónak – ezt királyok számára sem lehet kényelmessé tenni. Felületesen nem lehet matematikát olvasni, a kényszerű absztrakció mindig bizonyos önkínzással jár, és matematikus az, akinek ez az önkínzás örömet okoz. Még a legjobb népszerű könyvet is csak azok fogják követni tudni, akik egy bizonyos fokig vállalják ezt. Akik vállalják a keserves silabizálást mindaddig, míg a képlet értelme meg nem világosodik előttük.

Én nem ezek számára írok most. Képletnélküli matematikát írok, valamit abból a bizonyos közös hangulati forrásból. Nem tudom, sikerülhet-e ez a vállalkozás. A képlettel a matematika egyik lényeges jegyéről mondok le; hogy a forma a lényeghez tartozik, azt író és matematikus egyaránt tudja. Képzeljük el, hogyan lehetne egy szonett hangulatát kifejezni a szonettforma nélkül. Mégis meg akarom kísérelni: hátha átmenthető így is valami az igazi matematika szelleméből.

Egy könnyítést nem ígérhetek: egy-egy fejezetet olvasatlanul átlapozni, későbbre halasztani, vagy csak felületesen futni át: nem szabad. Matematikát csak téglánként lehet felépíteni: itt egyetlen szó sem felesleges, minden következő részlet az előzőre épít, ha ez itt nem is annyira szembeszökő, mint egy unalmasan szisztematizáló könyvben. A kevés utasítást is követni kell: igazán ránézni az ábrára, valóban próbálgatni egy egyszerű rajzot vagy számolást, ha itt-ott erre kérem az olvasót. Viszont engesztelésül megígérem, hogy nem lesz unalmas.

Az iskolás matematikából semmit sem fogok felhasználni; a számlálással kezdem és el fogok jutni a matematika legmaibb ágáig: a matematikai logikáig.

ELSŐ RÉSZ

A bűvészinas

1. JÁTÉK AZ UJJAKKAL

Kezdjük elölről. Nem matematikatörténetet írok; ezt különben is csak írásos emlékek alapján tehetném, és hol van már az első írásos emlék a kezdettől! El kell képzelnünk az ősembert, a maga primitív környezetében, amint számlálni kezd. Ebben az elképzelésben mindig segítségünkre van az a primitív emberke, aki a szemünk előtt fejlődik kultúremberré: a kisbaba, aki a világgal és ebben saját testével ismerkedik, a tíz ujjacskájával játszik. Lehet, hogy az „egy", „kettő", „három", „négy" csak rövidítés ahelyett, hogy „ez elment nyulászni", „ez meglátta", „ez meglőtte", „ez megsütötte" stb. és ez nem is tréfa: egy orvostól hallottam, hogy vannak olyan agysérültek, akik nem tudják az ujjaikat megkülönböztetni, és ezzel mindig együttjár a számolási készség kiesése is; ez a tudat alá jutott kapcsolat tehát még a kultúremberben is elszakíthatatlanul szoros. Én így képzelem: a matematika egyik forrása az ember játékos természete, és éppen ezért nemcsak tudomány a matematika, hanem legalább ugyanolyan mértékben művészet is.

Úgy gondoljuk, hogy a számlálás már kezdetben célszerű tevékenység volt: talán a tulajdonát akarta úgy számon tartani az ősember, hogy megszámlálta, hány állatbőre van. De elképzelhető, hogy valami mágikus szertartás is volt a számlálás, hiszen ma is látjuk, hogy a kényszerneurotikusok gyakran használják mágikus rendszabály gyanánt, amellyel bizonyos meg nem engedett gondolatokat akarnak izolálni; például 1-től 20-ig kell számolni, csak azután szabad valami másra gondolni. Akár így, akár amúgy, állatbőrökre vagy egymást követő időközökre vonatkoztatva, a számlálás mindig azt jelenti, hogy még eggyel túlmegyünk a már meglevőn, a tíz ujjon is túljuthatunk, és így létrejön az ember első nagyszerű matematikai alkotása, az

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, \ldots$$

végtelen számsorozat, az úgynevezett természetes számsor. Végtelen, mert bármily nagy számon túl is lehet még eggyel továbbszámlálni. Nagy absztrakcióképesség kellett a megalkotásához, hiszen ezek a számok csak árnyai a valóságnak: például a 3 itt nem 3 ujjat, 3 almát, 3 érverést stb. jelent, hanem azt, ami mindezekben közös: a belőlük absztrahált számukat. A nagyon nagy számokat pedig már nem is a valóságból absztrahálta az ember, hiszen egy milliárd almát senki sem látott, egy milliárd érverést senki sem számlált meg; ezeket a számokat már csak a valóságeredetű kis számok analógiájára képzeljük el: képzeletben lehetne mind tovább és tovább számlálni a mindeddig megismert számokon túl.

Az ember nem éri be a számlálással. Ha más nem, hát az ismétlés öröme túlviszi ezen. Jól ismerik ezt a költők is: a vissza-visszatérést ugyanahhoz a ritmushoz, ugyanahhoz a csengéshez. Eleven dolog ez: a kisgyerek sem unja meg a játékot; a fásult felnőtt már régen tehernek érzi, mikor ő még mindig újra meg újra dobná a labdát.

4-nél tartunk? Számláljunk tovább még 1-gyel! No még 1-gyel! No még 1-gyel! Hova jutottunk? 7-hez; ugyanoda, mintha mindjárt 3-mal számláltunk volna tovább: felfedeztük az összeadást:

$$4+1+1+1=4+3=7.$$

Most játsszunk tovább ezzel a művelettel: adjunk 3-hoz még 3-at és még 3-at és még 3-at! Itt már 4-szer adtunk össze 3-at, ezt röviden így is mondhatjuk: 4-szer 3 az 12, jelekben:

$$3+3+3+3=4\cdot 3=12,$$

ezt pedig már szorzásnak nevezik.

Ha már benne élünk az ismétlés örömében, nehéz abbahagyni, hiszen a szorzással ugyanígy játszhatunk tovább: szorozzuk 4-et 4-gyel és még 4-gyel, lesz

$$4\cdot 4\cdot 4=64.$$

A szorzásnak ezt az ismétlését, „iterációját", hatványozásnak hívják. Azt mondják, hogy itt 4 az „alap", és a jobb felső sarkába írt kicsi számmal, az ún. „kitevővel" jelezzük, hogy hány 4-est kell szorozni; e jelöléssel tehát

$$4^3=4\cdot 4\cdot 4=64.$$

Amint látható, ezek az eredmények egyre nagyobb számok: $4\cdot 3$ több, mint $4+3$ és 4^3 a $4\cdot 3$-nál is jóval több. A vidám ismételgetés jó magasra lendít fel minket a nagy számok közé. Még inkább így lesz, ha még a hatványozást is iteráljuk: hatványozzuk 4-et 4-nek a 4-ik hatványára:

$$4^4=4\cdot 4\cdot 4\cdot 4=64\cdot 4=256$$

és erre kell hatványozni 4-et:

$$4^{4^4}=4^{256}=4\cdot 4\cdot 4\cdots$$

nekem már továbbírni sincs türelmem, hiszen 256 4-est kellene ideírnom, hát még valóban elvégezni a szorzást! Elképzelhetetlen nagy szám lenne az eredmény, úgy, hogy inkább elővesszük a józan eszünket, és bármily szép is újra meg újra iterálni, a hatványozás iterációját mégsem vezetjük be elfogadott műveleteink közé.

Talán ez az igazság: az emberi szellem megjátszik minden kínálkozó játékot, de maradandóvá csak az válik e játékok közül, amit a józan ész célszerűnek ítél.

Az összeadás, a szorzás és a hatványozás nagyon hasznosnak és célszerűnek bizonyult az ember józan tevékenységeiben is, ezért mindörökre polgárjogot nyertek a matematikában. Megállapították mindazokat a tulajdonságaikat, amik megkönnyítik a számolást; például nagy könnyítés, hogy $7 \cdot 28$ nemcsak 28-nak 7-szeres összeadásával számítható ki, hanem úgy is, hogy két tagra szétbontva szorozzuk : $7 \cdot 20$ és $7 \cdot 8$ elég könnyen kiszámítható, és azt sem nehéz megállapítani, hogy mennyi $140 + 56$. Aztán meg hosszú oszlopok összeadásakor milyen jó tudni, hogy semmilyen sorrendváltoztatás sem rontja el az eredményt, mert ennélfogva pl. ezt: $8 + 7 + 2$, így végezhetem el: $8 + 2 = 10$ és 10-hez már könnyű 7-et hozzáadni; így a kellemetlen $8 + 7$ összeadást ravaszul elkerültem. Csak jól végig kell gondolni, hogy az összeadás tulajdonképpen továbbszámlálást jelent annyival, amennyi a szóban forgó összeadandó, és akkor világossá válik, hogy a felcserélés nem változtat az eredményen. Ugyanezt egy kicsit nehezebb a szorzásról is elhinni, hiszen $4 \cdot 3$ ezt jelenti: $3 + 3 + 3 + 3$ és $3 \cdot 4$ ezt: $4 + 4 + 4$, és az igazán nem magától értetődő, hogy

$$3 + 3 + 3 + 3 = 4 + 4 + 4.$$

De ez rögtön világossá válik, ha lerajzoljuk. Rajzoljunk 4-szer 3 ilyen helyzetű pontot $\cdot \quad \cdot \quad \cdot$ egymás alá:

$$\begin{array}{ccc} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

Mindenki látja, hogy ez ugyanaz, mintha 3-szor 4 ilyen helyzetű pontot

$$\begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array}$$

rajzoltunk volna egymás mellé. Tehát $4 \cdot 3 = 3 \cdot 4$, ezért nevezik a matematikusok a szorzandót és a szorzót közös néven: tényezőknek.

Hogy a hatványozás törvényeiből is kiragadjak egyet:

$$\underbrace{4 \cdot 4 \cdot 4}\cdot\underbrace{4 \cdot 4} = 4^5.$$

Ha a sok szorzásban elfáradok, tarthatok egy kis pihenőt: az első három 4-es szorzata 4^3, hátra van még 4^2, tehát

$$4^3 \cdot 4^2 = 4^5.$$

Az eredmény kitevője 5, ez éppen $3 + 2$, tehát 4-nek két hatványát egyszerűen úgy szorozhatjuk egymással, hogy a kitevőiket összeadjuk. Így van ez mindig, pl.:

$$5^4 \cdot 5^2 \cdot 5^3 = \underbrace{5\cdot5\cdot5\cdot5}\cdot\underbrace{5\cdot5}\cdot\underbrace{5\cdot5\cdot5} = 5^9$$

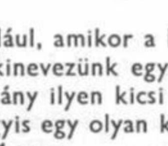
és itt 9 éppen $4 + 2 + 3$.

Gondoljunk csak vissza a befutott útra: minden művelethez a számlálás vezetett el. Persze fel lehetne vetni, hogy hol marad hát a kivonás? Az osztás? De ezek nem egyebek, mint az eddigi műveletek megfordításai (ugyanígy a gyökvonás és a logaritmus is). Mert például 20:5 azt jelenti, hogy már ismerem egy szorzás eredményét, ez 20, és keresem azt a számot, amit 5-ször véve 20-at kaptunk eredményül. Ebben az esetben sikerül találni ilyen számot, hiszen $5\cdot4 = 20$, de nem mindig könnyű megkeresni ezt a számot és nem is mindig van ilyen; pl. 23-ban az 5 már nincs meg maradék nélkül, mert $4\cdot5 = 20$ még kevesebb, $5\cdot5 = 25$ már több 23-nál, tehát kénytelen vagyok beérni a kisebbikkel és azt mondani, hogy 23-ban is 4-szer van meg az 5, de marad 3. Az ilyesmi mindenesetre több fejtörést okoz, mint a mi vidám iterációink; a fordított műveletek rendszerint keserves műveletek. Éppen ezért kedvelt támadási pontjai a matematikus kutatásnak, hiszen a matematikus tudvalevően az az ember, aki örömét leli a nehézségekben. A fordított műveletekre tehát még vissza kell majd térnem a továbbiak során.

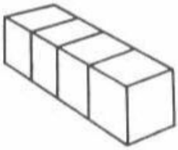
2. A MŰVELETEK LÁZGÖRBÉI

Láttuk, hogy a műveletek iterációi mind magasabbra lendítenek bennünket a nagy számok körébe. Érdemes egy kicsit elgondolkozni azon, hogy milyen magasságokba.

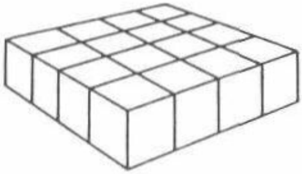
Hatványoznunk kell például, amikor a kocka köbtartalmát akarjuk kiszámítani. Egy kicsi kockát kinevezünk egységnek és az a kérdés, hogy a megmérendő nagy kockába hány ilyen kicsi kocka fér bele. Legyen pl. egy köbcentiméter az egység, vagyis egy olyan kicsi kocka, melynek hosszúsága is, szélessége is, magassága is 1 cm:



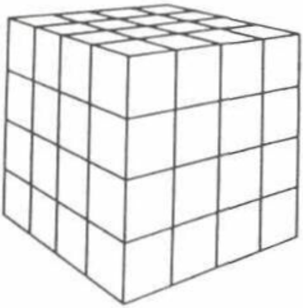
Rakjunk ilyen kicsi kockákból négyet egymás mellé, kapunk egy ilyen sort:



Azután négy ilyen sort rakva egymás mellé, kialakul egy ilyen réteg:



ebben $4 \cdot 4 = 4^2$ kocka van. Végre négy ilyen réteget rakva egymás fölé, egy nagy kocka keletkezik:

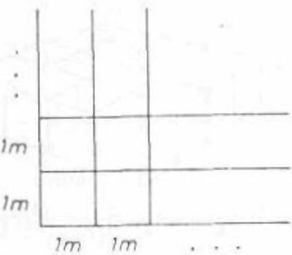


és ez $4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^3 = 64$ kis kockából áll.

Fordítva, ha a nagy kockából indulok ki, melynek hosszúsága is, szélessége is, magassága is 4 cm, akkor ebbe 4^3 köbcentiméter fér bele; és általában úgy kapjuk meg egy kocka köbtartalmát, hogy az egyik élét a harmadik hatványra emeljük. Ezért nevezik a harmadik hatványt köbnek is.* Ennek a hatványo-

* Ismerem a pedagógusok ellenvetését: úgy kellett volna mondanom, hogy a köbtartalom mértékszámát megkapom, ha egy él mértékszámát köbre emelem. De ilyen szőrszálhasogatással igazán nem akarom untatni az olvasót. Súlyosabb dolog is van itt, amin átsiklottam: az a kérdés, hogy lehet-e bármilyen kocka éleit cm-ekben kifejezni. Erre még vissza fogok térni.

zásnak azután az az eredménye, hogy aránylag elég rövid élű kockának óriási lesz a köbtartalma. Pl. 1 kilométer nem is olyan nagy hosszúság, mindenki el tudja képzelni, ha arra gondol, hogy a Nagymező utca kb. 1 kilométer hosszú. De ha akkora kockát építenének, hogy az egyik éle éppen a Nagymező utca volna, ennek már akkora lenne a köbtartalma, hogy beleférne az egész emberiség. Aki nem hiszi, számoljon utána: mondjuk, hogy 2 méternél magasabb ember nincs, tehát 2 méterenként húznánk egy-egy padlót, így az 1 kilométer, azaz 1000 méter magasságban 500 emelet fér el. Ha ezeket a padlókat hosszúságukban is, szélességükben is 1 méteres sávokra osztjuk, így:



akkor egy-egy hosszmenti sávban 1000 négyzet keletkezik és 1000 ilyen hosszmenti sáv jön létre összesen, tehát 1000·1000 = 1 000 000 ilyen négyzet van egy-egy padlón. Minden négyzet hosszúsága is, szélessége is 1 méter; 4 embert biztosan rá lehet állítani egy ilyen négyzetre, ketten egy-egy kisgyereket is tarthatnak a karjukon, tehát egy-egy emeletre 1 000 000-szor 6, azaz 6 millió ember elég jól begyömöszölhető. Az 500 emeletre tehát 500-szor 6 millió, azaz 3000 millió, vagyis 3 milliárd, ennyi ember pedig még nem is élt a Földön, amikor nekem meséltek erről a kockáról.

Pedig a kocka köbtartalmának kiszámításakor még csak a harmadik hatvány szerepel; nagyobb kitevő még sokkal rohamosabban visz fölfelé a számok sorában. Ez alapos meglepetést okozhatott annak a fejedelemnek, akitől a sakkjáték feltalálója szerényen csak néhány búzaszemet kért jutalmul: 64 mezős

sakktáblájának első mezőjére 1-et, a másodikra 2-szer ennyit, azaz 2-t, a harmadikra ismét 2-szer ennyit, azaz $2 \cdot 2 = 2^2 = 4$-et és így tovább. Eleinte valóban szerénynek tűnik ez a kérés, de amint előrehaladunk a mezőkön, 2-nek mind magasabb hatványai kerülnek sorra, végül is

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 4^4 + \ldots + 2^{63}$$

búzaszemről van szó (a közbeeső hatványokat is tessék odagondolni, nem volt türelmem mind a 64 összeadandót leírni),és ha valakinek kedve van kiszámítani, hogy ez mennyi, annyi búzát fog eredményül kapni, amivel az egész földfelületet be lehetne vonni csaknem 1 cm magas rétegben.

Ezek után már nem is meglepő, hogy a hatványozás iterációja milyen magasságokba ragad; csak egyet említek még az érdekesség kedvéért: meg lehet becsülni, hogy 9^{9^9} akkora számot ad eredményül, hogy annak puszta leírásához 18 ezer kilométer hosszú papírra volna szükség (félcentiméteres szélességű számjegyeket írva), 9^{9^9} értékének pontos kiszámításához pedig egy emberélet sem volna elegendő.

Amint elolvasom, amit eddig írtam, magamnak is feltűnik, hogy csupa ilyen kifejezést használtam: egy bizonyos művelet „magasra lendít", „fölfelé visz", „magasságokba ragad" a számok sorában, holott a számok sora egy vízszintes

$$1, 2, 3, 4, 5, \ldots$$

sor, jog szerint csak annyit mondhatnék, hogy jobbra, legfeljebb még azt, hogy előre megyek a nagy számok felé. A kifejezést már a hangulati elem befolyásolta: egyre nagyobbá válni, az növekedést jelent, a növekedés pedig a felfelétörés érzését kelti bennünk. A matematikus konkrét formába is önti ezt az érzését: elképzeléseit igen gyakran kíséri rajzzal,és a rohamos növekedés rajza a meredeken fölfelé törő vonal.

A betegek jól ismerik az ilyen rajzot: tudják, hogy csak egy pillantást kell vetni a lázgörbéjükre, és ez elárulja a betegség egész lefolyását. Tegyük fel, hogy a szabályos időközökben mért hőmérsékletek ezek voltak:

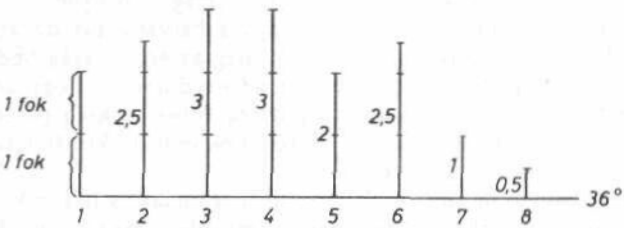
$$38^\circ,\ 38{,}5^\circ,\ 39^\circ,\ 39^\circ,\ 38^\circ,\ 38{,}5^\circ,\ 37^\circ,\ 36{,}5^\circ,$$

akkor ezeket úgy ábrázolják, hogy először is rajzolnak egy vízszintes vonalat és ezen egyenlő távolságokkal ábrázolják az egyenlő időközöket:

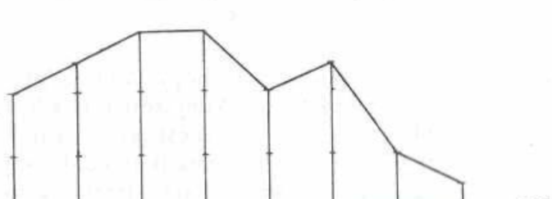
azután egy bizonyos távolságot elneveznek egy foknak, és minden időponttól fölfelé (az emelkedő láznak megfelelően)* rajzolják e távolság annyiszorosát, ahány fok volt a szóban forgó időpontban a beteg hőmérséklete. De nem is kell ilyen hosszú vonalakat húzni, hiszen 36° alá sohasem szállt betegünk hőmérséklete, tehát abban is megállapodhatunk, hogy a vízszintes vonal magassága már a 36°-nak felel meg, és ezen felül kell még sorra

2, 2,5, 3, 3, 2, 2,5, 1, 0,5

fokot felrajzolni. Így ezt a képet kapjuk:



és ha a felrajzolt vonalak végpontjait összekötjük:

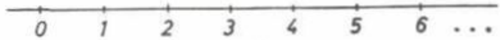


Az így nyert lázgörbe mindent elbeszél. A fölfelé törő vonalak a láz emelkedéséről, a lefelé esők az alászállásáról adnak számot, a vízszintes darabon stagnált a betegség; az emelkedés eleinte egyenletes volt; erre vall, hogy az első két vonaldarab egyenlően meredek,és így ezek egy egyenesbe esnek; egy kis visszaeséstől eltekintje a 6-ik lázméréskor, a gyógyulás elég rohamos volt: a vonal esése a 6-ik és a 7-ik lázmérés közt igen meredek, meredekebb,mint bármelyik emelkedés.

* A „fölfelé" tulajdonképpen itt is csak képletes beszéd: a vízszintesen fekvő papiroson csakis vízszintes vonalakat lehet húzni. Mégis úgy érezzük, hogy egy ilyen irányú vonal: | fölfelé halad.

Semmi akadálya sincs annak, hogy ugyanígy megrajzoljuk műveleteink lázgörbéit is.

Már magukat a számokat is szokás ábrázolni, egy úgynevezett számvonalon: egy egyenesen, amelyen felveszünk egy tetszés szerinti kiindulópontot, ezt 0-nak nevezzük, és innen kezdve egyenlő távolságokat mérünk egymás mellé, egy-egy ilyen távolsággal számlálunk tovább:



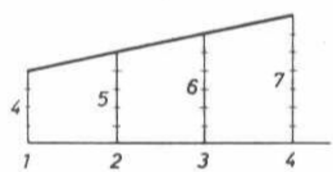
Aki kényelmes a számoláshoz, az egy ilyen számvonalon gépiesen is elvégezheti a műveleteket: ha például $2 + 3$ volna a kijelölt művelet, akkor a 2-estől három lépéssel kell csak jobbra mennie, és ott mindjárt leolvashatja az 5-ös eredményt. $5 - 3$ esetén az 5-östől balfelé kell haladnia 3 lépéssel, s. í. t.; ez csak más kivitele a kisiskolás számológépnek, amelynek rúdjain eltolható gömbökkel lehet gépiesen számolni.

De most lépjünk ki a vízszintesből, fölfelé. Induljunk ki egy bizonyos számból, például 3-ból, és nézzük meg, hogy hogyan növekszik ez, ha sorra 1-et, 2-t, 3-at, s. í. t. adunk hozzá, illetőleg, ha sorra 1-gyel, 2-vel, 3-mal szorozzuk, végre, ha az első, második, harmadik hatványra emeljük (hatványra „emelni": ebben a kifejezésben is megvan a felfelé mutatás).

Kezdjük az összeadáson. Az egyik összeadandó mindig 3, a változó másik összeadandót fogom a vízszintes vonalon ábrázolni és fölfelé a megfelelő összeget.

$$3 + 1 = 4$$
$$3 + 2 = 5$$
$$3 + 3 = 6$$
$$3 + 4 = 7,$$

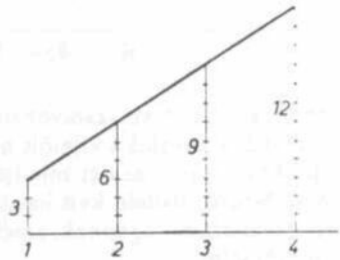
tehát az összeadás lázgörbéje, ha 1 egészet vízszintesen egy ilyen: és fölfelé egy ilyen: távolsággal ábrázolunk:



Itt minden összekötő vonaldarab egyetlen egyenesbe esik: az összeg egyenletesen növekszik, ha az egyik összeadandóját növeljük.

Szorzás esetén:

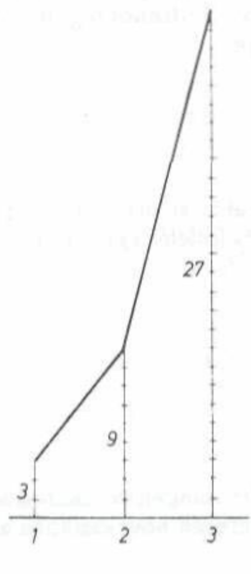
$3 \cdot 1 = 3$
$3 \cdot 2 = 6$
$3 \cdot 3 = 9$
$3 \cdot 4 = 12$



Látható, hogy a szorzat is egyenletesen növekszik, ha az egyik tényezőjét növeljük, de jóval rohamosabban, mint az összeg: az itt kapott egyenes jóval meredekebb.

Végre, ha hatványozunk:

$3^1 = 3$
$3^2 = 3 \cdot 3 = 9$
$3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$



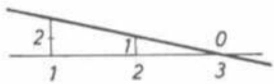
A hatvány már nem is egyenletesen, hanem egyre rohamosabban növekszik; 3^4 már el sem férne ezen az oldalon. Ez a háttere annak a mindennapos szólásmódnak, hogy valamilyen hatás „hatványozottan érvényesül”.

Ugyanígy készíthető el a fordított műveletek lázgörbéje is, például a kivonásé:

$3-1=2$

$3-2=1$

$3-3=0$



ez lefelé haladó egyenest ad, a különbség tehát egyenletesen csökken, ha a kivonandót növeljük.

Az osztás kényes művelet; annak a lázgörbéjére is csak később térek vissza.

Még csak annyit jegyzek meg, hogy amit mi itt csináltunk, azt a matematikus így nevezi: függvények grafikus ábrázolása. Az összeg függ attól, hogy hogyan választjuk meg a változó összeadandóját; ezt úgy fejezik ki, hogy az összeg a változó összeadandónak függvénye, és ennek a függvénynek a növekedését ábrázoltuk. Ugyanígy függvénye a szorzat a változó tényezőjének, a hatvány a kitevőjének s. í. t. Már a legelső műveleteknél függvényekkel kerültünk szembe; összefüggéseket fogunk vizsgálni a továbbiakban is: a függvényfogalom az egész matematikai mű gerince.

3. A VÉGTELEN SZÁMSOR PARCELLÁZÁSA

De messzire jutottunk az ujjakkal való játéktól! Már szinte el is felejtettük, hogy 10 ujjunk van. De csak azért, mert nem akartam az olvasót sok számolással fárasztani. Másképp már rég észre kellett volna vennie, hogy akármilyen nagy számot írunk is le, mindössze 10 különböző jelet használunk fel, ezeket:

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.$$

Hogy lehet pusztán 10 jellel a végtelen sok szám bármelyikét leírni? Úgy, hogy a végtelenségig egyhangúan tovanyúló számsort parcellázzuk, körülzárjuk egy-egy részletét: amint 10 egységet megszámláltunk, azt mondjuk, hogy ennyit még egy pillantással át tudunk fogni, fogjuk ezeket egy csokorba és nevezzünk egy ilyen csokrot új néven; a tíz egyes együttes neve: 1 tízes. 10 egyforintost is felcserélhetünk egyetlen tízforintossal. Most már nagyobb lépésekben számlálhatunk tovább: tizesenként haladva előre, tíz tízest ismét összefoghatunk, pl. átköthetjük egy szalaggal, melyre ráírjuk, hogy „1 százas". Ezt folytatva, 10 százast 1 ezressé, 10 ezrest 1 tízezressé, 10 tízezrest 1 százezressé, 10 százezrest 1 millióssá foghatunk össze. Így valóban minden szám felírható az említett 10 jel segítségével: amint 9-en túlhaladunk, ismét 1-et írhatunk, csakhogy 1 tízest, az ezután következő szám 1 tízesből és 1 egyesből áll, tehát két 1 jel segítségével leírható s. í. t. Így azonban a „tízes", „százas" és hasonló szavakat is alkalmaznunk kell írás közben. Egy ügyes ötlet ezeket is feleslegessé teszi: a bolt pénztárosa fiókjának különböző rekeszeibe teszi az egyforintosokat, a kétforintosokat s. í. t., jobb kéz felől az aprópénzt, amihez sokszor kell nyúlnia, amikor visszaad, és bal felé haladva egyre nagyobb pénzegységeket. A pénztáros keze úgy megszokja ezt a beosztást, hogy odanézés nélkül is mindig tudja, milyen pénzdarabot vesz ki pl. a harmadik rekeszből. Mi is megállapodhatunk az egyesek, tízesek, százasok helyében. Jobb felől írjuk az egyeseket, azután bal felé haladva sorra az egyre nagyobb egységeket: a második hely a tízeseké, a harmadik a százasoké. Így a szavakat el is hagyhatjuk, mert a számjelek értékét a helyükről is felismerhetjük; ezeknek helyi értékük is van:

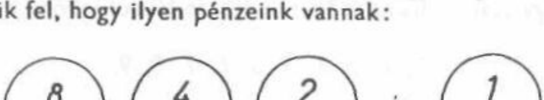
354

4 egyesből, 5 tízesből és 3 százasból áll. Ezt fejezik ki úgy, hogy mi a tízes számrendszert használjuk.

De igazán nem lett volna semmi akadálya sem annak, hogy 10-nél előbb vagy később álljunk meg. Hallottam primitív népekről, akiknek a számolási tudománya ennyiből áll: egy, kettő, sok. Az ő számukra is készíthetünk számrendszert: fogjuk össze a számokat kettőnként. Itt tehát már 2 egyes új egységet ad: 1 kettest, 2 kettes ismét új egységet: 1 négyest, 2 négyes 1 nyolcast s. í. t. és ebben a kettes számrendszerben már két jel:

0, 1

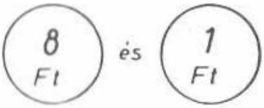
is elég ahhoz, hogy bármilyen számot felírjunk. Legkönnyebben így lehet ezt belátni: tegyük fel, hogy ilyen pénzeink vannak:

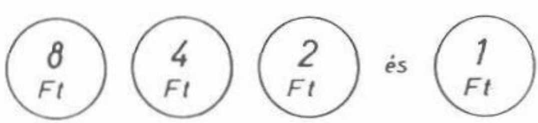


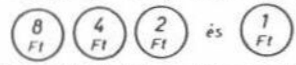
szóval a kettes számrendszer egységei szerepelnek, mint pénzegységek; hogyan lehet a legkevesebb pénzdarabból 11 forintot összeállítani? Világos, hogy ez a 3 darab:

(1.)

együtt 11 forintot ad, és kevesebb pénzdarabból nem is lehet 11 forintot összerakni. Hasonlóan

9 forintot,  (2.)

 (3.)

15 forintot ad összesen; tessék próbálgatni, hogy 1-től 15-ig minden szám úgy rakható össze  -ból, hogy mindegyiküket legfeljebb egyszer használjuk fel: tehát vagy 0-szor, vagy 1-szer. (16-ot már nem sikerül így összerakni, de ez nem is csoda, hiszen $2 \cdot 8 = 16$ lévén, 1 tizenhatos éppen a következő egység.) Az (1.) példa szerint tehát a kettes számrendszerben 11 így írható fel:

1011,

hiszen ez itt 1 egyest, 1 kettest, 0 négyest és 1 nyolcast jelent és ezek együttvéve valóban 11-et adnak; hasonlóan az olvasható ki a (2.) és (3.) példánkból, hogy 9, illetőleg 15 a kettes számrendszerben így írhatók fel:

1001, illetőleg 1111.

Tehát valóban beérhetjük itt két jellel. Fordítva is érdemes gyakorolni: A kettes számrendszerbeli 11101 = 1 egyes + 1 négyes + 1 nyolcas + + 1 tizenhatos = 1 + 4 + 8 + 16 = 29 a tízes számrendszerben.

Mire jó a számrendszerek használata? Minden művelet hasonlíthatatlanul könnyebb lesz, ha ilyen rendet tartunk a számok közt, és például egyesekhez egyeseket, tízesekhez tízeseket adunk összeadáskor; a pénztáros sem összevissza olvassa meg este a bevételt, hanem az egy-egy rekeszben levő egyenlő pénznemeket külön számlálja meg, azután összegezi az eredményeket. A kényelem sokszor visszatérő fontos szempont a matematika fejlődésében. A legkényelmetlenebb művelet az osztás, bizonyára az ezzel járó kínlódás adta az első lökést a számsor parcellázásához is. Milyen kellemes osztások azok, amelyek maradék nélkül végezhetők el! Vannak kedves, derék számok, amelyekben sok-sok más szám van meg maradék nélkül. Ilyen pl. a 60:

$$60 = \begin{cases} 1\cdot 60 \\ 2\cdot 30 \\ 3\cdot 20 \\ 4\cdot 15 \\ 5\cdot 12 \\ 6\cdot 10, \end{cases}$$

tehát 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60 mind maradék nélkül vannak meg 60-ban. Ha tehát e 12 szám valamelyikével akarunk osztani (bár az 1-et kár bevenni közéjük, ez szerencsére se nem szoroz, se nem oszt), akkor emlékezzünk vissza arra, hogy az osztandóhoz is (mint minden számhoz) 1-esekkel való számlálás útján jutottunk; most tehát számláljunk külön 60-at ezekből az 1-esekből, majd ismét 60-at, amíg csak lehet; e 60-asok osztása játszi könnyedséggel elvégezhető és kívülük még legfeljebb 59 marad, tehát nem nagy szám; ennek osztására már rászánhatjuk magunkat, ha lesz is maradék. Ebből a szempontból tehát 60-anként kellene összefogni a számokat, és a régiek a maguk csillagászati tevékenységében, ami sok kellemetlen osztást kívánt meg, valóban a 60-as számrendszert vezették be a szögek és az idő mérésére: egy teljes körívnek ma is a $6\cdot 60 = 360$-ad részét nevezzük 1 foknak, 1 fok 60 percre, 1 perc 60 másodpercre oszlik, és ugyanilyen az óra beosztása is percekre és másodpercekre.

60 azonban aránylag nagy szám, nem elég kényelmes dolgozni vele. A tíz körüli számok közül 12-nek van a legtöbb osztója:

$$12 = \begin{cases} 1\cdot 12 \\ 2\cdot 6 \\ 3\cdot 4, \end{cases}$$

1, 2, 3, 4, 6, 12, ez hat osztó, míg 10 csak négy számmal osztható maradék nélkül: 1-gyel, 2-vel, 5-tel és 10-zel. Vannak is nyomai a 12-es számrendszer használatának: az év 12 hónapból, a tucat 12 darabból áll. Hogy mégis a tízes számrendszer kerekedett felül, az arra vall, hogy az ujjakkal való játék erősebben befolyásolja az embert, mint a célszerűség. A franciák még arra is emlékeznek, hogy valamikor a lábujjaikkal is el lehetett játszadozni: csak olyan ember nevezheti a nyolcvanat „négyszer húsz"-nak (quatrevingt), aki a húszas számrendszerhez szokott valaha.

De mi most már szorítkozzunk a tízes számrendszerre, és nézzük meg, hogy ez milyen előnyöket jelent az osztás számára.

Elsősorban persze akkor jelent előnyt, ha 10 valamely osztójával akarunk osztani: 2-vel, 5-tel, vagy magával 10-zel. Ezek megvannak maradék nélkül

10-ben, tehát 2·10-ben, azaz 20-ban, 3·10-ben, azaz 30-ban is, így az összes tízesben, 10·10-ben, azaz 100-ban is, de ennélfogva 2·100-ban, azaz 200-ban, 3·100-ban, azaz 300-ban is, így az összes százasban s. í. t.; tehát látjuk, hogy 2, 5 és 10 maradék nélkül megvan a tízesekben, százasokban, ezresekben s. í. t.; csak az nem biztos, hogy az egyesekben megvannak-e. 10 például minden egyesnél nagyobb, tehát bármilyen érték van is az egyesek helyén, a szám nem lehet (maradék nélkül) osztható 10-zel; ennélfogva 10-zel azok a számok oszthatók, amelyekben nincs egyes. A hiányzó egyest 0 pótolja, így jutunk az ismert szabályhoz, hogy 10-zel a 0-ra végződő számok oszthatók. Az egyedüli egyes, amivel 5 osztható, maga az 5, ezért van az, hogy 5-tel a 0-ra vagy 5-re végződő számok oszthatók. Végre a 2-vel osztható egyesek: 2, 4, 6, 8, tehát 2-vel azok a számok oszthatók, amelyek 0-ra, 2-re, 4-re, 6-ra vagy 8-ra végződnek: ezeket nevezik páros számoknak.

Ezzel kimerítettük 10 osztóit, de a tízes számrendszer adta lehetőségeket még nem. E számrendszer következő egysége a 100. Ez módot ad arra, hogy 100 osztóival is könnyen bánjunk el. Például 4 a 10-ben nincs meg maradék nélkül, de 100-ban igen, hiszen 4·25 = 100. Tehát 4 is megvan 2·100-ban, azaz 200-ban, általában 100 minden többszörösében is maradék nélkül, tehát minden százasban, 10·100-ban, azaz 1000-ben is, tehát minden ezresben s. í. t., csak az nem biztos, hogy a tízesekben és az egyesekben megvan-e. Annak eldöntésére tehát, hogy egy akármilyen hosszú szám osztható-e 4-gyel, csak az utolsó két helyet kell megvizsgálni. Pl.:

$$3\,478\,5\underline{24}$$

osztható 4-gyel, mert 24 osztható vele; ezt egy pillantással eldönthetjük, mintha az előző öt jegy ott sem volna. Ugyanígy dönthetjük el egy pillanat alatt, hogy

$$312\,486\,4\underline{34}$$

nem osztható 4-gyel, mert 34-ben a 4 nincs meg maradék nélkül.

100 osztói után 1000 osztói kerülnek sorra. Például 8 a 100-nak nem osztója, mert 80-ban megvan, de a még hátralevő 20-ban már nincs meg maradék nélkül, 1000-nek azonban osztója, mert 1000 így tagolható szét: 800 + 160 + 40 és minden részletében maradék nélkül megvan a 8. Ennélfogva 8 minden ezresben, tízezresben, százezresben s. í. t. megvan maradék nélkül; és így annak eldöntésére, hogy egy akármilyen hosszú szám osztható-e 8-cal, csak a három utolsó helyet kell megnézni.

Így van egy receptünk annak eldöntésére, hogy mikor oszthatók a számok egy bizonyos kiválasztott számmal: csak azt kell megnéznünk, hogy ez a kiválasztott szám osztója-e a 10-nek, ez esetben az oszthatóságot már az egyesek eldöntik; ha nem, akkor tovább kell menni és megnézni, hogy 100-nak, 1000-nek, 10 000-nek osztója-e a kérdéses szám, és ennek megfelelően egyre több helyet kell megvizsgálni az oszthatóság eldöntésére. Persze vannak olyan számok, melyek sem 10-nek, sem 100-nak, sem 1000-nek, sem a tízes számrendszer bármilyen egységének nem osztói, sőt könnyen belátható, hogy a számok többsége ilyen. Ezekre is adnak azonban az ilyen vizsgálódások valamilyen törvényszerűséget. Legegyszerűbb ez a 9 esetén:

$$10 = 9 + 1,\ 100 = 99 + 1,\ 1000 = 999 + 1, \ldots$$

tehát 9 nem lehet osztója sem 10-nek, sem 100-nak, sem 1000-nek, mert bármelyiket próbáljuk osztani vele, marad 1; de éppen ez, hogy mindig 1 marad, vezet egy egyszerű oszthatósági szabályra: ha 10-et osztunk 9-cel, 1 marad, tehát ha 20-at osztunk vele 2, ha 30-at 3, általában, ha tízeseket osztunk 9-cel, annyi marad, ahány tízest osztottunk. Ugyanígy, ha 100-at osztunk 9-cel, 1 marad, tehát ha 200-at osztunk vele 2, általában százasok osztásakor 9-cel annyi marad, ahány százast osztottunk. S. í. t. Tehát, ha egy számnak 9-cel való oszthatóságát kell eldöntenünk, legcélszerűbb ezt a számot széttagolni egyesekre, tízesekre, százasokra s. í. t. Pl.

$$234 = 2 \text{ százas} + 3 \text{ tízes} + 4 \text{ egyes},$$

a 2 százas osztásakor 2 marad, a 3 tízes osztásakor 3, a 4 egyes osztásakor 4, összesen tehát $2 + 3 + 4$ marad, de

$$2 + 3 + 4 = 9,$$

ez osztható 9-cel: a maradékok együttvéve 9-cel osztható számot adnak; tehát 234 osztható 9-cel. Íme a keresett szabály: egy szám osztható 9-cel, ha számjegyeit összeadva 9-cel osztható számot kapunk. Egy többjegyű szám számjegyeinek összege pedig jóval kevesebb szokott lenni, mint maga a szám; rendszerint egy pillantással eldönthető róla, hogy osztható-e 9-cel. Legyen például a megvizsgálandó szám:

$$2\,304\,576.$$

A számjegyek összege:

$$2 + 3 + 4 + 5 + 7 + 6 = 27,$$

aki az egyszeregyet tudja, az egy pillanat alatt látja, hogy ez osztható 9-cel. Viszont

$$2\,304\,577$$

nem osztható 9-cel, mert

$$2 + 3 + 4 + 5 + 7 + 7 = 28,$$

és 28-ban a 9 nincs meg maradék nélkül.

Mindaz, ami itt történik, az osztás okozta nehézségek kerülgetése. Már ez a kerülgetés is termékeny: lépten-nyomon nem várt érdekes összefüggésekre bukkanunk közben. Egyszer majd rászánjuk magunkat és szembenézünk azzal az osztással, amely nem végezhető el maradék nélkül: ez majd távlatokat nyit a matematika legmerészebb elgondolásai felé is.

4. A BŰVÉSZINAS

Az oszthatóság fogalma még sok érdekességre vezet, amikkel érdemes eljátszadozni. Ilyen például az a felfedezés, hogy vannak „barátságos számok": két szám barátságos, ha az egyiknek valódi osztóit összeadva a másik számot kapjuk eredményül és viszont. A „valódi" osztók közé magát a számot nem szokás számítani, így pl. 10 valódi osztói: 1, 2 és 5. Ilyen barátságos számok 220 és 284, mert

$$220 = \begin{cases} 1\cdot 220 \\ 2\cdot 110 \\ 4\cdot 55 \\ 5\cdot 44 \\ 10\cdot 22 \\ 11\cdot 20 \end{cases} \quad \text{és } 284 = \begin{cases} 1\cdot 284 \\ 2\cdot 142 \\ 4\cdot 71, \end{cases}$$

tehát 220 valódi osztóinak összege:

$$1+2+4+5+10+11+20+22+44+55+110=284$$

és 284 valódi osztóinak összege:

$$1+2+4+71+142=220.$$

Sőt „tökéletes szám" is van: olyan szám, mely saját valódi osztóinak öszszegével egyenlő. Ilyen például a 6, mert valódi osztói: 1, 2 és 3, és

$$1+2+3=6.$$

A régiek bizonyos mágikus tulajdonságokat tulajdonítottak az ilyen számoknak, és ezért kutatás indult meg tökéletes számok után. Találtak is több tökéletes számot; ezek közül a 28-at könnyen ellenőrizhetjük:

$$28 = \begin{cases} 1\cdot 28 \\ 2\cdot 14 \\ 4\cdot 7, \end{cases}$$

$$1+2+4+7+14=28;$$

a többi már jóval nagyobb. Mindezek páros számok; páros tökéletes számok előállítására még receptet is tudtak adni, de máig sem tudjuk, hogy ez a recept akárhány tökéletes számot szolgáltat-e, vagy pedig megakad valahol. Páratlan tökéletes számot eddig egyet sem találtak; nyitott kérdés, hogy van-e egyáltalán.

Miről is van itt szó? Az ember megteremtette a maga céljaira a természetes számsort, ez az ő alkotása, a számlálás és a számlálásból eredő műveletek céljait szolgálja. De ha már egyszer megteremtette, többé nincs hatalma fölötte. A természetes számsor van, önálló létet kapott, többé nem lehet módosítani rajta, megvannak a saját törvényei, saját egyéni tulajdonságai, olyan tulajdonságok, amikre álmában sem gondolt az ember, amikor megalkotta. A bűvészinas káprázó szemmel áll a felidézett szellemek előtt. A matematikus „semmiből teremt új világot", azután ez a világ a maga rejtelmes, váratlan törvényszerűségeivel megfogja őt, most már nem alkotó, hanem kutató: a maga felidézte világ összefüggéseit, titkait kutatja.

Ez a kutatás azért olyan csábító, mert szinte semmi felkészültség sem kell hozzá, csak két kíváncsi szem. Egy 10 éves tanítványom jött hozzám egyszer a következő problémával: „én már az előző osztályban észrevettem, hogy ha összeadom a számokat egy páratlan számig, például 7-ig, akkor ugyanannyit kapok, mintha ezzel a számmal megszoroznám a »közepét«, például 7-nek a közepe 4 (ezt bizonyára így kell érteni: a 7-ig növekvő számok között 4 van a középen: 1, 2, 3, $\underline{4}$, 5, 6, 7) és $7 \cdot 4 = 28$, a számok összege 7-ig pedig

$$1+2+3+4+5+6+7 \text{ ugyancsak } 28.$$

Tudom, hogy ez mindig így van, de nem tudom, hogy miért". Hát ez bizony számtani sor, gondoltam magamban, hogy is magyarázzam meg ezen a fokon. Mindenesetre az osztály elé tártam: „Zsuzsinak van egy érdekes problémája." Még jóformán be se fejezem, hát a legélénkebb eszű kislány úgy jelentkezik, hogy majd kiesik a padból. „Csacsiság lesz az Évi, ennyi idő alatt csak nem jöhettél rá.". De nem, ő tudja. „Hát mondd." „Zsuzsi ezt mondta: $7 \cdot 4$. Ez azt jelenti, hogy

$$4+4+4+4+4+4+4.$$

Ezt mondta Zsuzsi

$$1+2+3+4+5+6+7$$

helyett. Tehát 1 helyett 4-et mondott, vagyis 3-mal többet. De 7 helyett is 4-et mondott, vagyis 3-mal kevesebbet, és ezek kiegyenlítik egymást. Ugyanígy igaz, hogy 4 2-vel több, mint 2, de ugyancsak 2-vel kevesebb, mint 6, így ezek is kiegyenlítik egymást. Hasonlóan a 3 és 5 helyett mondott 4-esek is, tehát a két összeg valóban egyenlő." Kénytelen voltam elégtételt szolgáltatni Évinek: én ezt sohasem tudtam volna ilyen szépen elmagyarázni.

Csodálatos megfigyeléseik vannak az ilyen kis elfogulatlan kutatóknak. „Ez olyan, mint egy füzet!" – kiáltott fel Marika, egy másik kis tanuló. „Hogy érted ezt?" „Itt az első és az utolsó tag egyenlítette ki egymást, azután a második és az utolsó előtti; a füzetben is így függnek össze a lapok: az első az utolsóval, a második az utolsó előttivel." Ezeket a kis kutatókat a tiszta érdeklődés vezette, Gauss, a „princeps matematicorum" állítólag utilitarizmusból jött rá ugyanerre az összefüggésre kisiskolás korában. Ez a történet úgy szól, hogy Gauss tanítója egyszer egy kis nyugalmat akart, és ezért azt a hosszadalmas feladatot rótta az osztályra, hogy adják össze 1-től 100-ig mind a számokat. Mégsem volt nyugalom, mert a kis Gauss pillanatok múlva felkiáltott: „Az eredmény 5050!" A tanító kénytelen volt elismerni, hogy ez igaz, de hogy sikerült ezt ilyen gyorsan kiszámítani? „Észrevettem, hogy $1+100 = 101$, $2+99=101$, $3+98=101$ s. í. t., így mindig 101-et kapok, utoljára $50+51=101$, tehát 50 ilyen összeadás után találkoznak össze az elölről és hátulról vett összeadandók a középen. Márpedig $50\cdot 101 = 5050$."

A kis Gauss egy páros számig adta össze a számokat, és így kapott ugyanolyan ügyes módszert a soktagú összeadás gyorsítására, mint az én Zsuzsim, ha egy páratlan számig ment. Ha egy kicsit csavarosan gondolkozunk, a kétféle eljárást egyesíteni is lehet. Ismeretes tréfa, hogy valaki ránéz egy legelésző nyájra és kijelenti: „357 juh van a nyájban". Ha megkérdezik, hogy tudta ezt megszámlálni, így felel: „Nagyon egyszerűen. Megszámláltam a lábakat és osztottam 4-gyel." A matematikus néha csakugyan így jár el. Ha például összegezni kell a számokat egy bizonyos számig, akár páros, akár páratlan ez a szám, gondolkozás nélkül kiszámíthatjuk a keresett összeg kétszeresét, úgy hogy az első számhoz az utolsót adjuk hozzá, a másodikhoz az utolsó előttit s. í. t. a következő módon: kétszer írjuk le egymás alá a kijelölt összeadást, fordított sorrendben. Pl.

$$\begin{matrix} 1+2+3+4 & \text{vagy} & 1+2+3+4+5 \\ 4+3+2+1 & & 5+4+3+2+1. \end{matrix}$$

Így éppen azok a tagok kerültek egymás alá, amelyeket egymással akarunk összeadni. Az egymás alá írt tagokat összeadva

$$\begin{matrix} 5+5+5+5= & \text{illetőleg} & 6+6+6+6+6= \\ =4\cdot 5=20 & & =5\cdot 6=30 \end{matrix}$$

lesz az eredmény, ennyi a keresett összegek kétszerese; magukat az összegeket megkapom, ha ezeket osztom 2-vel, tehát az eredmény: 10, illetőleg 15, és valóban

$$1+2+3+4=10 \qquad \text{és} \qquad 1+2+3+4+5=15.$$

Látjuk, hogy a szabály mindkét esetben: az első és az utolsó tag összegét kell szorozni a tagok számával és az eredmény felét venni. Ebben benne van Zsuzsi eredménye is, Gaussé is: $1+2+3+4+5+6+7$ esetén az első és az utolsó tag összege 8, ezt szorozva a tagok számával, $7 \cdot 8 = 56$, ennek a fele 28;

$1+2+3+\ldots+100$ esetén pedig az első és az utolsó tag összege 101, ezt szorozva a tagok számával: $100 \cdot 101 = 10\,100$, ennek a fele 5050.

Világos – az én osztályom mindjárt észrevette –, hogy nemcsak az egymást közvetlenül követő számok összege számítható ki ezzel a szabállyal, hanem általában olyan számoké, melyek egyenlő nagy lépésekben követik egymást, például (a kiindulás lehet bármi):

$$5+7+9+11+13,$$

ahol minden következő tag 2-vel nagyobb az előzőnél, vagy

$$10+15+20+25+30+35,$$

ahol 5 a különbség bármely két szomszédos tag között. Hiszen ezekre is igaz, hogy az első és az utolsó tag összege ugyanannyi, mint a második és utolsó előtti tagé s. í. t. Tessék kipróbálni: az első példában

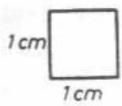
$$5+13=18, \quad 7+11=18,$$

és az első összeg kétszeresének kiszámításakor a középen fellépő $9+9$ is 18; a második példában pedig

$$10+35=45, \quad 15+30=45, \quad 20+25=45.$$

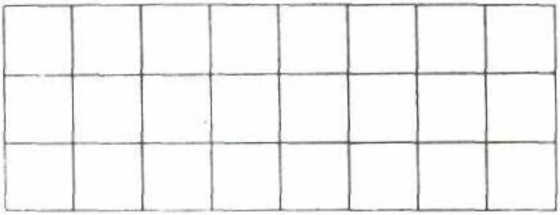
Az ilyen egyenlőközű számsorozatokat nevezik a matematikusok számtani sorozatnak.

Érdekes, hogy ugyanaz a gondolat a matematika különböző területein is felbukkan. Pl. ugyanaz a fogás, amivel a számtani sor tagjait összegeztük, segít a területszámításban is. A téglalap területét még könnyű kiszámítani, ez még egyszerűbben megy, mint a kocka köbtartalma: egy kis négyzetet választunk egységül és megnézzük, hogy hány ilyen egységgel lehet kirakni a téglalapot. Legyen pl. egy négyzetcentiméter az egység, azaz egy olyan kicsi négyzet, melynek hosszúsága is, szélessége is 1 cm:



Rakjunk 8 ilyen kis négyzetet egymás mellé:

már ez is téglalap; hogy ne legyen ilyen lapos, rakjunk 3 ilyen sort egymás fölé:

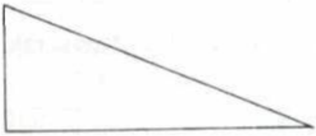


Az így nyert téglalap $3 \cdot 8 = 24$ kis négyzetből áll. Fordítva, ha egy olyan téglalapból indulok ki, melynek hosszúsága 8 cm és szélessége 3 cm, akkor $3 \cdot 8 = 24$ négyzetcentiméter fér bele, és általában úgy kapom meg egy téglalap területét, hogy két szomszédos oldalának hosszát szorzom egymással.

Jegyezzünk még meg annyit a téglalapról, hogy szomszédos oldalai derékszöget alkotnak egymással (ezt úgy is szokás kifejezni, hogy merőlegesek egymásra). A derékszög olyan derék szöglet, amire például házépítéskor is nagyon vigyáznak: ennek egyik szára nem hajlik sem a másik felé, sem pedig el nem hajlik a másiktól, mint hegyes-, illetőleg tompaszög esetén:

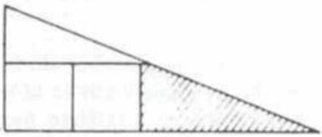
(Így hajló falak könnyen le is dőlnének), hanem derék fegyelmezettséggel tartja az egyensúlyt:

A három egyenes határolta idomban, a háromszögben is lehet derékszög, de csak egy; tessék megpróbálni: bárhogyan is igyekszik az ember, a másik két szög hegyesre sikerül:



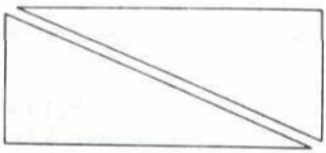
A derékszögű háromszög derékszöget *bezáró* oldalait befogóknak, a derékszöggel *á*tellenes oldalt átfogónak nevezik.

Mármost egy ilyen derékszögű háromszög éppen a hegyesszögei miatt semmiképpen sem rakható ki a mi négyzet alakú területegységeinkkel:



már az első sorban kimarad a bevonalkázott sarok. Itt tehát probléma a terület kiszámítása.

De nagyon könnyen megoldható probléma: ha egy háromszög területét nem tudjuk kiszámítani, számítsuk ki kettőét. Illesszük egy ugyanilyen háromszög átfogóját fordítva a mi háromszögünk átfogója mellé; téglalapot kapunk:

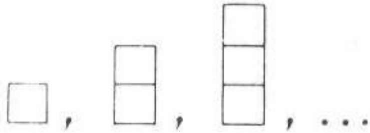


ennek pedig már ki tudjuk számítani a területét: csak két szomszédos oldalát kell szoroznunk egymással. A téglalap két szomszédos oldala pedig éppen háromszögünk két befogója. Így ki tudjuk számítani a háromszög kétszeres területét; egy háromszögét úgy kapjuk meg, hogy az eredményt osztjuk kettővel. Tehát a derékszögű háromszög területét úgy számítjuk ki, hogy a befogóinak hosszát szorozzuk egymással és azután az eredmény felét vesszük.

Egészen világossá válik, hogy itt ugyanaz a vezető gondolat, mint a számtani sorozat tagjainak összegezésében, ha Euklidész kifejezésmódját követjük, aki 2000 évvel ezelőtt csodálatosan teljes matematikai művel ajándékozta meg a világot. Euklidész geometriai köntösben írja le azt is, ami számok közt megy végbe: nála

1., 2., 3., ...

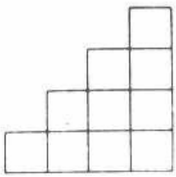
jele



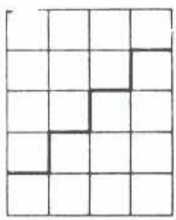
lehetne, így pedig az

$$1 + 2 + 3 + 4$$

összeg ábrázolása egy ilyen „lépcsős háromszög" volna:



és az a fogás, hogy az összeget még egyszer fordított sorrendben alá – vagy itt inkább fölé – írjuk, abban nyilvánulna meg, hogy még egy ilyen lépcsős háromszöget illesztünk az előbbi fölé:

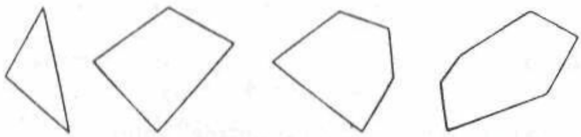


hiszen így kerül 1 fölé 4, 2 fölé 3, 3 fölé 2 és 4 fölé 1. Az egymás fölöttiek mindenütt 5-öt, összesen $4 \cdot 5 = 20$-at adnak, annak megfelelően, hogy az így keletkező téglalap hosszúsága 4, szélessége 5 egység, tehát a területe $4 \cdot 5$ területegység. Ennyi a keresett összeg kétszerese, maga az összeg a fele ennek, aminthogy az egyik lépcsős háromszög területe is a téglalap területének a fele. Itt azután igazán látszik, hogy ugyanazt a gondolatot mondtuk el egyszer aritmetikai, egyszer geometriai nyelven. Látni fogjuk, hogy ezt a gondolatot még sokféleképpen lehet variálni.

5. EGY ALAPTÉMA VARIÁCIÓI

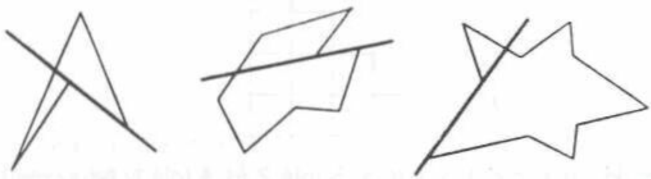
Mikor is fordul elő az, hogy 1-től kezdve összegeznünk kell a számokat? Ide vezet a következő, látszólag egészen távolfekvő probléma is:

Háromszöget, négyszöget már láttunk; általában sokszögnek nevezik az egyenesekkel határolt zárt idomokat:



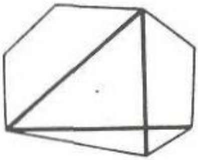
Mindezek, amiket felrajzoltam, úgynevezett „konvex" sokszögek: sehol sem horpadnak be, mint az alábbiak:

Pontosabban az különbözteti meg az alábbiakat a fentiektől, hogy lehet úgy meghosszabbítani valamelyik oldalukat, hogy ez a meghosszabbítás kettévágja őket:



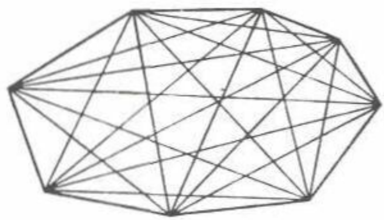
Tessék megpróbálni, hogy a fentiekkel ez nem tehető meg. Ezt a különbséget tisztázni kellett; a továbbiakban most már mindig konvex sokszögekről lesz szó. (Hasonló megkülönböztetést teszünk testek közt is.)

Átlónak nevezzük két nem szomszédos csúcs távolságát (a szomszédos csúcsokat ugyanis nem átló, hanem az egyik oldal köti össze). Például az alábbi sokszögbe belerajzolok néhány átlót:



Ármost a probléma ez: egy adott sokszögbe, mondjuk egy nyolcszögbe, hány átlót lehet rajzolni?

Még ha mind belerajzolom is ezeket, akkor sem könnyű megszámlálni, annyira sűrűn lepik el az ábrát:

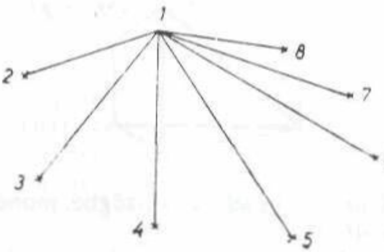


A feladat egyszerűbbé válik, ha nem teszünk különbséget szomszédos és nem szomszédos csúcsok között, ha tehát egyelőre az oldalakat is hozzászámítjuk; azt úgyis tudjuk, hogy 8 oldal van, tehát az eredményből majd 8-at kell levonni.

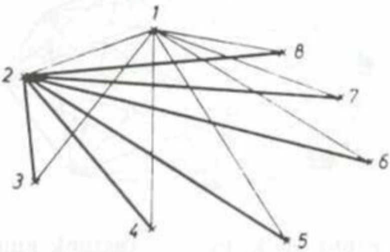
Ebben a formában így hangzik a feladat: adva van egy nyolcszög 8 csúcsa:

hányféleképpen lehet ezeket összekötni egymással? A megoldásra pedig két út kínálkozik.

Az egyik az, hogy az 1. pontot összekötjük a többi héttel, így már 7 vonalat kapunk:



Ezután a 2. pontot kötjük össze a többiekkel, az első kivételével, hiszen azzal már összekötöttük; így 6 újabb vonal járul az eddigiekhez:



Most a 3. pontot kötjük össze a többiekkel a már elintézett első két pont kivételével, így 5 új vonal jön létre, hasonlóan a 4. pont összekötésekor 4, az 5. pont 3 újabb vonalat szolgáltat, a 6. pont 2-t, a 7. pont 1-et, a 8-at ezalatt már minden előzővel összekötöttük, így ez már nem ad újat. Összesen tehát

$$7+6+5+4+3+2+1$$

vonalat kaptunk így, vagy fordított sorrendben:

$$1+2+3+4+5+6+7$$

vonalat.

A másik út e vonalak megszámlálására az, hogy megnézzük: egy-egy csúcsból hány ilyen vonalat lehet húzni, a többitől függetlenül. Természetesen 7-et, hiszen minden csúcsot a többi héttel köthetünk össze. Most így lehetne tévesen továbbokoskodni: ha egy csúcsból 7, akkor 8 csúcsból összesen $8 \cdot 7$ ilyen vonal húzható. Ez azért helytelen, mert minden vonal két csúcsot köt össze; tehát így pl. az 1. és 6. csúcsot összekötő vonalat akkor is számba vettük, amikor az 1. csúcsból kiinduló vonalakat számláltuk meg, és akkor is, amikor a 6. csúcsból kiindulókat. A hiba tehát mindössze annyi, hogy így minden vonalat kétszeresen számítottunk: a helyes eredmény $8 \cdot 7 = 56$-nak a fele lesz, vagyis 28.

A két módon ugyanahhoz az eredményhez kell jutnunk,

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7$$

tehát $8 \cdot 7$-nek a felével egyenlő; ez ismét az én Zsuzsi tanítványom eredménye.

A téma azonban tovább is variálható; az itt fölvetett kérdést így is át lehet fogalmazni: minthogy bármelyik vonal két csúcsot köt össze, tulajdonképpen az a kérdés, hogy 8 csúcs közül hányféleképpen lehet 2 csúcsot kiválasztani. Itt pedig igazán nem fontos, hogy éppen csúcsokról van szó; akár azt a kérdést is fölvethetnénk, hogy egy zacskóban van 8 különböző színű golyó, hányféleképpen lehet ezekből 2 golyót kihúzni? Vagy: ha 8 gyereket párba állítunk, hányféleképpen lehet az első párt megválasztani? Mindezt a matematikus így fejezi ki: 8 elemből hány kéttagú kombinációt lehet alkotni?

Ha az 1 2 3 4 5 6 7 8 számokkal jelölöm az elemeket, akkor a belőlük alkotott „kéttagú kombinációk" (egyszerűbben párok):

1 2	2 3	3 4	4 5	5 6	6 7	7 8
1 3	2 4	3 5	4 6	5 7	6 8	
1 4	2 5	3 6	4 7	5 8		
1 5	2 6	3 7	4 8			
1 6	2 7	3 8				
1 7	2 8					
1 8						

Nagyon szépen látható, hogy a számuk, jobbról balfelé haladva:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7,$$

másrészt itt is úgy okoskodhatunk, hogy bármelyik elem összepárosítható a többi héttel, így a 8 elem $8 \cdot 7$ párt szolgáltatna; de ekkor minden párt kétszer vettünk számba: akkor is, amikor az első tagjának párosításait számláltuk meg, és akkor is, amikor a második tag párosításait; a helyes eredmény tehát ismét $8 \cdot 7$-nek a fele.

Ennyi különböző kiindulás torkollik ugyanebbe a végeredménybe; nem visz rá a lélek, hogy ezt meg ne fogalmazzam egy képlet alakjában. Csak azt kell ehhez előrebocsátanom, hogy a matematikában a zárójel nem azt jelenti, hogy mellékesen jegyzünk meg valamit, hanem azt foglalja zárójelbe a matematikus, aminek összetartozását ki akarja hangsúlyozni. Például $(2 + 3) \cdot 6$ azt jelenti, hogy a $2 + 3$ összeadás eredményét, azaz 5-öt kell szorozni 6-tal, míg zárójel nélkül írva $2 + 3 \cdot 6$ arra szólít fel, hogy 2-höz adjuk hozzá a $3 \cdot 6$ szorzás eredményét (az megállapodás, hogy a szorzás „erősebben köt", mint az összeadás, tehát ezt nem kell $2 + (3 \cdot 6)$ alakban írnunk). – Azt mindenki tudja, hogy 4-nek, 6-nak, 10-nek a fele így írható: $\frac{4}{2}, \frac{6}{2}, \frac{10}{2}$, általában az osztást ilyen „tört alakban" is lehet kijelölni. Ezek után, azt a számot, ameddig a számokat 1-től kezdve összegezzük, n-nel jelölve, az első és az utolsó tag összege $1 + n$ lesz, ezt a tagok számával, vagyis n-nel kell szoroznunk, és 2-vel osztanunk, tehát alaptémánk minden variációját a következő képletben foglalhatjuk össze:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{(1+n)\cdot n}{2}.$$

A matematika tulajdonképpen nyelv: furcsa nyelv, amely csupa szimbólumban beszél. A fenti képlet is csak szimbólum, önmagában nem jelent semmit; mindenki a maga élményét helyettesítheti bele. Az egyik ember számára a sokszög átlóinak megszámlálását, a másik ember számára a növendékeit vezető pár megválasztásának lehetőségeit jelentheti. A formula felírása az örömünk kifejezése azon, hogy mindezt egyetlen gondolat segítségével tudjuk megoldani.

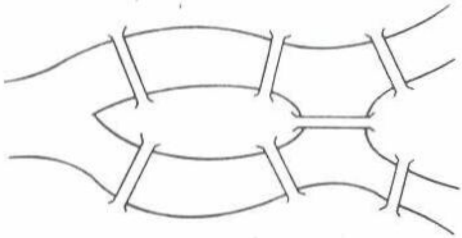
Utóirat a mérték nélküli mértanról

Közben két új téma is csendült meg: egy geometriai és egy aritmetikai. Először a geometriait szeretném egy kicsit követni.

Nézzük meg még egyszer azt az ábrát, amely a nyolcszöget ábrázolja valamennyi átlójával. Ezt egészen áttekinthetetlenné teszi az, hogy az átlók keresztül-kasul metszik egymást, se szeri, se száma a metszéspontoknak; még szerencse, hogy konvex a sokszög, a csúcsai mind kívül vannak, és így nem téveszthetők össze e metszéspontokkal. Könnyebbé tenné az áttekintést, ha az átlók a csúcsokban rögzített gumiszalagból lennének, és ki lehetne őket húzni a térbe. Egy-egy ember megfogna egy-egy ilyen átlót, a másodikat kicsit magasabbra húznák mint az elsőt, a harmadikat még egy kicsit magasabbra s. í. t.; így legalább nem metszenék egymást,és közben meg is lehetne számlálni őket. Mert a számukat ez a nyújtás nem változtatja meg.

Van is egy egész külön ága a geometriának – topológiának hívják –, amely az idomoknak oly tulajdonságaival foglalkozik, amiken nem változtat, ha gumiból készítjük el és tetszés szerint nyújtjuk, vagy összenyomjuk őket. Furcsa, hogy ez a tudomány is a *mér*tan körébe tartozik, hiszen itt mérésről szó sem lehet: nyújtás közben a távolságok hossza, a szögek nagysága megváltozik. A mi szempontunkból az is érdekessé teszi ezeket a vizsgálatokat, hogy újak, ismerjük az eredetüket,és itt a szemünk előtt zajlott le: hogyan születik a matematikának egy ága egy játékból.

Ez a játék egy találós kérdés volt a königsbergi hidakkal kapcsolatban. A Königsberg melletti Pregel-folyó két szigetét egymással és a parttal hét híd köti össze, a következő rajz szerint:



A találós kérdés az, hogy lehet-e – bárhol elindulva – olyan sétát kieszelni, hogy végül is a kiindulópontra jussunk vissza és közben mind a hét hídon végigsétáljunk, de mindegyiken csak egyszer. Tessék próbálgatni; közben majd világossá válik, hogy semmit sem változtatna a feladaton, ha az egy partra, illetőleg egy szigetre vezető hidak a szóban forgó földdaraboknak ugyanazon pontjába futnának össze (ez csak a szárazföldön való átsétálást teszi elkerülhetővé), tehát ilyen volna a térkép:

ha az bolondság is, hogy a bal oldali sziget ugyanazon pontjából az egyik part ugyanazon pontjáig két hidat vezessenek; de feltehető, hogy az egyik gyalogosok, a másik kocsik számára épült. Ez a meggondolás lehetővé teszi, hogy egyszerűbb vázlatos rajzot készítsünk:

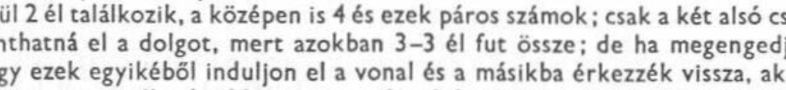
és a kérdés úgy módosítható, hogy le lehet-e rajzolni ezt az ábrát egyetlen ceruzavonással, a ceruza felemelése nélkül (hiszen a sétáló nem emelkedhetik a levegőbe) úgy, hogy kétszeresen ne rajzoljunk meg egyetlen vonaldarabot sem, és végül oda jusson vissza a ceruza, ahonnan elindult. Ez a feladat már bizonyára ismerősen hangzik: ezt a kérdést fel szokták vetni az ilyen levélborítékokkal kapcsolatban is:

Világos, hogy ezek a kérdések a topológia körébe tartoznak: azon, hogy egy ilyen ábra egy vonallal megrajzolható-e, mitsem változtat, ha az egész ábrát gumiból képzeljük el és tetszés szerint nyújtjuk, nyomogatjuk, deformáljuk, csak el ne szakítsuk, össze ne tapasszuk egyes darabjait.

Egyöntetű feleletet a nagy Euler adott az ilyenfajta kérdésekre. Ha egyetlen önmagába visszatérő ceruzavonással megrajzolható egy ilyen ábra, akkor a kiindulópontból először kifut a ceruza, de végül ide fog befutni; egyébként valahányszor bejut egy csúcsba, onnan ki is kell lépnie, hogy továbbmehessen. Így minden befutó élnek van egy párja: egy kifutó él és így egy-egy csúcsban páros számú élnek kell találkoznia. Be lehet bizonyítani, hogy ennyi elég is: egy ilyen ábrát biztosan meg lehet rajzolni egyetlen önmagába visszatérő vonallal, ha minden csúcsában páros számú él találkozik.

A königsbergi séta eszerint nem oldható meg: az ennek megfelelő ábra minden csúcspontja lehetetlenné teszi ezt, hiszen a balszélsőben 5, a többi háromban 3–3 él találkozik,és ezek mind páratlan számok.

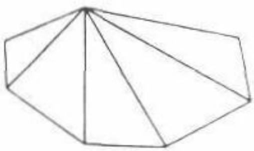
Az első boríték viszont megrajzolható, ha nem kívánjuk, hogy a ceruza a kiindulópontba térjen vissza, mert a három felső csúcsában 4–4, illetve legfölül 2 él találkozik, a középen is 4 és ezek páros számok; csak a két alsó csúcs ronthatná el a dolgot, mert azokban 3–3 él fut össze; de ha megengedjük, hogy ezek egyikéből induljon el a vonal és a másikba érkezzék vissza, akkor mégis megrajzolható, ebben az egymásutánban:



A második boríték ismét reménytelen eset, mert több mint két renitens csúcsa van: csak a legfelső és a középső csúcsban találkozik páros számú él, a többi négyben 3–3.

Ez az a játék, amiből a topológia ered. És nem szabad azt hinni, hogy megmaradt a játékos fokon: nagyon komoly tudományág lett belőle, más tudományok is bőven merítenek ebből, pl. a fizika, amikor áramelágazásokról, az organikus kémia, amikor molekulamodellekről beszél; általában minden olyan esetben topológiai gondolatok merülnek fel, amikor valaminek a struktúrájáról akarunk képet alkotni, a méreteivel nem törődve.

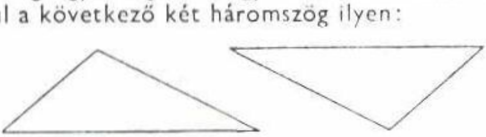
Érdemes egy percig elgondolkozni azon, hogy miféle mértani fogalmak mennek veszendőbe a topológiában. Ilyen fogalmak az egybevágóság és a hasonlóság. Főleg háromszögek egybevágósága és hasonlósága játszik fontos szerepet a geometriában, hiszen más síkidomok háromszögekre tagolhatók szét; a sokszögek átlók segítségével:



és még a kör is háromszögekből összerakott idomnak tekinthető bizonyos elnézéssel (erre még visszatérek), ha elég sűrűn húzunk benne sugarakat:

úgy, hogy egy-egy ívdarab már majdnem egyenesnek látszik. (Tudom, hogy ez a „majdnem" kellemetlen iskolai emlék, bizonytalanságérzés jár vele; megígérem, hogy később pontosan meg fogom adni az értelmét.)

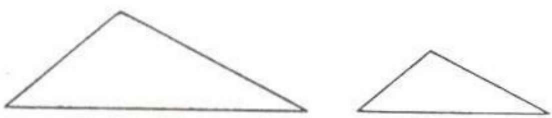
Két háromszög egybevágó, ha egymásra fektethetők úgy, hogy fedjék egymást; például a következő két háromszög ilyen:



erről meggyőződhetünk, ha papírból kivágjuk és egyenlő helyzetbe forgatjuk őket. Egymásra fektetve mind a 6 alkatrészük (3–3 oldal és 3–3 szög) fedi egymást. Ehhez már 3–3 alkatrész megegyezése is elég lehet, pl. az, hogy a háromszögek 2–2 oldala és a közbezárt szögek egyenlők.

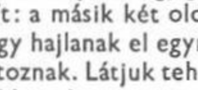
Mert ha csak annyit tudok, hogy az itt vastagon kihúzott adatok egyenlők, akkor az egyenlő szögeket egymásra fektetve, az ezeket bezáró egyenlő oldalak végpontjai is egymásra esnek, és a felső háromszög harmadik oldala e két pont között húzódik, így ez sem tehet mást: ráesik az alsó háromszög harmadik oldalára, a rajtalévő szögekkel együtt.

Két háromszög hasonló, ha az alakjuk egyenlő, de a nagyságuk nem feltétlenül: az egyik a másiknak kicsinyített mása lehet:



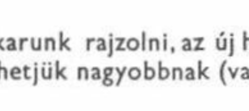
Ezt úgy is elképzelhetjük, hogy a nagy háromszöget lefényképezzük és a fényképezőgép kicsinyít. Így belátható, hogy tetszés szerint választhatjuk meg a kis háromszög egyik oldalát: feltehetjük, hogy gépünk bármilyen kicsinyítésre képes. Főleg pedig nem torzít: a másik két oldalt ugyanilyen mértékben kicsinyíti,és a kis ábrán ugyanúgy hajlanak el egymástól az oldalak, mint a nagy ábrán, a szögek tehát nem változnak. Látjuk tehát, hogy hasonló háromszögek oldalai mind egyenlő mértékben kicsinyítettek, illetőleg nagyítottak (ezt röviden úgy fejezik ki, hogy arányosak), szögeik pedig egyenlők.

Ehhez viszont már az is elég, ha két szögük egyenlő. Mert ha egy adott

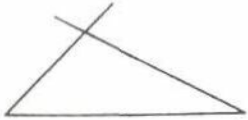


háromszöghöz hasonlót akarunk rajzolni, az új háromszög egyik oldalát, pl. az alsót, tetszés szerint vehetjük nagyobbnak (vagy kisebbnek):

azután erre az adott háromszög két alsó szögét kell rárajzolnunk:

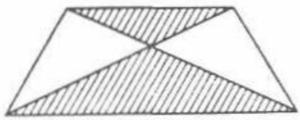


és tovább már semmivel sem rendelkezünk szabadon: a két szög szárát kellően meghosszabbítva, ezek be fogják zárni a háromszöget:



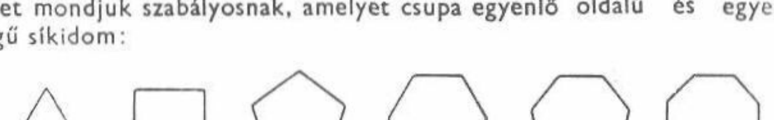
és így csakis ez lehet a keresett hasonló háromszög. A hasonlóságot tehát valóban eldönti 2–2 szög megegyezése.

A mértanban lépten-nyomon egybevágó és hasonló idomokkal találkozunk; pl. az alábbi ún. egyenlő szárú trapézban a fehér háromszögek egybevágók, a bevonalkázottak hasonlók:

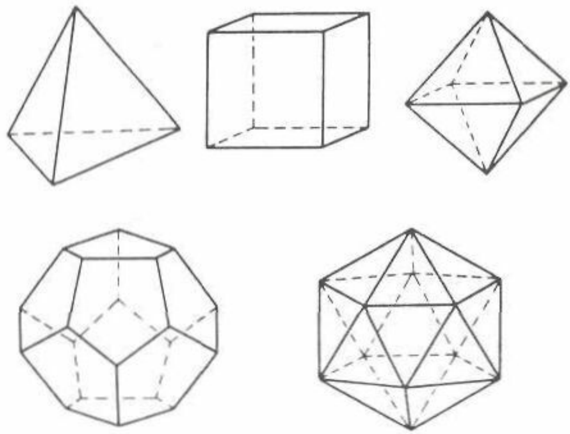


Mármost a topológiában egybevágóságról, hasonlóságról szó sem lehet: nyújtással, összenyomással megváltozik az idomok nagysága is, alakja is, egyenesei el is görbülhetnek, sőt még a síkból is kiléphetnek.

Érdekes, hogy mégis alkalmas a topológia egy olyan kérdés eldöntésére, hogy hány szabályos test van, holott a test „szabályos" volta a legszorosabban összefügg az egybevágósággal és általában a méréssel. Hiszen az olyan konvex testet mondjuk szabályosnak, amelyet csupa egyenlő oldalú és egyenlő szögű síkidom:



határol, ezek egybevágók és minden csúcsban ugyanannyi találkozik belőlük. A topológia úgy nyúl ehhez a kérdéshez, hogy a szabályos testek tulajdonságai közül csak annyival törődik, hogy minden lapjukat ugyanannyi oldal határolja és minden csúcsukban ugyanannyi él fut össze; e tulajdonságoknak pedig nagysághoz, alakhoz már nincs semmi közük. Így sikerül a topológia eszközeivel bebizonyítani, hogy már e kevés feltételt is mindössze 5-féle test teljesítheti. Azt már a mérni is tudó geometria mutatja ki, hogy 5 ilyen szabályos test valóban van is; hármat közülük háromszögek határolnak, a közismert kockát négyszögek, egyet ötszögek:



Ez eléggé meglepő felfedezés, hiszen a síkban semmi akadálya sincs annak, hogy akárhány oldalú szabályos sokszögek jöjjenek létre: az imént lerajzolt sorozatot akármeddig lehetne folytatni. Síkbeli elképzeléseinket tehát nem szabad minden gondolkozás nélkül átvinni a térre: a térben sok minden másképp van.

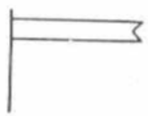
Érdemes ezen még egy kicsit elgondolkozni: vártuk is, hogy a térben új jelenségekkel találkozzunk, hiszen a térben annyival szabadabb a mozgás, mint a síkhoz kötötten. De éppen azt vártuk, hogy itt több lehetőség lesz, mint a síkban, például még sokkal változatosabb fajtái a szabályos idomoknak. És íme: a szabadabb lehetőségek egyesek számára éppen keményebb feltételeket jelentenek, hiszen a feltételek megszabásában is nagyobb a szabadság. Egy test csúcsában nemcsak két él futhat össze, mint síkidomaink csúcsaiban, hanem akárhány él és egyúttal bármiféle lapok is, akár 30 él is találkozhatik az egyik csúcsában, míg a másikban 3, és míg az egyik lapja háromszög, a másik akár harmincszög is lehet. Hogy egy test ne élhessen e gazdag lehetőségekkel, hogy ne legyen, csak egyetlen választása, hogy kénytelen legyen beérni ugyanannyi éllel minden csúcsában, minden lapja körül, az nagyon erős megszorítás. Mindössze 5 test viseli el.

Még a topológia is abban a gondolatkörben jutott eszembe, hogy hogyan lehet az $1 + 2 + 3 + \ldots + n$ összeadást ügyesen elvégezni. Ez is arra vall, hogy a matematika szerves egész: bárhol nyúlunk hozzá, csak úgy tódulnak a kapcsolódó gondolatok a matematika minden más területéről.

6. MINDEN LEHETŐSÉGET MEGJÁTSZUNK

A tanító talán nem veti fel azt a kérdést, hogy hányféleképpen lehet párba állítani az osztályát; igyekszik a párba állítást nagyjából jól megoldani, a barátságok és ellenségeskedések figyelembevételével. De a kis kutató, aki még csupa friss kíváncsiság, igenis végig akar próbálni minden lehetőséget. Az én egyik kis osztályom, amikor arról volt szó, hogy 357-tel úgy is szorozhatunk, hogy az egyeseknél kezdjük a szorzást és úgy is, hogy a százasoknál, rögtön felvetette a kérdést: nem lehetne-e a tízeseknél is kezdeni? És amikor azt feleltem, hogy lehetne, de akkor nagyon kellene vigyázni arra, hogy hova írjuk a részletszorzatokat, rögtön tudni akarták, hogy hányféle lehetőség van egy kijelölt szorzás elvégzésére. Így kénytelen voltam egy kis kitérőt tenni a kombinatorika területére, mert ez az az ága a matematikának, amely a lehetséges elrendezések számával foglalkozik.

Alig van gyerek, akit ne érdekelne például, hogy 3 színből hányféle zászlót lehet csinálni. Egy színből persze csak egyet lehet:

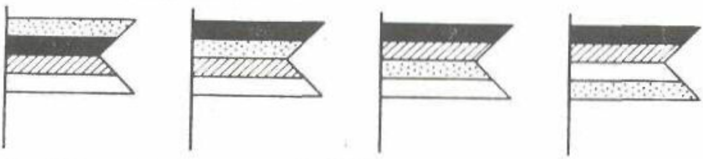


és ehhez egy második vízszintes színes sávot kétféleképpen vehetünk hozzá (ha minden színt csak egyszer akarunk felhasználni): vagy föléje, vagy alája illesztjük:

Hogyan lehet ezekhez egy harmadik színt hozzávenni? Úgy, hogy ezt föléjük, közéjük, vagy alájuk helyezzük; így a bal oldali kétszínű zászlóból 3 új zászló keletkezik:

és a jobb oldaliból is:

tehát 3 színből összesen $2 \cdot 3 = 6$ zászlót készíthetünk. Erről hasonlóan térhetünk át négy színre: a negyedik szín a háromszínű zászlók bármelyikében elhelyezhető az első szín fölé, az első és második szín közé, a második és harmadik szín közé, végre a harmadik szín alá; így minden háromszínű zászlóból 4 négyszínű keletkezik, pl. az elsőből:



így tehát a $2 \cdot 3 = 6$ háromszínű zászlóból összesen $2 \cdot 3 \cdot 4 = 6 \cdot 4 = 24$ zászlót kapunk. Az 1-et – hiszen ez úgysem szoroz – hozzávehetjük szorzóul, akkor a következő szép törvényszerűséget észlelhetjük:

az egyszínű zászlók száma 1,
a kétszínű zászlók száma .... $1 \cdot 2 = 2$,
a háromszínű zászlók száma .... $1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$,
a négyszínű zászlók száma .... $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.

Világos, hogy ez tovább is így megy, és akkor is, ha nem éppen színekről van szó; például 5 gyereknek $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 24 \cdot 5 = 120$ sorrendben lehet kiosztani a levest, vagy bármiféle 6 „elemet" $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 120 \cdot 6 = 720$-féleképpen lehet egymásközt felcserélni, „permutálni".

Ebben az

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6\text{-}$$

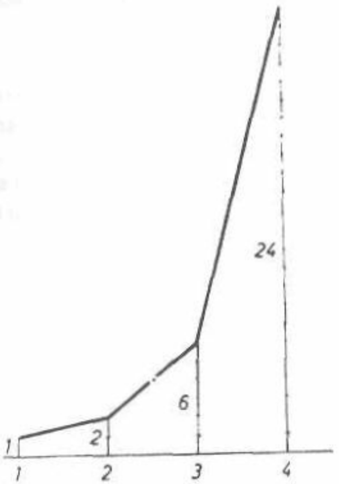
ban a következő felszólítás rejlik: 1-től 6-ig szorozd a számokat és ne tovább! Ezt úgy szokás rövidíteni, hogy csak az utolsó tényezőt írják le és utána a felkiáltójelet, tehát a fenti szorzat rövid jelölése:

$$6!$$

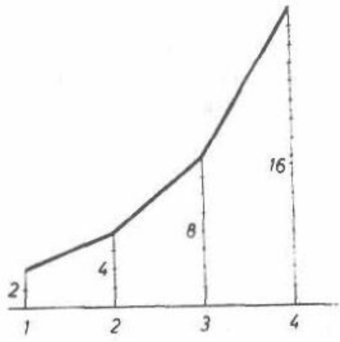
„Tényező" helyett „faktort" is mondanak, ezért 6!-t így olvassák: 6 faktoriális. Pl.:

$$1! = 1, \quad 2! = 1 \cdot 2, \quad 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3, \quad \text{s. í. t.}$$

A faktoriális értéke persze attól függ, hogy meddig megyünk, itt tehát egy új függvénnyel találkoztunk; csináljuk meg gyorsan a lázgörbéjét: a vízszintes vonalon ábrázoljuk azt a számot, ameddig 1-ből kiindulva szorozzuk a számokat, fölfelé pedig a megfelelő faktoriálist:



mellette 2 hatványai:



Látjuk, hogy a faktoriális görbéje eleinte a hatványé alatt marad (tessék megnézni pl. az 1 és 2 közti részt), de azután hirtelen fölébe kerül, sokkal meredekebben szökik tovább. Nemcsak 2 hatványaira igaz ez: a faktoriális minden hatványnál erősebben növekszik. Ez természetes is: bármilyen nagy is az alap, pl. 100, hatványozáskor mindig ugyanezt a 100-at szorozgatjuk egymással; a faktoriális első kilencvenkilenc tényezője kisebb ugyan ennél, de azután egyre növekedő 100, 101, 102, 103, . . . tényezőkkel szorozzuk tovább és így ez előbb-utóbb felülkerekedik.

Az egyszínű zászlók számából fokozatosan számíthattuk ki a két-, három-, négyszínű zászlók számát a szép, szabályos

$$1\cdot2, \qquad 1\cdot2\cdot3, \qquad 1\cdot2\cdot3\cdot4, \ldots$$

szorzatokkal. Hasonló szép eredményekre vezetnek a kombinatorika többi kérdései is. Így pl. azt már tudjuk, hogy bizonyos számú elemből hányféleképpen lehet párokat kiválasztani: bebizonyítottuk, hogy 8 elemből

$$\frac{8\cdot7}{2}\text{-}$$

féleképpen, hasonlóan 15 elemből

$$\frac{15\cdot14}{2}\text{-}$$

féleképpen s. í. t.; nem lehetne-e ebből is fokozatosan felépíteni az adott elemekből kiválasztható hármas, négyes, ötös csoportok számát?

Nézzük meg ismét, hogy az 1 2 3 4 5 6 7 8 elemekből alkotott párok közül egyhez, pl. az

1 2

párhoz hányféleképpen lehet egy harmadik elemet hozzávenni. Itt a sorrend nem számít, csak az, hogy mely elemek jutottak be egy csoportba (pl. arról van szó, hogy egy 8 tagú társaság 3 tagú küldöttséget meneszt valahova; itt csak az a probléma, hogy kik kerüljenek bele ebbe a küldöttségbe). Tehát 1 2-höz hozzávehető a többi hat elem bármelyike, így a következő 6 hármas csoport keletkezik:

1 2 3
1 2 4
1 2 5
1 2 6
1 2 7
1 2 8

(Az aláhúzással egyelőre ne tessék törődni.)

Ugyanígy bővíthető ki minden más pár is 6-féleképpen hármas csoporttá, pl. a 2 5 pár a

2 5 1		1 2 5
2 5 3		2 3 5
2 5 4	vagy nagyság szerint rendezve az	2 4 5
2 5 6		2 5 6
2 5 7		2 5 7
2 5 8		2 5 8

csoportokká, és így első pillanatra az a látszat, hogy 6-szor annyi hármas csoport képezhető a 8 elemből, mint ahány pár volt. De ezek közt megegyezők is lesznek, pl. 1 2 5 az 1 2-ből és a 2 5-ből keletkezett csoportok közt is előfordul (mindkét helyen aláhúztam); sőt elő kell fordulnia az 1 5 pár kibővítései között is, hiszen ehhez is hozzávehetjük harmadik elemül a 2-t. Világos, hogy minden hármas csoportot 3-szorosan kapunk meg így: az egy-egy elemének elhagyása után maradó párok mindegyikéből; pl. 2 3 5-ből egy-egy elemet elhagyva a következő három pár marad:

2 3
2 5
3 5

és 2 3 5 az elsőből 5-nek, a másodikból 3-nak, a harmadikból 2-nek hozzáfüggesztésével jön létre. Ha tehát egyszeresen akarok megkapni minden csoportot, akkor osztanom kell 3-mal. Végül is úgy kapom meg a 8 elemből kiválasztható hármas csoportok számát, hogy a 8 elemből kiválasztható párok számát szorzom 6-tal, és az eredményt osztom 3-mal. Azt már tudom, hogy a párok száma $\frac{8\cdot 7}{2}$; ezt úgy szorozhatom 6-tal, hogy a 2-vel való osztást későbbre halasztom:

$$\frac{8\cdot 7\cdot 6}{2}$$

Most még 3-mal kell osztani. Előbb 2-vel, azután 3-mal osztani ugyanannyi, mint $2\cdot 3$-mal osztani (pl. $\frac{12}{2} = 6$ és $\frac{6}{3} = 2$, ha pedig $2\cdot 3 = 6$-tal osztom 12-t, szintén 2-t kapok). Tehát végül is – még egy lényegtelen 1-es szorzót is hozzávéve a nevezőhöz a szépség kedvéért – 8 elemből

$$\frac{8\cdot 7\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3}$$

számú hármas csoport választható ki. Ugyanígy látható be, hogy 12 elemből

$$\frac{12\cdot 11\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 3}$$

100 elemből

$$\frac{100\cdot 99\cdot 98}{1\cdot 2\cdot 3}$$

hármas csoport.

Ha már a hármas csoportok számát tudjuk, hasonlóan térhetünk át a négyes csoportokra: legyen ismét nyolc elemről szó, akkor bármely hármas csoportból 5 négyes csoport keletkezik, ha a hátralevő elemeket hozzávesszük: pl. az

1 2 3

csoportból az

1 2 3 4
1 2 3 5
1 2 3 6
1 2 3 7
1 2 3 8

csoportok. Eszerint 5-ször annyi csoportot kapnánk összesen, mint ahány hármas csoport volt, de így minden csoportot négyszer is megkapunk; pl. az

1 2 3 4

csoportot

az 1 2 3 csoportból 4 hozzávételével,
az 1 2 4 csoportból 3 hozzávételével,
az 1 3 4 csoportból 2 hozzávételével,
és a 2 3 4 csoportból 1 hozzávételével,

tehát az eredményt még osztani kell 4-gyel. A hármas csoportok száma:

$$\frac{8\cdot7\cdot6}{1\cdot2\cdot3}$$

volt; ezt kell 5-tel szorozni és 4-gyel osztani, tehát a négyes csoportok száma:

$$\frac{8\cdot7\cdot6\cdot5}{1\cdot2\cdot3\cdot4}.$$

Bizonyára látható már a törvényszerűség: a 10 elemből kiválasztható hetes csoportok száma:

$$\frac{10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}.$$

Ez is szép, szabályos eredmény: 7-es csoportok kiválasztásakor a törtvonás fölött is, alatta is 7 tényező szerepel, csakhogy lent 1-től fölfelé, fent – ha 10 elemből választunk ki – 10-től lefelé haladó tényezők.

Így pl. az 5 elemből kiválasztható egyes elemek száma: $\frac{5}{1}=5$, ami természetes is, a 3 elemből kiválasztható hármas csoportok száma: $\frac{3\cdot2\cdot1}{1\cdot2\cdot3}=\frac{6}{6}=1$, és ez is magától értetődő, hiszen 3 golyóból mind a 3-at csak egyféleképpen lehet kiválasztani. Azt is csak egyféleképpen tehetjük meg, hogy üresen húzzuk vissza a kezünket, akárhány golyó is volt a zacskóban; tehát állapodjunk meg abban, hogy akárhány elem esetén a 0 tagú kombinációk számán 1-et fogunk érteni.

Tehát az egyre több tagú kombinációk száma sorra:

	egy se	egyke	pár	hármas	négyes
1 elemből	1	$\frac{1}{1}=1$	—	—	—
2 elemből	1	$\frac{2}{1}=2$	$\frac{2\cdot1}{1\cdot2}=\frac{2}{2}=1$	—	—
3 elemből	1	$\frac{3}{1}=3$	$\frac{3\cdot2}{1\cdot2}=\frac{6}{2}=3$	$\frac{3\cdot2\cdot1}{1\cdot2\cdot3}=\frac{6}{6}=1$	—
4 elemből	1	$\frac{4}{1}=4$	$\frac{4\cdot3}{1\cdot2}=\frac{12}{2}=6$	$\frac{4\cdot3\cdot2}{1\cdot2\cdot3}=\frac{24}{6}=4$	$\frac{4\cdot3\cdot2\cdot1}{1\cdot2\cdot3\cdot4}=\frac{24}{24}=1$

s. í. t. Az eredmények – ha legfelül még egy egyest írunk hozzájuk, annak megfelelően, hogy üres zacskóból is 1-féleképpen lehet üresen húzni vissza a kezünket, tehát a 0 elemből képezhető 0 tagú kombinációk száma is 1-nek vehető – ilyen rendbe szedhetők:

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
— — — — — — — — — — —

Ezt a háromszögszerű ábrát Pascal-féle háromszögnek nevezik. Sok érdekes tulajdonsága van. Hogy szimmetrikus, azaz a bal fele mintegy tükörképe a jobb felének, az természetes, mert pl. 3 golyó közül ugyanannyi féleképpen lehet 1-et kihúzni, ahányféleképpen 2-t a zacskóban hagyni lehet; és ugyanígy, ha 5 elemből alkotunk párokat, minden páralkotáskor egy-egy hármas csoport is keletkezik a felhasználatlan elemekből, tehát 5 elem esetén ugyanannyi a párok száma, mint a hármas csoportoké. És éppen ezek helyezkednek el a Pascal-háromszög szimmetrikus helyein.

Egy másik tulajdonság egyszerű képzési szabályt szolgáltat a Pascal-háromszög hátralevő soraira: nem ok nélkül írtam 2-t 1 és 1 közé, mert $1+1=2$; ugyanígy 3 1 és 2 között van és $1+2=3$, s. í. t. Ez törvényszerűen így folytatódik, tehát $1+4=5$, $4+6=10$ lévén, az utolsó felírt sort

1 5 10 10 5 1

követi, ebből hasonlóan adódik a rákövetkező:

1 6 15 20 15 6 1,

s. í. t. A bizonyítás is egyszerű, de itt elégedjünk meg egy próbával: az első 15-ös a 6 elemből alkotható párok helyén van; ezeknek száma

$$\frac{6\cdot5}{1\cdot2}=\frac{30}{2}$$

és ez valóban 15.

Ebből következik, hogy bármely sorban kétszer annyi a tagok összege, mint az előző sorban. Mert pl. az utoljára felírt sorból a rákövetkezőt így képezzük:

$$\underbrace{1\ \ 1}+\underbrace{6\ \ 6}+\underbrace{15\ \ 15}+\underbrace{20\ \ 20}+\underbrace{15\ \ 15}+\underbrace{6\ \ 6}+\underbrace{1\ \ 1}$$

és jól látható, hogy ebben az 1 6 15 20 15 6 1 sor tagjai mind kétszeresen szerepelnek.

Ez pedig egy további tulajdonságra világít rá: egy-egy sor tagjait összeadva, 2-nek egymást követő hatványait kapjuk. Mert ez eleinte igaz (a legfelső 1-estől eltekinthetünk egyelőre): $1+1=2=2^1$, $1+2+1=4=$ $=2^2$, és tovább már nem is kell néznünk: ha már valamilyen sorra igaz, akkor ez a tulajdonság a következő sorra „öröklődik"; hiszen láttuk, hogy a következő sor tagjainak összege 2-szer annyi, mint az előzőé, és ha 2-nek valamely hatványát még kettővel szorozzuk, akkor még eggyel többtényezős $2\cdot2\cdot2\cdots$ $\cdots2\cdot2$ szorzat lesz belőle, vagyis 2-nek eggyel magasabb hatványa.

A bizonyításnak ezt a módját, amely teljesen a természetes számsor felépítésén alapul, teljes indukciónak nevezik. A természetes számsor 1-nél kezdődik, és mindig 1-gyel számlálva tovább, juthatunk el bármely tagjáig. A teljes indukció pedig abban áll, hogy ha valami igaz a számsor kezdetén és ez a számsorban előrehaladva számról számra „öröklődik", akkor minden természetes számra igaz. Ez adott módot arra, hogy valamit *minden* számra bebizonyítsunk, holott minden számot végigpróbálni véges ésszel nem lehet: csak két, véges ésszel is megfogható dolgot kellett bebizonyítanunk: először, hogy a szóban forgó állítás igaz 1-re, másodszor, hogy „öröklődő" természetű.

Ez itt a legfontosabb tanulság: a végtelen a matematikában véges eszközökkel fogható meg.

Aki szeret szorzásokkal játszogatni, annak ismerős a Pascal-háromszög első néhány sora. Mert ha 11 hatványait képezzük sorra:

$$\begin{array}{lll}
11^1 & & =\ 1\ \ 1 \\
11^2 = 11\cdot11 & & \\
\quad\ \ \ 11 & & \\
\quad\ \overline{121} & & =\ 1\ \ 2\ \ 1 \\
11^3 = 121\cdot11 & & \\
\quad\ \ 121 & & \\
\quad\ \overline{1331} & & =\ 1\ \ 3\ \ 3\ \ 1 \\
11^4 = 1331\cdot11 & & \\
\quad\ \ 1331 & & \\
\quad\ \overline{14641} & & =\ 1\ \ 4\ \ 6\ \ 4\ \ 1
\end{array}$$

az eredmények jegyei éppen a Pascal-háromszöget szolgáltatják. Aki a szorzásokat megfigyelte, az mindjárt látja, hogy miért van ez így: a részletszorzatok összeadásakor ugyanazokat az összeadásokat végezzük, mint a Pascal-háromszög sorainak képzésekor. (11^5-ben ez már elromlik attól, hogy a részletösszegek összeadásában maradék is lép fel:

$$\begin{array}{r} 11^5 = 14641\cdot 11 \\ 14641 \\ \hline 161051, \end{array}$$

míg a Pascal-háromszög megfelelő sora: 1 5 10 10 5 1.)

$$\begin{aligned} &11 \text{ tulajdonképpen } 10 + 1, \\ &121 = 100 + 20 + 1 = \mathbf{1}\cdot 10^2 + \mathbf{2}\cdot 10 + \mathbf{1}, \\ &1331 = 1000 + 300 + 30 + 1 = \\ &\qquad = \mathbf{1}\cdot 10^3 + \mathbf{3}\cdot 10^2 + \mathbf{3}\cdot 10 + \mathbf{1}, \end{aligned}$$

s. í. t.; tehát a Pascal-háromszög számai tulajdonképpen 10 egyre csökkenő hatványaival szorozva lépnek fel 10 + 1 hatványainak kifejtésében. 10 + 1 második tagja 1, ennek minden hatványa – $1\cdot 1 = 1$ lévén – ugyancsak 1, itt tehát nem látszik, hogy a kifejtésbe a második tag hatványai is belejátszanak; de bele lehet őket csempészni, például így:

$$\begin{aligned} 11^3 = 1331 &= 1000 + 300 + 30 + 1 = \\ &= \mathbf{1}\cdot 10^3 + \mathbf{3}\cdot 10^2\cdot 1 + \mathbf{3}\cdot 10\cdot 1^2 + \mathbf{1}\cdot 1^3, \end{aligned}$$

tehát úgy, hogy az első tag hatványai csökkenjenek, a második tag hatványai pedig növekedjenek. Ez arra jó, hogy ebben a formában lehet általánosítani ezt a kifejtést más kéttagú összegek hatványaira is; pl.

$$7^3 = (5 + 2)^3 = \mathbf{1}\cdot 5^3 + \mathbf{3}\cdot 5^2\cdot 2 + \mathbf{3}\cdot 5\cdot 2^2 + \mathbf{1}\cdot 2^3.$$

Az eddigiek után nem volna nehéz ezt általánosan bebizonyítani; most elégedjünk meg azzal, hogy utánaszámolunk:

$$\begin{array}{lr} 1\cdot 5^3 = 5\cdot 5\cdot 5 = 25\cdot 5 = & 125 \\ 3\cdot 5^2\cdot 2 = \underbrace{3\cdot 5}\cdot\underbrace{5\cdot 2} = 15\cdot 10 = & 150 \\ 3\cdot 5\cdot 2^2 = 3\cdot\underbrace{5\cdot 2}\cdot 2 = 3\cdot 10\cdot 2 = & 60 \\ \text{és } 1\cdot 2^3 = 2\cdot 2\cdot 2 = 4\cdot 2 = & 8 \\ \hline \text{Összesen} & 343 \end{array}$$

és valóban

$$\begin{array}{r} 7^3 = 7\cdot 7\cdot 7 = 49\cdot 7 \\ \hline 343 \end{array}$$

Ez a felfedezés ismét a kényelem céljait szolgálja: gyakran kényelmes egy szám egyszerű hatványozása helyett két olyan tagra bontani szét az alapot, melyeknek hatványait könnyű kiszámítani. Például van, aki nem szeret 7-tel szorozni; $(5+2)^3$ kifejtésének kiszámításakor pedig csupa kényelmes 5-tel és 2-vel való szorzás szerepelt (ezeket, hacsak lehet, olyan sorrendben végezzük el, hogy 10-et adjanak; 10-zel azután igazán gyerekjáték a szorzás).

„Kéttagú" idegen szóval: binom, ezért hívják ezt a kifejtést binomiális tételnek és a Pascal-háromszög tagjait binomiális együtthatóknak.

Leggyakrabban a második hatványra van szükség. A Pascal-háromszög második sora

$$1 \quad 2 \quad 1,$$

eszerint, ha pl. $(5+3)^2$ a kijelölt feladat, akkor ezekkel szorzunk sorra, és 5-nek 5^2-től csökkenő, 3-nak pedig 3^2-ig emelkedő hatványai lépnek fel a kifejtésben, tehát

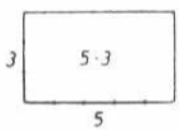
$$(5+3)^2 = 1\cdot 5^2 + 2\cdot 5\cdot 3 + 1\cdot 3^2,$$

vagy a felesleges 1-es szorzókat elhagyva:

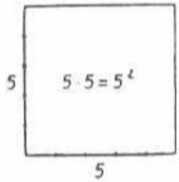
$$(5+3)^2 = 5^2 + 2\cdot 5\cdot 3 + 3^2.$$

Így a közismert – és talán rossz emlékeket felidéző – szabályhoz jutunk: két tag összegét úgy is emelhetjük második hatványra, hogy az első tag második hatványához hozzáadjuk a két tag szorzatának kétszeresét, majd a második tag második hatványát.

Persze ezt sokkal egyszerűbben is beláthatjuk, például geometriai úton. Tudjuk, hogy a téglalap területét a két szomszédos oldal szorzata adja; tehát fordítva, ha egy szorzatunk van, ezt ábrázolhatjuk olyan téglalap területével, melynek szomszédos oldalai a tényezők. Pl. az $5\cdot 3$ szorzat ábrázolása:

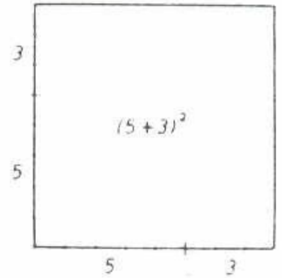


az $5^2 = 5\cdot 5$ szorzaté:



ez természetesen már négyzet; ezért nevezik a második hatványt négyzetnek is.

Ábrázoljuk most az $(5+3)^2$ kifejezést:

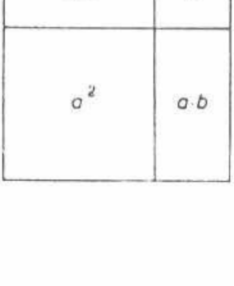


Ebben már egészen elmosódott, hogy mik voltak az összeg tagjai; a következő feldarabolással ezt ismét élénkké tehetjük:

Az itt keletkezett darabok közül a nagyobbik négyzetnek 5^2, a kisebbiknek 3^2 egység a területe; ezeken kívül még két $5\cdot 3$ egységnyi területű téglalap tölti ki a nagy négyzetet; tehát valóban

$$(5+3)^2 = 5^2 + 2\cdot 5\cdot 3 + 3^2.$$

Ez olyan világos, mint a hindu tankönyvekben szereplő ábrák. A hinduk nem szaporítják a szót. Kimondják a tételt: egy kéttagú összeget így és így lehet négyzetre emelni. Ezután még ennyit írnak: „lásd" és lerajzolnak egy mindent elmondó ábrát:



És akinek van szeme a látásra, látja.

7. A SZÜRKE SZÁMSOR SZÍNEZÉSE

A hinduk ősidőktől fogva kitűnő matematikusok, és sajátos képességeik vannak ezen a téren. Egyik tudósukról ezt az apróságot hallottam: amikor európai barátja tréfából megkérdezte, hogy az imént használt autó rendszáma: 1729, nem valami baljóslatú szám-e, ő a világ legtermészetesebb hangján így felelt: „Ó nem, sőt éppen igen érdekes szám ez az 1729. Ez az első olyan szám, amely két módon is felírható két szám köbének összegeként, hiszen $10^3 + 9^3$ is és $12^3 + 1^3$ is 1729."

A hinduknak még a négyjegyű számok is ilyen külön sajátságokkal felruházott személyes ismerőseik. Nálunk a kis számokat kezelik ilyen individuumok módjára az alsó osztályokban: a kis tanuló szemében a 2-es nem a sok szürke szám egyike, hanem sok oldalról megismert különálló egyéniség: ő az első páros szám, 1 + 1, 4-nek a fele stb. De akár 10-ig színezzük így a számokat, akár olyan messzeségekig, mint a hinduk, mindez csak szerény kis töredéke a végtelen számsornak, amely ezen túl szürkén hömpölyög tovább.

Tudjuk ugyan, hogy vannak páros számok, igen, minden második szám páros:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, . . .

ugyanígy minden harmadik szám osztható 3-mal:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, . . .

minden negyedik szám 4-gyel:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, . . .

s. í. t., ezek azonban csak kisebb-nagyobb hullámokat jelentenek, melyek, ha egyszer megindultak, egyhangúan, egyformán gördülnek tovább. Valóban nincs semmi váratlan, semmi egyéni szeszély, ami felélénkíthetné ezt az egyhangúságot?

De van: a törzsszámok szeszélyes, szabályokba nem szorítható eloszlása. Emlékezzünk csak vissza az oszthatóságra:

	10 összes osztói:	1,	2,	5,	10,		
	12 összes osztói:	1,	2,	3,	4,	6,	12,
közben	11 osztói:	1,	11.				

1-gyel és önmagával minden szám osztható; vannak számok, amelyek e kettőn kívül semmi mással: ilyen pl. 11. Ezeket a számokat nevezik törzsszámoknak vagy prímszámoknak.

Az 1 e szempontból rendellenesen viselkedik; csak egy osztója van: 1.

és ez egyszersmind önmaga. Ezért 1-et nem szokás a törzsszámok közé sorolni. Eszerint a legkisebb törzsszám a 2, ez egyszersmind az egyetlen páros törzsszám, mert minden páros szám osztható 2-vel és ez a szám törzsszám voltát csak akkor nem rontja el, ha ez a 2-es osztó maga a szám.

Jelentőséget az ad a törzsszámoknak, hogy minden más szám ezekből az építőkövekből rakható össze; éppen ezért nevezik a többi számot összetett számnak. Pontosabban úgy fogalmazható ez meg, hogy minden összetett szám csupa törzsszám szorzataként állítható elő.

Próbáljuk például 60-at szorzatként írni fel:

$$60 = 6 \cdot 10.$$

Itt 6 és 10 is tovább bontható tényezőkre:

$$6 = 2 \cdot 3 \quad \text{és} \quad 10 = 2 \cdot 5.$$

ezeket beírva 6 és 10 helyére:

$$60 = 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5$$

és itt már minden tényező törzsszám.

Másképp is hozzáfoghattunk volna ehhez, hiszen már láttuk, hogy 60-at nagyon sokféleképpen lehet két szám szorzataként felírni. Ha ebből indulunk ki:

$$60 = 4 \cdot 15,$$

itt $\quad 4 = 2 \cdot 2$ és $15 = 3 \cdot 5$,

tehát $\quad 60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5.$

ha pedig ezt a felbontást választjuk:

$$60 = 2 \cdot 30,$$

akkor $30 = 5 \cdot 6$ és itt $6 = 2 \cdot 3$, tehát $30 = 5 \cdot 2 \cdot 3$,
vagy $30 = 2 \cdot 15$ és itt $15 = 3 \cdot 5$, tehát $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$,
vagy $30 = 3 \cdot 10$ és itt $10 = 2 \cdot 5$, tehát $30 = 3 \cdot 2 \cdot 5$;

látjuk tehát, hogy 30 mindenképpen a 2, 3 és 5 törzsszámok szorzatára bomlik; e szorzatot írva 30 helyébe

$$60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5.$$

Bármi módon fogunk is hozzá, csak ugyanazon törzsszámokra esik szét 60, legfeljebb más sorrendben lépnek fel ezek. Rendbe szedve és az egyenlő tényezők szorzatát hatványalakban írva

$$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5.$$

Ugyanilyen könnyű bármely más összetett számot is felbontani „törzstényezőire" (és be lehet bizonyítani, hogy mindig csak egyféle felbontásra juthatunk). Ha első pillanatra megakadunk azon, hogyan is fogjunk hozzá, gondoljuk meg, hogy a szám legkisebb osztója (1-en kívül) biztosan törzsszám, mert ha az is összetett szám volna, akkor kellene önmagánál kisebb osztójának lenni, és ez persze az eredeti számban is megvolna maradék nélkül. Tehát mindig a legkisebb osztót keresve, szépen legöngyölíthetők bármely szám törzstényezői, például:

$$
\begin{aligned}
90 &= 2 \cdot 45 \\
&= 2 \cdot \overbrace{3 \cdot 15} \\
&= 2 \cdot 3 \cdot \overbrace{3 \cdot 5}.
\end{aligned}
$$

Egy ilyen felbontás jól bevilágít a szám szerkezetébe, pl. kiolvasható belőle, hogy 90 osztói 1-en kívül:

egytényezősök: 2, 3, 5,

kéttényezősök: $2 \cdot 3 = \underline{6}$, $2 \cdot 5 = \underline{10}$, $3 \cdot 3 = \underline{9}$, $3 \cdot 5 = \underline{15}$

háromtényezősök: $2 \cdot 3 \cdot 3 = \underline{18}$, $2 \cdot 3 \cdot 5 = \underline{30}$, $3 \cdot 3 \cdot 5 = \underline{45}$

négytényezős: $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = \underline{90}$.

Tehát érdemes a számok építőköveivel közelebbről is megismerkedni. Próbáljuk felírni rendre a törzsszámokat. Már tudjuk, hogy a legkisebb törzsszám a 2, és innen kezdve a páros számokat nyugodtan át lehet ugrani, hiszen ezek mind oszthatók 2-vel. 3 is, 5 is, 7 is törzsszám; az ember szeretné rámondani, hogy a 9 is, de ez nem igaz, hiszen 9 osztható 3-mal. Most azt gondolnók, hogy innen kezdve ritkulnak a törzsszámok; ez megint nem igaz, mert 11 és 13 is törzsszám. Most az egyszer megkérem az olvasót egy kis fáradságra: próbálja meg önállóan felsorolni a törzsszámokat legalább 50-ig. Én ideírom ellenőrzésül ezt a sorozatot, de az ember csak akkor érzi át, hogy ez mennyire szabálytalan, ha maga bukdácsolt végig rajta, újra és újra tévedve.

A törzsszámok sorozata:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, . . .

Még a régi görögöktől maradt ránk egy szellemes ötlet, amely tévedés lehetősége nélkül, gépiesen állítja elő ezt a szeszélyes sorozatot: az ún. Eratosztenész-féle rosta. Írjuk fel a számokat 2-től 50-ig; e sorozat első tagja látatlanban is biztosan törzsszám, hiszen minden valódi osztója kisebb volna nála s így (1-en kívül) előtte szerepelne a sorozatban, előtte azonban nincs semmi. Most nézzük meg, hogy mi ez az első szám: 2. Minden második szám

2-nek többszöröse és így 2 kivételével nem törzsszám, tehát innen kezdve húzzunk ki minden második számot:

$\underline{2}$, 3, ~~4~~, 5, ~~6~~, 7, ~~8~~, 9, ~~10~~, 11, ~~12~~,
13, ~~14~~, 15, ~~16~~, 17, ~~18~~, 19, ~~20~~, 21, ~~22~~, 23,
~~24~~, 25, ~~26~~, 27, ~~28~~, 29, ~~30~~, 31, ~~32~~, 33, ~~34~~,
35, ~~36~~, 37, ~~38~~, 39, ~~40~~, 41, ~~42~~, 43, ~~44~~, 45,
~~46~~, 47, ~~48~~, 49, ~~50~~

A legelső szám, ami 2 után épségben maradt, ismét csak törzsszám lehet, hiszen csak előtte szereplő számnak lehetne többszöröse, előtte pedig csak olyan szám van, melynek többszöröseit kihúztuk. Nézzük meg ezt a számot: 3. Minden harmadik szám 3-nak többszöröse, tehát húzzunk ki innen kezdve minden harmadik számot (nem baj, hogy így egyes számokat kétszeresen is áthúzunk):

$\underline{2}$, $\underline{3}$, ~~4~~, 5, ~~6~~, 7, ~~8~~, ~~9~~, ~~10~~, 11, ~~12~~,
13, ~~14~~, ~~15~~, ~~16~~, 17, ~~18~~, 19, ~~20~~, ~~21~~, ~~22~~, 23,
~~24~~, 25, ~~26~~, ~~27~~, ~~28~~, 29, ~~30~~, 31, ~~32~~, ~~33~~, ~~34~~,
35, ~~36~~, 37, ~~38~~, ~~39~~, ~~40~~, 41, ~~42~~, 43, ~~44~~, ~~45~~,
~~46~~, 47, ~~48~~, 49, ~~50~~

Ezt ugyanígy folytatva, megtartjuk az 5-öt, de 5 többszöröseit természetesen ki kell húznunk. Tehát 5-ön túl minden ötödik számot, majd hasonlóan 7-en túl minden hetediket áthúzunk:

$\underline{2}$, $\underline{3}$, ~~4~~, $\underline{5}$, ~~6~~, $\underline{7}$, ~~8~~, ~~9~~, ~~10~~, 11, ~~12~~,
13, ~~14~~, ~~15~~, ~~16~~, 17, ~~18~~, 19, ~~20~~, ~~21~~, ~~22~~, 23,
~~24~~, ~~25~~, ~~26~~, ~~27~~, ~~28~~, 29, ~~30~~, 31, ~~32~~, ~~33~~, ~~34~~,
~~35~~, ~~36~~, 37, ~~38~~, ~~39~~, ~~40~~, 41, ~~42~~, 43, ~~44~~, ~~45~~,
~~46~~, 47, ~~48~~, ~~49~~, ~~50~~

Tovább már nem is kell mennünk, mert az első fennmaradó szám 11, és ennek a 7-szeresénél nagyobb többszörösei már túl vannak 50-en, kisebb többszörösei pedig már mind a kihúzott számok közt szerepelnek.

Írjuk ki a megmaradt számokat:

$$2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19,\ 23,\ 29,\ 31,\ 37,\ 41,\ 43,\ 47;$$

ezek valóban az imént felírt 50 alatti törzsszámok.

Gépet is lehetne szerkeszteni, mely az itt adott utasítást végrehajtja, és így hibátlanul ontja a törzsszámokat egy bizonyos határig. Ez azonban mit sem változtat azon, hogy a törzsszámok minden határon túl a legszeszélyesebben bukkannak fel újra meg újra.

Így például meg lehet mutatni, hogy bármilyen nagy réseket találhatunk köztük, ha elég messzire megyünk a számsorban. Például egy legalább 6 egységnyi rést, azaz hat egymást követő olyan számot, amelyek egyike sem törzsszám, adnak a következő műveletek eredményei:

$$\underline{2}\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7+\underline{2},\qquad 2\cdot\underline{3}\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7+\underline{3},$$
$$2\cdot3\cdot\underline{4}\cdot5\cdot6\cdot7+\underline{4},\qquad 2\cdot3\cdot4\cdot\underline{5}\cdot6\cdot7+\underline{5},$$
$$2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot\underline{6}\cdot7+\underline{6},\qquad 2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot\underline{7}+\underline{7},$$

mert ezek valóban egymást követő számok: mindegyik éppen 1-gyel több az előzőnél, és egyik sem törzsszám, hiszen $2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7$ minden egyes tényezőjével osztható, tehát az első közülük olyan összeg, melynek mindkét tagja osztható 2-vel, a második hasonló okból 3-mal osztható, a harmadik 4-gyel, a negyedik 5-tel, az ötödik 6-tal és a hatodik 7-tel. Kiszámítva

$$2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7=5040,$$

tehát itt a következő hat számról van szó:

$$5042,\quad 5043,\quad 5044,\quad 5045,\quad 5046,\quad 5047.$$

Ezek elég nagy számok, elég messzire kellett mennünk a számsorban, hogy ezen a módon 6 tagú rést találjunk a törzsszámok közt (persze lehetséges, hogy már jóval előbb van köztük ilyen rés). De ha nem sajnálunk jó messzire menni, legalább 100 tagú rést is találhatunk ugyanígy, ha a 2-től 101-ig terjedő számok

$$2\cdot3\cdot4\cdot5\cdots101$$

szorzatához adunk hozzá sorra 2-t, 3-at, ... végül 101-et. Ezen a módon találhatunk bármilyen hosszú réseket is.

Mindamellett, ameddig csak megvizsgálták a számsort, újra meg újra, bármilyen hosszú réseken túl is, találtak szomszédos páratlan számokat, amelyek törzsszámnak bizonyultak, mint például a számsor elején 11 és 13, vagy 29 és 31. A matematikusok azt sejtik, hogy ilyen „ikertörzsszámok" minden távolságban előfordulnak, a számsor megvizsgált részén túl is; de ezt ilyen általánosságban mindmáig nem sikerült bebizonyítani.

Dehát vannak-e egyáltalán törzsszámok minden távolságban? Nem csak a számsor elejét színezik-e ezek egy darabon? Erre a kérdésre már van válaszunk, méghozzá 2000 év óta: Euklidész közölt egy igen elegáns bizonyítást arra, hogy végtelen sok törzsszám van.

Ezt ugyanúgy lehet belátni, mint magának a természetes számsornak a végtelenségét: bárhol is mondja valaki, hogy itt a vége, nem futhat el véle, mert meg tudom mutatni, hogy van törzsszám azon túl is.

Elég ezt egy esetben megmutatni; minden más esetben ugyanígy megy. Csak azt kell ehhez meggondolnunk, hogy 2-vel minden második szám osztható, 3-mal minden harmadik s. í. t., tehát egy 2-vel osztható szám közvetlen rákövetkezője nem lehet osztható 2-vel, egy 3-mal osztható szám közvetlen rákövetkezője nem lehet osztható 3-mal s. í. t. Ha mármost valaki azt állítaná, hogy a törzsszámok a következők:

$$2,\ 3,\ 5,\ 7$$

és itt a vége, akkor én azonnal megcáfolom, hiszen a felsorolt törzsszámokból megalkothatom a következő számot:

$$2\cdot3\cdot5\cdot7+1.$$

$2\cdot3\cdot5\cdot7$ osztható 2-vel is, 3-mal is, 5-tel is, 7-tel is. A közvetlenül rákövetkező $2\cdot3\cdot5\cdot7+1$ szám tehát ezek egyikével sem lehet osztható. Dehát valamilyen törzsszámmal csak oszthatónak kell lennie szegénynek, ő is csak szám, ő is törzsszámokra bontható, vagy esetleg maga is törzsszám és önmagával mindenesetre osztható. Az illető tehát tévedett: kell lenni törzsszámnak 7-en túl is. És ugyanígy minden törzsszámon túl is.

Számítsuk csak ki ezt a $2\cdot3\cdot5\cdot7+1$ számot: az eredmény 211. Egy kis próbálgatás megmutatja, hogy ez 1-en és önmagán kívül mással nem osztható, vagyis véletlenül törzsszám. Tehát ő maga az a 7-en túli törzsszám, aminek a létezését állítottam. Persze szó sincs róla, hogy ez a 7-et közvetlenül követő törzsszám volna: az egy pillanatig sem volt várható, hogy az egymást követő törzsszámokat ilyen szabályszerűen lehetne megszerkeszteni.

Módszerünk pontosabban azt az eredményt adja, hogy 7-től legfeljebb $2\cdot3\cdot5\cdot7+1$-ig, ugyanígy 11-től legfeljebb $2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11+1$-ig s. í. t. kell menni, hogy újabb törzsszámot találjunk. Ezek azonban elég nagy távolságok; nem lehetne-e szűkebb határok közt törzsszámokat találni?

Sokan foglalkoztak ezzel a kérdéssel. Hogy csak egy szép eredményt említsek: Csebisev orosz matematikus bebizonyította, hogy 2-től kezdve bármely szám és a kétszerese között is mindig van törzsszám:

2 és 4 közt	3
3 és 6 közt	5
4 és 8 közt	5 is, 7 is
5 és 10 közt	csak 7;

bár ebben semmi szabályszerűség sem látszik, ez mégis minden messzeségben bekövetkezik; sőt ha elég messzire megyünk, elég nagy számokat választunk, akárhány törzsszám is esik a számok és kétszereseik közé.

Íme mégis valami szabályféle a féktelennek látszó törzsszámok számára: bármennyire mégsem rugaszkodhatnak el egymástól.

Sőt, mindennek ellenére, bizonyos értelemben mégis van „törzsszám-törvény". Olyan „majdnem" értelemben, ahogyan a kör tekinthető sok keskeny háromszögből összerakottnak (aminek precizírozását későbbre ígértem).

2-ig (magát 2-t is beleértve) egy törzsszám van: maga a 2, 3-ig már kettő: 2 és 3, 4-ig ismét ez a kettő, 5-ig már három, mert az 5 is hozzájárul, 6-ig is ez a három, 7-ig már négy: 2, 3, 5 és 7, 8-ig, 9-ig, 10-ig ugyanez a négy s. í. t. Tehát a törzsszámok száma:

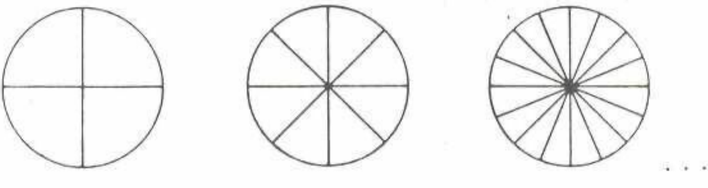
2-ig	3-ig	4-ig	5-ig	6-ig	7-ig	8-ig	9-ig	10-ig	...
1	2	2	3	3	4	4	4	4	...

Olyankor vált ez a sorozat, amikor egy-egy új törzsszámhoz jutok,és ez egészen szabálytalan közökben következik be. Mégis fel lehet írni egy bizonyos szabály szerint képezhető, jól ismert sorozatot*, amelynek egyre távolabbi tagjaihoz egyre jobban és jobban hasonlítanak a mi sorozatunk tagjai, és így e sorozatok távoli részei „majdnem" egyenlőknek tekinthetők – ugyanúgy, ahogy a kör nehezen kezelhető, görbe vonalú felosztásai:

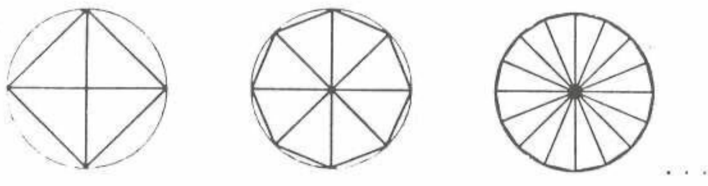
* Azok kedvéért, akiknek vannak még emlékeik a logaritmusról, ideírom, hogy ez a sorozat

$$\frac{2}{\log 2}, \frac{3}{\log 3}, \frac{4}{\log 4}, \frac{5}{\log 5}, \ldots$$

Bár erre a logaritmusra nemigen emlékezhetik az olvasó: ez az ún. természetes logaritmus. A továbbiakban lesz szó róla.



egyre jobban és jobban hasonlítanak a jól ismert, egyenes vonalú háromszögekhez; hiszen elég sokáig folytatva a felosztást „majdnem" azonosnak tekinthetők a beírható háromszögekkel:



Pontos szabály nem is képzelhető a törzsszámok számára, de ennek a „majdnem" szabályszerű viselkedésnek is megvan a maga pontos értelme: erre ígéretem szerint még vissza fogok térni.

Meg sem kísérelhetem, hogy a törzsszámtörvény bizonyítását vázoljam: a legkitűnőbb matematikusok hosszú időn át adták egymásnak kézről kézre, mindig egy keveset formálva rajta, amíg végül így kialakult. A kutatás ma sem állt meg ezen a téren: egyre pontosabban próbálják meghatározni, hogy mekkora hibát követünk el, ha a mi szabálytalan sorozatunk tagjait a szóban forgó szabály szerint képezhető sorozat tagjaival pótoljuk. Itt nem a célszerűség vezeti a kutatást, sem pedig a kényelem, hanem a tárgy szépsége és nehézsége. Másfajta szépség ez, mint a játékos számoké a kombinatorika eredményeiben: ez a szertelenség esztétikuma. És bravúros vállalkozás szabályok közé szorítani a szabálytalant.

Hogy van törzsszámtörvény, az arra vall, hogy a kicsiben, a számsor vizsgálható darabjain szabálytalanul eloszló törzsszámok a maguk végtelen összességében mégiscsak alá vannak vetve valamiféle rendnek. Egy hasonlat jut erről eszembe, amit az akarat szabadságával kapcsolatban olvastam valahol: ha közelről figyeljük meg a rajzó méheket, úgy fogjuk látni, hogy egyénenkint a legkülönbözőbb irányokban röpködnek össze-vissza, az egész rajt mégis egy határozott cél viszi valami határozott irányba.

8. „GONDOLTAM EGY SZÁMOT"

Most térjünk vissza egy kicsit a célszerű matematikához. A kocka köbtartalmát már ki tudjuk számítani, de gyakran van szükség más, szabálytalan alakú test köbtartalmának az ismeretére is, és ezt közvetlenül mérni nem lehet. Ilyenkor a következő kerülő utat választhatjuk: tegyük fel, hogy tölgyfából van ez a test. A súlyát lemérhetjük. Faragjunk ki egy 1 köbcentiméteres kis kockát is tölgyfából,és mérjük le a súlyát. Ahányszor ez a súly megvan a szóban forgó test súlyában, annyi köbcentiméter annak a köbtartalma.

A köbtartalmat itt nem tudtuk közvetlenül meghatározni, de valami mást igen, amivel a köbtartalom jól ismert kapcsolatban van: a test súlyát. Ebből kellett visszakövetkeztetni az ismeretlen köbtartalomra.

Igen gyakori eset a matematikában, hogy egy mennyiséget nem ismerünk közvetlenül, de ismerünk bizonyos kapcsolatokat, melyekbe belejátszik. Ezekből a kapcsolatokból azután rájöhetünk arra, hogy mi lehet az ismeretlen mennyiség értéke.

Ennek – az alkalmazások szempontjából döntő fontosságú – eljárásnak az alapgondolata ugyanaz, mint a jól ismert találós kérdésé:„Gondoltam egy számot, hozzáadtam még annyit, az eredményt 3-szor vettem", s .f . t., még mindenfélét felsorolok, amit a gondolt számmal csináltam, végül megmondom, hogy a sok különböző művelet után például 36-ot kaptam eredményül; tessék kitalálni, hogy milyen számot gondoltam!

Hát tessék kitalálni: gondoltam egy számot, hozzáadtam 5-öt, kaptam 7-et; mit gondoltam? – A vak is látja, hogy 2-t.

Legyen egy kicsit nehezebb: gondoltam egy számot, megszoroztam 5-tel, elosztottam 2-vel, hozzáadtam 3-at és 18-at kaptam; mit gondoltam? – Ezt a találós kérdést nem írásban szokás feltenni, hanem szóban, a megfejtő könnyen elfelejti, hogy milyen műveletek szerepeltek; jó ha ezt mindjárt jegyzi a feladat kitűzésekor. A gondolt számot ő nem ismeri, hát elnevezi *x*-nek. Ennyit talán megenged az olvasó; ha Babitsnak szabad ezt írnia:

„Minden folyót vár a Styx.
Óh megoldó biztos *X*!"

– akkor talán nekem is szabad x-et íratnom a találós kérdés megfejtőjével a megoldásra váró ismeretlen szám helyett. Ő tehát így jegyzi a menetet: a partnere x-et gondolt, ezt szorozta 5-tel, lett 5x, ezt osztotta 2-vel, lett $\frac{5x}{2}$, ehhez adott 3-at, lett $\frac{5x}{2} + 3$, és azt állítja, hogy ez éppen 18:

$$\frac{5x}{2}+3=18.$$

A gondolt szám tehát egy ilyen „egyenletnek" tesz eleget, ebből kell kitalálni.

Van, akinek olyan jó érzéke van a számokhoz, hogy már ebből az alakból is kitalálja. Akinek ez nem sikerül, menjen vissza egy lépéssel: ha valamiből 3 hozzáadása után 18 lett, akkor azelőtt 15 volt:

$$\frac{5x}{2}=15.$$

Ebből már könnyebb kitalálni, hogy mi volt az x. Aki még ebből sem találja ki, még egy lépéssel könnyíthet magán: ha valamit 2-vel osztva 15-öt kaptunk eredményül, akkor az osztás előtt 30 volt:

$$5x=30.$$

Azt pedig már mindenki kitalálja, hogy az a szám, melynek 5-szöröse 30, csakis 6 lehetett.

Amit itt a fokozatos lebontogatáskor csináltunk, azt mindig meg szabad tenni egy egyenlettel: amikor

$$\frac{5x}{2}+3=18\text{ -ról}$$

$$\frac{5x}{2}=15\text{ -re}$$

tértünk át, akkor az = jel baloldaláról eltűnt a 3-as összeadandó, a jobboldalon levő számból pedig kivontunk 3-at. Ez az, amit úgy fejeznek ki, hogy szabad egy összeadandót az egyenlet egyik oldaláról átvinni a másikra kivonandó gyanánt. Amikor pedig

$$\frac{5x}{2}=15\text{ -ből}$$

$$5x=30$$

lett, a bal oldalról eltűnt a 2-es osztó, a jobb oldalon levő számot pedig megszoroztuk 2-vel. Ezt fejezik ki úgy, hogy szabad egy osztót szorzó gyanánt vinni át az egyenlet másik oldalára. Általában ellenkező művelettel vihetünk át valamit az egyenlet egyik oldaláról a másikra.

Ha valami ravasz szöveges egyenlettel állunk szemben, jól meggondolva az sem egyéb, mint egy gondolt szám kitalálása. Szóljon például így a szöveg: „Egy apa 48 éves, a fia 23 éves; hány év múlva lesz az apa éppen kétszer annyi idős, mint a fia?" Persze lesznek, akik ezt mindjárt kitalálják, minden egyenlet nélkül. Aki nehézkesebb, az így gondolkozhatik: a gyors eszű már tudja az eredményt, úgy vehetem, hogy ő gondolt egy ilyen számot; az én számomra ez még x. Tehát x év múlva lesz az apa kétszer annyi idős, mint a fia. Hogy ellenőrzi a megfejtő a maga eredményét? Úgy, hogy megnézi: x év múlva hány éves lesz az apa, hány éves lesz a fiú, és az apa kora ekkor valóban kétszerese-e a fiú korának? x év múlva az apa kora x évvel több mint 48, vagyis 48 + x év, a fiú kora 23 + x év; tehát az ügyes megfejtő gondolt egy számot, ezt hozzáadta 48-hoz is, 23-hoz is és azt állítja, hogy az első összeadás eredménye 2-szer annyi, mint a másodiké:

$$48 + x = 2\cdot(23 + x).$$

Ebből kellene kitalálni x-et. A 2-vel való szorzást a jobboldalon úgy végezhetjük el, hogy mindkét tagot 2-vel szorozzuk:

$$48 + x = 46 + 2x.$$

A baloldali x összeadandót átviszem a jobboldalra 2x mellé kivonandóul, a jobboldali 46 összeadandót ugyancsak kivonandóul hozom át 48 mellé, hogy az x-ek az egyenlet egyik oldalán gyűljenek össze:

$$48 - 46 = 2x - x,$$

$48 - 46 = 2$ és világos, hogy ha 2x-ből egy x-et elveszünk, egy x marad:

$$2 = x,$$

tehát 2 a gondolt szám: 2 év múlva lesz az apa kétszer annyi idős mint a fia. Valóban 2 év múlva az apa 50 éves lesz, a fia pedig 25.

További bonyolítás: „Két számot gondoltam egyszerre; az összegük 10. Melyik ez a két szám?"

Jegyezni ezt így lehet: a gondolt két szám x és y (ha valakinek sem a családi, sem a keresztnevét nem ismerik, ezt mondják rá: X Y), tehát a feladat kitűzője azt állítja, hogy

$$x + y = 10.$$

Nagyon könnyű két ilyen számot találni: ilyen pl. 1 és 9. Igen ám, de 2 és 8 is! Sőt 4 és 6 is lehetett a gondolt két szám, és még más megoldások is kínálkoznak. Ez tisztára rászedés - ennyiből még nem lehet két számot kitalálni. A megfejtő joggal kívánhatja: „Mondj még valamit erről a két számról!" Jó, megmondom azt is, hogy a különbségük 2:

$$y - x = 2.$$

Most már nagyon könnyű kitalálni, hogy ez csak egyszer fordul elő az előbbi párok között: 4 és 6 azok a 2-ben különböző számok, amelyeknek összege 10.

Tehát két ismeretlen kitalálásához két egyenlet, ún. „egyenletrendszer” szükséges; ha nem mindjárt ilyen világos belőlük, hogy mik voltak a gondolt számok, bizonyos fogásokkal ezeket is közelebb hozhatjuk a kitalálhatósághoz.

Ha például valaki nem jött volna rá, hogy az iménti egyenletrendszer megoldása 4 és 6, az így próbálkozhatott volna: a második egyenletben a baloldal kivonandóját vigyük át összeadandóul a jobboldalra, akkor y egyedül marad:

$$y = x + 2.$$

Ebből azt lehet kiolvasni, hogy a második gondolt szám 2-vel több az elsőnél. Tehát egyszerűbben így fogalmazhattuk volna meg a feladatot: „Gondoltam egy számot, hozzáadtam egy 2-vel nagyobb számot és így 10-et kaptam; mi volt a gondolt szám?” Ez így jegyezhető:

$$x + (x + 2) = 10,$$

ebben pedig már csak egy ismeretlen van, s hogy ezt az egy ismeretlent kitaláljuk, arra már megvannak a fogásaink. Ha pedig x-et már tudjuk, y-on már gondolkoznunk sem kell, hiszen tudjuk, hogy ez 2-vel több mint x.

Más példa: „Gondoltam két számot, az elsőhöz hozzáadtam a másodiknak kétszeresét és így 11-et kaptam; azután az első szám kétszereséhez hozzáadtam a másodiknak négyszeresét és 22 volt az eredmény. Milyen számokat gondoltam?”

A szöveg így jegyezhető röviden:

$$x + 2y = 11$$
$$2x + 4y = 22.$$

Ha van szeme a megfejtőnek, rögtön észre kell vennie, hogy rászedtem. Próbáljuk csak: az első feltételnek eleget tesz 1 és 5, mert

$$1 + 2 \cdot 5 = 11;$$

ugyanezek a számok a második feltételnek is eleget tesznek, mert

$$2 \cdot 1 + 4 \cdot 5 = 22.$$

Így azt lehetne hinni, hogy már megtaláltuk a gondolt számokat. De nézzük csak tovább: 3 és 4 is kielégítik az első egyenlet követelményét, mert

$$3 + 2 \cdot 4 = 11$$

és a másodikét is, mert

$$2 \cdot 3 + 4 \cdot 4 = 22.$$

Úgy látszik, hogy minden számpár, amely az első feltételt teljesíti, egyszersmind teljesíti a másodikat is; a második feltétel nem segít kiválasztani közülük egy határozott párt. De ez természetes is: bármi is x és y, $2x$ kétszer annyi, mint x, és $4y$ kétszer annyi, mint $2y$, tehát világos, hogy az összegük, $2x + 4y$ is kétszer annyi, mint $x + 2y$, tehát ha $x + 2y = 11$, akkor $2x + 4y$ csak 22 lehet. Eszerint a második egyenlet nem mond semmi újat a gondolt számokról: ugyanazt mondja el, mint az első, csak cifrábban.

Még csúnyább rászedés, ha az

$$x + 2y = 11$$
$$2x + 4y = 23$$

egyenletrendszerből kell kitalálni x-et és y-t. Törhetjük a fejünket akár ítélet napjáig: nincs két olyan szám, mely mindkét feltételt teljesítené. Hiszen már láttuk, hogy bármi is x és y, $2x + 4y$ kétszerese $x + 2y$-nak, ha tehát $x + 2y = 11$, akkor $2x + 4y$-nak 22-nek kell lennie, semmiképpen sem lehet 23. A második feltétel meghazudtolja az elsőt.

Mindezt összefoglalva: két ismeretlent két egyenletből tudunk kitalálni, feltéve, hogy ezek az egyenletek nem ugyanazt mondják és nem mondanak egymásnak ellent.

Hát ilyen találós kérdéssel mit lehet kezdeni? „Gondoltam egy számot, négyzetre emeltem, hozzáadtam a gondolt szám 8-szorosát és 9-et kaptam." Jegyezve:

$$x^2 + 8x = 9.$$

Itt csak egy ismeretlen van, de az új bonyodalom az, hogy ez a második hatványon is előfordul: az egyenlet „másodfokú".

Ne kezdjük mindjárt ilyen bonyolult másodfokú egyenlettel. A legegyszerűbb alak:

$$x^2 = 16.$$

Mindenki egy pillantással megállapíthatja, hogy a gondolt szám 4, mert 4 az a szám, amelynek négyzete 16.

Hasonlóan egyszerű:

$$(x + 3)^2 = 16,$$

mert az a szám, melynek négyzete 16, ismét 4, tehát itt

$$x + 3 = 4,$$

és ebből már mindenki látja, hogy $x = 1$.

Itt $(x + 3)^2$ szerepelt; emlékezzünk csak vissza arra, hogyan kellett egy kéttagú összeget négyzetre emelni: az első tag négyzetéhez (itt x^2-hez) hozzá kellett adni a két tag szorzatának kétszeresét (itt $2 \cdot 3x = 6x$-et) és a második tag négyzetét (itt $3^2 = 9$-et). Tehát kifejtett alakban így szól az egyenletünk:

$$x^2 + 6x + 9 = 16,$$

ha azonban így állították volna szembe vele, fogalmunk sem lett volna arról, hogy hogyan is fogjunk hozzá. Gyakorolni kell tehát, hogy kifejtett alakban is ráismerjünk két tag összegének négyzetére. Ha pl. így szól egy egyenlet:

$$x^2 + 8x + 16 = 25,$$

akkor észre kell venni, hogy itt $8x = 2 \cdot 4x$ és 16 éppen az ebben fellépő 4-nek a négyzete, tehát

$$x^2 + 8x + 16 = x^2 + 2 \cdot 4x + 4^2 = (x + 4)^2$$

és így az

$$(x + 4)^2 = 25$$

egyenlettel van dolgunk, ezt pedig már meg tudjuk oldani az előbbiek mintájára.

Persze az sem változtat semmit a most vizsgált egyenleten, ha a 16-ot átvisszük kivonandóul a jobboldalra; $25 - 16 = 9$, tehát így jutunk a kiindulásul vett

$$x^2 + 8x = 9$$

alakra. Ilyenkor is fel kell ismerni, hogy a baloldal kiegészíthető két tag összegének négyzetévé:

$$x^2 + 8x = x^2 + 2 \cdot 4x$$

és ehhez $4^2 = 16$ hiányzik, hogy $(x + 4)^2$ legyen belőle. Ha ugyanazzal toldjuk meg mind a bal-, mind a jobboldalt, attól még egyenlők maradnak; itt tehát toldjuk meg mindkét oldalt 16-tal:

$$x^2 + 8x + 16 = 9 + 16,$$
$$x^2 + 8x + 16 = 25,$$

és ez az az alak, amivel már el tudunk bánni.

Ez a kiegészítés két tag összegének négyzetévé mindig sikerül. Ha a másodfokú tag nem x^2, hanem például $3x^2$, mint a következő egyenletben:

$$3x^2 + 24x = 27,$$

akkor az egyenlet mindkét oldalát oszthatjuk 3-mal, hiszen ha egyenlő a bal- és a jobboldal, akkor a harmadrészük is egyenlő; $3x^2$ harmadrésze x^2, $24x$ harmadrésze $8x$ és 27 harmadrésze 9, tehát

$$x^2 + 8x = 9,$$

és ebben az alakban már meg tudjuk oldani az egyenletet. Ha itt nem csupa 3-mal osztható szám szerepelt volna, vagy ha x szorzója páratlan szám lenne, akkor törtek is lépnének fel, ezekkel és esetleges kivonásokkal egyelőre még nem akarok bajlódni, de ezek sem okoznának semmi elvi nehézséget.

Így tehát minden esetben elvégezhetjük a teljes négyzetté való kiegészítést, és ebben a formában már meg tudjuk oldani az egyenletet.

Az okoskodás módja nagyon jellemző a matematikus gondolkozásra: igen sokszor nem vág neki egyenesen a matematikus az adott feladatnak, hanem addig formálja, gyúrja, míg át nem alakul olyan feladattá, amit már régebben megoldott. Persze, a régi jó kényelmi szempont. Ezt gúnyolja ki a matematikus körökben ismert találós kérdés: „Előtted van egy gáztűzhely, egy vízvezeték, egy doboz gyufa és egy fazék. Vizet akarsz forralni. Mit csinálsz?" Meglehetősen bizonytalan hangon szokott érkezni a válasz: „Meggyújtom a gázt, megtöltöm vízzel a fazekat és a gázlángra helyezem." „Eddig helyes. De most módosítom a feladatot: minden ugyanúgy van, mint az imént, csak az a különbség, hogy már van elegendő víz a fazékban. Most mit csinálsz?" Ilyenkor már bátrabban beszél a megfejtő a maga igazának tudatában: „Meggyújtom a gázlángot és ráhelyezem a fazekat." Ekkor kell fölényesen lecsapni rá: „Így a fizikus jár el! A matematikus kiönti a fazekat és ezt mondja: ezzel visszavezettem az előbbi feladatra."

Mindenesetre ez a visszavezetés a lényege a másodfokú egyenlet megoldásának, nem pedig a belőle leszűrt képlet, amit olyan jól megtanul a diák, hogy még évtizedekkel az érettségi után is el tudná fújni akár álmában is.

Még egy nehézség vetődik fel: tegyük fel, hogy már megtörtént a baloldal kiegészítése teljes négyzetté, de nem találunk olyan számot, melynek négyzete a jobboldalon levő számmal volna egyenlő; pl.

$$(x+3)^2=2.$$

Ha igazán gondoltam egy számot és x azt helyettesíti, akkor ez nem fordulhat elő, de az egyenletek komolyabb alkalmazásaiban igenis előfordulhat. Itt a hatványozás megfordításának kérdése merül fel: olyan számot keresünk, melynek négyzete 2. Ezt négyzetgyökvonásnak nevezik, és mint fordított művelet egy későbbi fejezetbe tartozik (ott fogok azzal a kérdéssel is foglalkozni, hogy hány megoldása van egy másodfokú egyenletnek – most még örülünk, ha egyet találunk), de megnyugtatásul előre közlöm, hogy megoldható.

Aki nem a képletre támaszkodik, hanem érti a gondolatmenetet, az bizonyos alakú magasabb fokú egyenleteket is könnyen meg tud oldani. Legyen például

$$(x+1)^3=27.$$

$27=3\cdot3\cdot3=3^3$ miatt 3 az a szám, melynek köbe 27, tehát

$$x+1=3,$$
$$x=2.$$

$(x + 1)^3$ is kifejthető a már ismert binomiális tétel szerint; az ilyen kifejtett alakból viszont rá lehet ismerni, hogy valamely kéttagú összeg köbéből keletkezett; de a teljes köbbé való kiegészítés már nem minden harmadfokú egyenletben sikerül. Mégis van általános eljárás a harmad- és negyedfokú egyenletek megoldására is; közben a négy alapműveleten és négyzetgyökvonáson kívül még köbgyökvonást, illetőleg negyedik gyökvonást kell alkalmazni, azaz megkeresni, hogy melyik számnak a köbe, illetőleg negyedik hatványa egyenlő egy adott számmal, pl. 2-vel.

A matematikának az egyenletekkel foglalkozó ágát algebrának nevezik. A középiskolában mindazt a matematikát nevezték algebrának, ami nem a geometriához tartozott. Annyi mindenesetre igaz, hogy a matematika minden ágában (még a geometriában is) lépten-nyomon egyenletek fordultak elő, úgy, hogy ez a kép alakulhatott ki a diákban: az egész matematika az egyenletek tudománya, a felsőbb matematika valószínűleg a bonyolultabb egyenleteké. Mindenesetre volt olyan kor, amikor a matematikusok figyelme az egyenletekre terelődött, és a fejlődést itt úgy képzelhették el, hogy a harmad- és negyedfokú egyenletek után majd az ötöd-, hatod- és egyre többedfokú egyenletek általános megoldására fognak ügyes módszereket kieszelni. Képzelhető tehát, hogy milyen döbbenetes volt, amikor Abel megadta annak a feltételét, hogy egy akárhányadfokú egyenlet megoldására lehessen alapműveletekből és gyökvonásokból álló általános módszert találni, és kiderült, hogy ennek a feltételnek csakis az első-, másod-, harmad- és negyedfokú egyenletek tesznek eleget. Szó sem lehet tehát arról, hogy pl. az ötödfokú egyenleteket általánosan oldjuk meg műveleteinkkel; úgy látszott, hogy az algebristák letehetik a tollat.

Itt érkeztünk a matematikatörténet legromantikusabb fejezetéhez. Ekkor történt, hogy egy húszesztendős francia fiatalember, Galois, párbajt vívott egy lányért és a párbajban elesett. Halálának előestéjén levelet írt egy barátjához, és ebben mintegy végrendeletképpen megírta azokat a gondolatait, amelyek új lendületet adtak a létalapjait vesztett algebrának.

Ha általános eljárás nincs is az ötödfokú egyenlet megoldására, mégis vannak speciális ötödfokú egyenletek, amelyeket meg tudunk oldani. Hiszen pl.

$$x^5 = 32$$

és ugyanúgy

$$(x + 1)^5 = 32$$

igen könnyen megoldhatók: $32 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot = 2^5$, tehát az első egyenlet megoldása

$$x = 2,$$

a másodiké pedig

$$x+1=2$$

miatt

$$x=1.$$

De más alakú egyenletek is lehetnek megoldhatók; hogy csak egyet ragadjak ki a sok közül:

$$x^5+2x^4+x=0\text{-}$$

nak $x=0$ biztosan megoldása, hiszen 0-nak minden hatványa és minden többszöröse 0, tehát $0^5+2\cdot0^4+0$ valóban 0-val egyenlő.

Ez ad új támadási felületet az algebrai kutatás számára: ha általános eljárásra nem is gondolhatunk, még mindig érdekes probléma eldönteni, hogy melyek azok a speciális magasabbfokú egyenletek, amelyek mégis megoldhatók műveleteinkkel.

Erre ad módszert a Galois-féle végrendelet.

Ez a módszer rendkívül termékenynek bizonyult; neki köszönhető, hogy a holtpontra jutott algebrában új virágzás indult, hatalmasabb, mint azelőtt. Ahol a matematika sebet kap, ott fokozott erővel indul meg a sarjadzás, a regeneráció. Az algebrának ez az új hajtása nevében is őrzi Galois emlékét: Galois-elméletnek hívják.

Valamire még fel szeretném hívni az olvasó figyelmét: az algebrában kerültünk először szembe azzal a jelenséggel, hogy a matematika a saját eszközeivel képes bebizonyítani a saját tehetetlenségét egy körülhatárolt területen. Fogunk még ezzel találkozni.

MÁSODIK RÉSZ

A teremtő forma

9. SZÉTFUTÓ SZÁMOK

Az előző fejezetekben már egy egész halom adósság gyűlt össze; ezek többé-kevésbé a műveletek megfordításához kapcsolódnak. Itt az ideje, hogy szembenézzünk a fordított műveletekkel.

A kivonás látszik még legveszélytelenebbnek. Miről is van itt szó? Az összeadást így lehet megfordítani: ismerem két tag összegét, ez pl. 10, az egyik tag 6, mennyi a másik? Természetesen 4, ennyi marad, ha 10-ből elvesszük a megadott tagot; hol itt a nehézség?

A nehézség ott kezdődik, hogy egy egészen keveset gondolkoznom kellett, mielőtt ezt a 10-es és 6-os számot hoztam fel példának. Összeadás esetén akár vakon is rábökhettem volna a természetes számsor két helyére, biztos, hogy az így talált számokat is össze lehetett volna adni, mégpedig bármelyik sorrendben. De mi lett volna, ha a fenti példát így fogalmazom meg: két tag összege 6, az egyik tag 10, mennyi a másik? Itt már maga az állítás nyilvánvalóan lehetetlenség, hiszen az összeg nem lehet kisebb egyik tagjánál sem. Arra tehát vigyázni kell, hogy a kisebbítendő nagyobb legyen, mint a kivonandó.

Csak ennyi az egész? Bizonyára azt gondolja az olvasó, hogy ezért ugyan kár volt ilyen későre halasztani ezt az egyszerű műveletet. Senkinek se jut eszébe, hogy kevesebből vegyen el többet, más, józan kivonások pedig minden nehézség nélkül elvégezhetők.

Így ez rendben is volna, csakhogy vannak esetek, amikor valósággal elénk tolakszik az a feladat, hogy egy kisebb számból vonjunk ki nagyobbat.

Emlékezzünk csak vissza a szöveges egyenletünkre, amelyben azt kellett kitalálni, hogy egy apa hány év múlva lesz kétszer annyi idős, mint a fia.

Most ugyanezt a kérdést teszem fel egy 52 éves apával és 27 éves fiúval kapcsolatban. Az okoskodás a régi: a szóban forgó jelenség x év múlva fog bekövetkezni, ekkor már mindenki x évvel idősebb: az apa $52 + x$ éves, a fiú $27 + x$ éves, és azt állítom, hogy

$$52 + x = 2 \cdot (27 + x).$$

Járjunk el a régi módon: a jobboldalon végezzük el mindkét tag szorzását:

$$52 + x = 54 + 2x,$$

gyűjtsük össze az ismeretleneket a jobboldalon, tehát hozzuk ide kivonandóul a baloldali x-et, viszont 54-et vigyük át kivonandóul a baloldalra:

$$52 - 54 = 2x - x.$$

2x-ből egy x-et elvéve egy x marad:

$$52 - 54 = x,$$

de itt aztán megakadunk: a lehetetlen 52 — 54 kivonás eredményének kellene egyenlőnek lenni a kitalálnivaló számmal.

Erre megint ezt lehetne mondani: ha az ismeretlen csakis az 52 — 54 kivonás eredménye lehet, akkor magában a kérdés feltevésében kell a hibát keresnünk; ez az apa sohasem lesz kétszerannyi idős, mint a fia.

De nézzük csak meg egy kicsit közelebbről a feladatban szereplő korokat: 52 év, 27 év. Akinek van érzéke a számokhoz, az kiérzi belőlük, hogy 2 évvel *ezelőtt* az apa 50, a fiú 25 éves volt, és így ekkor *volt* az apa kora kétszer annyi, mint a fiúé.

Úgy látszik, csak egy kissé át kell fogalmazni a példát: hány évvel ezelőtt volt az apa kétszerte idősebb a fiánál?

Így már nem lesz semmi baj az egyenlettel: x évvel ezelőtt mindenkinek a kora x évvel volt kevesebb, tehát ekkor az apa 52 — x, a fiú 27 — x éves volt, és ezekről a korokról állítjuk, hogy

$$52 - x = 2\cdot(27 - x).$$

A jobboldalon a különbséget ismét úgy szorozhatjuk 2-vel, hogy 27-et is, x-et is szorozzuk vele (például ha a 2·99 feladattal állunk szemben, ezt legkönnyebb úgy elvégezni, hogy 99 helyett 100-at szorzunk 2-vel, de az így nyert 200-ból azután kivonunk 2-t – itt 99-et 100 és 1 különbségének fogtuk fel és ezért lett a kétszerese 2·100 és 2·1 különbsége):

$$52 - x = 54 - 2x.$$

Most a baloldalon gyűjtsük össze az ismeretleneket, azaz a 2x kivonandót hozzuk át ide összeadandóul:

$$2x + 52 - x = 54$$

és most még az 52 összeadandót vigyük át kivonandó gyanánt:

$$2x - x = 54 - 52.$$

A kivonásokat itt nyugodtan elvégezhetem:

$$x = 2,$$

úgy, amint gondoltuk.

De azért ez már keserves mesterség. Végigjárni az utat a régi módon, amíg falba nem ütközünk, akkor visszafordulni, másképp tenni föl a kérdést, és elölről kezdeni az egészet. Pedig már a kezünkben volt a megoldás. Menjünk csak vissza oda, ahol megtorpantunk: szinte kiabál az

$$52 - 54:$$

„Hiszen én elárulom, hogy a különbség **2** ! Sőt még azt is, hogy ezt a két évet ellenkező irányban kell keresni: nem ezután, hanem ezelőtt. Mért nem akarjátok ezt belőlem kiolvasni?"

Így kínálkozik, hogy az 52 — 54 különbségnek is értelmet tulajdonítsunk: hogy annyinak tekintsük, amennyi az 54 és 52 közti különbség, de egy bizonyos – a szokásossal ellenkező – iránnyal ellátva. Minthogy ez az irány visszafelé mutat az időben, azt jelzi, hogy a mai korokból levonni kell 2 évet, a kivonás jelével szokás megjelölni, így:

$$52 - 54 = -2.$$

Ennek megfelelően az eddigi számainkat tulajdonképpen „+" jelzéssel kellene ellátnunk, mert ha egyenletünk eredménye az lett volna, hogy a szóban forgó helyzet 2 év *múlva* áll elő, akkor a mai korokhoz hozzáadni kellett volna 2 évet.

Ha ezt ki akarom hangsúlyozni, ki is teszem a „+" jelet.

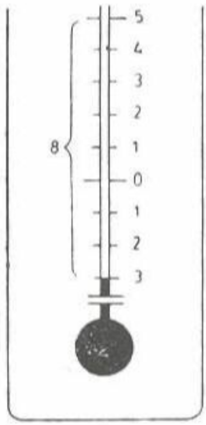
Nem egyedülálló eset az, hogy egy mennyiségnek irányt is kell tulajdonítanunk. Ha egy téli napon azt mondjuk, hogy 4 fok van odakinn, ezzel még nem adtunk kimerítő felvilágosítást az utca hőmérsékletéről. Azt is meg kell mondani, hogy 0 fölött, vagy 0 alatt van-e 4 fok; érzékeny ember számára ez komoly különbség lehet.

Ugyanilyen pongyola beszéd III. századról beszélni annak megjelölése nélkül, hogy időszámításunk kezdete előtti vagy utáni III. századról van-e szó, vagy 15° földrajzi hosszúságról annak közlése nélkül, hogy a Föld kiindulásul vett délkörétől keletre vagy nyugatra van-e ez a 15 fok. A könyvelő is ugyancsak ügyel arra, hogy számlájának középvonalától jobbra vagy balra szerepel-e egy 1000 forintos tétel, mert a legtöbb ember számára nem közömbös, hogy készletei gyarapodtak-e, vagy csökkentek 1000 forinttal.

Mindezekben az esetekben „+", illetőleg „—" jelzéssel lehetne ellátni a kétirányú mennyiségeket, és külön nevet adni nekik: a „+ előjelűeket" pozitív, a „— előjelűeket" negatív számoknak nevezik. És a negatív szám mindig úgy fogható fel, mint olyan kivonás eredménye, amelyben kisebb pozitív számból nagyobbat vonunk ki.

Például 5 fok van odakinn 0 felett, és a hőmérséklet leszáll 8 fokkal. Ez a leszállás csökkenést jelent, ezt hajlamosak vagyunk kivonásnak tekinteni.

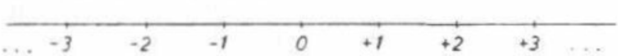
5 fokot kell csökkenteni 8-cal, de ennek nincs semmi akadálya, csak túl kell futni a 0°-on:



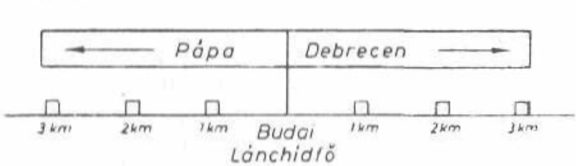
így 3 fok lesz 0 alatt, azaz —3 fok:

$$5 - 8 = -3.$$

Az ilyen kivonás mindig túlvezet a nullán az ellenkező irányba. Ha tehát az iránnyal ellátott mennyiségeket akarjuk ábrázolni a számvonalunkon, az egyik irányban (szokás szerint jobb felé) kell felvennünk a pozitív számokat, az ellenkező irányban a negatívokat:



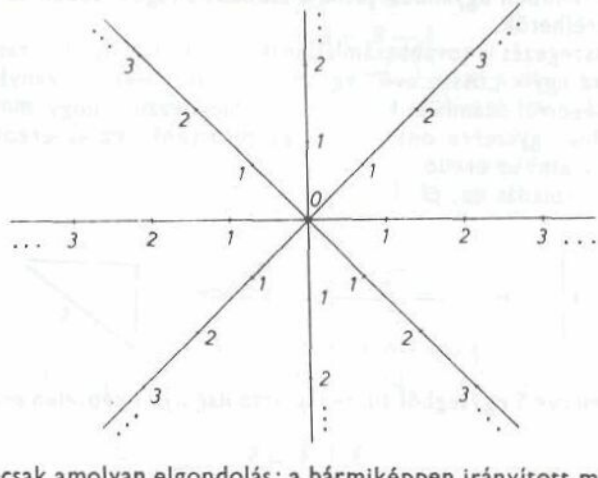
Ez a számvonal maga is felfogható úgy, mint az ellentétes irányú mennyiségekre felhozott példáink egyike: képzeljük, hogy ez egy országút, a 0 pontban leszúrt irányjelző táblával:



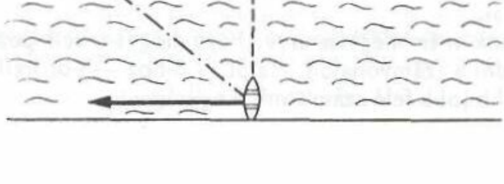
Vannak esetek, amikor csak a számok „abszolút" értéke érdekel minket, az irányuk nem, pl. ha csak arra vagyunk kíváncsiak, hogy mekkora a távolság két pont között. A kígyó hosszúsága pl. 3 méter, minden előjel nélkül: senki sem gondolja komolyan, hogy a farkától a fejéig 3 méter, a fejétől a farkáig szintén 3 méter, összesen 6 méter.

Mégis már szinte várható volt, hogy egyszer a matematikában is felbukkannak az ellentétek, annyira jellemző az emberre az ellentétpárokban való gondolkodás: az igen és nem, a fény és árny, tézis és antitézis.

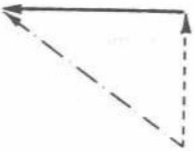
De a finomabb elme nemcsak a durva ellentéteket érzi meg: számtalan átmenet van a fényből az árnyba. Egy kiindulópontból nemcsak kétfelé vezet út: a budai Lánchídfőtől szétfutnak az országutak a szélrózsa minden irányába. Azt a félegyenest tehát, amelyen a természetes számokat ábrázoltuk, nemcsak az ellenlábas felével kellene kiegészítenünk, hanem a 0 ponton átmenő sugárutak egész sokaságával:



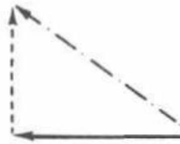
Ez nemcsak amolyan elgondolás: a bármiképpen irányított mennyiségek, az ún. „vektorok" fontos szerepet játszanak a fizikában. Egy mozgás akármilyen irányú lehet, egy erő akármilyen irányban hathat. És az ilyen irányított mennyiségek közötti műveleteknek is van értelmük: előfordul, hogy két erő hat egyszerre, és az együttes hatásuk érdekel minket. Pl. minden evezős tudja, hogyha át akar kelni a folyón, nem a kiindulóponttal szemben ér partot, hanem lejjebb, mert nemcsak a maga izomereje viszi, hanem az ár is sodorja:



Állóvízben a szaggatott vonal mentén haladna a csónak, álló csónakot a vastag vonal mentén sodorna le ugyanennyi idő alatt az ár; e két hatás alatt az eredményvonal mentén halad és így odajut, mintha ezeket az utakat külön-külön tette volna meg egymás után:



vagy fordított sorrendben:



Mindkét sorrendben ugyanoda jutna a csónak; a tagok ebben az összegezésben is felcserélhetők.

Ez az összegezés is továbbszámlálásnak fogható fel; ilyen ↑ irányban számláljuk meg az egyik „összetevő" egységeit, utána ilyen ← irányban a másik vektor egységeivel számlálunk tovább, és megnézzük, hogy melyik vektor vezetett volna egyszerre oda, ahova így jutottunk: ez az eredmény, vagy ahogy itt nevezik: az eredő.

Furcsa összeadás ez: pl.

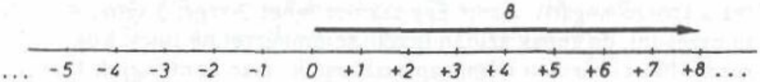
pontosan lemérve 5 egységből áll, tehát látszólag ilyen képtelen eredményhez jutunk:

$$3 + 4 = 5.$$

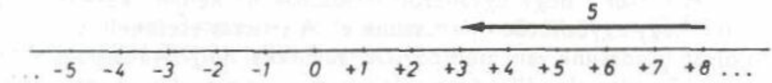
De itt egy pillanatig sem szabad pongyolán beszélnünk: meg kell mondanunk, hogy milyen irányú 3-ról, milyen irányú 4-ről és milyen irányú 5-ről van szó, és így már nem olyan képtelenség az, hogy $3 + 4 = 7$-nél kisebb eredményt kaptunk; hiszen ellentétes erők hatásának összege még 0 is lehet: a rátótiak állítólag a 4 lovas szekér húzására még négy lovat fogtak be, de erőlködhettek a lovak, ez mégis mozdulatlan maradt – mert az új lovakat a szekér másik felén fogták be, az első négy lóval ellentétes irányban.

Tovább ne is kövessük a sokfelé szétfutó számokat, elégedjünk meg a két ellentétes iránnyal.

Az utasításunk már megvan arra, hogy hogyan kell pozitív és negatív számokat összeadni a számvonalon. Ha pl. $+8$-hoz -5-öt kell adni, akkor 0-ból kiindulva előbb jobb felé számítunk 8 egységet:



most innen bal felé 5-öt:



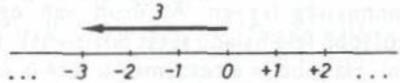
így $+3$-hoz jutottunk, tehát $+8$ és -5 összege $+3$.

Ne felejtsük el – a későbbiek miatt –, hogy

$$8 + (-5) = 3 = 8 - 5,$$

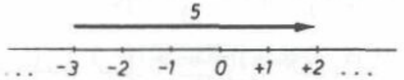
vagyis negatív szám hozzáadása helyett egyszerű kivonást végezhetünk.

Számvonalunkon a kivonás is egyszerű: az előbbi eljárásnak a megfordítása. Pl. vonjunk ki $+2$-ből -3-at; ez azt jelenti, hogy egy összeadás eredménye $+2$, az egyik tag pedig -3, és keressük a másik tagot. Tehát összeadáskor így indultunk el: 0-tól balra mentünk 3 egységgel:



Most azt kérdezem, hogy mit csináltunk ezután, ha végül is $+2$-be jutottunk?

-3-tól 5 egységgel *jobb felé* kell menni, hogy $+2$-höz jussunk:



tehát $+2$-nek és -3-nak a különbsége $+5$. Érdekes, ez ugyanaz, mintha $+2$-höz hozzáadtunk volna $+3$-at. Mindig is így van: kivonás helyett mindig végezhetünk összeadást, de ellenkező előjelű számmal.

Azt lehetne gondolni, hogy ha már összeadni tudunk, akkor simán megy a szorzás is, hiszen -2-t 3-szor venni itt is ezt az összeadást jelenti:

$$(-2) + (-2) + (-2),$$

és ha -2-től bal felé számlálunk még 2-t, majd ismét bal felé még 2-t, -6-hoz jutunk:

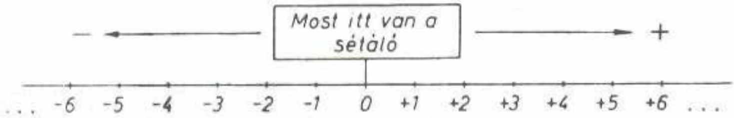
$$(+3) \cdot (-2) = -6.$$

De hátha a szorzó negatív szám? Egy számot lehet 2-szer, 3-szor, 4-szer egymásután öszeadni, de annak azután igazán semmi értelme sincs, hogy —2-szer adjuk össze. Most már van némi tapasztalatunk, már nem fogjuk könnyedén rámondani: ha nincs értelme, hát ne csináljuk, hanem mondjuk ki egyszerűen, hogy negatív számmal nem lehet szorozni. Hiszen már a negatív szám bevezetése is azért történt, hogy ugyanazon feladatnak ne kelljen kétféle módon nekimenni, hogy egyöntetűen járhassunk el. A szorzás esetében is ez a helyzet: ha olyan feladatunk van, amit pozitív számokkal dolgozva szorzással lehet megoldani, kényelmetlen állandóan szétválasztani az eseteket és ezt mondani: pozitív szereplők esetén szorzunk, negatív szereplők esetén valami mást csinálunk. Figyeljük meg, hogy mi az a más, amit ilyenkor csinálunk, és negatív számok esetén nevezzük éppen ezt szorzásnak. Jogunk van hozzá, hiszen aminek eddig nem volt értelme, annak még szabadon adhatunk értelmet.

A sok beszédnél többet mond egy példa.

Ha valaki óránként 3 km-es egyenletes tempóban sétál, mekkora utat tesz meg 2 óra alatt? Erre nyilván szorzás felel: ha 1 óra alatt 3 km-t, akkor 2 óra alatt $2 \cdot 3 = 6$ km-t tesz meg a sétáló. Tehát az utat megkapom, ha a séta idejével megszorzom a sétáló sebességét.

Most rendezzük be a feladatot úgy, hogy mind az út, mind az idő, mind a sebesség irányított mennyiség legyen. Az úton van egy pont – „itt"-nek fogom nevezni – amitől jobb felé haladó sétát pozitívnak, bal felé haladót negatívnak fogok tekinteni. Ha jobb felé tesz meg a sétáló óránként 3 km-t, azt fogom mondani, hogy a sebessége +3 km, ha bal felé, akkor azt, hogy a sebessége —3 km óránként. Végre választok egy időpontot – „most"-nak fogom nevezni – és az utána eltelő időt pozitívnak, az előtte elmúlt időt negatívnak tekintem. A kiindulás mindig ez: „most itt van a sétáló":



Szorítkozzunk a kritikus esetekre:

1. Valaki +3 km-es óránkénti sebességgel sétál, most itt van, hol volt 2 órával ezelőtt? Amit itt kapunk, azt kell a

$$(-2)\cdot(+3)$$

szorzás eredményének tekinteni.

Gondoljuk át: az illetőnek pozitív a sebessége, tehát jobb felé sétált, most itt van, ide érkezett (tessék rábökni a táblára), tehát 2 órával ezelőtt balra volt a táblától. Éspedig annyival, amekkora utat 2 óra alatt tett meg: $2 \cdot 3 = 6$ km-rel. A táblától 6 km-rel balra —6 van, tehát

$$(-2)\cdot(+3) = -6.$$

Eszerint, ha negatív számmal szorzunk pozitív számot, az eredmény negatív lesz.

2. Legyen a sebesség —3 km óránként, most itt van a sétáló; hol volt 2 órával ezelőtt? Ezt tekintjük majd a

$$(-2)\cdot(-3)$$

szorzás eredményének.

A negatív sebesség azt jelenti, hogy a sétáló bal felé haladt, most ide érkezett (tessék ismét rábökni a táblára); ez csak úgy lehet, hogy 2 órával ezelőtt jobbra volt a táblától, éspedig ismét 6 km-rel. A táblától 6 km-rel jobbra +6 van, tehát

$$(-2)\cdot(-3) = +6.$$

Eszerint két negatív szám szorzata pozitív.

Olyan ez, mint a kettős tagadás: „nem igaz ám, hogy nem figyeltem oda" - azt jelenti, hogy igenis, odafigyeltem.

A szorzás előjelszabályából rögtön kiolvashatjuk, hogy az osztásé is hasonló, pl.

$$(+6):(-3)$$

azt jelenti, hogy azt a számot keressük, amelynek —3-szorosa +6, ez pedig nyilván —2. És a hatvány előjelszabálya:

$$(-2)^4 = \underbrace{(-2)\cdot(-2)}\cdot\underbrace{(-2)\cdot(-2)} = (+4)\cdot(+4) = +16$$

és

$$(-2)^5 = \underbrace{(-2)\cdot(-2)}\cdot\underbrace{(-2)\cdot(-2)}\cdot(-2) =$$

$$= \underbrace{(+4)\cdot(+4)}\cdot(-2) = (+16)\cdot(-2) = -32,$$

általában a negatív tényezők páronként pozitív szorzatot adnak, és csak az a kérdés, hogy a párokon kívül marad-e még egy tényező, vagy nem; tehát negatív szám páros kitevőjű hatványa pozitív, páratlan kitevőjű hatványa negatív.

A szorzás fogalmának kiterjesztését negatív számokra itt egyetlen példából kaptuk; felmerülhet az a kétely, hogy más példa esetleg más szabályra vezetett volna. Teljes megnyugvást csak az ad, hogy új szorzási szabályunk teljesíti mindazokat a törvényeket, amelyeket a természetes számok közötti régi szorzásból leszűrtünk és így gondtalanul alkalmazhatjuk, nem fogunk ellenkezésbe jutni eddigi matematikánkkal. Így pl. itt is igaz, hogy a tényezők felcserélhetők, hiszen láttuk (és a sétáló-példából is levezethettük volna), hogy

$$(-2)+(-2)+(-2)=-6,$$

azaz

$$(+3)\cdot(-2)=-6,$$

a sétáló-példából pedig azt kaptuk, hogy

$$(-2)\cdot(+3)=-6,$$

tehát

$$(+3)\cdot(-2)=(-2)\cdot(+3).$$

Mindig erre fogunk vigyázni, ha új számokat, új műveleteket vezetünk be: éppen, mert az a céljuk, hogy egységessé tegyék eljárásunkat, rajta leszünk, hogy teljesítsék a régi szabályokat. Nehogy szét kelljen választanunk a tennivalókat aszerint, hogy az újfajta szám, illetve művelet szerepel-e, vagy csak a régi. Ezt az óvatosságot a régi fogalmak kibővítésében nevezik „permanencia-elvnek".

A természetes számsor spontán alkotás volt. Az eleddig jól működő szerkezet megakadása arra késztette az embert, hogy tudatosan teremtsen új számokat. Ami ebben segít: az a forma. Az új szám pontos keretei adva vannak a régi számokból leszűrt törvényekben, amelyektől nem akarunk nagyon elrugaszkodni. Ez ad útmutatást ebben a tudatos alkotásban: az új számot úgy kell megformálni, hogy jól simuljon a kész formákba. Ahogy Goethe mondja – hiszen a gondolat formája a szó is –

„Mert éppen ott, hol fogalom nincs,
Tesz jó szolgálatot a szó . . . "

10. HATÁRTALAN SŰRŰSÉG

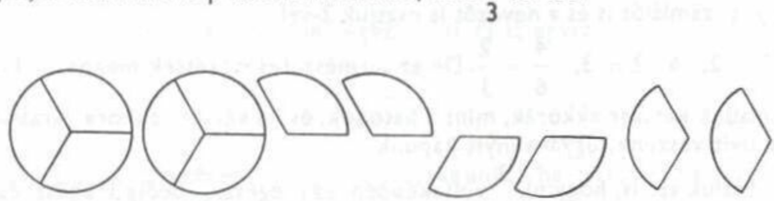
Az új problémához egyenlet sem kell, a legkisebb gyerekkel is megtörténik, hogy olyan osztással kerül szembe, amely a természetes számok körében elvégezhetetlen. Két gyereknek kell osztoznia egy almán; tisztában vannak azzal, hogy egész alma egyikükre sem fog jutni. Nyugodtan el fogják felezni az almát:

$\frac{1}{2}$ alma

és közben eszükbe sem jut, hogy ezzel ismét bővítették a számfogalmat.

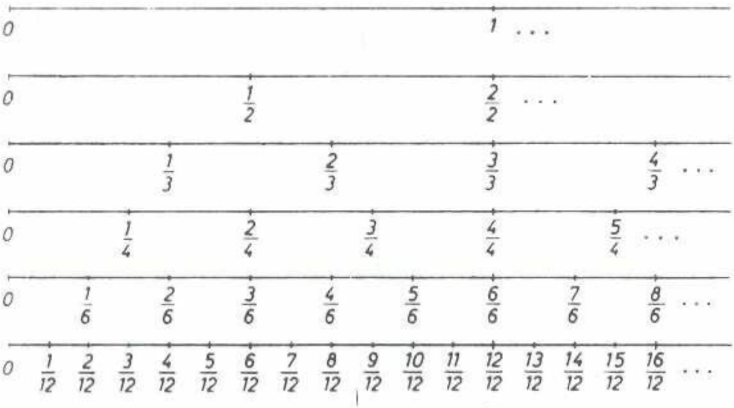
Eddig egy egyest oszthatatlan egységnek tekintettünk. Most ennek a felét vezetjük be új, kisebb egység gyanánt, és ha az első merész lépés megtörtént, semmi akadálya sincs annak, hogy 1 egészet 3, 4, 5, . . . , akárhány részre oszszunk, és az így nyert újabb kicsi egységekkel számláljunk tovább; pl. két fél, három fél, négy fél, . . . vagy jelekben: $\frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \frac{4}{2}, \ldots$

Ez a jelölés nincs ellenkezésben azzal, hogy eddig az osztást jelöltük törtvonallal, mert ha pl. 2-t kell osztani 3 felé, mondjuk, 3 gyerek osztozik 2 tortán, ezt legügyesebben úgy hajthatják végre, hogy mindkét tortát harmadokra vágják, és mindenki kap két harmadrészt, azaz $\frac{2}{3}$ tortát:



A törtvonal alatti szám *nevezi* meg, hogy milyen egységről van szó: ez a nevező; a törtvonal feletti szám *számlálja* meg, hogy hány ilyen egységet vettünk: ez a számláló.

Így ismét megsokasodik a számvonalunk: új és új számvonalakat vehetünk fel, egyre kisebb egységekkel. Néhány ilyet felrajzolok:



A különböző vonalakon szereplő egységek közt egyenlők is vannak; nézzük csak meg, melyek esnek pontosan egymás alá. Ilyenek pl.

$$\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{3}{6}=\frac{6}{12} \text{ vagy } \frac{2}{3}=\frac{4}{6}=\frac{8}{12};$$

ebből kiolvasható, hogy mik azok a látszólagos változtatások, amelyek nem változtatják meg a tört értékét. Pl. $\frac{4}{6}$-dal egyenlő értékű az egyszerűbb alakú $\frac{2}{3}$; $\frac{4}{6}$-ot $\frac{2}{3}$-dá lehet „egyszerűsíteni". Ezt úgy hajthatjuk végre, hogy a számlálót is és a nevezőt is osztjuk 2-vel:

$4:2=2$, $6:2=3$, $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$. De ez természetes is; tessék megnézni, hogy a harmadok kétszer akkorák, mint a hatodok, és ha kétszer akkora darabokból félannyit veszünk, ugyanannyit kapunk.

Látjuk azt is, hogy pl. $\frac{3}{3}$ voltaképpen egy egész, $\frac{4}{3}$ pedig 1 egész és $\frac{1}{3}$ – ezt röviden így írják: $1\frac{1}{3}$, – tehát, hogy ezek nem is valódi törtek, hiszen az értékük nem része az 1 egésznek; áltörteknek nevezik őket.

Hogy egyetlen vonalon egyszerű továbbszámlálással lehet új egységeinket is összeadni és kivonni, az világos: pl. $\frac{3}{4}$-től két negyeddel továbbszámlálva $\frac{5}{4}$-hez jutunk, tehát

$$\frac{3}{4}+\frac{2}{4}=\frac{5}{4}.$$

Ugyanígy megy a szorzás egy egész számmal:

$$2\cdot\frac{5}{12}=\frac{5}{12}+\frac{5}{12}$$

és $\frac{5}{12}$-től 5 tizenketteddel számlálva tovább, $\frac{10}{12}$-hez jutunk.

Egy kis megakadást jelent, ha különböző egységekből álló számokat kell összeadnunk, pl.

$$\frac{2}{3}+\frac{3}{4}$$

a feladat. Itt a következő kerülőutat válszthatjuk: keressük meg az első számvonalat, amelyen találunk olyan számot is, amely $\frac{2}{3}$-dal, olyat is, amely $\frac{3}{4}$-del egyenlő (ha kicsit utánagondol az ember, látja, hogy mindig van ilyen számvonal). Itt a tizenkettedrészek számvonala felel meg a célnak, ezen

$$\frac{8}{12}=\frac{2}{3} \text{ és } \frac{9}{12}=\frac{3}{4}$$

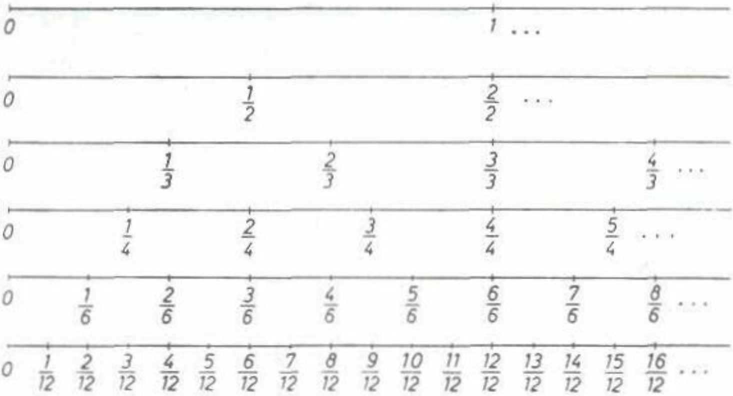
és így már egyetlen számvonalon végezhetjük el az egyszerű

$$\frac{8}{12}+\frac{9}{12}$$

összeadást.

Ugyancsak más számvona'-a kell átugranunk,* ha osztásról van szó: tessék utánamérni, hogy $\frac{1}{2}$-nek a fele $\frac{1}{4}$-del, $\frac{2}{3}$-nak a negyedrésze $\frac{2}{12}$-del egyenlő;

* Engem ez arra emlékeztet, ahogyan az elektronok ugranak át sugárzáskor az egyik lehetséges pályáról a másikra; talán lesz olvasó, akinek szintén mond valamit ez a modern atomelméletből vett kép.



de hiszen ez természetes is, hiszen a négyszer akkora nevező azt jelenti, hogy egy egészet négyszer annyi részre osztottunk,és ezekből a részekből vettünk ugyanannyi darabot; így azután négyszerte kisebbre sikerülnek ezek a részek; ha pl. tortákról volna szó:

Látjuk tehát, hogy felsorolt műveleteink bármelyikét alkalmazva törtekre, ismét valamilyen (valódi vagy ál-) törtet kapunk eredményül; nem baj, hogy közben néha orgonánknak más-más billentyűsorozatán kell játszanunk.

Igazi problémát ismét a törttel való szorzás jelent: annak megint nincs semmi értelme, hogy valamit $\frac{1}{2}$-szer egymás után adjunk össze. Egy kisdiák ezt mondta egyszer: ha egy egész-szer 3 ennyi: 3, akkor $\frac{1}{2}$-szer 3 ennyi: $\frac{3}{2}$ – és ebben volt némi igaza. Igaz, hogy itt a nyelvhasználat is segít: „Peti $\frac{2}{3}$-szor akkora, mint a bátyja" – ezzel azt akarják kifejezni, hogy Peti magassága a bátyja magasságának $\frac{2}{3}$ - része. $\frac{2}{3}$-szor venni valamit azt jelenti, hogy nem az egészet vesszük, csak két harmadot belőle, vagyis a két harmadrészét. És valóban ez az a szorzás, ami a szöveges példákban kínálkozik: ha 1 kg szőlő 5 forintba kerül, akkor 4 kg nyilván $4 \cdot 5 = 20$ forintba, tehát az árat megkapom, ha 1 kg árát szorzom annyival, ahány kg-ot vásárolok. Most módosítsuk így a kérdést: 1 kg szőlő ára 5 forint, mennyibe kerül $\frac{3}{4}$ kg? Amit ekkor kapok, azt fogom

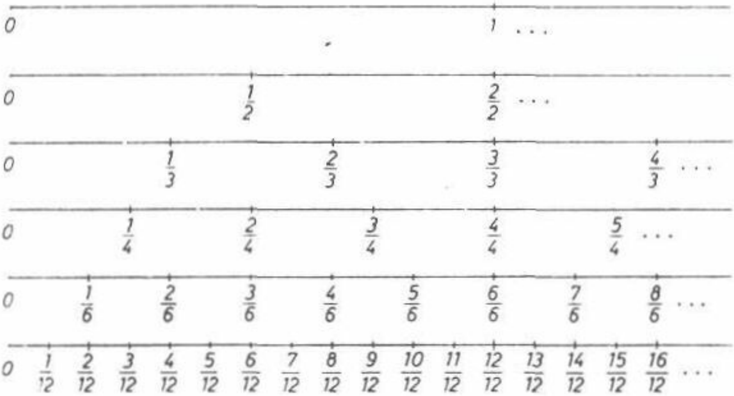
$$\frac{3}{4} \cdot 5$$

eredményének tekinteni.

Három negyedkilogramm árát nyilván úgy számíthatom ki, hogy $\frac{1}{4}$ kg árát 3-szor veszem. $\frac{1}{4}$ kg ára pedig az 5 forintnak a negyedrésze (ez 1 Ft 25 f). Ezt kell 3-szor vennem (így 3 Ft 75 f-t kapok), vagyis $\frac{3}{4} \cdot 5$ valóban azt jelenti, hogy három negyedrészét veszem az 5-nek. Ezt pedig úgy végzem el, hogy 4-gyel osztok és 3-mal szorzok.

Egészen hasonló meggondolás vezet arra, hogy osztani pedig úgy kell $\frac{3}{4}$-del, hogy 4-gyel szorzok és 3-mal osztok. Így ezek a műveletek ismét törteket adnak eredményül, valamelyik számvonalon, és meg lehet mutatni, hogy a szorzás fogalmának ilyen kiterjesztése mellett minden régi műveleti szabály épségben marad. Azon nem szabad csodálkozni, hogy itt az is előfordulhat, hogy az eredmény kisebb, mint az a szám, amit megszoroztunk. Hiszen $\frac{2}{3}$-szor venni egy számot annyit tesz, mint venni a $\frac{2}{3}$ részét, ez pedig nyilván kevesebb, mint a szám.

Nagyon könnyű 20-at $\frac{1}{4}$-del szorozni: egyszerűen egy negyedrészét kell venni és 20-nak a negyedrésze 5. Ugyanilyen könnyű $\frac{1}{2}$-del, $\frac{1}{3}$-dal, $\frac{1}{5}$-del szorozni, hiszen ekkor a szorzandónak egyszerűen csak felét, harmad-, ötödrészét kell vennünk. Ezért érdemes a törteket ilyen 1 számlálójú ún. „törzstörtekre" bontani.



Pl.

$$\frac{5}{12} = \frac{4}{12} + \frac{1}{12}$$

és nézzük meg a megfelelő számvonalakon, hogy $\frac{4}{12}$ ugyanannyi, mint $\frac{1}{3}$, tehát

$$\frac{5}{12} = \frac{1}{3} + \frac{1}{12},$$

$\frac{1}{12}$ pedig $\frac{1}{3}$-nak a negyedrésze (tessék megnézni); eszerint pl. a

$$84 \cdot \frac{5}{12} = 84 \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{12}\right)$$

szorzás úgy végezhető el, hogy előbb 84 harmadrészét vesszük, ez 28, azután ennek vesszük a negyedrészét, ez 7; 28 + 7 pedig 35. Nagy könnyítés ez az angoloknak, akik még mindenféle számrendszer maradványait őrzik különböző mértékegységeikben, és így pl. az ő forintjuk, a shilling, 12 penny-re oszlik, tehát lépten-nyomon tizenkettedrészekkel kell szorozniok.

Kiderült, hogy minden alapműveletünk elvégezhető a törtek körében. Lássunk erre még egy példát: valaki számtani feladatokat old meg; a legkönnyebbel $\frac{1}{3}$ óra (20 perc) alatt végez, a legnehezebben $\frac{1}{2}$ óráig (30 percig) is töri a fejét. Átlag mennyi időt tölt egy feladattal?

A legkönnyebb és a legnehezebb példával együttvéve

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{2}$$

órát vesződik; ha egyenlő nehezek volnának, ennek az összegnek a fele jutna egyre. Ennyi ideig kell valószínűleg egy átlagos példán dolgoznia. Számítsuk ki ezt az időt: a hatodrészek vonalán találunk egy olyan számot is, amely $\frac{1}{3}$-dal, olyat is, amely $\frac{1}{2}$-del egyezik meg:

$$\frac{2}{6}=\frac{1}{3} \quad \text{és} \quad \frac{3}{6}=\frac{1}{2},$$

tehát $\frac{1}{3}$ és $\frac{1}{2}$ összege ugyanannyi, mint

$$\frac{2}{6}+\frac{3}{6}=\frac{5}{6},$$

ennek a fele (tessék megnézni) ugyanannyi, mint a tizenkettedek vonalán

$$\frac{5}{12}.$$

Tehát egy átlagos példa $\frac{5}{12}$ óra (25 perc) időt kíván; ez természetesen több, mint amennyit a legkönnyebb, és kevesebb, mint amennyit a legnehezebb példára kell fordítani.

Bármely két szám átlagát úgy számíthatjuk ki, hogy az összegük felét vesszük; így mindig olyan számot kapunk eredményül, melynek értéke a két adott érték közé esik, ezért is nevezik a matematikusok számtani középnek.

Ez az ártatlannak látszó példa szédületes perspektívákat tár fel, ha egy kicsit elgondolkozunk rajta.

Először is toljuk össze valamennyi számvonalunkat egyetlen egyenesre: nincs annak semmi akadálya, hogy minden törtet egyetlen számvonalon ábrázoljunk; csak áttekinthetőbb volt eleinte külön vonalakat venni fel az egyes törtegységek számára, mert a közös számvonalon az egyenlő értékű törtek egy pontba esnek (most mindegyik ponthoz abban az alakban írom a törtet, ahogyan először fordult elő):

$$0 \quad \frac{1}{12} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{5}{12} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{7}{12} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{3}{4} \quad \frac{5}{6} \quad \frac{11}{12} \quad 1 \quad \frac{13}{12} \quad \frac{7}{6} \quad \frac{5}{4} \quad \frac{4}{3} \quad \frac{17}{12} \quad \frac{3}{2} \quad \frac{19}{12} \quad \frac{5}{3} \quad \frac{7}{4} \quad \frac{11}{6} \quad \frac{23}{12} \quad 2\ldots$$

Ez már jó sűrű, de gondoljuk meg, hogy mi csak néhány kiragadott számvonalat toltunk össze, az ötödök, hetedek, tizenharmadok, századok, számtalan sok törtegység még egyáltalán nem szerepel itt. Ha mindezeket hozzáképzeljük, már elképzelhetetlen sűrűségben lesznek a megjelölt pontok a számvonalon. Próbáljunk eligazodni köztük.

Először is látjuk, hogy az egész számok is ott vannak köztük; ezek felfoghatók 1 nevezőjű törtnek. Pl. $\frac{3}{1}$, ha arra az értelmezésre gondolunk, hogy ez 3 osztását jelenti 1-gyel, valóban 3. Az egész számokat és a törteket közös néven racionális számoknak hívják – ez már előreveti az árnyékát annak, hogy lesznek kevésbé racionálisan megalkotott számok is.

Nullán kívül (ez felfogható $\frac{0}{2}$-nek, $\frac{0}{3}$-nak, $\frac{0}{4}$-nek, s. í. t.), melyik lesz a legkisebb tört? Világos, hogy nem az $\frac{1}{12}$, mert ennél $\frac{1}{13}$ is kisebb: ha eggyel többfelé osztunk egy tortát, a szeletek kisebbek lesznek. De ugyanez a helyzet, bármilyen törttel is próbálkozunk: $\frac{1}{100}$-nál kisebb $\frac{1}{101}$ is, $\frac{1}{1000}$-nél kisebb $\frac{1}{1001}$ is. Tehát a racionális számok közt nemcsak legnagyobb nincs, mint az egész számok közt, hanem legkisebb sem.

Jó, hát megkezdeni nem tudjuk a racionális számok felsorolását. Induljunk ki egy tetszés szerint választott kis törtből, pl. az $\frac{1}{12}$-ből, és próbáljuk legalább innen kezdve rendre felsorolni a racionális számokat. Melyik az $\frac{1}{12}$-et követő tört? Ez nem lehet a mi vonalunkon következő $\frac{1}{6}$, hiszen tudjuk, hogy $\frac{1}{12}$ és $\frac{1}{6}$ számtani közepe e két tört közé esik, tehát $\frac{1}{6}$-nál közelebb esik $\frac{1}{12}$-hez. De bármilyen más $\frac{1}{12}$-től jobbra eső számot is mondtam volna $\frac{1}{6}$ helyett, ugyanígy képezhettem volna $\frac{1}{12}$-nek és e számnak a számtani közepét, és ez ismét közelebb esett volna $\frac{1}{12}$-hez a gondolt számnál. Tehát $\frac{1}{12}$-nek nincs közvetlen rákövetkezője; arról sem lehet szó, hogy innen kezdve soroljuk fel a racionális számokat. Általában ugyanígy látható be, hogy bármily közel eső racionális számokat is veszünk szemügyre a számegyenesen, ezek nem közvetlen szomszédok, esik közéjük más racionális szám is. Ez az, amit úgy fejeznek ki, hogy a racionális számok halmaza „mindenütt sűrű".

Itt a végtelennek egy új képével találkozunk: a természetes számsor vagy a törzsszámok végtelen növekedése után a határtalan sűrűséggel. Nincs olyan nagy szám, aminél még nagyobb ne volna a természetes számok vagy a törzsszámok sorozatában – ez a pontos értelme annak, amit a matematikus így fejez ki: e sorozatok a végtelenhez közelednek. És nincs olyan kicsi szám, aminél közelebb ne volnának racionális számok $\frac{1}{12}$-hez: ezt fejezik ki úgy, hogy $\frac{1}{12}$ sűrűsödési helye a racionális számok halmazának; természetesen nemcsak $\frac{1}{12}$, hanem minden más racionális szám is sűrűsödési hely.

És mégis el lehet rendezni minden racionális számot egyetlen sorozatba, ha nem is nagyság szerint.

Hogy végtelen sok számsorozatba el lehet rendezni őket, azt már láttuk, amikor az egyes törtegységekből alkotott sorozatokat más-más számvonalon ábrázoltuk; írjuk az egyöntetűség kedvéért az egészeket is tört alakban:

$$\begin{array}{cccccc}
\frac{1}{1}, & \frac{2}{1}, & \frac{3}{1}, & \frac{4}{1}, & \frac{5}{1}, & \ldots \\[1em]
\frac{1}{2}, & \frac{2}{2}, & \frac{3}{2}, & \frac{4}{2}, & \frac{5}{2}, & \ldots \\[1em]
\frac{1}{3}, & \frac{2}{3}, & \frac{3}{3}, & \frac{4}{3}, & \frac{5}{3}, & \ldots \\[1em]
\frac{1}{4}, & \frac{2}{4}, & \frac{3}{4}, & \frac{4}{4}, & \frac{5}{4}, & \ldots \\[1em]
\frac{1}{5}, & \frac{2}{5}, & \frac{3}{5}, & \frac{4}{5}, & \frac{5}{5}, & \ldots
\end{array}$$

és így tovább. De most arról van szó, hogy ezeket egyetlen sorozatba rendezzük. Ez megtörténhetik úgy, hogy a berajzolt ferde vonalak mentén elhelyezkedő számokat írjuk rendre egymás után; így persze előbb-utóbb mind sorra kerülnek:

$$\underbrace{\frac{1}{1}},\ \underbrace{\frac{2}{1},\frac{1}{2}},\ \underbrace{\frac{3}{1},\frac{2}{2},\frac{1}{3}},\ \underbrace{\frac{4}{1},\frac{3}{2},\frac{2}{3},\frac{1}{4}},\ \underbrace{\frac{5}{1},\frac{4}{2},\frac{3}{3},\frac{2}{4},\frac{1}{5}},\ \ldots;$$

egyre hosszabb, de mindig véges sok számból álló csoportok követik egymást, tehát csakugyan egyetlen sorozatot kapunk, aminek felírását bárki folytathatja, ha megértette a képezési szabályt; sőt akkor is, ha rá sem néz a fenti táblázat ferde vonalaira, de észreveszi, hogy az első csoportban levő egyetlen tört számlálójának és nevezőjének összege 2, a második csoport mindkét törtjében 3 a számláló és nevező összege, a harmadik csoport törtjeiben 4, s í. t., az utoljára felírt csoportban 6. Ennek alapján ugyanis

$$7=6+1=5+2=4+3=3+4=2+5=1+6$$

lévén, a következő csoport így képezhető:

$$\frac{6}{1},\ \frac{5}{2},\ \frac{4}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{2}{5},\ \frac{1}{6},$$

és most már bárki gépiesen folytathatja az eljárást. Márpedig egy végtelen sorozatot éppen akkor tekinthetünk teljesen megadottnak, ha a benne levő törvényszerűség felismerése után akármeddig felírhatja a tagjait akárki.

Sorozatunkban persze megegyező értékű számok is lesznek, hiszen ezt már a számvonalakon is láttuk, ha tehát csak egyszer akarunk felírni minden racionális számot, akkor a képezési szabályhoz azt is hozzá kell venni, hogy a közben fellépő egyszerűsíthető törteket hagyjuk ki. A sorozat eddig felírt részéből például $\frac{2}{2}, \frac{4}{2}, \frac{3}{3}, \frac{2}{4}$ marad ki; ezek közül $\frac{2}{2}$ és $\frac{3}{3}$ $\frac{1}{1}$-gyel, $\frac{4}{2}$ $\frac{2}{1}$-gyel, $\frac{2}{4}$ $\frac{1}{2}$-vel egyenlő értékű. Tehát valójában így kezdődik a racionális számok sorozata:

$$\frac{1}{1},\ \frac{2}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{1},\ \frac{1}{3},\ \frac{4}{1},\ \frac{3}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{5}{1},\ \frac{1}{5},\ \ldots$$

és ez gépiesen folytatható. Így sorra meg tudom mondani, hogy mi e sorozat első, második, harmadik, ... tagja: a sorozat megszámozható; kissé félreérthető szakkifejezéssel „megszámlálhatónak" mondják.

Ez az egyszerű tény ismét valami meglepő jelenségre világít rá: arra, hogy a racionális számok (vagyis valamennyi tört) határtalan sűrűsége ellenére, egy bizonyos értelemben „ugyanannyi" racionális szám van, mint egész szám. Hogyan lehet végtelen sokaságokat összehasonlítani egymással? Erre egy egyszerű mód kínálkozik. Ha egy tánciskolában tudni akarom: ugyanannyi fiú van-e jelen, mint lány, nem kell őket külön-külön megszámlálnom. Elég ez a felszólítás: tessék táncra kérni a hölgyeket! Ha azután egyetlen fiú sem marad pár nélkül,és egyetlen lány sem árul petrezselymet, akkor már tudom, hogy egyenlő sokan vannak. Ezt az összehasonlítási módot végtelen számosságokra is át lehet vinni: ha két végtelen halmaz elemeit össze lehet párosítani egymással úgy, hogy egyik halmazból se maradjon pár nélkül egyetlen elem se, akkor azt mondjuk, hogy ezek a halmazok egyenlő számosságúak.

Mármost a racionális számok imént felírt sorozata összepárosítható a természetes számok

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ldots$$

sorozatával. Az 1-et sorozatunk első tagjával: $\frac{1}{1}$-gyel párosítsuk össze, a 2-t sorozatunk második tagjával: $\frac{2}{1}$-gyel, a 3-at $\frac{1}{2}$-vel, s. í. t., pl. 10-et a sorozat tizedik tagjával, $\frac{5}{1}$-gyel; ha azt akarom tudni, hogy 100-nak mi lesz a párja, előbb a megadott eljárással előállítom a racionális számok sorozatának századik tagját – és az lesz. Világos, hogy ezt az összepárosítást bárki bármeddig folytathatja, és lehetetlenség akár a természetes számok, akár a racionális számok sorozatában egyetlen elemet is megadni, amely így pár nélkül maradna. Tehát ebben az értelemben a racionális számok halmaza és a természetes számok halmaza valóban egyenlő számosságú; annak ellenére, hogy a racionális számok mindenütt sűrű halmazában az egész számok is el vannak szórva mazsolák gyanánt, látszólag elenyésző kisebbségben.

Ez megint rávilágít egy nagy fontosságú jelenségre: a végtelennel nagyon csínján kell bánni. Vannak, akik mindenre érvényes logikai elvnek tekintik, hogy a rész kisebb az egésznél. Íme most láttunk egy ellenpéldát: a természetes számok csak egy elenyésző részét teszik a racionális számok halmazának, mégis ugyanakkora a számosságuk. Az ilyen általános logikai elveket a tapasztalatok egész sokaságából vonta el az ember, de minden tapasztalat csak a végesben játszódhatott le. Sok zavarra vezetett már, hogy a végesben tapasztaltakból leszűrt elvet rá akarták húzni a végtelenre is. A végtelen ráz egyet magán és kibújik alóla.

Hogy az ember mégis nagyon berzenkedik az ellen, hogy bárhol is egyenlővé válhasson a rész az egésszel, annak bizonyára az az oka, hogy nemcsak a tapasztalás tartja fenn a logikai elveket, hanem tudatalatti erők is. Az ember szinte az erkölcsi világrendet érzi meginogni attól, hogy a rész versenyre kelhet az egésszel. De talán éppen ezért jelenti egy kicsit a tiltott gyümölcs örömét is a kimerészkedés a szigorú törvények világából a szabadabb végtelenbe.

11. ISMÉT MEGFOGJUK A VÉGTELENT

Térjünk vissza egy kis időre a végtelenből a kézzelfogható világba, és gondoljunk megint arra, hogy a kezünkön, amellyel ezt a világot megfogni próbáljuk, 10 ujj van. Nem lehetne-e a törteket is belekényszeríteni a tízes számrendszerbe?

Emlékezzünk csak vissza: az egyesektől balra volt a 10-szer akkora egységek, a tízesek helye, ezektől balra következtek a tízszerte nagyobb százasok, s. í. t. Szinte magától kínálkozik, hogy ezt a rendet jobb felé is folytassuk: az egyesektől jobbra írjuk az első helyre a tizedeket, a második helyre a tizedek tizedrészeit, a századokat, a harmadikra az ezredeket, s. í. t. De ezeket az új egységeket valahogyan el kell választani az egyesektől, mert hiába gondolom én, hogy

$$12\text{-}$$

ben az 1 egy egyest, a 2 két tizedet jelent, ezt minden más ember mégis tizenkettőnek fogja olvasni. Ezért teszik ki az ún. „tizedesvesszőt":

$$1{,}2$$

és nem szabad elfelejteni, hogy ez csak rövidítés

$$1+\frac{2}{10}$$

helyett; ugyanígy

$$32{,}456=32+\frac{4}{10}+\frac{5}{100}+\frac{6}{1000}.$$

Így jutunk a tizedesszámokhoz.

Azok a törtek, amelyeknek a nevezője 10, 100, 1000, vagy a tízes számrendszer bármely más egysége, mind felírhatók tizedesalakban is. Pl.

$$\frac{23}{100}=\frac{20}{100}+\frac{3}{100}.$$

$\frac{20}{100}$-ot egyszerűsíthetjük úgy, hogy a számlálóját is, a nevezőjét is osztjuk 10-zel:

$$\frac{23}{100}=\frac{2}{10}+\frac{3}{100}$$

és egészek ebben nincsenek, tehát végül is

$$\frac{23}{100}=0{,}23.$$

De vajon minden tört felírható-e tizedesszám gyanánt?

Az átalakítás legegyszerűbb módja az, hogy elvégezzük a törtalakban kijelölt osztást:

$$\frac{6}{5}=6:5=1$$

marad 1,

a megmaradt 1-et tizedekre váltjuk fel, így 10 tized lesz belőle, ezt 5-tel osztva 2 tizedet kapunk, így az eredményben ki kell tenni a tizedesvesszőt:

$6:5=1{,}2,$
10

tehát

$$\frac{6}{5}=1{,}2.$$

Hasonlóan

$\frac{7}{25}=7:25=0{,}2$
70
$20,$

most 20 tized maradt, ezt 200 századra válthatjuk fel, és ha 200 századot 25-tel osztunk, 8 századot kapunk:

$7:25=0{,}28,$
70
200

tehát

$$\frac{7}{25} = 0{,}28\,.$$

De gyakran már a legegyszerűbb esetekben megakadunk:

$$\frac{4}{9} = 4:9 = 0{,}44\ldots$$
$$\begin{array}{l} 40 \\ \;\;40 \\ \;\;\;4 \end{array}$$

ez az osztás sohasem fejeződik be: akármeddig is folytatjuk, mindig marad még 4. Tehát $\frac{4}{9}$ nem írható fel tizedesszám gyanánt.

Pedig milyen kényelmes tizedesszámokkal számolni! Hogy csak egy példát hozzak föl erre: micsoda gyerekjáték egy tizedesszámot 10-zel megszorozni! Ha pl. ez a feladat:

$$45{,}365\cdot 10,$$

akkor csak arra kell gondolnunk, hogy 4 tízes 10-szerese 4 százas, 5 egyes 10-szerese 5 tízes, 3 tized 10-szerese 3 egész, s. í. t. Rögtön látjuk, hogy az egész feladatot elintézhetjük azzal, hogy a tizedesvesszőt egy hellyel jobbra visszük:

$$453{,}65,$$

hiszen így minden helyi érték eggyel balra tolódott,és pl. a tízesekből százasok lettek. Ha az eredményt még egyszer megszorozzuk 10-zel:

$$4536{,}5,$$

akkor már az eredeti szám 100-szorosát kapjuk (pl. az 5 egyesből itt 5 százas lett),és ebből rögtön látható, hogy 100-zal úgy szorozhatunk, hogy két hely-lyel visszük jobbra a tizedesvesszőt. Ugyanígy látható be, hogy 10-zel osztani a tizedesvessző balra tolása útján lehet. Ez pedig igazán nem nagy fáradság. De jó volna minden törtet tizedesalakban írni!

Hát nézzük csak meg újra, hol akadtunk meg?

$$\frac{4}{9} = 4:9 = 0{,}44\ldots$$
$$\begin{array}{l} 40 \\ \;\;40 \\ \;\;\;4 \end{array}$$

Itt mindig 4 marad, abból mindig 40 lesz, ha felváltjuk kisebb egységekre, és 40-ben a 9 mindig 4-szer van meg. Ha ez az osztás nem is ér soha véget, mégis teljesen a kezünkben van az eredménye: 4-es ismétlődik benne a végtelenségig.

Erre azt mondja a gyakorlat embere: még ha véget is érne ez az osztás pl. a tizedik tagnál, én akkor sem használnám fel az egész eredményt. Hiszen nekem legfeljebb deciliterekre van szükségem (és egy deciliter annyi, mint egy tized liter), vagy centiméterekre (és egy centiméter a méter századrésze), esetleg grammokra (és egy gramm ezredrésze a kilogrammnak); azt az elenyészően csekély mennyiséget, ami még egy ezredrész után van, igazán szőrszálhasogatás figyelembe venni. Nekem az egész végtelen tizedesszámból csak ennyi kell:

$$0{,}4\,,$$

vagy $$0{,}44,$$

vagy $$0{,}444\,.$$

tehát úgy számolhatok $\frac{4}{9}$-del is, mint egy becsületes véges tizedesszámmal.

A fizikusnak ennél több jegyre is lehet szüksége a maga jóval pontosabb méréseiben, de ezekben is van egy ún. hibahatár: a fizikus meg tudja becsülni, hogy az ember érzékszerveinek és az eszközök tökéletlenségének következtében körülbelül mekkora ingadozás várható a kísérletek megismétlésekor, és ennél kisebb tizedesjegyet már a számolásban sem érdemes figyelembe vennie. Feltehető, hogy az eszközök tökéletesedni fognak, a mérések hibahatára szűkebb lesz, de valami hiba mindig fenn fog maradni, valahol – ha nagyon messze is – meg lehet majd állni

$$0{,}4444\ldots$$

tizedesjegyeinek sorában. Nem baj, hogy nem tudjuk előre: meddig kell majd elmennünk a távol jövőben; azt előre is tudjuk, hogy még oly messzire is sikerülni fog elmenni, mert $\frac{4}{9}$-nek ezt a kifejtését minden határon túl ismerjük: tudjuk, hogy minden határon túl ismét csak 4-esek következnek.

Hát legalább ilyen értelemben tizedesszámmá alakítható-e minden tört? Vagy másképpen téve fel a kérdést: ha egy osztás sohasem fejeződik be, legalább valamilyen szabály szerint követik-e egymást az eredmény tizedesjegyei, úgy, hogy ez mégis ad áttekintést az egészről?

Könnyen belátható, hogy erre már igennel felelhetünk: minden ilyen kifejtés előbb-utóbb „szakaszossá" válik, előbb-utóbb fellép benne egy számcsoport, amely ettől kezdve állandóan ismétlődik.

Vizsgáljuk meg például a $\frac{21}{22}$ törtet.

Ha 22-vel osztunk, a maradék mindenesetre 22-nél kevesebb; ha tehát sohasem fejeződik be az osztás, minden maradék az

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12,
13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21

számok egyike. Tegyük fel, hogy van egy 21 fiókos szekrényünk, és e számok egy-egy fiók feliratai. Ha osztás közben pl. 7 marad egyszer, akkor a 7-es fiókba beteszünk egy golyót. Ha az osztást türelmesen folytatjuk, a 22-ik lépéskor már 22 golyót kellett elhelyezni a 21 fiókban, és így bizonyos, hogy lesz fiók, amelybe két golyó is jut: legkésőbb 21 lépés után meg kell ismétlődnie valamelyik maradéknak. De ha szerencsénk van, már jóval előbb megismétlődik valamelyikük, s ha egyszer ugyanaz a maradék, innen kezdve minden megismétlődik. Figyeljük meg ezt a példánkon:

$$\frac{21}{22} = 21:22 = 0{,}954$$

210
 120
  100
   12,

megálljunk! – már volt egyszer 12-es maradék. Itt kezdődik az ismétlődés:

$$21:22 = 0{,}9545454\ldots$$

210
 120
  100
   120
    100
     120
      100

tehát egyetlen „rendellenes" 9-estől eltekintve 54 ismétlődik a végtelenségig.

Fordítva, ha ilyen szakaszos tizedesszámmal állunk szemben, rá lehet ismerni, hogy ez melyik törtnek a kifejtése. Induljunk ki 0,9545454 . . . -ből és tegyük fel, hogy még nem ismerjük azt a törtet, amely ehhez vezetett. Ha nem ismerjük, nevezzük el x-nek:

$$x = 0{,}9545454\ldots .$$

Ha ezt 1000-rel szorozzuk, azaz három hellyel jobbra visszük a tizedesvesszőt, éppen az első szakasz végéig terjedő rész kerül az egészek helyére:

$$1000x = 954{,}5454\ldots$$

Ha pedig 10-zel szorozzuk x-et, az egészek helyére éppen a szakaszok előtti rendellenes rész kerül:

$$10x = 9{,}5454\ldots\,.$$

Ha az előbbiből kivonjuk az utóbbit, akkor egyrészt x-nek 1000-szereséből a 10-szeresét kell elvenni, és így x-nek a 990-szerese marad, másrészt a tizedesvessző utáni részek mindkét számban 54 végtelen megismétlődéséből állnak és így teljesen megegyeznek, tehát kivonáskor kiesnek; 954 és 9 különbsége pedig 945, így végül

$$990x = 945.$$

Vigyük még a 990-es szorzót osztóul a jobboldalra:

$$x = \frac{945}{990}.$$

Ezt a törtet 45-tel lehet egyszerűsíteni:

$$945 : 45 = 21 \quad \text{és} \quad 990 : 45 = 22\,,$$
$$45 \qquad\qquad\qquad 90$$

tehát

$$x = \frac{21}{22}$$

és tudtuk is, hogy ennyi.

Közben azonban elkövettünk egy vigyázatlan lépést: nem ügyeltünk a végtelenre. 0,9545454 . . . -et itt nem csak egy bizonyos pontosságig, hanem a végtelenségig felírva képzeltük el és úgy szorozgattuk, mintha csak valami véges szám lenne. Mi jogon tesszük fel eleve, hogy 0,9545454 . . .-nek van valami véges értelme?

A továbbiakat inkább egy egyszerűbb példán gondoljuk végig, hiszen az ugyanolyan problematikus, hogy

$$1{,}1111\ldots$$

nek, ahol az 1-esek a végtelenségig ismétlődnek, véges értelme van-e. Érdekes, hogy egy ilyen végtelen tizedeskifejtésen nem szoktak fennakadni az emberek, de azon már megütköznek, ha ilyen végtelen összeadást látnak: $1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{1}{10000} + \ldots$ a végtelenségig, holott ez csak más írásmód az előbbi helyett. De nem azt hibáztatom, hogy az utóbbin megütköznek, inkább azt, hogy az első alakban elfogadják ugyanezt. Mert az

$$1, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \frac{1}{10000}, \dots$$

sorozatot még a maga végtelenségében is adottnak tekinthetjük, hiszen akárki akármeddig folytathatja, de olyan *végigjártnak* tekinteni ezt a végtelen utat, hogy a tagjait mind össze is adhassuk, mégiscsak merész elképzelés. Mit kell ezen érteni?

Egy ismert matematikusunk még kisdiák korában a következő példával világította meg önmagának a végtelen sor összegének fogalmát.

Volt egy csokoládéfajta, amit úgy akartak népszerűvé tenni, hogy szelvényt is csomagoltak a burkoló ezüstpapírba, és aki 10 ilyen szelvényt beszolgáltatott, az egy újabb tábla csokoládét kapott cserébe. Ha van egy ilyen tábla csokoládém, a teljes csomagolásban, mennyit ér ez valójában?

Természetesen nemcsak 1 tábla csokoládét ér, mert a szelvény is benne van, és egy szelvényért adnak $\frac{1}{10}$ csokoládét (hiszen 10-ért lehet egy csokoládét kapni). De ehhez a tized-csokoládéhoz egy tized szelvény is jár, s ha egy szelvényért $\frac{1}{10}$ csokoládét kaphatunk, akkor az $\frac{1}{10}$ szelvényért ennek a tizedrészét: $\frac{1}{100}$ csokoládét. Ehhez az $\frac{1}{100}$ csokoládéhoz tartozik egy század szelvényrészlet is, és ezért ismét tizedannyit adnak, $\frac{1}{100}$-nak a tizedrésze pedig $\frac{1}{1000}$ csokoládé. S í. t., a végtelenségig; látható, hogy ez sohasem szakad meg és így az én 1 tábla csokoládém szelvényestül voltaképpen

$$1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \dots$$

csokoládét ér.

Másrészt meg fogom mutatni, hogy egész pontosan $1\frac{1}{9}$ csokoládé az értéke. Az ebben levő 1 egész természetesen magának a természetben adott csokoládénak az értéke, tehát csak azt kell megmutatnom, hogy az ehhez mellékelt szelvény $\frac{1}{9}$ csokoládét ér. Ehhez elég azt bizonyítanom, hogy 9 szelvény ér 1 csokoládét, mert akkor biztos, hogy egy szelvény ennek a 9-ed részét éri. Márpedig az egy pillanat alatt igazolható, hogy 9 szelvény értéke egész pontosan 1 csokoládé. Mert tegyük fel, hogy nekem van 9 szelvényem; bemegyek a cukorkaüzletbe és ezt mondom: „Kérek egy tábla csokoládét; itt a helyszínen szeretném elfogyasztani és majd a végén fizetek." Elfogyasztom a csokoládét, kiveszem a hozzá csatolt szelvényt, és most már 10 szelvényem van, csakugyan fizethetek, és ez tiszta üzlet: megettem egy csokoládét, és egy fia szelvényem sem maradt. A 9 szelvény pontos ellenértéke tehát valóban 1 csokoládé, 1 szelvényé $\frac{1}{9}$ csokoládé, egy csokoládéé szelvényestül $1\frac{1}{9}$ csokoládé. Tehát az

$$1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\ldots$$

végtelen sor összege egész pontosan $1\frac{1}{9}$, kézzel foghatóan, sőt megehetően.

Így fogalmazhatjuk meg ezt az eredményt: ha valami első, durva közelítésben 1, valamivel finomabb közelítésben $1+\frac{1}{10}$, még jobb közelítésben, de még mindig pontatlanul $1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}$, s. í. t. a végtelenségig, akkor ez a valami *teljes pontossággal* $1\frac{1}{9}$.*

Így válthatom be a régi fejezetek ígéreteit: ebben az egész precíz fogalmazásban igaz az is, hogy a kör területe egyenes vonalú idomokkal közelíthető meg, és ugyancsak ilyen precíz értelemben igaz a törzsszámtétel is. Ezeket persze becsületszóra kell elhinni nekem; a hosszadalmas bizonyításokra nem térhetek ki.

Az algebrában például így adtunk meg egy számot: jelentse x azt a számot, amelyet 2-vel osztva, 3-mal szorozva és 5-öt hozzáadva 11-et kaptunk, azaz jelentse x azt a számot, amely eleget tesz az

$$\frac{x}{2}\cdot 3+5=11$$

egyenletnek. Itt most egy másik módot tanultunk egy szám megadására.

* Hogy általában mik tekinthetők közelítő értékeknek, arról a következő fejezetben lesz szó.

A matematikának azt az ágát, amely egy számot közelítő értékek segítségével ad meg, de ekkor is teljes pontossággal, analízisnek hívják.

Induljunk ki fordítva $1\frac{1}{9}$-ből: 1 egész 9 kilencedrészre osztható, tehát

$$1\frac{1}{9}=\frac{9}{9}+\frac{1}{9}=\frac{10}{9}=10:9=1{,}1111\ldots \text{ a végtelenségig,}$$
$$\begin{array}{l}10\\ \ 10\\ \ \ 10\\ \ \ \ 10\\ \ \ \ \ 1\end{array}$$

és $1\frac{1}{9}$-nek az egyenlősége ezzel a végtelen hosszú kifejtéssel az imént kapott pontos értelmet.

Ezt úgy is fejezi ki a matematikus, hogy az

$$1,\quad 1{,}1=1+\frac{1}{10},\quad 1{,}11=1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100},\ldots$$

„részletösszegek" sorozata az $1\frac{1}{9}$ „határértékhez" (idegen szóval: limeszhez) konvergál, vagy úgy is, hogy az

$$1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\ldots$$

sor konvergens és az összege $1\frac{1}{9}$.

Itt egy új összeadás-fogalmat hoztunk be; meg kellene vizsgálni, hogy ez teljesíti-e a régi műveleti szabályokat. Nem akarok ilyen aprólékos vizsgálatokba belemenni, csak az eredményüket közlöm: szó sincs róla. A végtelen itt is kibújik szabályaink alól; itt éppen ezért külön vizsgálat tárgyává lett, hogy melyek azok a sorok, amelyeknek tagjai tetszés szerint felcserélhetők és csoportosíthatók. A tárgyalt

$$1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\ldots$$

sor ilyen, de próbálkozzunk például az

$$1-1+1-1+1-1+\ldots$$

sorral. Ha itt más sorrendben végezzük el a műveleteket, két-két tagot összefogva:

$$\underbrace{1-1}_{0}+\underbrace{1-1}_{0}+\underbrace{1-1}_{0}+\ldots$$

egy csupa 0 tagból álló sort kapunk, és akárhány 0-t összeadva 0 az eredmény, tehát a sor összege 0. De ha így fogjuk össze a tagokat:

$$1\underbrace{-1+1}_{0}\underbrace{-1+1}_{0}-\ldots$$

akkor ez a sor jön létre:

$$1+0+0+0+\ldots,$$

és ennek a sornak nyilván 1 az összege. Tehát szóba sem jöhet, hogy a műveleteket teszés szerinti sorrendben végezhetnők el.

Annyi mindenesetre fennmarad, hogy végtelen sort is tagról tagra szorozhatunk egy számmal.

Játsszunk egy kicsit tovább az eredményünkkel: ha

$$1{,}1111\ldots=1\frac{1}{9}\text{-}$$

ből elveszünk 1-et, ezt kapjuk:

$$0{,}1111\ldots=\frac{1}{9}.$$

9-cel szorozva:

$$0{,}9999\ldots=\frac{9}{9}=1.$$

10-zel osztva (ha egy hellyel balra visszük az – 1 egész után is képzelhető – tizedespontot, 0 egész lesz):

$$0{,}0999\ldots=0{,}1,$$

még 10-zel osztva:

$$0{,}00999\ldots=0{,}01,$$

s. í. t. Tehát az 1, 0,1, 0,01, ... véges tizedesszámok ilyen – néhány 0 után csupa 9-esből álló – végtelen alakban is írhatók, és ebből mindjárt következik, hogy minden véges tizedesszámot kétféleképpen is lehet végtelen alakban írni. Legyen pl. 0,2 a szóban forgó véges tizedesszám. Ezt először is így írhatjuk:

$$0{,}200000\ldots,$$

hiszen 0 század, 0 ezred, 0 tízezred s í. t. hozzáadása mitsem változtat a számon. Másodszor így:

$$0{,}199999\ldots,$$

mert az az 1 tized, azaz 0,1, amit itt 0,2-ből elvettem, ugyanannyi, mint 0,099999..., amit viszont hozzáadtam. (Meg lehet mutatni, hogy ez az egyedüli kétértelműség, amire a számok tizedeskifejtései képesek.)

A vizsgált

$$1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\ldots$$

sorban minden tag az előzőnek tizedrésze; ezt így is mondhatjuk: $\frac{1}{10}$-szerese. Tessék visszaemlékezni a számtani sorra, amelyben bármely két szomszédos tag különbsége ugyanaz volt. Az ilyen sort, amelyben bármely két szomszédos tag hányadosa ugyanaz, mértani sornak hívják.

Nem szabad elbízni magunkat és azt hinni, hogy most már minden végtelen sort tudunk összegezni. Nézzük például az

$$1+10+100+1000+\ldots$$

mértani sort, amelyben a szomszédos tagok hányadosa 10. Világos, hogy ennek részletösszegei bármely számnál is nagyobbá válnak előbb-utóbb (pl. már a negyediktől kezdve mind nagyobbak 1000-nél), és így ez a sor a végtelenhez tart. Sőt, még az 1 hányadosú mértani sor is, amelyben minden tagot az 1-szerese követ:

$$1+1+1+1+1+\ldots,$$

hiszen ebben minden részletösszeg az ezrediktől kezdve 1000-nél, a milliomodiktól kezdve 1 000 000-nál nagyobb s. í. t.

Ha végre a (—1)-szerese követ minden tagot:

$$1\cdot(-1)=-1,\quad (-1)\cdot(-1)=+1,\quad (+1)\cdot(-1)$$

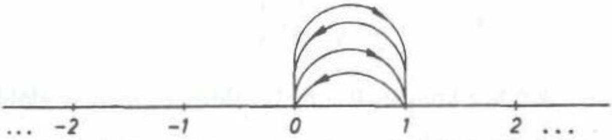
ismét —1 lévén s í. t., a sor:

$$1-1+1-1+1-1+\ldots$$

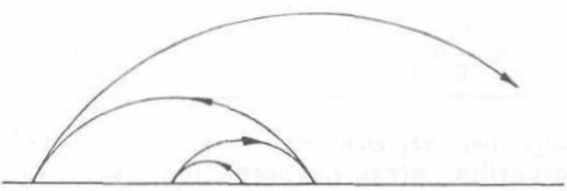
és erről már mindenféle rosszat tudunk. A részletösszegei sorra:

$$\begin{aligned}&1,\\&1-1=0,\\&\underbrace{1-1}+1=0+1=1,\\&\underbrace{1-1}+\underbrace{1-1}=0+0=0,\end{aligned}$$

és így tovább. Látható, hogy ezek váltakozva hol 1-gyel, hol 0-val egyenlők:



állandóan 1 és 0 közt ugrálnak át (idegen szóval „oszcillálnak") és így nem közelítenek meg semmiféle számot. Még nagyobb, sőt egyre távolodó az ugrálás, ha 1-nél nagyobb abszolút értékű negatív szám a sor szomszédos tagjainak hányadosa; ennek a képe:



Az eddig vizsgált végtelen sorok közül tehát csakis az

$$1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\dots$$

sort tudtuk összegezni. Ez bizonyára összefügg azzal, hogy e sor tagjai egyre csökkennek, sőt bármilyen kicsivé is lesznek, ha elég messze megyünk a sorban; a csokoládéfogalmazás precizitásával 0-hoz tartanak. (Azaz, meg lehet mutatni, hogy ha valami első közelítésben 1, második közelítésben $\frac{1}{10}$, harmadik közelítésben $\frac{1}{100}$, s í. t., akkor ez a valami teljes pontossággal csak 0 lehet. Nem fogom ezt mindig ilyen hosszadalmasan megfogalmazni, csak a csokoládépélda precizitására fogok hivatkozni.) Így elképzelhető, hogy ha végtelen sok számot kell is összeadnunk, de az egyre távolabbi tagok egyre kisebbek, egyre inkább elenyészők lesznek, akkor ezek egyre kevésbé befolyásolják az eredményt, és így a nagyon távoli tagokig terjedő részletösszegek egyre jobban reprezentálják a teljes összeget.

Csakhogy ez még korántsem elegendő ahhoz, hogy a sor összegezhető legyen. Mert az

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$$

sorozat ugyancsak 0-hoz konvergál – ha lassabban is, mint az előbbi: ott már a negyedik tagtól kezdve volt minden tag $\frac{1}{1000}$-nél kisebb, itt csak az ezredik-től kezdve – az

$$1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}} +$$

$$+ \underbrace{\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16}} + \ldots$$

sor részletösszegei mégis végtelenhez tartanak.

Ezt így lehet belátni: már tudjuk, hogy a tört értéke csökken, ha a nevezőt nagyobbítjuk (ha több szeletre vágjuk a tortát, a szeletek kisebbek). Eszerint csökkentem a részletösszegeket, ha $\frac{1}{3}$ helyett a nála kevesebb $\frac{1}{4}$-et, $\frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}$ mindegyike helyett $\frac{1}{8}$-ot, $\frac{1}{9}, \frac{1}{10}, \frac{1}{11}, \frac{1}{12}, \frac{1}{13}, \frac{1}{14}$ és $\frac{1}{15}$ helyett $\frac{1}{16}$-ot írok és így tovább – általában mindig olyan tagig megyek, melynek nevezőjében 2 valamely hatványa van ($4 = 2^2$, $8 = 2^3$, $16 = 2^3$) és az előző tagokat is ezzel a taggal helyettesítem. Tehát a következő sor részletösszegei biztosan kisebbek az előbbi sor részletösszegeinél:

$$1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} + \underbrace{\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}} +$$

$$+ \underbrace{\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16}} + \ldots$$

Itt az egyes csoportok értéke:

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{2}{4} \qquad \text{egyszerűsítve} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{4}{8} \qquad \text{,,} \qquad = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}=\frac{8}{16} \qquad \text{,,} \qquad = \frac{1}{2} \text{ s. í. t.}$$

Látható, hogy így minden csoport $\frac{1}{2}$-et szolgáltat, 2000-szer $\frac{1}{2}$ pedig már 1000, 2 milliószor $\frac{1}{2}$ már egymillió; így e sor elég hosszú részletösszegei bármilyen számnál nagyobbá válnak, hát még az eredetileg felvett sor még nagyobb részletösszegei!

Végtelen sok pozitív szám összegezhetőségéhez tehát az még nem elég, ha a tagok csak úgy ímmel-ámmal 0-hoz ereszkednek le; alapos tempóban kell igyekezniök 0 felé.

12. MEGTELIK A SZÁMVONAL

A törtek tizedeskifejtései meglepően szabályosra sikerültek: csupa véges vagy szabályos szakaszokat ismételgető tizedesszámot szolgáltattak. Közben megbarátkoztunk azzal a gondolattal, hogy egy végtelen tizedeskifejtést is egyetlen határozott számnak tekintsünk, hiszen pl. 1,1111 . . .-ből kiindulva arra az eredményre jutottunk, hogy ez pontosan $1\frac{1}{9}$-del egyenlő. Szinte lehetetlen, hogy fel ne merüljön a gondolat: el lehet képzelni olyan végtelen tizedeskifejtést is, amely nem szakaszos; ennek mármost semmiféle szám sem fog megfelelni?

Hiszen képezhetjük a tizedesjegyeket szép szabályosan is, úgy, hogy bárki akármeddig folytathatja a felírásukat, tehát van áttekintésünk az egészről, és mégsem találhatók benne ismétlődő szakaszok; pl.

$$0{,}101001000100001000001\ldots$$

A szabály igen egyszerű: az 1-eseket mindig eggyel több 0 követi; így szó sem lehet szakaszosságról, hiszen szakaszosság esetén előbb-utóbb az előforduló 1-es jegyeknek is egyenlő közökben kellene követniök egymást. Ez nem lehet egyetlen törtnek a kifejtése sem: részletösszegei nem konvergálhatnak racionális számhoz.

Meg fogom mutatni, hogy valamihez mégis konvergálnak, valami lyukhoz a racionális számok halmazában; és ez rávilágít arra, hogy a racionális számok közt határtalan sűrűségük ellenére még mindig maradtak hézagok.

Ha a tizedeknél állunk meg, még egy csomó jegyet elhanyagoltunk, tehát a későbbi részletösszegek mind nagyobbak, mint

$$0{,}1.$$

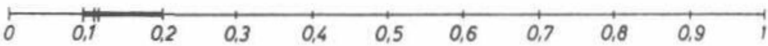
Viszont minden részletösszeg kisebb, mint

$$0{,}2.$$

mert csak ha csupa 9-es követné az 1 tizedet:

$$0{,}19999\ldots$$

volna az előző fejezetben tett megjegyzés szerint 0,2-del egyenlő. Eszerint a távolabbi részletösszegek mind 0,1 és 0,2 közé esnek, vagyis a képük a számvonalon beleesik a vastagon jelölt számközbe:



első közelítésüknek e számköz bármely pontját tekinthetjük.

Ugyanígy látható be, ha az ezredeknél állunk meg, hogy az elég távoli részletösszegek

$$0{,}101 \quad \text{és} \quad 0{,}102$$

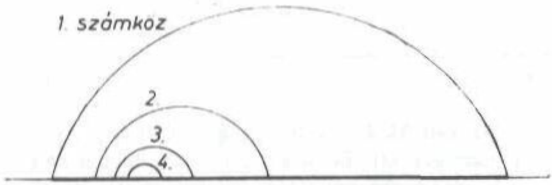
közé szorulnak; ezt már csak durván tudtam jelezni az ábrán, annyira közel esnek a pontok egymáshoz (az eltérésük egy ezred), így e számköz pontjai már sokkal jobb közelítést adnak, és ez az újabb számköz egészen az első számköz belsejében van. A meggondolást folytatva az egymásba skatulyázott egyre szűkebb

0,101001 és 0,101002 közötti,

0,1010010001 és 0,1010010002 közötti,

. . . .

számközökbe kell esni minden elég hosszú részletösszegnek; ha nem ilyen rohamosan szűkülnének össze ezek a közök, ilyen volna a kép:



E számközök hosszúsága rendre

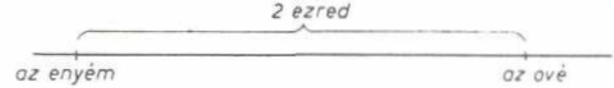
0,1,
0,001,
0,000001,
0,0000000001,

azaz egy tized, egy ezred, egy milliomod egység s í. t.; ezek persze 0-hoz konvergálnak (még hozzá hanyatt-homlok, úgy, hogy ezt rajzzal, sőt megnevezéssel se tudom követni). Elég hosszú részletösszegeink tehát mind e határtalanul összezsugorodó számközökben zsúfolódnak össze.

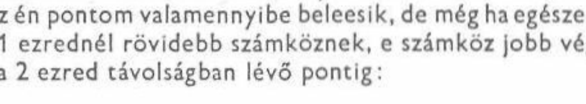
Olyan ez az egymásba skatulyázottság, mint a kisgyerekek egymásba rakott játékkockái. Vagy mint az a tréfás csomag, amelynek külső burkolatát lehántva egy újabb burkolathoz jutunk, és amint izgatottan bontogatjuk tovább, mindig csak új és új burkolat kerül a felszínre, a nagy csomag egyre soványabb lesz, de egyszer aztán a végére jutunk, és végül mégis szokott valami apróság lenni a sok burkolat közös mélyén, ha más nem, hát egy papírgombóc. De vég nélküli bosszúságot semmiképpen sem lehet okozni egy ilyen csomaggal.

Nálunk ez végtelenül folytatódik.

A második számköz egészen benne van az elsőben, a harmadik számköz az elsőben és a másodikban is benne van, a negyedik számköz valamennyi előző számköznek közös része és így tovább. A szemléletünk azt mondja, hogy ha határtalanul folytatjuk is az egyre szűkebbre zsugorodó egymásba skatulyázott számközök képzését, az, amivé összezsugorodnak, mindnyájuknak közös része lesz. Azt pedig már be tudom bizonyítani, hogy több, mint egyetlen pont nem lehet benne mindnyájukban. Tegyük fel ugyanis, hogy én találtam egy ilyen közös pontot és valaki azt állítja, hogy ő talált egy ellenpéldát az állításomra: egy pontot, amely az enyémtől különböző, mégis beleesik minden számközünkbe. Persze, olyat ő sem állít, hogy nagyon távol találta volna az enyémtől; én most a szemléletesség kedvéért elég nagy távolságot rajzolok, de a meggondolások bármily kis távolságra is vonatkoznak:



Bármily közel is van ez a két pont egymáshoz, ha különbözők, valami határozott távolság mégis van közöttük; mondjuk, 2 ezred egység. Vegyük ennek a felét, ez 1 ezred. Az egymásba skatulyázott számközök hosszúsága 0-hoz tart, tehát előbb-utóbb valamennyien rövidebbek lesznek 1 ezred egységnél is. Az én pontom valamennyibe beleesik, de még ha egészen a bal szélére esik is egy 1 ezrednél rövidebb számköznek, e számköz jobb vége akkor sem nyúlhat ki a 2 ezred távolságban lévő pontig:



az ilyen és még rövidebb számközökből tehát már biztosan kimarad az ellenpéldaként felhozott pont; így szó sem lehet arról, hogy az is valamennyi számköznek közös pontja lehetne.

Tehát mind a végtelen sok számközünknek egyetlen határozott közös pontja van, s minthogy bármely számközbe 0,1010010001 . . . elég messzemenő részletösszegei mind beleesnek, ezeknek a képei egyre közelebb szorulnak ehhez a ponthoz: ehhez konvergálnak.

Így felfedeztünk egy olyan pontot a számvonalon, amelyhez mindeddig semmiféle szám sem tartozott; bármily sűrűn is lepik el a törtek a számvonalat, ebbe a pontba nem eshetett egyetlen tört sem. Hiszen a törtek tizedes alakja szakaszos, a mi idekonvergáló 0,1010010001 . . .-ünk pedig sohasem válik szakaszossá. Ez mégis egészen határozott pont, egészen határozott távolságban van a 0 ponttól; de ha megpróbáljuk lemérni ezt a távolságot, az nem sikerül sem egész mértékegységekkel, sem ezeknek törtrészeivel. Hogy ezt a hiányt pótoljuk, azt fogjuk mondani, hogy e távolság mértéke a

$$0{,}101001000100001\ldots$$

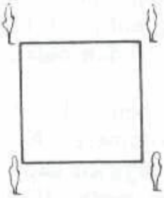
„irracionális" szám, vagyis új számként vezetjük be azt a mindeddig megnevezetlen, de egészen határozott valamit, amit a

$$0{,}1, \qquad 0{,}101, \qquad 0{,}101001, \ldots$$

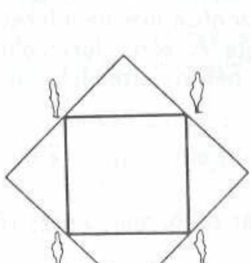
racionális értékek egyre nagyobb pontossággal közelítenek meg. Nem kevésbé használható ez a gyakorlat embere, a fizikus számára, mint a $\frac{4}{9} = 0{,}444\ldots$ kifejtés: nincs az a pontosság, ameddig el ne lehetne menni e szám közelítésében, és ismerjük mindazokat a tizedesjegyeit, amelyeknek felhasználására valaha is sor kerülhet, hiszen e tizedesjegyekről a maguk összességében is képünk van.

Ugyanígy mutatható ki, hogy bármilyen más törvényszerűséggel megadott nem-szakaszos végtelen tizedeskifejtésnek is megfelel egy-egy határozott pont, illetőleg egy-egy 0-tól mért határozott távolság a számvonalon; minden ilyen végtelen tizedeskifejtést a megfelelő távolság mértékszámának tekintünk és irracionális számoknak nevezzük őket.

Talán nagyon elvontnak látszik ez a gondolatkör, de nekem volt egyszer egy negyedik polgárista Éva tanítványom, aki magától jött rá arra, hogy van olyan távolság, aminek a méretét nem lehet sem egész számmal, sem törttel kifejezni. A következő tréfás feladaton kellett gondolkoznia: egy négyzet alakú halastónak mind a négy sarkát egy-egy fa díszíti:

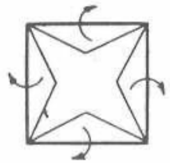


Ezt a tavat akarják kibővíteni kétszer akkora területűre, de úgy, hogy az új tó is négyzet alakú legyen és a fák a helyükön maradjanak. Éva észrevette, hogy a megoldás ez lesz:



Itt a nagy négyzet valóban kétszer akkora területű, mint a kicsi, mert ha meghúzom a kis négyzet átlóit:

akkor könnyen belátható, hogy az így nyert négy háromszöget kifelé hajlítva:



megkapom a nagy négyzetet; és így világos, hogy a kis négyzet területéhez ugyanannyit toldottam hozzá, mint amekkora eredetileg volt a területe.

De Éva nem elégedett meg ennyivel. Ő most már arra is kíváncsi volt, hogy ha pl. az eredeti halastó minden oldala 1 km, mekkorák lesznek az új tó oldalai.

A régi tó területe ez esetben $1 \cdot 1 = 1$ négyzetkilométer, a nagy tóé kétszer ekkora, azaz 2 négyzetkilométer. A kérdés tehát az, hogy milyen számot kell négyzetre emelnünk, hogy 2-t kapjunk eredményül.

Így jutottunk a hatványozás megfordításához, a gyökvonáshoz, és a feladat tulajdonképpen $\sqrt{2}$ kiszámítása; mert $\sqrt{2}$-vel jelölik azt a számot – ha van –, amelynek négyzete 2.

Éva tehát próbálkozni kezdett: a kis négyzet egyik oldala 1 km, a nagyé ennél nyilván több. 2 km azonban már nem lehet, mert ekkor $2 \cdot 2 = 4$ négyzetkilométer volna a területe. A szóban forgó oldal tehát 1 és 2 km közé esik.

Most megpróbált Éva néhány tizeddel venni többet 1-nél. Próbálgatás közben azt találta, hogy

$$1{,}4^2 = 1{,}4 \cdot 1{,}4 = 1{,}96 \qquad \text{és} \qquad 1{,}5^2 = 1{,}5 \cdot 1{,}5 = 2{,}25.$$

1,96 még kevesebb, 2,25 már több, mint a nagy tó 2 egységnyi területe, tehát a keresett oldal hossza

$$1{,}4 \qquad \text{és} \qquad 1{,}5$$

km közé esik. Most már századokra osztotta ezt a közt, és ugyanígy kiderült, hogy

$$1{,}41 \quad \text{és} \quad 1{,}42$$

km közé esik a keresett hosszúság. Ezt folytatva egyre jobban kialakult Évában az a meggyőződés, hogy pontosan sohasem fog olyan számot találni, amelynek 2 volna a négyzete. „Pedig kell léteznie egy ilyen számnak, itt van kézzelfoghatóan a nagy négyzet oldala, megszerkesztettem!"

Igaza volt Évának a megérzésében: nincs olyan racionális szám, amelynek négyzete 2 volna. Hogy ilyen egész szám nincs, azt már Éva bebizonyította, hiszen megmutatta, hogy a keresett szám 1 és 2 közé esik, 1 és 2 közt pedig nincs több egész szám. Tehát még az 1 és 2 közti törteket kell megvizsgálni.

Ezeket előbb egyszerűsítsük mindaddig, amíg már többé nem egyszerűsíthetők. Így nem válhat 1-gyé a nevezőjük, hiszen például $\frac{3}{1}$ tulajdonképpen 3 egész, és egész szám nincs 1 és 2 között. És bizonyos, hogy a négyzetük sem lesz egyszerűsíthető. Mert pl.

$$\left(\frac{15}{14}\right)^2 = \frac{15 \cdot 15}{14 \cdot 14}$$

és $\frac{15}{14}$ azért nem egyszerűsíthető, mert

$$15 = 3 \cdot 5 \quad \text{és} \quad 14 = 2 \cdot 7$$

lévén, 15-nek és 14-nek nincs közös törzstényezője; közös törzstényezőkre pedig az önmagukkal való szorzás útján nem tehetnek szert:

$$\left(\frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 7}\right)^2 = \frac{3 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 7};$$

és így szó sem lehet egyszerűsítésről. Márpedig egy tovább nem egyszerűsíthető és nem 1 nevezőjű tört semmiképpen sem lehet egyenlő a 2 egész számmal.

Mindamellett Éva próbálgatása egy beskatulyázás kezdete és ezzel egyszersmind a tizedeskifejtés kezdete is $\sqrt{2}$ számára. Egy 1 és 2 közé eső szám tizedesalakja mindenesetre így kezdődik:

$$1, \ldots;$$

minden így kezdődő szám tekinthető $\sqrt{2}$ első közelítésének.

Ha azt is tudom, hogy ez a szám 1,4 és 1,5 közé esik, akkor így folytatódik a tizedes alak:

$$1{,}4\ldots;$$

az ily kezdetű számok már jobb közelítést adnak. Abból, hogy 1,41 és 1,42 közt van a keresett szám, ez a folytatás adódik:

$$1{,}41\ldots.$$

Most ezredrészekre kellene bontani az 1,41 és 1,42 közé eső közt és megnézni, hogy

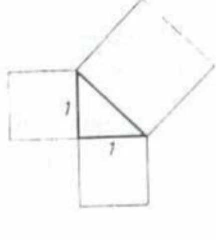
1,410, 1,411, 1,412, 1,413, 1,414, 1,415, 1,416, 1,417, 1,418, 1,419

közül melyik az, amelynek négyzete még kisebb, de a rákövetkező szám négyzete már nagyobb 2-nél. E két szám már csak ezrednyi hosszúságú skatulyát jelent $\sqrt{2}$ számára, és a tizedeskifejtés ezredrészeit is pontosan megadja.

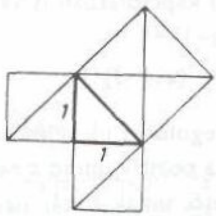
Van ennél gépiesebb eljárás is $\sqrt{2}$ tizedesjegyeinek meghatározására, de a lényeget ez az egyre szűkebb határok közé szorítás világítja meg.

Ez az eljárás határtalanul folytatható és egyre jobb közelítést ad; tudjuk, hogy sohasem szakadhat meg, és nem szolgáltathat szakaszos tizedesszámot, mert $\sqrt{2}$ nem lehet racionális. Mégis egész pontosan és kézzelfoghatóan ott van előttünk, hogy mekkora ez az egyre pontosabb közelítések útján megadott $\sqrt{2}$ szám: akkora, mint a nagyobbított halastó egyik oldala.

Hasonló szemléletességgel állítja elénk az irracionális $\sqrt{2}$-t a közismert Pitagorasz-tétel. Rajzoljunk egy olyan derékszögű háromszöget, melynek mindkét befogója 1 egység, és helyezzünk mindhárom oldalára egy-egy négyzetet:



Ha a két kis négyzetbe egy-egy átlót rajzolunk, a nagy négyzetnek pedig mindkét átlóját megrajzoljuk, csupa egybevágó háromszöget kapunk:



és ezek közül a két kis négyzetbe együttvéve, a nagy négyzetbe pedig egymagába négy esik. Tehát a kis négyzetek területe együttvéve annyi, mint a nagy négyzet területe, vagyis – minthogy egy négyzet területét egy oldalának négyzetre emelésével számíthatjuk ki –, a két befogó négyzetének összege egyenlő az átfogó négyzetével (ez nemcsak erre a speciális háromszögre, hanem minden derékszögű háromszögre igaz; az általános bizonyítás valamivel bonyolultabb). Itt a két befogó négyzetének összege:

$$1^2 + 1^2 = 1 + 1 = 2$$

és ez a 2 ugyanannyi, mint az átfogó négyzete, vagyis az átfogó hosszúsága $\sqrt{2}$ egység.

Meg lehet mutatni, hogy az irracionális számok körében a műveletek úgy végezhetők el, hogy a közelítő értékekre alkalmazzuk őket; a közelítő értékek pedig racionális számok, és ezek épségben tartják a régi műveleti szabályokat. Itt azzal az esettel van dolgunk, amikor ezt a végtelen sem rontja el.

Most térhetünk vissza ahhoz a függőben hagyott kérdéshez, hogy lehet-e egy kocka élét vagy egy téglalap oldalait mindig cm-ekben kifejezni. A felelet az, hogy nem mindig lehet, olyan értelemben, hogy még olyan távolságok is vannak, amelyeket a cm semmiféle törtrészével sem lehet pontosan megmérni. Mert ha pl. $\frac{1}{20}$ cm fér rá valamely távolságra 31-szer, akkor ez a távolság $\frac{31}{20}$ cm, és éppen most láttuk, hogy ha egy derékszögű háromszög mindkét befogója 1 cm, akkor az átfogó hosszúsága ezen egységben semmilyen racionális számmal sem fejezhető ki. (Azért kell hangsúlyozni, hogy ebben az egységben, mert hiszen $\sqrt{2}$-nek egy határozott hosszúság felel meg, akár ezt is választhatnók új egységül, és ebben persze ő maga kifejezhető volna.)

Mindamellett a közelítő racionális értékek segítségével csokoládéprecizitással meg lehet mutatni, hogy ekkor is helyesek maradnak a régi terület- és köbtartalomszámítási eredmények.

A másodfokú egyenlettel kapcsolatban is van még adósságom. Ott megakadtunk az

$$(x + 3)^2 = 2$$

egyenletnél. Ezt most már megoldhatjuk. Minthogy már negatív számaink is vannak és tudjuk, hogy mind a pozitív, mind a negatív számok négyzete pozitív, $+\sqrt{2}$ is, $-\sqrt{2}$ is tekinthető annak a számnak, amelynek négyzete 2. Így

$$x + 3 = +\sqrt{2} \quad \text{vagy} \quad x + 3 = -\sqrt{2}$$

és ha a 3-at kivonandóul visszük át a jobboldalra, két eredményt is kapunk:

$$x = +\sqrt{2} - 3 \quad \text{vagy} \quad x = -\sqrt{2} - 3.$$

De a negatív szám újabb bonyodalmat hoz létre: az

$$x^2 = -9$$

egyenlettel nem tudunk mit kezdeni, hiszen $+3$-nak is, -3-nak is $+9$ a négyzete; nem tudunk olyan számot, amelynek négyzete -9 volna. Erre még visszatérek.

Az irracionális számokat azért vezettük be, mert hézagokat találtunk a számvonalon: olyan pontokat, amelyekhez eddig nem tartozott szám. A racionális és irracionális számok együttese (közös néven: valós számok; lesznek a valóságtól elrugaszkodóbb számaink is) most már teljesen kitöltik a számegyenest. Mert ha ezen fölveszünk egy tetszés szerinti pontot, ez sorra bizonyos egészek, bizonyos tizedek, bizonyos századok közé esik, mint $\sqrt{2}$ Éva tanítványom vizsgálataiban, és ez sorra egy tizedeskifejtés jegyeit szolgáltatja. Ha ez a kifejtés valahol befejeződik (a pont egybeesik valamelyik tizeddel, századdal, ezreddel, ...) vagy szakaszosra sikerül, akkor racionális szám tartozik a pontunkhoz, ha nem, akkor irracionális.

Ha pl. a csokoládé-példában szereplő $1\frac{1}{9}$ számnak megfelelő pontot próbálnánk ilyen skatulyákba zárni, azt tapasztalnánk, hogy ez sorra 1 és 2 közé, 1,1 és 1,2 közé, 1,11 és 1,12 közé, 1,111 és 1,112 közé esik és így tovább, tehát

$$1, \quad 1{,}1, \quad 1{,}11, \quad 1{,}111, \ldots$$

is rendre beleesik e mindjobban összeszűkülő skatulyákba (ezeknek éppen a bal végpontjára esnek); ez a háttere annak, hogy $1\frac{1}{9}$ egyre jobb közelítéseit adják, hogy bármilyen közel is jutnak hozzá. És persze szakaszos tizedeskifejtést adnak, hiszen $1\frac{1}{9}$ racionális.

Sokan vannak-e az irracionális számok? Ha eddig csak kivételesen kerültek is elénk, mégis sokan lehetnek, hiszen azt véletlennek érezzük, ha egy tizedeskifejtés szakaszosra sikerül. De egyszer már csalódtunk az ilyen érzésünkben: a racionális számokról is egészen magától értetődőnek tartottuk, hogy többen vannak, mint a természetes számok, mégis kiderült, hogy valamennyi racionális szám egyetlen sorozatba rendezhető, és így maradéktalanul össze lehet őket párosítani a természetes számokkal: a sorozat első tagját az 1-gyel, a másodikat a 2-vel, s. í. t. Vajon az irracionális számokról mit mond ez az összepárosítási módszer?

Vizsgáljuk egyelőre a racionális és irracionális számok együttesét: a valós számokat, mégpedig valamennyit tizedes alakban. Ezek közül szorítkozzunk a 0 és 1 közötti, azaz 0 egésszel kezdődő számokra, hogy az egész részekkel ne kelljen bajlódni. Azt állítom, hogy még a valós számok e részletének is nagyobb a számossága, mint a természetes számoké: nem lehet őket sorozatba rendezni úgy, hogy bizonyos valós számok ki ne maradjanak a sorozatból.

Mert tegyük fel, hogy valaki azt állítja: nincs igazam, ő tud egy ellenpéldát. Ő megszerkesztett egy sorozatot a 0 egész kezdetű valós számokból és ebből nem maradt ki semmi. Felírja ezt a sorozatot, persze úgy, hogy néhány számot ad meg, és a sorrendjükben valami olyan törvényszerűség mutatkozik, hogy ezután már akárki akármeddig folytathatja. De már az egyes irracionális számokat is csak ilyen módon adhatja meg, hiszen ezek végtelen tizedesszámok. Hát mondjuk, hogy így kezdődik ez a sorozat:

Az első szám:	0,1
a második szám:	0,202020 . . .
a harmadik szám:	0,3113111311113 . . .
. . . .	. . . .

és ezek állítólag valamilyen törvényszerűséggel folytatódnak úgy, hogy előbb-utóbb minden valós szám sorra kerül.

Bármilyen is ez a törvényszerűség, én rögtön meg fogok alkotni egy 0 egész kezdetű valós számot, amely biztosan kimaradt ebből a sorozatból.

Először is kiegészítem a sorozat véges tizedesszámait csupa ártalmatlan 0 hozzáfüggesztésével végtelenné; így

az első szám:	0,1000000000000 . . .
a második szám:	0,2020202020202 . . .
a harmadik szám:	0,3113111311113 . . .

. . . .

Most hozzáfoghatok. Az én számom mindenesetre így kezdődik:

0, ...

Mit írjak a tizedek helyére? Megnézem, hogy mi van az ellenpélda első számában a tizedek helyén, és én *mást* írok ide, csak arra vigyázva, hogy 0-t és 9-et ne írjak. Hogy valami határozottat mondjak, itt az ellenpélda első számában 1 tized szerepel, én tehát 2-t írok az én számom tizedeinek helyére (most és a továbbiakban is éppen úgy írhatnék 3, 4, 5, 6, 7, 8 közül bármit); ha más, mint 1 lett volna e helyen az ellenpélda első számában, én 1-et választottam volna tizedül. Tehát az én számom eddig:

0,2 . . . . .

A századok helyét úgy töltöm be, hogy megnézem: hány század van az ellenpélda második számában, és az én számom századjainak helyére *mást* írok, csak 0-t és 9-et nem. Maradjunk az 1 és 2 mellett; az itt felhozott ellenpélda második számában 0 század szerepel és ez nem 1, tehát én 1-et írok e helyre (ha ott 1 lett volna, én 2-t írnék). Az én számom tehát így folytatódik:

0,21 . . . .

Ez ugyanígy megy tovább: az ezredek helyére 2-t írok, mert a harmadik számban 1 ezred szerepel, tehát három jegyig:

0,212 . . . .

az én számom, és most már mindenki folytathatja akármeddig: ha az ellenpélda számai valami értelmes törvényszerűséggel követték egymást, akkor az én számom képzésében sem lehet megakadni. Így kapok egy olyan 0 egész kezdetű végtelen tizedesszámot, amely biztosan kimaradt a sorozatból. Mert az ellenpélda első számától legalább a tizedekben, a másodiktól legalább a századokban, a harmadiktól legalább az ezredekben, mindegyiktől legalább egy jegyben különbözik. Az sem lehet, hogy csak alakban különbözik, de értékben nem, az ellenpélda valamelyik számától, mert ilyen kétszínűségre csak olyan számok képesek, amelyekben egy helytől kezdve csupa 0 vagy csupa 9 követi egymást, az én számom pedig csupa 1-esből és 2-esből áll.

Bárki bármilyen módon próbálná tehát sorozatba rendezni, azaz az 1, 2, 3, 4, 5, . . . természetes számokkal összepárosítani a valós számokat, mindig lesz olyan valós szám, amely kimarad ebből: a valós számok számossága nagyobb, mint a természetes számoké. Ha nem csak a 0 egész kezdetűekre szorítkozunk, akkor természetesen annál inkább.

Igaz, hogy ezt a racionális és irracionális számok együtteséről mutattam ki. De a racionális számokról már tudjuk, hogy megszámlálhatók, azaz sorozatba rendezhetők. Ha az irracionális számokat is sorozatba rendezhetnők, akkor nagyon könnyű volna egyesíteni e két sorozatot: felváltva egy elemet az egyikből, egyet a másikból válogatva az új sorozatba. (Pl. a pozitív és a negatív egész számok

$$1,\quad 2,\quad 3,\quad 4,\quad 5,\ldots$$

és

$$-1,\quad -2,\quad -3,\quad -4,\quad -5,\ldots$$

sorozatait így egyetlen

$$1,\ -1,\ 2,\ -2,\ 3,\ -3,\ 4,\ -4,\ 5,\ -5,\ldots$$

sorozattá egyesíthetjük.) A racionális és irracionális számok egyesített sorozata pedig valamennyi valós számot tartalmazná, márpedig éppen most bizonyítottuk be, hogy erre egyetlen sorozat sem képes. Így tehát az irracionális számok halmaza külön sem alkothat sorozatot, nem lehet megszámlálható; ennélfogva nagyobb a számossága, mint a racionális számoké.

Szóval nem éppen csak néhány hézag betöltéséről volt szó a mindenütt sűrű racionális számok halmazában, amikor az irracionális számokat bevezettük. A valós számok folytonosan nyúlnak el a számvonalon, és a racionális számok minden sűrűségük ellenére csak a benne elszórt mazsolák. Én itt érzek valami hasonlatosságot az éterrel, amelyről azt tették fel, hogy minden űrt hézagtalanul tölt be a föld légkörében is, és szétszórtan úsznak benne a látszólag mindenütt jelenlevő levegőmolekulák.

13. A LÁZGÖRBÉK KISIMULNAK

Amint gyűjtögetem az adósságokat az előbbi fejezetekből, eszembe jut az az árva egyes a Pascal-háromszög tetején:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 1 & & 1 & & \\ & 1 & & 2 & & 1 & \\ 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & & \end{array}$$

Bebizonyítottuk, hogy a második sortól kezdve az egyes sorok tagjainak összege rendre:

$$2^1,\ 2^2,\ 2^3, \ldots;$$

ha a legfelső 1-es is beleilleszkednék ebbe a rendbe, 2^0 volna az értéke. De 2^0-nak mindeddig nem volt értelme — 0-szor nem lehet 2-t tényezőül venni — és eddig még nem merült fel a szüksége annak, hogy értelmet adjunk neki.

Foglalkozzunk egy kicsit újra a hatványozással. Emlékezzünk vissza arra, hogy milyen könnyű volt egy szám hatványait szorozni egymással; csak össze kellett adni a kitevőket: pl.

$$3^2 \cdot 3^4 = \underbrace{3 \cdot 3} \cdot \underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} = 3^6 \quad \text{és} \quad 6 = 2 + 4.$$

Más műveletek is könnyen végezhetők el, ha egyetlen szám hatványai szerepelnek: pl.

$$\frac{3^6}{3^2} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}{3 \cdot 3},$$

és ha $3 \cdot 3$-mal egyszerűsítünk, ezt kapjuk:

$$\frac{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}{1} = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4,$$

tehát

$$\frac{3^6}{3^2} = 3^4 \quad \text{és} \quad 4 = 6 - 2,$$

vagyis úgy végezhetjük el az osztást, hogy a kitevőket kivonjuk egymásból. Vagy:

$$(3^2)^4 = 3^2\cdot 3^2\cdot 3^2\cdot 3^2 = \underbrace{3\cdot 3}\cdot\underbrace{3\cdot 3}\cdot\underbrace{3\cdot 3}\cdot\underbrace{3\cdot 3} = 3^8$$

és

$$8 = 4\cdot 2,$$

tehát ha hatványt kell hatványoznunk, egyszerűen megszorozzuk egymással a két kitevőt.

Érdemes ezért táblázatot készítenünk egyetlen alap hatványairól. Válasszuk alapul a 2-t, ennek könnyű is sorra kiszámítani a hatványait:

2^1	=	2
2^2	=	4
2^3	=	8
2^4	=	16
2^5	=	32
2^6	=	64
2^7	=	128
2^8	=	256
2^9	=	512
2^{10}	=	1024
2^{11}	=	2048
2^{12}	=	4096
....		

Ha két számot szoroznunk kell egymással és szerencsénk van, akkor ebből a táblázatból munka nélkül elleshetjük az eredményt. Ha például

$$64\cdot 32$$

a kijelölt szorzás, az szerencse, mert mindkét szám szerepel a táblázatban. A hozzájuk tartozó kitevők: 6 és 5, ezeket nem nagy eset összeadni, így 11-et kapunk, egy gyors pillantás a 11-ik sorra és megvan az eredmény:

$$2048.$$

Ha pedig 32-t négyzetre kellene emelni, az ehhez tartozó kitevő 5, ezt 2-szer venni ismét pillanat műve, így 10-et kapunk, és a 10-ik sorból már olvashatjuk is:

$$32^2 = 1024.$$

Ez igazán gyerekjáték, de kár, hogy nem minden szám szerepel a táblázatban! Érdemes volna a hatványozás értelmét kiterjeszteni úgy, hogy minden szám (például 3 is) 2 hatványaként legyen felírható.

Így a hatványozásnak egy új megfordításához jutunk: most azt a kitevőt keressük, amelyre az adott 2-es alapot felemelve pl. 3-at kapunk eredményül. Ezt a műveletet (és az eredményét is, ha lesz) logaritmusnak nevezik.

A legkellemetlenebb törtekkel számolni; és ezek még nem szerepelnek a táblázatban: 2-nek legkisebb hatványa: 2^1 már 2 egésszel egyenlő. Az új értelmezésben vezető szempont lesz, hogy – mint eddig is – nagyobb szám 2-nek nagyobb kitevőjű hatványaként legyen felírható; nehogy össze-vissza kelljen keresgélni a táblázatban. Tehát 1-nél kisebb kitevőkre is értelmeznünk kell 2 hatványait, ha törteket is akarunk kapni.

Ha egész lépésekben megyünk visszafelé, sorra

$$2^0, 2^{-1}, 2^{-2}, 2^{-3}, \ldots$$

várja az értelmezését.

Ebben a művelet-kiterjesztésben különösen fontos arra vigyáznunk, hogy a régi műveleti szabályok érvényben maradjanak, mert nem szabad szemünk elől veszteni a célt: azt akarjuk, hogy az új hatványokkal ugyanolyan kényelmes legyen a számolás, mint a régiekkel volt.

Többek közt arra kell vigyáznunk, hogy ha 2-nek valamely hatványát 2^0-nal szorozzuk, az eredmény ugyanaz legyen, mintha 0-t adnánk hozzá a kitevőjéhez. De 0 hozzáadása nem változtat semmit; 2^0-t tehát úgy kell értelmeznünk, hogy a vele való szorzás ne változtassa meg a számok értékét. Az a szorzó, amely nem változtat egy szám értékén, az 1, tehát 2^0-t (és hasonlóan bármely más alap 0-ik hatványát is) így kell definiálnunk:

$$2^0 = 1.$$

Ezzel a Pascal-háromszög is egyöntetűvé vált.

2^{-1} értelmezésekor arra kell ügyelnünk, hogy

$$2^1 \cdot 2^{-1} = 2^{1+(-1)} = 2^{1-1} = 2^0 = 1$$

legyen, ha pedig a

$$2^1 \cdot 2^{-1} = 1$$

egyenlőségben a 2^1 szorzót osztóul visszük át a túlsó oldalra, ebből

$$2^{-1} = \frac{1}{2^1}$$

következik. Hasonlóan adódik a

$$2^2 \cdot 2^{-2} = 2^{2+(-2)} = 2^0 = 1$$

követelményből

$$2^{-2} = \frac{1}{2^2},$$

a

$$2^3 \cdot 2^{-3} = 2^{3+(-3)} = 2^0 = 1$$

követelményből

$$2^{-3} = \frac{1}{2^3},$$

és így tovább. Ha tehát ügyelni akarunk a kényelmes eljárások sértetlenségére, a negatív kitevőjű hatványokat úgy kell értelmeznünk, mintha mindig 1-et kellene osztanunk a megfelelő pozitív kitevőjű hatvánnyal.

Így most már visszafelé is kibővül a táblázatunk, a törtek felé:

$$\vdots$$

$$2^{-3}=\frac{1}{2^3}=\frac{1}{8}=1:8=0{,}125$$
$$\begin{array}{l}10\\ \ 20\\ \quad 40\end{array}$$

$$2^{-2}=\frac{1}{2^2}=\frac{1}{4}=1:4=0{,}25$$
$$\begin{array}{l}10\\ \ 20\end{array}$$

$$2^{-1}=\frac{1}{2^1}=\frac{1}{2}=1:2=0{,}5$$
$$10$$

$$2^0=\qquad 1$$
$$2^1=\qquad 2$$
$$2^2=\qquad 4$$
$$\vdots$$

Ez már jó segédeszköz az $\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\ \ldots$ törtekkel, illetőleg a 0,5, 0,25, 0,125, ... tizedesszámokkal való számolásban is.

De még mindig nagy hézagok vannak a táblázat egyes számai között, pl. $2^1=2$ és $2^2=4$. Ha egy 2 és 4 közötti számot (pl. 3-at, de akár 2,7-et) akarunk 2 hatványaként felírni, akkor ez a kívánt módon csak 1 és 2 közé eső kitevővel sikerülhet. E két szám közt van pl. $1\frac{1}{2}$, ez $1=\frac{2}{2}$ miatt $\frac{3}{2}$-del egyenlő, tehát értelmeznünk kell 2-nek $\frac{3}{2}$-ik, általában törtkitevőjű hatványait is.

Ezt az értelmezést eldönti az, hogy a hatvány hatványozásának szabályára is vigyázni akarunk: ha ez itt is érvényben marad, akkor

$$\left(2^{\frac{3}{2}}\right)^2=2^{2\cdot\frac{3}{2}}=2^{\frac{6}{2}}=2^3,$$

tehát ekkor $2^{\frac{3}{2}}$ csakis az a szám lehet, amelynek négyzete 2^3, de ez az, amit így jelöltünk: $\sqrt{2^3}$, és így

$$2^{\frac{3}{2}} = \sqrt{2^3} = \sqrt{8}.$$

Ezt a $\sqrt{8}$-at egy tizedesig kiszámítva 2,8-et kapunk, mivel pedig

$$\frac{3}{2} = 3:2 = 1{,}5\,,$$
$$10$$

(a kitevővel kell számolnunk, és tizedesszámmal egyszerűbb a számolás, mint a $\frac{3}{2}$ törttel) így ezt a sort iktathatjuk 2^1 és 2^2 sora közé:

$$\begin{aligned} &\vdots \\ 2^1 &= 2 \\ 2^{1,5} &= 2{,}8 \\ 2^2 &= 4 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Titkos vágyunkat, a 3-ast még így sem értük el, bár 2,8 már elég közel van hozzá; be lehet bizonyítani, hogy 3-at 2-nek semmiféle törtkitevőjű hatványával nem lehet pontosan elérni, de meg lehet közelíteni ilyenekkel tetszés szerinti pontossággal. Ilyen megközelítésekkel definiáljuk az irracionális kitevőjű hatványt.

Ez az alapgondolata a logaritmustábla készítésének. A régi logaritmustáblák csakugyan így készültek. A középiskolából ismert tábla 10-es alapú (és az alapot nem is jelzik rajta, csak a kitevőt); itt már komoly áldozatokat hoztak az ujjakkal való játék kedvéért: 10 hatványai, 10, 100, 1000, . . . között még sokkal nagyobb hézagok tátonganak, mint 2 hatványai közt, ezeket még sokkal nagyobb fáradság kitölteni.

Egyes logaritmustáblákban még valami „e" alapú természetesnek nevezett logaritmus is szerepel. Ez az „e" egy 2,71 . . . kezdetű irracionális szám; micsoda gondolat éppen ezt tekinteni természetes alapnak? Sok úton lehet eljutni ehhez; legügyesebbnek a következőt érzem:

Nemhogy 10 volna a helyes alap egy logaritmustábla számára, de jó volna még 2-nél is kisebb számot venni alapul, akkor még kisebbek lesznek a hézagok az alap egész kitevős hatványai közt. 1-ig persze nem mehetünk le, hiszen 1-nek minden hatványa 1, 1 alá pedig nem célszerű menni, mert ha valódi törtet hatványozunk, kisebb eredményt kapunk: pl. $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. Próbálkozzunk 1,1-del, ez már csak azért is könnyű lesz, mert 11 hatványait már a Pascal-háromszögből ismerjük, és csak a tizedespont kitevésekor kell arra gondolnunk, hogy valahányszor tizeddel szorzunk, ez 10-zel való osztást jelent, tehát mindannyiszor egy hellyel balra csúszik a tizedespont. Azt se felejtsük el, hogy bármely alap 0-ik hatványa 1.

$$1{,}1^0 = 1$$
$$1{,}1^1 = 1{,}1$$
$$1{,}1^2 = 1{,}21$$
$$1{,}1^3 = 1{,}331$$
$$1{,}1^4 = 1{,}4641$$
$$\dots\dots\dots\dots$$

Ezek a hatványok igen lassan növekszenek, és így már egy egész sereg 1 és 2 közti szám szerepel, a fáradságos hézagkitöltés előtt is.

Persze még kisebb, 1-hez még közelebbi alap még jobb volna; próbálkozzunk még az 1,001 alappal (itt két-két 0-val elválasztva kapjuk a Pascal-háromszög elemeit):

$$1{,}001^0 = 1$$
$$1{,}001^1 = 1{,}001$$
$$1{,}001^2 = 1{,}002001$$
$$1{,}001^3 = 1{,}003003001$$
$$\dots\dots\dots\dots$$

Ez már azután óriási sűrűség; olyan csigalassúsággal nőnek ezek a hatványok, hogy szinte gyanakodni kezd az ember: elérik-e egyáltalán a 2-t? De be lehet bizonyítani, hogy ha nagyon-nagyon lassan is, de mégis végtelenhez tartanak az 1-nél még oly kevéssel nagyobb számok hatványai is.

Ennek a táblának még van egy kis szépséghibája: éppen a lassú növekedés miatt aránytalanul nagy kitevő tartozik itt a kicsi számokhoz is; körülbelül az ezredik hatványig kell menni, hogy 2-t elérjük. Ezredekkora kitevők harmonikusabban hatnának. Ezen igen könnyű segíteni: emeljük az alapot ezredik hatványra. Ugyanis

$$(1{,}001^{1000})^{\frac{1}{1000}} = 1{,}001^{1000\cdot\frac{1}{1000}} = 1{,}001^{\frac{1000}{1000}} = 1{,}001^1$$

$$(1{,}001^{1000})^{\frac{2}{1000}} = 1{,}001^{1000\cdot\frac{2}{1000}} = 1{,}001^{\frac{2000}{1000}} = 1{,}001^2$$

és így tovább, tehát az $1{,}001^{1000}$ alapot csakugyan ezredakkora kitevőre kell emelni, mint az 1,001 alapot, hogy ugyanannyit kapjunk eredményül.

Az $1{,}001^{1000}$ alap hatványozásakor ezred-lépésenként haladhatunk előre; tizedes alakban pedig

$$\frac{1}{1000} = 0{,}001, \quad \frac{2}{1000} = 0{,}002, \quad \frac{3}{1000} = 0{,}003, \ldots$$

tehát, felhasználva az imént nyert összefüggést az 1,001 alap hatványaival:

$$\begin{aligned}
(1{,}001^{1000})^{0} &= 1{,}001^{0} = 1\\
(1{,}001^{1000})^{0{,}001} &= 1{,}001^{1} = 1{,}001\\
(1{,}001^{1000})^{0{,}002} &= 1{,}001^{2} = 1{,}002001\\
(1{,}001^{1000})^{0{,}003} &= 1{,}001^{3} = 1{,}003003001\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Így most már nincs semmi aránytalanság a számok és a hozzájuk tartozó kitevők közt; a sűrűség pedig megmaradt.

Világos, hogy az

$$1{,}0001^{10\,000}, \ 1{,}00001^{100\,000}, \ 1{,}000001^{1\,000\,000}, \ldots$$

alapok egyre jobban megfelelnek a célnak, és be lehet bizonyítani, hogy ez a sorozat konvergál egy 2,71 ... kezdetű irracionális számhoz. Ez a szám igen fontos szerepet játszik a matematikában, külön nevet is kapott: őt nevezik e-nek. És az e alapú logaritmust természetes logaritmusnak hívják: ilyen természetes úton vezet hozzá az egyre célszerűbb alapok keresése.

A logaritmus kedvéért kitöltöttük a hatvány definíciójában mutatkozó hézagokat: most már minden kitevőre van értelme a hatványnak, nemcsak természetes számokra. Így módunkban van kiegészíteni a hatványfüggvény nagyon hiányos lázgörbéjét is. Egyenletekkel is tudunk már bánni, tehát felírhatjuk ezt a függvényt egyenlet alakban is: az alap legyen ismét 2, a kitevőt változtatni fogom, ez nem valami ismert szám, tehát x-szel jelölöm, és ettől függően változni fog a hatvány értéke is, ezt jelölöm y-nal:

$$y = 2^{x}.$$

x értékeit ábrázolom ilyen egységekkel $\vdash\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!\dashv$ a vízszintes vonalon (ezen most már 0-t is jelölök meg és tőle balra negatív számokat is), y értékeit ismét fölfelé mérem, ilyen egységekkel: I

$$\text{Ha } x = -3, \text{ akkor } y = 2^{-3} = \frac{1}{2^{3}} = \frac{1}{8}.$$

$$\text{Ha } x = -2, \text{ akkor } y = 2^{-2} = \frac{1}{2^{2}} = \frac{1}{4}.$$

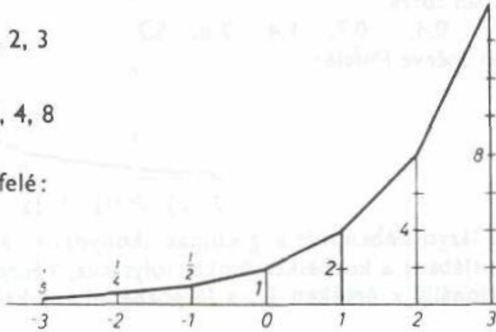
$$\text{Ha } x = -1, \text{ akkor } y = 2^{-1} = \frac{1}{2^{1}} = \frac{1}{2}.$$

$$
\begin{aligned}
&\text{Ha } x = 0, \text{ akkor } y = 2^0 &&= 1\\
&\text{Ha } x = 1, \text{ akkor } y = 2^1 &&= 2\\
&\text{Ha } x = 2, \text{ akkor } y = 2^2 &&= 4\\
&\text{Ha } x = 3, \text{ akkor } y = 2^3 &&= 8,
\end{aligned}
$$

tehát a —3, —2, —1, 0, 1, 2, 3 pontokban sorra

$$\frac{1}{8},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8$$

egységet kell mérnünk fölfelé:



Még közbülső értékeket is vehetek fel x számára, pl. láttuk már, hogy

$$2^{1\frac{1}{2}} = 2^{\frac{3}{2}} = \sqrt{2^3} = \sqrt{8} = 2{,}8\ldots.$$

Hasonlóan számíthatunk ki más egészek közé eső értékeket is; 1 tizednyi pontossággal számolva:

$$
\begin{aligned}
&\text{ha } x = -2\frac{1}{2}, \text{ akkor } y = 0{,}2\\
&\text{ha } x = -1\frac{1}{2}, \text{ akkor } y = 0{,}4\\
&\text{ha } x = -\frac{1}{2}, \text{ akkor } y = 0{,}7\\
&\text{ha } x = \frac{1}{2}, \text{ akkor } y = 1{,}4\\
&\text{ha } x = 1\frac{1}{2}, \text{ akkor } y = 2{,}8\\
&\text{ha } x = 2\frac{1}{2}, \text{ akkor } y = 5{,}7.
\end{aligned}
$$

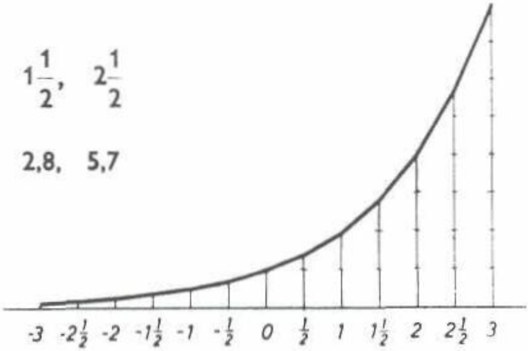
Egészítsük ki ezekkel az eredményekkel az imént kapott ábrát, a

$-2\frac{1}{2}$, $-1\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{2}$

pontokban sorra

0,2, 0,4, 0,7, 1,4, 2,8, 5,7

egységet mérve fölfelé:



Ebben a lázgörbében már alig vannak „könyökök" az egyenesdarabok találkozási pontjában; a közbeiktatásokat folytatva, képzeletben minden racionális és irracionális x értéken át, a lázgörbe mindinkább kisimul egyetlen sima görbévé.

A görbe bal felé haladva szemmel láthatóan egyre jobban közeledik a vízszintes vonalhoz, de azt soha el nem éri: nem találtunk olyan kitevőt, amelyre hatványozva 2-t, 0 volna az eredmény, márpedig csak az a pont fekhetik a vonalon, amelyhez 0 magasságú y tartozik.

Ugyanez a jelenség észlelhető az osztás elmaradt lázgörbéjén is; amíg csak egész számaink voltak, ezt nem tüntethettem volna fel kellően. Legyen most az osztandó pl. 12 (tudjuk, hogy ennek sok osztója van), az osztót fogom változtatni, ezt x-szel jelölöm, ettől függően fog változni az osztás eredménye, a hányados, ezt jelölöm y-nal:

$$y = \frac{12}{x}.$$

Ha $x = -12$, akkor $y = \frac{12}{-12} = -1$, mert $(-12)\cdot(-1) = +12$.

Ha $x = -\ 6$, akkor $y = \frac{12}{-6} = -2$, hasonló okból

Ha $x = -\ 4$, akkor $y = \frac{12}{-4} = -3$

Ha $x = -\ 3$, akkor $y = \frac{12}{-3} = -4$

Ha $x = -\ 2$, akkor $y = \frac{12}{-2} = -6$

$$\text{Ha } x = -1, \text{ akkor } y = \frac{12}{-1} = -12$$

$$\text{Ha } x = 1, \text{ akkor } y = \frac{12}{1} = 12$$

$$\text{Ha } x = 2, \text{ akkor } y = \frac{12}{2} = 6$$

$$\text{Ha } x = 3, \text{ akkor } y = \frac{12}{3} = 4$$

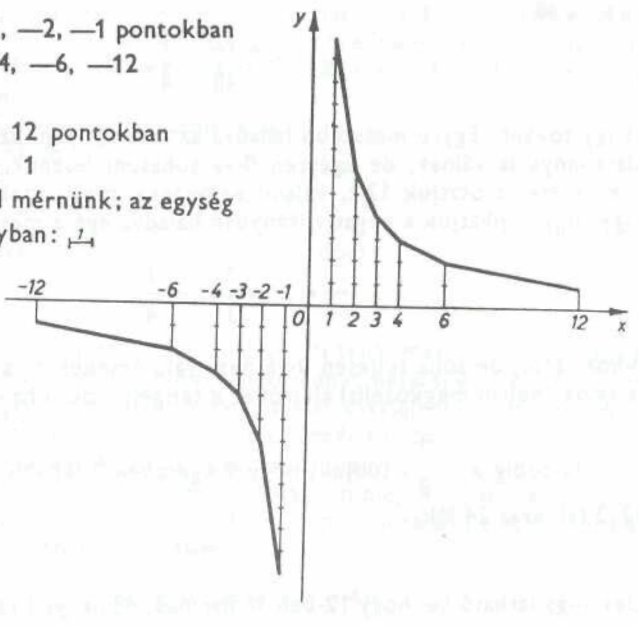
$$\text{Ha } x = 4, \text{ akkor } y = \frac{12}{4} = 3$$

$$\text{Ha } x = 6, \text{ akkor } y = \frac{12}{6} = 2$$

$$\text{Ha } x = 12, \text{ akkor } y = \frac{12}{12} = 1.$$

A pozitív y-okat a tengelytől fölfelé mértük, a negatívokat rajzoljuk lefelé, tehát a

—12, —6, —4, —3, —2, —1 pontokban
— 1, —2, —3, —4, —6, —12
egységet lefelé, az
1, 2, 3, 4, 6, 12 pontokban
12, 6, 4, 3, 2, 1
egységet fölfelé kell mérnünk; az egység legyen minden irányban: 1



Közbülső értékekre már alig van szükség, már így is szépen kisimul a görbe, de a végeit még jó lesz tovább vizsgálni. Itt célszerű a 0-ponton át fölfelé is húzni egy egyenest, az y-ok irányában. Ilyenkor a vízszintes vonal az x-ek tengelye, a rá merőleges vonalat y-tengelynek hívják. Látjuk, hogy mindkét görberészlet az x tengelyt is, az y tengelyt is egyre jobban megközelíti anélkül, hogy elérhetné valaha; ezeket a görbe asszimptotáinak nevezik. Ugyanis, ha tovább megyünk az x tengelyen jobb felé, $x = 24$ esetén

$$y = \frac{12}{x} = \frac{12}{24},$$

ezt 12-vel egyszerűsíthetjük:

$$y = \frac{1}{2};$$

ha $x = 36$ és ugyancsak 12-vel egyszerűsítünk:

$$y = \frac{12}{36} = \frac{1}{3},$$

ha $x = 48$,

$$y = \frac{12}{48} = \frac{1}{4},$$

és így tovább. Egyre messzebb haladva az x tengelyen, az y értékek bármily alacsonnyá is válnak, de egészen 0-vá sohasem lesznek, hiszen akármilyen sok részre is osztjuk 12-t, valami nagyságuk mégis csak lesz a részeknek. Ugyanígy kaphatjuk a negatív irányban haladva egész messzire a

$$-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \ldots$$

0-hoz tartó, de soha teljesen 0-vá nem váló értékeket: a görbe másik része is egyre jobban megközelíti alulról az x tengelyt, de soha el nem éri.

Ha pedig $x = \frac{1}{2}$, tudjuk, hogy 1 egészben 2 fél van, tehát 12 egészben $12 \cdot 2$ fél, azaz 24 fél:

$$y = 24.$$

Ugyanígy látható be, hogy 12-ben 36 harmad, 48 negyed van:

$$\text{ha } x = \frac{1}{3}, \text{ akkor } y = 36,$$

$$\text{ha } x = \frac{1}{4}, \text{ akkor } y = 48 \text{ s. í. t.,}$$

eszerint a 0 ponthoz közeledő x-ek mellett y egyre magasabbra nő; az y tengelyt nem érheti el a görbe, mert ez csak ott következhetnék be, ahol $x = 0$. Márpedig itt $y = \frac{12}{0}$ volna, és így az örök és áthidalhatatlan tilalomba ütköznénk: 0-val nem szabad osztani!

Az osztás próbája ugyanis a szorzás: $20 : 5 = 4$, mert $5 \cdot 4 = 20$. Miket is szoktak mondani?

	$5 : 0 = 0$.	Próba: $0 \cdot 0 = 0$ és ez nem 5.
Vagy:	$5 : 0 = 5$.	Próba: $0 \cdot 5 = 0$ és ez nem 5.
Vagy:	$5 : 0 = 1$.	Próba: $0 \cdot 1 = 0$ és ez nem 5.

Bármit is szorzunk 0-val, mindig 0 lesz az eredmény és ez nem 5, tehát 5-öt nem lehet osztani 0-val.

Gondoljuk meg: ha nagyon kicsi egy szám, nagyon sokszor van meg 5-ben; minél kisebb számmal osztunk, annál nagyobb eredményt kapunk. Ha volna egy legnagyobb szám, ez volna a legkisebb számmal – a 0-val – való osztás eredménye. De nincs.

Hátha magát 0-t mégis oszthatjuk 0-val?

Tessék megpróbálni:

$$0:0 = 1; \quad \text{próba: } 0 \cdot 1 = 0.$$

Úgy látszik, ez helyes. Igen ám, de én ezt mondom:

$$0:0 = 137$$

és nekem is igazam van, mert $0 \cdot 137$ szintén 0. Itt tehát más a baj: az eredmény teljesen határozatlan, a próba minden eredményt helyesnek ítél. A tilalom minden esetre szigorúan fennáll. Valami tréfás diáklap így fogalmazta meg egyszer: amikor az Úr Ádámot elhelyezte a Paradicsomban, ezt mondta neki: „Minden számmal szabad osztanod, csak a 0-val nem!"

Azt gondolná az ember, hogy ha ilyen nagyon megtiltották, akkor senkinek sem jut eszébe 0-val osztani. Hát ilyen csupaszon talán nem; de néha álruhába bújik a 0. Pl. ebben az alakban:

$$(x + 2)^2 - (x^2 + 4x + 4)$$

nem mindenki ismer rá az első pillanatban, pedig itt $(x+2)^2$-ből a saját kifejtett alakját vonjuk ki. Az ilyen rejtett nullákkal való osztás van a hátterében az olyan tréfáknak, amelyekben pl. azt bizonyítják be, hogy $1=2$. Mert ha csak egyetlen hibát követünk el a matematikában, csak egyetlen olyan állítást fogadunk el igaznak, amely ellenkezésben van a többi tétellel, ebből már minden levezethetővé válik, még az is, hogy $1=2$.

Jól véssük be emlékezetünkbe az iménti görbe képét – a nevét is megmondom: hiperbolának hívják –, akkor nem fogunk megfeledkezni erről a tilalomról. Hiszen a legfeltűnőbb a görbén az, hogy kétfelé szakad. Mindkét ága szép simán, folytonosan vonul, de a 0 pontban ott a durva szakadás, a végtelenné tágított seb: a baloldali ág lefelé, a jobboldali fölfelé szalad a végtelenbe. És közöttük ott az y-tengely, mint egy kivont pallos: közeledhetsz, de egészen a 0 osztóig ne merészkedj!

14. EGY A MATEMATIKA

Azért, mert már egyenlet alakban is fel tudtunk írni függvényeket, még nem kell azt hinnünk, hogy az ilyen formulának döntő szerepe van egy függvény megadásában. Tessék megpróbálni valami egyszerű képlettel kifejezni a következő y-t, mint x függvényét: valahányszor x racionális szám, y értéke legyen 1, és valahányszor x irracionális, y értéke legyen 0. (Ezt Dirichlet-féle függvénynek nevezik.) A meghatározás kifogástalan: y értéke csakugyan függ attól, hogy milyen x-et választunk és minden x értékhez egy egészen meghatározott y tartozik, pl. ha $x=1{,}5$, akkor $y=1$, ha $x=\sqrt{2}$, akkor $y=0$. Mindamellett igen nehéz feladat formulát keresni e függvény számára, sajnos, még ábrázolni sem lehet ezt a függvényt, olyan fejveszetten sűrű ugrándozást végez a 0 és az 1 között; hiszen racionális számok is, irracionális számok is mindenütt sűrűn találhatók.

A függvényfogalom lényege: az x értékek összepárosítása y megfelelő értékeivel. x sem vehet fel okvetlenül minden értéket, már az $y=\frac{12}{x}$ egyenlettel megadható függvényről is tudjuk, hogy ebben x kihagyja a 0-t, $x=0$-ra e függvény nincs értelmezve. Minden függvényértelmezéskor meg kell mondanunk, hogy x milyen számok halmazából választható, és meg kell adni egy utasítást, amely megmondja, hogy ha választottunk innen egy x értéket, annak miféle y lesz a párja.

De mindig nagy segítség, ha ábrázolni is tudjuk a függvényt: egy jó ábra többet beszél, mintha órák hosszat próbáljuk a függvényt szavakkal leírni.

Legyen például egy függvény definíciója: bármi is x, y a benne foglalt legnagyobb egész számmal legyen egyenlő. Így pl.

ha $x = 5{,}45$, akkor $y = 5$,
ha $x = \sqrt{2}$, akkor $y = 1$,

mert már láttuk, hogy $\sqrt{2} = 1{,}4\ldots$

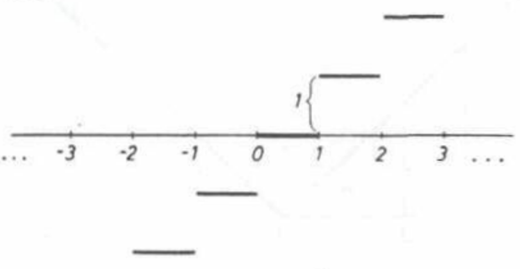
Próbáljuk ábrázolni ezt a függvényt:

ha $x = 0$, akkor $y = 0$
ha $x = 0{,}1$, akkor $y = 0$
ha $x = 0{,}9999$, akkor $y = 0$,

látjuk, hogy $y = 0$ mindaddig, míg x el nem éri 1-et; ezután

ha $x = 1$, akkor $y = 1$
ha $x = 1{,}001$, akkor $y = 1$
ha $x = 1{,}99$, akkor $y = 1$,

tehát $y = 1$, amíg csak 2-höz nem érkezik x, és így tovább, a negatív irányban is. Tehát ábrázolva:



ezekből a különálló vízszintes darabokból áll a görbe. Egy pillantás a rajzra mindent elárul a függvényről: ahol a görbe szakad, ott ugrik a függvényérték 1-et, a vízszintes darabokon pedig állandó marad. Tehát nemcsak olyan végtelen szakadásokra képes egy függvény, mint $y = \frac{12}{x}$ az $x = 0$ helyen, hanem ilyen szelídebb szakadásokra is. És a nem szakadó darabokon legalább folytonosan, simán halad mindkettőjük képe, míg a Dirichlet-féle függvény sehol sem folytonos: nem lehet olyan szűk közt felvenni, amin belül ne volna racionális pont is, irracionális pont is, ezek között pedig már ugrik a függvény értéke.

Azt sem kell hinni, hogy ha egyszerű formulával felírható egy függvény és elég sűrűn veszünk fel pontokat, akkor már biztosan „könyök" nélküli vonallá simul ki a képe. Tegyük fel például, hogy így szól a definíció: bármi is x, y legyen egyenlő x abszolút értékével, azaz x értékével, tekintet nélkül az előjelre. Az abszolút értékre van bevezetett jel: egy-egy vonalka a szám előtt és után; például:

$$|-3| = 3.$$
$$|+3| = 3.$$

és persze
$$|\,0\,| = 0.$$

A most értelmezett függvény tehát a következő egyszerű formulával adható meg:
$$y = |x|.$$

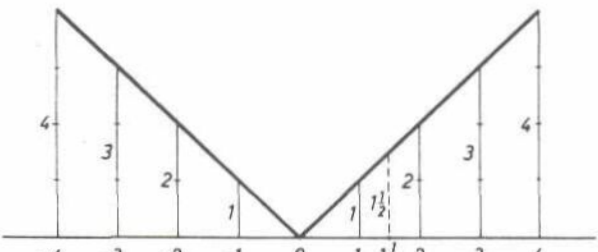
Eszerint, amíg x a

—4, —3, —2, —1, 0, 1, 2, 3, 4

pontokon fut át, y sorra a

4, 3, 2, 1, 0, 1, 2, 3, 4

értékeket veszi fel. Ábrázolva:



Függvényünk képe tehát éles könyökben elhajló két egyenes, ezen az sem változtat, ha akárhány közbülső értékkel próbálkozunk; pl.

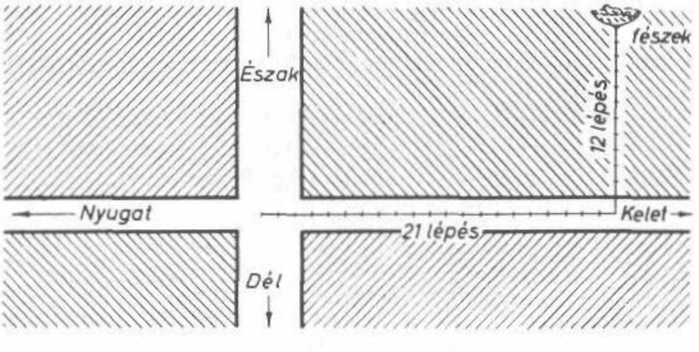
$$\text{ha } x = 1\frac{1}{2}, \text{ akkor } y = \left|1\frac{1}{2}\right| = 1\frac{1}{2},$$

ezt rajzoltam meg szaggatott vonallal: ez a pont is ráesett a könyök egyik szárára.

A geometriai ábrázolás éles, szembeszökő képet ad a függvényről, ha nem is pontosat: a ceruzánk nem fog egész élesen, a vonalzónk nem egészen egyenes, a szemünk és a kezünk is gyarló. De vannak a geometriának a rajzhoz nem kötött egészen pontos mondanivalói is az egyes idomokról. S ha aztán ismerem pl. a hiperbola geometriai tulajdonságait, és tudom, hogy az $y = \frac{12}{x}$ függvény képe hiperbola, már szinte mindent tudok a függvényről.

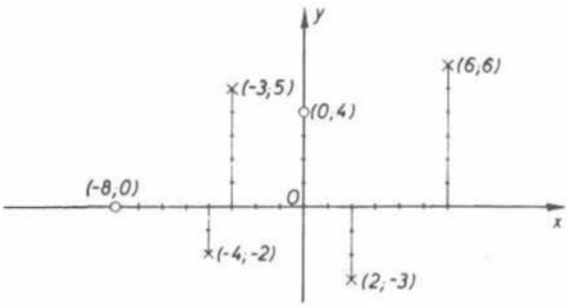
De a geometria is sokszor fordul segítségért a matematika többi ágaihoz. Kölcsönkéri például a képletet, amikor egységesen akar tárgyalni valamit, hiszen már láttuk, hogy mennyi különböző problémát tud összefogni egyetlen formula. Megtette ezt már a terület- és köbtartalom-számításban is. *Egy* a matematika, nem esik szét két külön tudományra: geometriára és „algebrára", ahogyan a diák gondolja, különösen, ha a tanára úgy osztotta be az anyagot, hogy például hétfőn és pénteken „algebra", szerdán geometriaóra van; hiszen így valósággal két tantárggyá vált szét a matematika.

Az egyik híd, amely a geometriát a másik oldallal összeköti: a koordinátarendszer. Az a 0-ponton átmenő két merőleges egyenes: az x-ek és az y-ok tengelye, amelyeket már egyszer felhasználtunk a hiperbola támogatására. Ezek módot adnak arra, hogy a sík pontjait számok segítségével jellemezzük. Felfoghatjuk őket úgy, mint két utat, amelyek egy rétet szelnek át: ha a rét egyik bokrában találtam egy madárfészket, úgy jegyezhetem meg a helyét, hogy lehetőleg egyenletes lépésekkel egyenest az egyik útra megyek, megszámlálom a lépéseimet, és azokat a lépéseket is, amelyeket ezen az úton az útkereszteződésig kell megtennem:



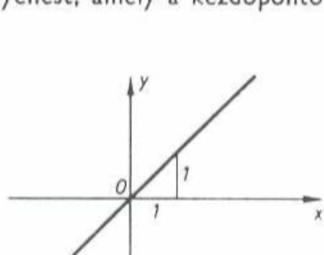
Ha most valaki mást is oda akarok vezetni a fészekhez és tudom, hogy az útkereszteződéstől 21 lépést kell tennem kelet felé és 12 lépést az északi irányban, biztosan oda fogok találni. Ez a két irányított szám a keresett pont két „koordinátája". A geometriában persze „+", illetve „—" jellel adjuk meg az irányokat, szokás szerint úgy, hogy jobb felé és felfelé mutatnak a pozitív irányok, balra és lefelé a negatív irányok. Lépés helyett itt egy határozott egységet kell fölvenni, ebben fogjuk mérni a koordinátákat. Így a sík minden pontjához tartozik egy határozott számpár és minden számpárhoz tartozik egy pont. Az x tengely irányában megtett út – elsőnek mindig ezt mondjuk – a pont x koordinátája, az y tengely irányában megtett út a pont y koordinátája.

Odaírom néhány pont mellé a koordinátáit, mert jó ebben gyakorlatra tenni szert:



(Természetesen nem ez az egyetlen módja annak, hogy pontokhoz számokat kapcsoljunk; pl. elképzelhető, hogy az utak nem merőlegesek egymásra, az irányukat követve mégis jó tájékozódást kapunk; vagy csak egy út van, de ezen kijelölhetek egy határozott fát, idáig lépkedhetek a bokortól, és van valami készülékem, amivel megállapíthatom, hogy innen nézve milyen irányba esik a bokor.)

Ha a pontokat számpárokkal jellemezhetem, ez módot ad arra, hogy egy vonalat ilyen szempárok közötti kapcsolattal, azaz egyenlettel jellemezzek. Vegyük például azt az egyenest, amely a kezdőponton és az (1; 1) ponton megy át:



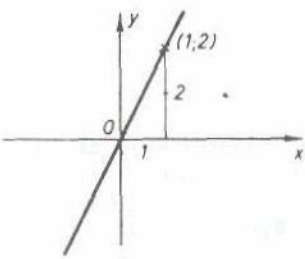
Ha ez vasúti töltés volna, így jeleznék az emelkedését:

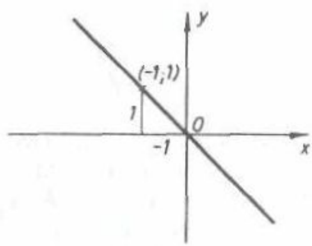
$$1:1.$$

Ez azt jelenti, hogy amíg 1 métert teszünk meg az emelkedő töltés mellett vízszintesen haladva, addig a töltés 1 méterrel emelkedik fölénk. Minthogy ez a lejtő egyenletesen emelkedik, 2 méter távolságban 2 méter magasra, 3 méter távolságban 3 méter magasra jut, s. í. t., tehát az jellemzi mindazokat a pontokat, amelyek egyenesünkön feküsznek, hogy a két koordinátájuk megegyezik: minden ilyen pontban

$$y = x$$

És egyenesünkön kívül nincs olyan pont a síkban, amelynek a koordinátái egyenlők volnának: bármely más pontot kötünk össze a kezdőponttal, másképpen emelkedő, sőt esetleg lefelé haladó lejtőt kapunk, pl.





Itt az első ábrában mindvégig 2:1 az emelkedés, tehát minden olyan pontnak, amely ezen az egyenesen fekszik, kétakkora az y koordinátája, mint az x koordinátája; a másodikban tulajdonképpen 1:1 a meredekség, de ez nem emelkedés, hanem lejtés, koordináta-rendszerünkben tulajdonképpen így kellene jelezni a meredekségét 1:(—1), és ennek az a hatása, hogy ha ezen az egyenesen bármely pont koordinátái meg is egyeznek abszolút értékben, de mindig ellenkező előjelűek és így mégsem egyenlők.

Tehát az egyenesünkön kívül eső pontok koordinátái csakugyan nem lehetnek egyenlők: az

$$y = x$$

egyenlet teljesen jellemzi a mi eredeti egyenesünk pontjait és csakis azokat, és így jogosan mondhatjuk, hogy ez a mi egyenesünk egyenlete.

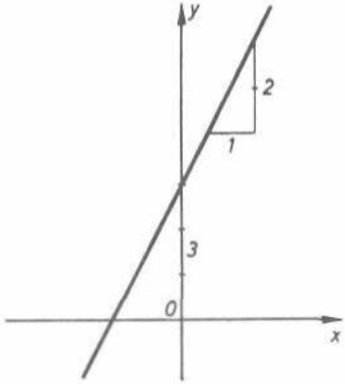
Közben már az is az ölünkbe hullott, hogy a másik két lerajzolt egyenes egyenlete:

a 2 : 1 emelkedésűé: $y = 2x$

(ezzel még lesz dolgunk, akkor majd tessék ráismerni) és

az 1 : (—1) emelkedésűé: $y = -x$.

Toljuk a 2 : 1 emelkedésű egyenest egy kicsit fölfelé, mondjuk, 3 egységgel, de úgy, hogy az iránya ne változzék:



Az emelkedése nem változott, erről meggyőződhetünk, ha bármelyik pontjából kiindulva jobb felé haladunk 1 egységgel: látni fogjuk, hogy a lejtő ezalatt 2 egységgel jutott magasabbra. Az egyetlen különbség az előbbi helyzethez képest az, hogy minden egyes pont 3 egységgel magasabbra került, és így minden pontnak az y koordinátája megnövekedett 3-mal. Amelyik y 2x volt ezelőtt, az itt $2x + 3$-má lett, tehát az ilyen helyzetű egyenes egyenlete:

$$y = 2x + 3.$$

Az eddig kapott egyenletek:

$$y = x, \quad y = 2x, \quad y = -x, \quad y = 2x + 3$$

közös vonása, hogy valamennyien elsőfokú 2 ismeretlenes egyenletek. Hogy 2 ismeretlenesek, az magától értetődő, hiszen 2 koordináta jellemzi a pontokat. A hangsúly azon van, hogy bármilyen helyzetű egyenesnek mindig *elsőfokú* az egyenlete. És fordítva is, meg lehet mutatni, hogy bármilyen más alakban felírt elsőfokú 2 ismeretlenes egyenlet, pl. az

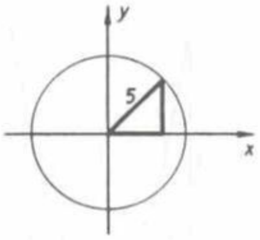
$$5x - 3y = 7$$

egyenlet is tekinthető egy határozott egyenes egyenletének. Elsőfokú egyenlet és egyenes: ugyanaz a fogalom, két fogalmazásban.

Ez szép, de nem nagyon meglepő eredmény: bármilyen helyzetben is rajzolunk egyeneseket, ezek mégiscsak mind egyenesek, egyetlen családba tartoznak, természetes, hogy az egyenleteiknek is egy határozott egyenletcsaládot kell alkotniok.

Nézzünk most valamilyen görbe vonalat. A kört mindenki ismeri; gondoljunk például egy kocsikerékre sok-sok egyenlő küllővel: ezek a kör sugarai:

Legyen egy-egy ilyen sugár pl. 5 egység és essék a kör középpontja a kezdőpontba:



Akárhol veszünk fel egy pontot a kör kerületén, ha megrajzoljuk a koordinátáit és az idefutó sugarat is, derékszögű háromszöget kapunk. A befogók a koordináták, az átfogó a sugár. Mármost emlékezzünk vissza arra, hogy mi már ismerünk egy kapcsolatot a befogók és az átfogó közt: a jó öreg Pitagorasz-tételt. A két befogó négyzetének összege egyenlő az átfogó négyzetével. Tehát a körön fekvő bármely pont két koordinátáját négyzetre emelve s e négyzeteket összeadva $5^2 = 25$-öt kell kapnunk:

$$x^2 + y^2 = 25.$$

Ez lesz a körünk egyenlete.

Annyit mindjárt láthatunk, hogy másodfokú, méghozzá nem is a legegyszerűbb alakú másodfokú egyenlet. Vizsgáljuk meg, milyen görbe tartozik a legegyszerűbbhöz, az

$$y = x^2$$

egyenlethez?

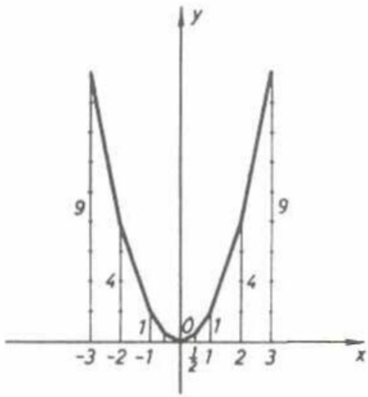
$$
\begin{array}{l}
\text{Ha } x = -3,\ \text{akkor } y = (-3)^2 = +9 \\
\text{Ha } x = -2,\ \text{akkor } y = (-2)^2 = 4 \\
\text{Ha } x = -1,\ \text{akkor } y = (-1)^2 = 1 \\
\text{Ha } x = 0,\ \text{akkor } y = 0^2 = 0 \\
\text{Ha } x = 1,\ \text{akkor } y = 1^2 = 1 \\
\text{Ha } x = 2,\ \text{akkor } y = 2^2 = 4 \\
\text{Ha } x = 3,\ \text{akkor } y = 3^2 = 9.
\end{array}
$$

Vegyünk még legalább 0 körül közbülső értékeket:

$$\text{Ha } x = \frac{1}{2},\ \text{akkor } y = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

$$\text{Ha } x = -\frac{1}{2},\ \text{akkor } y = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

Ábrázoljuk:



Azt a görbét, amely ennek a teljes kisimulásakor jön létre, parabolának nevezik; a két szára persze a végtelenségig folytatódik, egyre meredekebbé válva, egyre jobban hasonlítva egy-egy függőleges egyeneshez. Ez minden, csak nem kör.

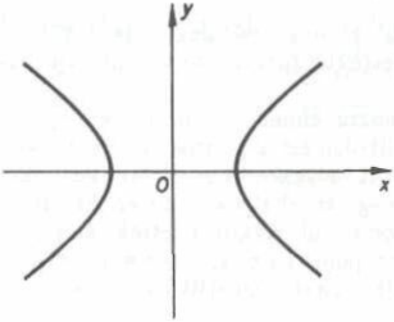
Találkoztunk már más görbével is, amelynek egyenlete másodfokú volt, csak nem vettük észre. A hiperbolára gondolok. Ennek ugyan így szólt az egyenlete:

$$y = \frac{12}{x},$$

de ha itt az x osztót szorzóul hozzuk át a baloldalra,

$$x \cdot y = 12$$

lesz belőle. Márpedig egy kétismeretlenes egyenletben x·y-t, amelyben a két ismeretlen kitevője együttvéve 2, másodfokúnak szokás tekinteni. De ha ez nem elég meggyőző, azt is elárulom, hogy ha egy kicsit elforgatjuk a hiperbolánkat, úgy, hogy ilyen helyzetbe kerüljön:

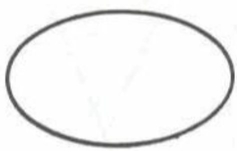


akkor már így fog szólni az egyenlete:

$$x^2 - y^2 = 24,$$

és ez elvitathatatlanul másodfokú.

Azt már csak megemlítem, hogy az elnyúlt körnek, az ellipszisnek:



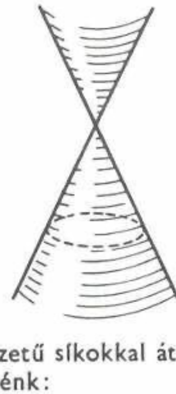
ugyancsak másodfokú az egyenlete, és több ilyen görbe nincs is (ha bizonyos „elfajuló" esetektől eltekintünk): ha a felsorolt négy görbét minden helyzetben berajzolom a koordináta-rendszerbe, megkaptam azt a családot, amelynek az egyenletek közt a kétismeretlenes *másodfokú* egyenletek felelnek meg. De nehéz elképzelni egy családot egymástól ennyire elfajzó tagokkal. Mi a rokonság ezek közt a részben végesben záródó, részben a végtelenbe kalandozó, összefüggő, vagy két részre szakadó görbék között?

Ha bemutatom ezt a családot, azonnal kiderül, hogy mi a rokonság köztük: görbéinket közös néven „kúpszeleteknek" hívják.

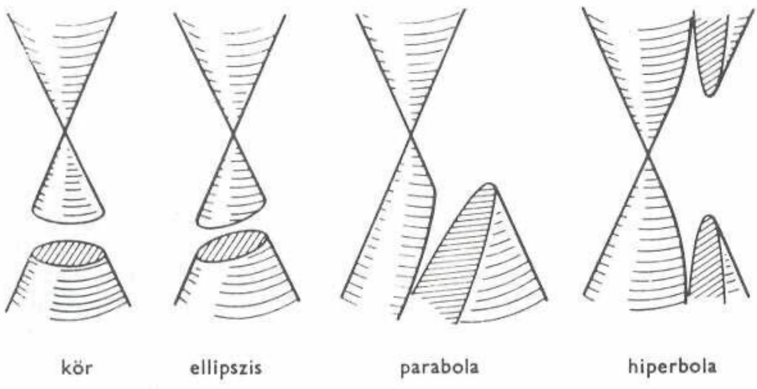
Most megint ki kell lépnünk a síkból a térbe; de kár, hogy a térbe nem tudunk úgy rajzolni, mint egy síklapra! Képzeljünk el legalább egy festéket, amely a levegőt fogja. Ezután képzeljünk a levegőbe egy vízszintes körlapot és egy egyenest, amely ferdén hajol a középpontja fölé úgy, hogy az egyik pontjával hozzá is ér:

Még csak azt képzeljük el, hogy előzőleg valaki tetőtől talpig bemártotta ezt az egyenest a bűvös festékbe (persze nincs is „teteje", se „talpa": az egyenes végtelen hosszú).

Most nyúljunk hozzá ehhez a képzeletbeli egyeneshez, fogjuk meg szilárdan azt a pontját, amely éppen a kör középpontja fölött helyezkedik el, a másik kezünkkel pedig ragadjuk meg ott, ahol a körhöz ér, és ezt a pontját vezessük a kör körül. Akkor a festék, amely a levegőt fogja, a szilárd pont alatt is, fölötte is, olyan felületet fest a levegőbe, amit kúppalástnak hívnak:



Ha mármost az így keletkezett kettős kúpot más-más helyzetű síkokkal átszeljük, a csonka darabok szélén megjelenik a mi négy görbénk:



kör ellipszis parabola hiperbola

Csak a negyedik sík találta el a felső kúpot is.

De ha ilyen mértani rokonságot nem is találtunk volna e négy görbe közt, maga az, hogy mindannyiuk egyenlete másodfokú, sok rejtett közös vonásukat képes napfényre hozni. Meg kell kérdeznünk, hogy mit mond az algebra az ilyen egyenletekről, és amit ebből vonhatunk le, az mind a négy görbénknek közös tulajdonsága lesz. Vegyük szemügyre például a metszéspontjaikat egy egyenessel. A metszéspont olyan pont, amely a görbén is és az egyenesen is rajta van, tehát a koordinátái kielégítik mindkettőjük egyenletét. Az egyenes egyenlete elsőfokú; az algebra azt tanítja, hogy egy elsőfokú és egy másodfokú kétismeretlenes egyenletnek vagy nincs közös (valós) megoldása, vagy egy közös megoldásuk van, vagy kettő. Tehát kúpszeleteink bármelyikére igaz, hogy egy egyenes háromféle állást foglalhat vele szemben: vagy hozzá sem ér, vagy egyetlen pontban érinti, vagy két pontban metszi, például:

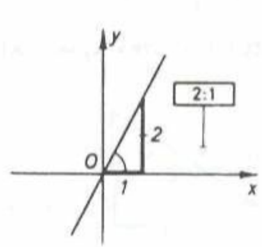
és kettőnél több pontban még a kétágú hiperbolát sem metszheti.

Ilyen szolgálatokat tehet az algebra a geometriának.

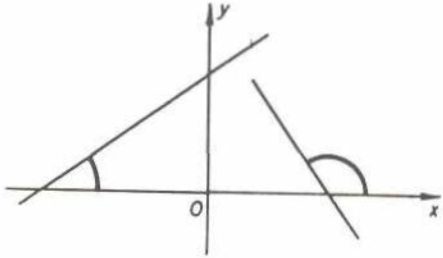
Utóirat a hullámokról és az árnyékról

Közben megcsendült két geometriai téma; ne menjenek veszendőbe.

Az egyik azzal a móddal függ össze, ahogyan egy egyenes irányát megadtuk: az emelkedést a megtett úthoz, azaz az alább keletkező derékszögű háromszögben a két befogót egymáshoz viszonyítva:

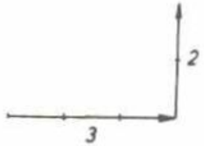


Természetesen az is egyértelműen megadja az irányt, ha megmondjuk: milyen szög alatt hajlik el ez az egyenes egy határozott iránytól; ilyen határozott iránynak az x tengely pozitív felét szokás választani. Ezt a szöget nevezik egy egyenes irányszögének; ez hegyesszög, ha emelkedik, tompaszög, ha lefelé halad az egyenes:

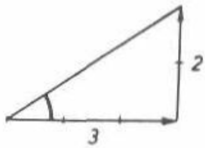


Mármost a szóban forgó két befogó viszonya teljesen eldönti az irányt, és ezzel együtt az irányszöget is. Tehát egy szög nagyságának ez lehet a mértéke: megmondjuk, hogy akkora hegyesszögről van szó, amelyhez 2 : 3 emelkedésű lejtő tartozik, azaz, ha az egyik szárának bármely pontjából merőlegest húzunk a másik szárra, olyan derékszögű háromszöget kapunk, amelyben a szóban forgó szöggel szemben levő befogó viszonya a mellette levő befogóhoz 2:3, más jelölésben $\frac{2}{3}$.

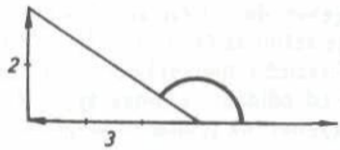
Ha ezt a $\frac{2}{3}$ viszonyt adom meg, azonnal meg lehet rajzolni a szöget: megyünk 3 egységgel jobb felé, két egységgel fölfelé:



és ha azt a pontot, ahova jutottunk, összekötjük a kiindulóponttal, megvan a keresett szög:

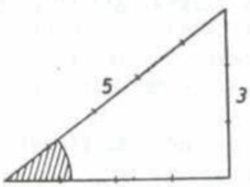


Ha tompaszögről van szó, akkor lefelé halad a lejtő és már láttuk, hogy a szóban forgó viszony negatív lesz; de a recept változatlanul alkalmazható: ha pl. $-\frac{2}{3}$ ez a viszony, akkor tudom, hogy visszafelé, bal felé haladva emelkedik a lejtő; tehát bal felé megyek 3 egységgel, fölfelé 2 egységgel, az így nyert pontot ismét összekötöm a kiindulóponttal, és akkor világos, hogy arról a tompaszögről volt szó, amelyet ez az összekötő vonal a pozitív haladási iránnyal bezár (mert az irányszög mindig az x tengely *pozitív* irányával bezárt szög):

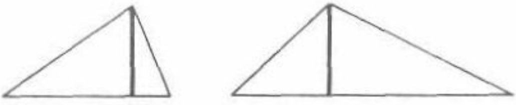


Egy ilyen tompaszöget nem lehet belekényszeríteni egy derékszögű háromszögbe, de mellette mégis derékszögű háromszög keletkezett, és ennek a befogói vannak egymással $\frac{2}{3}$ viszonyban, ami előjeltől eltekintve a mi tompaszögünket jellemző viszony.

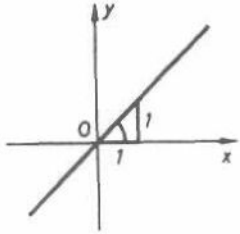
Meg lehet mutatni, hogy a derékszögű háromszög bármely más két oldalának viszonya is ugyanilyen jól jellemzi a szögeket. E hányadosokat – hiszen a vizsgált szög nagyságától függnek – szögfüggvényeknek nevezik. A most vizsgált szögfüggvény neve tangens; a szöggel szemben fekvő befogó viszonya az átfogóhoz: a szög sinusa; a szög melletti befogó viszonya az átfogóhoz: a szög cosinusa; pl. ebben a háromszögben:



a megjelölt szög sinusa $\frac{3}{5}$ és cosinusa $\frac{4}{5}$. Minden szögfüggvény értelmezését kiterjesztik hegyesszögnél nagyobb szögekre is. A legkülönbözőbb nagyságú szögekhez tartozó szögfüggvények értékeit táblázatokba szedték; ha mármost ismerjük egy derékszögű háromszög oldalait – és más háromszögek mindig felbonthatók két derékszögű háromszögre:



– csak bele kell néznünk a táblázatba, és már megmondhatjuk a szögeit is. Igaz, hogy megrajzolni is lehetne a háromszöget, ha oldalait ismerjük, és akkor le is mérhetnénk a szögeket, de hol van ennek a mérésnek a pontossága attól, amit a táblázat készítője számítás útján tud elérni! Mert azt nem szabad gondolni, hogy a táblázat készítője mérésekből veszi a szögfüggvények értékeit. Kiszámításukra módot ad például az, hogy egyes értékeket pontosan ismerünk, például az első egyenesünk pontosan megfelezte a derékszöget:

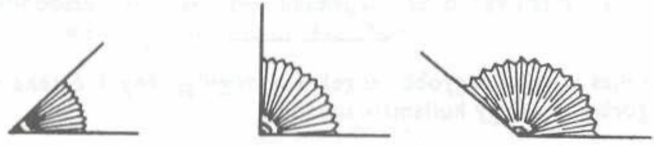


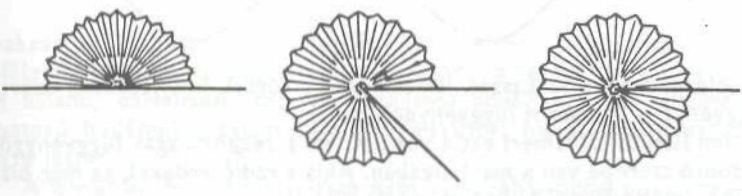
és az ő irányszögének tangense 1:1, azaz $\frac{1}{1}=1$ volt. A derékszög a negyedfordulatkor létrejövő szög, tehát a nyolcadfordulathoz tartozó szögről tudjuk, hogy a tangense 1. Ha pedig már egyes szögek szögfüggvényeit ismerjük, kérdezhetjük, hogy hogyan lehet ezekből kiszámítani pl. az illető szögek összegének, vagy egy szög kétszeresének, felének a szögfüggvényeit. Ilyen összefüggéseket kutat a trigonometria. A táblázatok mégis másképp készülnek; erre még visszatérek.

A trigonometrián messze túlmenő jelentőségük is van a szögfüggvényeknek. Ha pl. megrajzoljuk a sinusfüggvény lázgörbéjét, míg a szög 0-tól a teljes körülfordulásig változik, ilyen hullámvonalat kapunk:

Ez még tovább is folytatható. A szög tulajdonképpen egy egyenesnek egy másik szilárd egyenestől való elfordulását méri; képzeljük el például, hogy lassan szétnyitunk egy japán legyezőt:

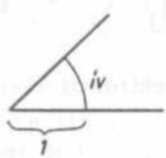
hegyesszög derékszög tompaszög



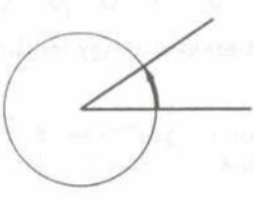


nyújtott szög domború szög teljes szög

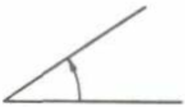
Így minden szögfajta létrejön, és az is látható, hogy a csúcs körül lerajzolódó körív méri az elfordulás nagyságát. Persze e körív hosszúsága a legyező sugarától is függ; mi az egységnyi sugárral belerajzolt körív hosszával mérjük szögeinket:



(Ez sokszor célszerűbb, mint az iskolában megszokott fokbeosztás.) Mármost elképzelhető (nem a legyezőn, ez elszakadna), hogy az elforgó egyenes egy teljes fordulat után még tovább forog:



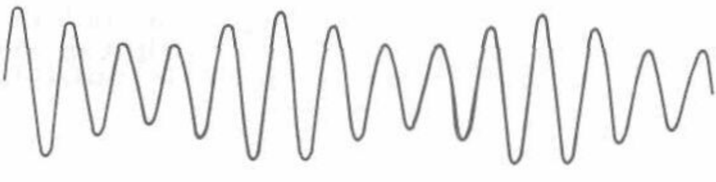
úgy, hogy a vastagon kihúzott részt kétszer is befutja. Világos, hogy így végül is ugyanabba az irányba áll be, mintha csak ezzel a kis ívvel fordult volna el:



Tehát a teljes szögnél nagyobb szögekre a szögfüggvények értéke megismétlődik, a görbe ugyanúgy hullámzik tovább:

Ez ugyanolyan, mint a szakaszok ismétlődése a törtek kifejtésében; ezért a sinusfüggvényt is szakaszos függvénynek hívják.

Minden fizikus jól ismeri ezt a vonalat: ez a rezgőmozgás függvénygörbéje, és döntő szerepe van a mai fizikában. Akit a rádió érdekel, az már bizonyára ilyen „módosított" hullámok rajzát is látta:



Ebben a sűrű hullámzás az ún. elektromágneses hullám; ennek a képe egyedül ilyen volna:

de a hang módosítja a szélét ezekkel a nagy hullámokkal:

Itt még jól felismerhető a két hullám, amelyekből a módosított hullám összetevődött. De a hanghullám a valóságban sohasem ilyen egyszerű, mert nincs teljesen tiszta hang, mindig több hang rezeg együtt,és ezek közt nincs olyan nagy különbség, mint az elektromágneses és hanghullámok közt, hogy ilyen jól megkülönböztethető szerepet kapnának; az ő egymásra torlódásuktól egyszerűen csak eltorzul a hullám, pl. ilyen lesz:

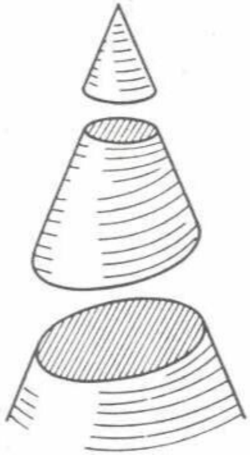
Gyakran van szükség arra, hogy egy ilyen eltorzult hullámból kiolvassuk: miféle hullámokból tevődött össze. Felvetődik a kérdés: ha van egy folytonosan haladó, bármilyen torz, de szakaszos görbénk, nem lehetne-e olyan egyszerű hullámokat találni, amelyek együttes hatása éppen ezt a görbét hozza létre?

A felelet az, hogy ha pontosan nem is, de lehet olyan hullámokat találni, amelyek egymásra torlódva tetszés szerinti pontossággal közelítik meg a mi görbénket. Még akkor is, ha a mi görbénk csupa könyök, pl. ilyen egyenes darabokból áll:

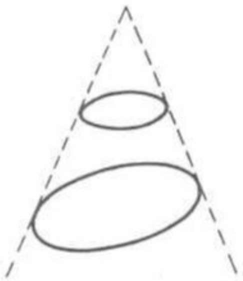
Ezt persze függvény-nyelven bizonyítják: nem hullámokról, hanem a nekik megfelelő szögfüggvényekről beszélve. Ezen a téren végzett úttörő munkát a mi Fejér Lipótunk,és ez tette őt világhírűvé már egészen fiatal korában.

* *
*

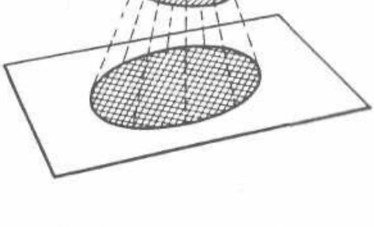
A másik geometriai téma, amit megpendítettünk, a kúp metszésével függ össze. Vágjuk csak át az alsó kúpfelületet két helyen, egyszer vízszintes, egyszer kissé ferde síkkal:



Rajzoljuk meg ebből külön a kúp csúcsát, a kört és az ellipszist:



Képzeljük el, hogy a kúp csúcsa egy pici villanykörte, és ez fénysugarakat bocsát ki minden irányban. A kör egy papírlap a sugarak útjában, ez nem engedi át a ráeső sugarakat; a széle mentén elcsúszó sugarak adják a mi kúpfelületünket, és így a kör ellipszis alakú árnyékot vet egy alatta ferdén elhelyezett síkra:



Tehát az ellipszis a kör árnyékának fogható fel: a körnek egy pontjából egy ferde síkra való „vetítése" útján jön létre.

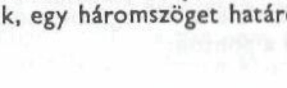
Ugyanilyen vetítéssel parabola, illetőleg hiperbola alakú árnyék jön létre, ha a síkot egyre tovább forgatjuk (ha a hiperbola másik ágát is meg akarjuk kapni, a fölfelé haladó sugarak útjába ugyanilyen körlapot kell helyeznünk). Ennyire torz lehet egy árnyék.

Mármost az ún. „projektív geometria" azt kutatja, hogy melyek azok a tulajdonságok, amelyek még vetítés okozta eltorzuláskor sem mennek veszendőbe. Sikerült találni ilyen, a vetítéssel szemben „invariáns"-nak mutatkozó „projektív" tulajdonságokat. Ez új oldalról teszi lehetővé a kúpszeletek egyöntetű és egyszerű vizsgálatát: elég a jól ismert körrel foglalkoznunk, ennek minden „projektív" tulajdonsága sértetlenül átmegy a belőle vetítéssel keletkezett kúpszeletekre is. Elnyúlhat az árnyék, akár a végtelenbe is: mégsem szakadhat el egészen a gazdájától.

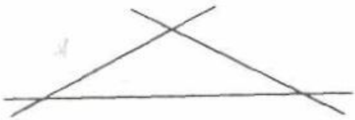
15. „ÍRJA" ELEMEK

Van egy érdekes orosz novella, amelynek „Irja hadnagy" című színpadi változatát is megnéztem. Alapötlete az, hogy valaki félreérti a diktálást megszakító: „írja, hadnagy!" – felszólítást, így kerül a tisztek névsorára egy „Irja hadnagy" név is; és minthogy a mindenható cár ezt aláírja, senki sem mer többé előállni azzal, hogy Irja nevű hadnagy nem is él. Irja hadnagy tehát voltaképpen nem ember, csak sajtóhiba, de mégis a legváltozatosabb események történnek vele és körülötte: börtönbe kerül, megnősül, felkelést szít és döntően befolyásolja mások életét.

Ilyen nem létező, de mégis fontos szerepet játszó „Irja" elemek a matematikában is találhatók. Itt ideális elemeknek hívják őket. Ilyen például az a bizonyos „végtelen távoli pont", amelyben „a párhuzamosok találkoznak". Ez ismét arra jó, hogy egységessé tegye a tárgyalást. Ugyanis be lehet bizonyítani, hogy a pontok és az egyenesek között egy bizonyos „dualitás" áll fenn: bizonyos pontokról és egyenesekről szóló tételek igazak maradnak, ha a „pont" és az „egyenes" szavakat felcseréljük bennük. Például: 3 pont, amely nem egy egyenesen fekszik, egy háromszöget határoz meg. Ez kétségtelenül igaz:



A duál így hangzik: 3 egyenes, amely nem ugyanazon a ponton megy át, ugyancsak meghatároz egy háromszöget:

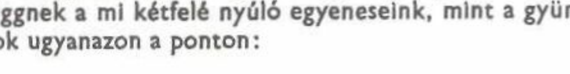


Ez a dualitás nagyon kényelmes; elég az egyik állítást bebizonyítanunk, s így már önkénytelenül bebizonyítottuk a duálját is: egyet mondtunk, kettő lett belőle.

Igen ám, de már ebben az egyszerű példában is sántít a duáltétel: hozzá kellett volna tenni: „– hacsak az egyenesek nem párhuzamosak". Ilyenkor jó például ezt mondani: a három párhuzamos esetét már kivettük a tétel megfogalmazásában, hiszen a párhuzamosok egyetlen, végtelen távoli pontban találkoznak.

De sokkal nagyobb dolgokra is képes ez a végtelen távoli ideális pont, mint arra, hogy megtakarítsa nekünk a „hacsak" kezdetű mondatokat. Ha egyenlő irányú, azaz párhuzamos egyeneseknek egyetlen közös végtelen távoli pontot tulajdonítunk, de más irányú egyenesnek mást, akkor annyi ideális pontot teremtettünk, ahány irány van. Pontosan is meg tudjuk mondani, hogy mikor melyikükről beszélünk: csak a feléje mutató irányt kell megadnunk. Ha egy kicsit módosítunk a koordinátáinkon, így még az egyenletét is felírhatjuk annak a vonalnak, amelyen a végtelen távoli pontok valamennyien rajta vannak. Kiderül, hogy ez olyan, mint egy egyenes egyenlete. Tehát azt mondjuk, hogy a végtelen távoli pontok mind rajta vannak egy végtelen távoli egyenesen.

Hát ez eddig üres játéknak látszik: felírtuk egy nem létező egyenes egyenletét. Hogy elképzeljük, azt talán jobb volna meg se próbálni: egy egyenes kétfelé végtelen, mégis csak egy végtelen távoli pontot tulajdonítunk neki (ettől jön rendbe a dualitás, két ideális pont már elrontaná), ez olyan, mintha a két vége a végtelenben összetalálkoznék, valami körféle lenne belőle a végtelenben. A végtelen távoli egyenes egyes pontjain tehát ilyen körökké varázsolva függnek a mi kétfelé nyúló egyeneseink, mint a gyümölcs a fán, a párhuzamosok ugyanazon a ponton:



és őt magát sem ilyen egyenesen kellett volna rajzolnom, hanem isten tudja hogyan, hiszen az egyik pontja egyszerre van keleten és nyugaton, egy másik pontjában észak és dél találkozik s í. t., minden világtájon át. Inkább felejtsük el az egészet, ez nem az elképzelnivalók világába tartozik, „Írja hadnagy" csak sajtóhiba.

De miket tud a végtelen távoli egyenes! Az egyenlete már a kezünkben van, tehát nem vakmerőség arra vállalkozni, hogy meghatározzuk a metszéspontjait például egy parabolával, hiszen csak a két egyenlet közös megoldásait kell keresnünk. És ekkor kiderül, hogy ez a végtelen távoli egyenes, amelyről úgy éreztük, hogy maga a zavar, éppen ő derít teljes világosságot a kúpszeletek családjára.

Ugyanis mindenkiben, aki ezzel a tárggyal foglalkozik, felvetődik a kérdés: ha adva van egy kétismeretlenes másodfokú egyenlet, hogy lehet eldönteni róla, hogy ez miféle kúpszelet egyenlete? Erre ad feleletet a végtelen távoli egyenes: ha az ő egyenletének nincs közös megoldása az adott egyenlettel, akkor ellipszis, ha egy közös megoldásuk van, akkor parabola, ha kettő, akkor hiperbola egyenletével állunk szemben, több lehetőség pedig nincs. (A kör az ellipszis legszabályosabb alesete.)

Most már nyugodtan szabadjára engedhetjük a képzeletünket: a kapott eredmény teljesen megfelel az elképzelésünknek. Az ellipszis egészen a végesben fekszik, hát persze, hogy nincs közös pontja a végtelen távoli egyenessel. A parabola szárai mind meredekebbé válnak, mindjobban hasonlítanak két párhuzamos egyeneshez, hát persze, hogy egyetlen végtelen távoli pontban találkoznak. A hiperbola szárai pedig két különböző irányú asszimptota mentén nyúlnak el: természetes, hogy két különböző pontban futnak be a végtelenbe.

Hát nem lett volna kár, ha ezeket a nem létező pontokat nem engedjük szóhoz jutni?

Most már hozzá merek nyúlni utolsó elintézetlen problémánkhoz is: az ilyen másodfokú egyenlethez:

$$x^2 = -9.$$

$\sqrt{-9}$-cel jelölnénk azt a számot, amelynek a négyzete -9, ha volna ilyen, de olyan számmal még nem találkoztunk, amelynek a négyzete negatív lett volna. Akár -3-at, akár $+3$-at emelünk négyzetre, csak $+9$ lesz az eredmény. Még az is kérdés, hogy mennyi $\sqrt{-1}$; „*i*-gazán nem tudom" – akarom mondani, de tegyük fel, hogy gondolkozás közben kissé elnyújtva mondtam az „*i*"-t és valaki buzgón jegyzi, amit mondok; ő úgy értette, hogy *i* a válasz:

$$\sqrt{-1} = i.$$

Erre a szavamba vág: „akkor már azt is tudom, hogy mennyi $\sqrt{-9}$! Ez akkor

$3i$, vagy $-3i$ is lehet". Hát ebben igaza van: ha $\sqrt{-1} = i$, akkor i az a szám, amelynek négyzete -1:

$$i^2 = -1,$$

és így akár

$$(+3i)^2 = 3i \cdot 3i = 9i^2 = 9 \cdot (-1) = -9,$$

akár

$$(-3i)^2 = (-3i) \cdot (-3i) = 9i^2 = 9 \cdot (-1) = -9.$$

Csak az a baj, hogy ez az i nem létezik, félreértés az egész, sajtóhiba; én igazán nem tudom, hogy mennyi $\sqrt{-1}$.

De ha már elkövettük ezt a sajtóhibát, játszadozzunk el egy kicsit vele, mint az imént $\sqrt{-9}$ kiszámításakor; hátha tud valamit ez a nem létező elem is?

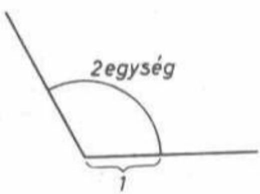
Szédületes dolgokat tud. Őrá épül a függvénytan, a matematika legtiszteltebb, legelőkelőbb ága – ha i-t ki akarják hagyni belőle, külön meg kell mondani, hogy most valós függvénytanról van szó – de nincs olyan ága a matematikának, amely ne fordulna ehhez az i-hez segítségért, éppen amikor valami nagyon mélyet akar mondani, és ebben még a geometria sem kivétel. Arra a törekvésre, hogy egységes rendszerbe foglalhassuk a szétfolyó egyes tételeket, ő teszi fel a koronát.

Csak gyenge ízelítőt adhatok ebből, ebben a képlet nélküli matematikában, hiszen az ideális elemeket igazán a forma élteti.

Például, ha az „i" jel használatát megengedjük, olyan kapcsolatok tárulnak fel egyes függvények közt, amelyekről fogalmunk sem volt azelőtt.

Ki gondolná, hogy a szögfüggvények és a hatványfüggvény közt van valami kapcsolat?

Márpedig be lehet bizonyítani, hogy ha a szöget az egységnyi sugárral belerajzolt körív hosszával mérjük:



akkor például a két egységnyi szög cosinusa (röviden cos 2) így is felírható:

$$\cos 2 = \frac{e^{2i} + e^{-2i}}{2},$$

ahol e a természetes logaritmus alapszáma, és bármekkora szögre hasonló formula igaz:

$$\cos 3 = \frac{e^{3i} + e^{-3i}}{2},$$

$$\cos 4 = \frac{e^{4i} + e^{-4i}}{2}$$

és így tovább.

Már hogy lehet egy szög cosinusa, – azaz két távolság viszonya, ami mégiscsak becsületes valós szám – a jobboldali nem létező számmal egyenlő? Csak úgy, hogy jobboldalt is valós szám van: a kijelölt műveletek elvégzése közben i megjelenik valami képzelt világból, rávilágít az összefüggésre, és ismét eltűnik. A számok kitalálására vonatkozó játékok közt is előfordul ilyenféle jelenség: „Gondolj egy számot, szorozd meg 3-mal, adj hozzá 4-et, az eredményt vedd 2-szer és aztán vond ki a gondolt szám 6-szorosát." Megvárom, míg játszótársam elkészül a feladattal, és ezután semmit sem kérdezek tőle, mégis megmondhatom: „Az eredmény 8 volt!" Ugyanis így lehet jegyezni a menetet: a gondolt szám x, ennek a 3-szorosa 3x, ha 4-et adok hozzá, 3x + 4-et kapok, ezt kell 2-szer venni: 2·(3x + 4) lesz, végre ebből kell kivonni a gondolt szám 6-szorosát, azaz 6x-et:

$$2\cdot(3x + 4) - 6x$$

az eredmény. Szorozzuk meg 2-vel 3x + 4 mindkét tagját:

$$6x + 8 - 6x, \text{ azaz más sorrendben } 8 + 6x - 6x$$

lesz belőle, és ha 8-hoz hozzá is adok 6x-et, de azután ki is vonok belőle ugyanennyit, csak megmarad 8-nak. A gondolt szám bejött a számításba, de ismét el is tűnt belőle.

A szögfüggvények és a hatványfüggvény közötti kapcsolatból olyan összefüggéseket is levezethetünk, amelyekben már látszólag sincs nyoma az i-nek. Számítsuk ki például

$$\cos 2 = \frac{e^{2i} + e^{-2i}}{2}$$

alapján cos 2 négyzetét. Hogy ne kelljen törtekkel bajlódni, előbb vigyük át a jobboldali 2-es osztót a baloldalra szorzóul:

$$2\cdot\cos 2 = e^{2i} + e^{-2i}.$$

Most emeljünk négyzetre. A baloldal négyzete:

$$2\cdot\cos 2\cdot 2\cdot\cos 2 = 2\cdot 2\cdot(\cos 2)^2$$

(van rá okom, hogy most nem akarok tudni arról, hogy 2·2 = 4).

A jobboldal kéttagú összeg, ezt tehát úgy emeljük négyzetre, hogy veszszük az első tag négyzetét, szem előtt tartva, hogy hatványt úgy hatványozunk, hogy a kitevőket szorozzuk:

$$(e^{2l})^2 = e^{4l};$$

azután hozzáadjuk a két tag szorzatának kétszeresét, nem felejtve el, hogy e hatványait úgy szorozhatjuk, hogy a kitevőket összeadjuk és hogy a 0-ik hatvány értéke 1:

$$2 \cdot e^{2l} \cdot e^{-2l} = 2 \cdot e^{2l+(-2l)} = 2 \cdot e^0 = 2 \cdot 1 = 2;$$

végre még hozzáadjuk a második tag négyzetét:

$$(e^{-2l})^2 = e^{-4l}.$$

Tehát a jobboldal négyzete így írható:

$$e^{4l} + 2 + e^{-4l},$$

vagy más sorrendben:

$$e^{4l} + e^{-4l} + 2,$$

és így

$$2 \cdot 2 \cdot (\cos 2)^2 = e^{4l} + e^{-4l} + 2.$$

Most vigyük át az egyik 2-es szorzót osztóul a jobboldalra; az ott levő összeg minden tagját osztani kell 2-vel; 2-t tudjuk osztani vele, ebből 1 lesz, a többi tag osztását csak jelöljük:

$$2 \cdot (\cos 2)^2 = \frac{e^{4l} + e^{-4l}}{2} + 1.$$

De itt egy ismerőssel találkoztunk:

$$\frac{e^{4l} + e^{-4l}}{2}$$

éppen az, amiről azt állítottuk, hogy cos 4-gyel egyenlő. Tehát írjunk helyette cos 4-et:

$$2 \cdot (\cos 2)^2 = \cos 4 + 1,$$

vagy más sorrendben (mert így könnyen azt hihetnők, hogy 4 + 1 cosinusáról, azaz cos 5-ről van szó):

$$2 \cdot (\cos 2)^2 = 1 + \cos 4.$$

Végre vigyük át a második 2-est is osztóul a jobb oldalra:

$$(\cos 2)^2 = \frac{1 + \cos 4}{2}$$

és ez egyike a jól ismert trigonometriai összefüggéseknek; i-nek már nyoma sincs benne. Ez megnyugtathat, hogy nem számoltunk hibásan, újat azonban nem ad. De ha eszünkbe jut, hogy két tag összegét nemcsak négyzetre tudjuk emelni, hanem a binomiális tétel segítségével akárhányadik hatványra is, akkor egy csapásra egy sereg új trigonometriai képletet is vezethetünk le.

Bocsánatot kérek a hosszú számolásért, amelyben egyszerre annyi szabályra kellett emlékezni; azt hiszem, elkerülhetetlen a megértéshez, hogy az ember egyszer maga élje át: hogyan tűnik el ismét i a számításokból, miután friss életet vitt közéjük.

De nem ez a legfontosabb szerepe.

Hogy a másodfokú egyenlet utolsó megoldatlan esetét is elintézte, az természetes, hiszen erre a célra hozták be: az ő segítségével vonunk négyzetgyököt negatív számokból. Igaz, hogy így csak „képzetes" eredményhez jutunk, de az előbbiek talán már meggyőzték az olvasót arról, hogy ezeket sem kell elvetni. Így pl.

$$(x-2)^2=-9$$

megoldása:

$$x-2=\sqrt{-9}$$

és $\sqrt{-9}=3i$, vagy $\sqrt{-9}=-3i$; ha a 2-es kivonandót átvisszük a jobb oldalra összeadandóul, megkapjuk a két „gyököt" (így is hívják az egyenletek megoldásait, hiszen sokszor gyökvonás útján jutunk hozzájuk):

$$x=2+3i,$$

$$\text{vagy } x=2-3i.$$

Ezek olyan számok, amelyek egy valós és egy képzetes részből állnak; az ilyen furcsa összekapcsolását a valódi és az elképzelt világnak „komplex számnak" nevezik. Ha ezek elég lehetetlen számoknak tűnnek is: az összegük már valós, hiszen összeadáskor $+3i$ és $-3i$ kiesik; sőt könnyen belátható, hogy valós a szorzatuk is.

A komplex számok közt ott vannak a valós és a tiszta képzetes számok is; pl. $5+0\cdot i=5$ valós, $0+2i=2i$ tiszta képzetes szám.

Ha negatív számból kell negyedik gyököt vonnunk vagy hatodikat, nyolcadikat és így tovább, ugyanúgy megakadunk, mint a négyzetgyökvonásban: hiszen akár pozitív, akár negatív szám *páros* kitevőjű hatványa mindig pozitív; így például -16 negyedik gyöke sem pozitív, sem negatív számaink közt nem szerepel, mert

$$(+2)^4=2\cdot2\cdot2\cdot2=16$$

$$\text{és } (-2)^4=\underbrace{(-2)\cdot(-2)}\cdot\underbrace{(-2)\cdot(-2)}=(+4)\cdot(+4);$$

ez ugyancsak +16. Azt lehetne hinni, hogy mindezek újabb ideális elemek bevezetését kívánják meg. Szép és meglepő eredmény, hogy erre már nincs szükség: az egyetlen *i* segítségével már ezek is elvégezhetőkké válnak. Sőt azt is be lehet bizonyítani, hogy a komplex számok körében minden akárhányadfokú egyenletnek van megoldása; ezt nevezik az algebra alaptételének. Ez nem ellenkezik Abel eredményével, azzal, hogy már az ötödfokú egyenlet megoldásában meg kell akadnunk: csak ún. „puszta egzisztenciabizonyítás"; az egyenletet kielégítő szám megkeresésére—alapműveletekkel és gyökvonásokkal – nem ad módot.

A négyzetgyökvonás mindig két értéket ad: egy pozitívot és egy negatívot; ezért van a másodfokú egyenletnek mindig két gyöke a komplex számok körében. Azaz hogy mégsem mindig: az

$$(x-3)^2=0$$

egyenletnek csak egy megoldása van, mert az a szám, amelynek négyzete 0 csak maga a 0 lehet, tehát

$$x-3=0,$$

vagyis

$$x=3$$

az egyetlen megoldás. De ennek az egyenletnek a kifejtett alakja:

$$x^2-6x+9=0$$

és ezt az alakot meg lehet közelíteni egyre jobban olyan egyenletekkel, melyekben az itteni 6-ostól és 9-estől egyre kevesebbel eltérő számok szerepelnek, és amelyek mindegyikének 2 gyöke van, csakhogy e két gyök mindig közelebb esik egymáshoz, amint az egyenletek mind hasonlóbbá válnak a mi egyenletünkhöz. Ezért azt mondják, hogy abban a pillanatban, amikor ezek az egyenletek teljesen egyenlővé válnak az

$$x^2-6x+9=0$$

alakkal, a két gyök egybeesik.

Hány gyöke van egy negyedfokú egyenletnek? Az

$$x^4=1$$

egyenletet *i* segítsége nélkül is meg tudják oldani: akár +1-et, akár —1-et emeljük negyedik hatványra, +1-et kapunk, tehát úgy látszik, itt is két gyök van: +1 és —1. De most közbeszól az *i*: „ohó, ez nem rend. Negyedfokú az egyenlet, 4 gyökének kell lenni. Itt vagyok én." És valóban *i*, sőt —*i* is gyökök, mert

$$i^4 = \underbrace{i\cdot i}\cdot\underbrace{i\cdot i} = i^2\cdot i^2 = (-1)\cdot(-1) = +1 \text{ és}$$

$$(-i)^4 = \underbrace{(-i)\cdot(-i)}\cdot\underbrace{(-i)\cdot(-i)} = i^2\cdot i^2 = (-1)\cdot(-1) = +1.$$

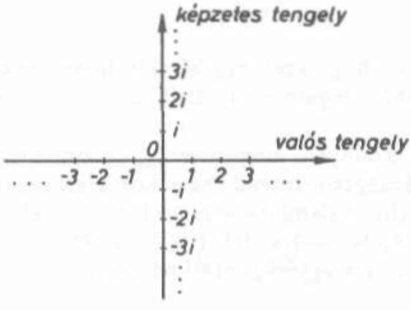
Így teremt i rendet minden egyenlet gyökei közt: be lehet bizonyítani, hogy a komplex számok körében minden egyenletnek annyi gyöke van, ahányadfokú; eltekintve attól, hogy egyes gyökök „egybe is eshetnek".

Ezt adja az „i" az algebrának.

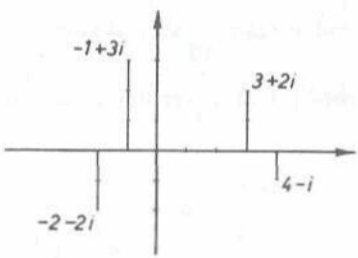
A legtöbbet azonban a függvénytannak adja.

Hogy ebből valami ízelítőt adhassak, előbb ábrázolnom kell a komplex számokat.

Tekintsük az i-t egy újfajta egységnek, amellyel számolunk. Így egy új számvonalon kell ábrázolnunk i többszöröseit. E számvonal 0 pontja egybeeshetik a valós számvonal 0 pontjával, hiszen $0\cdot i$ is 0. Így egészen koordinátarendszer-szerűen helyezkedhetik el a két számvonal:

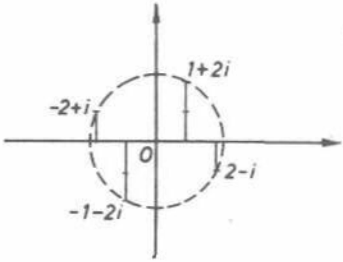


Ez arra indíthat minket, hogy a komplex számokat, amelyek egy valós és egy képzetes részből állnak, a sík pontjaival ábrázoljuk; az x koordináta lesz a valós rész, az y koordináta a képzetes rész. Például néhány komplex szám képe:



A komplex számok tehát már nem számvonalon, hanem számsíkon helyezkednek el.

Egy komplex szám abszolút értékén azt értik, hogy milyen távol van a 0 ponttól. Ez a távolság persze lehet kisebb vagy nagyobb. De ugyanolyan távolságban a 0 ponttól egész serege van a komplex számoknak: ezek egy 0 körüli körön helyezkednek el:



Semmi ok sincs arra, hogy ezek egyikét kisebbnek tekintsük mint a másikat. „Kisebb", „nagyobb" fogalomról tehát szó sem lehet a komplex számok körében.

Mindamellett könnyen meg lehet győződni arról, hogy minden régi műveleti szabály épségben marad, ha a komplex számokkal úgy dolgozunk, mint eddig is: mintha i valami ismeretlen lenne, amelyről csak annyit tudunk, hogy ha valahol i^2 lép fel, -1-et írhatunk helyette.

Most térjünk vissza egy régi eredményünkhöz. A csokoládépéldából ezt nyertük:

$$1\frac{1}{9} = 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \ldots$$

Itt a jobboldalon minden szám $\frac{1}{10}$-szer akkora, mint az előző, $\frac{1}{10}$ a mértani sor „quotiense". Próbáljuk az $1\frac{1}{9}$-et úgy átalakítani, hogy ez az $\frac{1}{10}$ szerepet kapjon benne.

$$1 = \frac{9}{9}, \quad 1\frac{1}{9} = \frac{10}{9};$$

már sokat egyszerűsítettünk, tudjuk, hogy szabad a számlálót és a nevezőt ugyanazzal a számmal osztani; itt osszunk 10-zel, nem törődve azzal, hogy ezt az osztást a nevezőben csak jelölhetjük:

$$1\frac{1}{9}=\frac{1}{\frac{9}{10}}.$$

Ez arra jó, hogy $\frac{9}{10}$ -et már könnyen kifejezhetjük $\frac{1}{10}$ segítségével: egy egész 10 tizedből áll; ebből 1 tizedet elvéve marad éppen $\frac{9}{10}$, tehát

$$\frac{9}{10}=1-\frac{1}{10},$$

és így végül

$$1\frac{1}{9}=\frac{1}{1-\frac{1}{10}}.$$

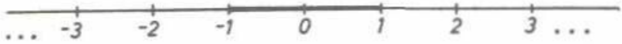
Ha ezt beírjuk a helyére:

$$\frac{1}{1-\frac{1}{10}}=1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\ldots$$

Ebben az alakban általánosítható az eredményünk. Ha nem $\frac{1}{10}$, hanem pl. $\frac{2}{3}$ a mértani sor quotiense, akkor minden következő tag $\frac{2}{3}$-szor akkora, mint az előző, tehát a sor tagjai rendre: 1, $1\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$, $\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$, $\frac{4}{9}\cdot\frac{2}{3}=\frac{8}{27}$ s. í. t., és ekkor is bizonyítható, hogy

$$\frac{1}{1-\frac{2}{3}}=1+\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\frac{8}{27}+\ldots.$$

De vigyázni kell, hiszen láttuk, hogy nem minden mértani sor összegezhető; például $+1$, -1 és ezeknél nagyobb abszolút értékű quotiens mellett nem volt összegezhető a sor. Be lehet bizonyítani, hogy ha még oly kevéssel is esik közelebb a quotiens 0-hoz, mint 1, már konvergens a sor, és az összegét úgy lehet felírni, mint $\frac{1}{10}$ és $\frac{2}{3}$ esetén. Tehát mindazok a quotiensek, amelyek mellett így összegezhetjük a sort, a számvonalon -1 és $+1$ közé esnek:



Ha az ideeső sok szám közül egyet gondolok, de nem mondom meg, melyiket, akkor ezt x-nek nevezhetem. Így, ismeretlenül is el lehet mondani róla, hogy a vele megalkotott mértani sor tagjai:

$$1,\quad 1\cdot x = x,\quad x\cdot x = x^2,\quad x^2\cdot x = x\cdot x\cdot x = x^3,$$
$$x^3\cdot x = x\cdot x\cdot x\cdot x = x^4, \ldots$$

és hogy erre a mértani sorra is igaz, hogy

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots.$$

Ez biztosan igaz lesz, bármi is x, hacsak arra ügyelek, hogy beleessék a -1-től $+1$-ig terjedő számközbe.

$\frac{1}{1-x}$ értéke természetesen függ attól, hogy x milyen számot jelent, tehát függvénye x-nek. Azt szokás mondani, hogy mi itt ezt a függvényt „hatványsorba" fejtettük: x növekedő hatványaiból álló végtelen sorba. Ennek a részletösszegei közelítik meg egyre jobban $\frac{1}{1-x}$ értékét: első, durva közelítésben még 1-et is mondhatok $\frac{1}{1-x}$ helyett, $1+x$ már jobb közelítés, $1+x+$ $+x^2$ még jobb s. í. t. Általában felvethető a kérdés: lehet-e egy adott függvényt hatványsorba fejteni (persze általában nem az előbbivel azonos sort várunk, hanem olyat, amelyben x hatványai bizonyos számokkal szorozva szerepelnek)? Ez döntő fontosságú kérdés a függvénytanban. Mert az $\frac{1}{1-x}$ függvény még elég egyszerű, ha x adott szám, könnyen kiszámítható az értéke. De például a hatványt, mint a kitevő függvényét ugyancsak sikerült hatványsorba fejteni, méghozzá legegyszerűbben akkor, amikor az alap az a bizonyos $e = 2.71\ldots$ Ezt a sort kapták: bármilyen szám is x,

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!} \cdot x^2 + \frac{1}{3!} \cdot x^3 + \frac{1}{4!} \cdot x^4 + \ldots,$$

ahol – talán nem felejtettük még el –

$$2! = 1 \cdot 2, \quad 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3, \quad 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4,$$

és így tovább.

Ez már nagy segítségünkre van e^x értékeinek kiszámításában, amikor x helyére határozott számokat írunk. Az e irracionális végtelen tizedesszámot hatványozni nem nagy mulatság. De ha x kicsi, akkor már $1 + x$ is jó közelítés lesz helyette és ennek értékét kiszámítani: az adott számot 1-hez hozzáadni, igazán gyerekjáték. Ha nagyobb pontosság kell, hát hosszabb részletösszeget veszünk, ilyenkor már az adott szám néhány hatványát is ki kell számítani, de igazán egyszerűbb dolog pl. $x = \frac{3}{10}$-et négyzetre, köbre, negyedik hatványra emelni, mint 10-ik gyököt vonni a $(2{,}71\ldots)^3$ irracionális számból; hiszen $(2{,}71\ldots)^{\frac{3}{10}}$ ezt jelenti.

Jó, hogy ez a kifejtés minden x-re igaz.

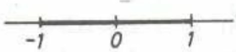
A szögfüggvényeket és a logaritmusfüggvényt is sorba lehet fejteni, és ma már a sorok alapján készülnek a táblázatok.

De e sorok már nem valamennyien konvergensek minden x esetén, erre nagyon kell vigyázni, nehogy akkor is állítólagos közelítő értékkel pótoljunk valamit, amikor szó sincs közelítésről. Tehát felvetődik a kérdés: ha van egy függvényem, hogyan ismerhető fel erről, hogy milyen x-ekre lesz hatványsorba fejthető?

Nézzük meg újra a mértani sorunkat. Azt mondtuk, hogy az

$$\frac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots$$

kifejtés a



—1-től +1-ig terjedő számközben érvényes. Meglátszik-e $\frac{1}{1-x}$-en, hogy éppen 1 (a 0 másik oldalán aztán ugyanannyi) lesz a határ?

De meg ám! Mi volna, ha itt x 1-et jelentene?

$$\frac{1}{1-1}=\frac{1}{0},$$

még leírni is rossz: itt az örök tilalomfa, a 0-val való osztás! Ha rá se nézünk a sorra, már maga a függvény is megállj!-t parancsol az 1 pontban.

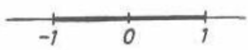
Mindig ilyen határozottan elárulja a függvény, hogy meddig mehetünk? A valós számok körében nem. Sok bajlódást okozott ez egyes függvényeknél. Itt volt az ideje, hogy *i* beavatkozzék, és ő azután teljes világosságot derített erre a kérdésre.

Lássunk erre egy példát.

Aki csak egy kevéssé is járatos a formulák kezelésében, az mértani sorunkból egy pillanat alatt kiolvashatja, hogy az $\frac{1}{1+x^2}$ függvény a következő hatványsorba fejthető:

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+\ldots$$

és ez a sor szintén akkor és csak akkor konvergens, ha x —1 és +1 közé esik:



Vajon itt is elárulja-e a függvény ezeket a határokat?

Írjunk x helyébe +1-et:

$$\frac{1}{1+1^2}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}, \text{ semmi baj.}$$

Talán a másik határon van a hiba; írjunk x helyébe —1-et:

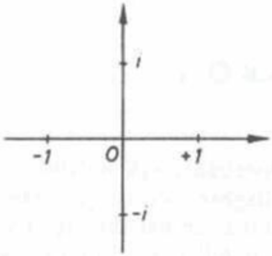
$$\frac{1}{1+(-1)^2}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}, \text{ itt sincs semmi baj.}$$

Most aztán zavarban vagyunk.

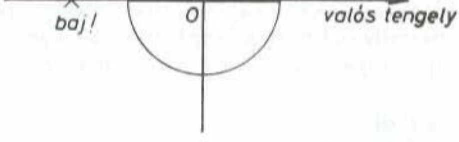
Ekkor jelentkezik *i*: „Miért nem írsz x helyére engem?" Próbáljuk meg:

$$\frac{1}{1+i^2}=\frac{1}{1+(-1)}=\frac{1}{0},$$

állj! – ez már 0-val való osztás. Ha a komplex számsíkra gondolunk, rögtön látjuk, hogy *i* is egységnyi távolságban van a 0 ponttól, és hogy egy ilyen pontban van baj a függvénnyel, az elárulja, hogy az egységnyi határok közül nem szabad kimerészkedni:



Tehát nemcsak a valósban: komplex helyeken is célszerű vizsgálni egy függvény értékét. És teljes általánosságban igaz, hogy ha csak egyetlen pontban baj van a függvény körül, akkor annál a pontnál távolabb 0-tól már nem lehet hatványsorba fejthető. Tehát meg kell keresnünk a komplex számsíkon a 0 ponthoz legközelebb eső olyan pontot, amelyben baj van, idáig terjed az a körzet, amin belül hatványsorba fejthetjük a függvényt:



Így egy kört kapunk a 0 pont körül, ennek a belsejében konvergens a sor, esetleg a kerület egyes pontjain is, de azon túl biztosan nem. Egy ilyen kör pedig mindig egy 0 körüli számközt vág ki a valós tengelyből; az ábrán ezt jelöltem vastagon.

i tehát ismét jött, mindent rendbehozott, s ha akarjuk, ismét eltűnik: szorítkozhatunk erre a valós számközre, amelyet ő határolt körül pontosan. De az elbűvölt matematikus most már nem engedi távozni. Ha ennyit tud, már nem is lehet nem létezőnek tekinteni. Érdemes bejárni a komplex függvénytant, ezt a „semmiből alkotott világot", ahol mégis nagyobb a rend, mint a valóságos világban.

16. MŰHELYTITKOK

Ha az ember már felocsúdott egy műalkotás első ráhatásából, felébred benne a kíváncsiság az e világban való dolgok iránt; szeretné tudni, hogy jött létre a remekmű, mi az, ami az emberi benne: a verejték, az aprólékos pepecselés. Szeretne egy kicsit bepillantani a műhelybe is.

Térjünk vissza mi is az elképzelt világokból, és lessük el a matematikus műhelytitkait. Azt az aprólékos bíbelődést, amitől meg akartam kímélni az olvasót, de egészen nem rejthetem el a szeme elől; hiszen az az író, aki ezt a könyvet elindította, éppen a differenciálhányadosra volt kíváncsi, és a differenciálhányados idetartozik: a matematikus technikai kelléktárába. Ha ez nem is olyan csillogó tárgy, mint az eddigiek, a jelentősége rendkívül nagy: nincs műalkotás pepecselés nélkül.

Kezdettől fogva arról volt szó, hogy a függvényfogalom az egész matematikai mű gerince, a függvényről pedig a hozzá tartozó görbe ad képet. De ez a kép szükségszerűen tökéletlen. Egyenesdarabokból raktuk össze a görbét, ezeket igyekeztünk mindjobban sűríteni, hogy kisimuljon, de már az első simítások után egybeolvadtak a ceruzavonalak; a rajzunkon egy 16 oldalú sokszöget már szinte meg sem tudtunk különböztetni a körtől. Senki sem hiheti, hogy egy ilyen hozzávetőleges képből komoly törvényszerűségeket lehetne kiolvasni függvényeinkkel kapcsolatban. Valami precíziós eszközre van szükség, amely bármilyen finom kilengéseket is megérez, bármilyen pontosságig követni tudja a függvény menetét. Ilyen precíziós eszköz a differenciálhányados.

Induljunk ki a rajzból.

Amikor a paraboláról próbáltam képet adni, azt mondtam, hogy a szárai egyre meredekebbé válnak. De hogy lehet egy sima görbe irányáról beszélni? Azt még tudom, hogy az egyenes irányán mit kell érteni, hiszen az emelkedését akármelyik pontjában újra, meg újra ellenőrizhetem, benne meg lehet bízni: az egyszer felvett iránytól soha többet el nem tér. De azért görbe a görbe, hogy az irányát folyton változtassa. Megfogom egy pontban: „Itt mi az irányod?"

De ő sima és kicsúszik a kezemből, nem ad határozott feleletet. Pedig mégis érzem, hogy van neki ebben a pontban is valami határozott iránya; nem volt értelem nélkül való, amikor a parabola meredekségéről beszéltem.

Pergessük egy kicsit visszafelé a filmet, oda, ahol még nem volt ilyen sima a görbe. Egy ilyen képén válasszuk ki egy meghatározott pontját:

A megjelölt pontban még „könyök" volt: itt biztos, hogy nem volt még határozott iránya. Előtte ilyen:

volt az irány, utána ilyen:

magában a pontban éppen irányt váltott a vonal. Most forgassuk lassan előre a filmet, oda, ahol már több közbülső pontot vettünk fel:

Itt már jóval kevésbé éles a könyök:

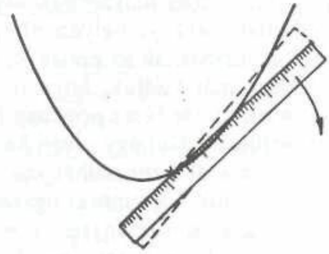
a pontunkban összefutó két irány már alig tér el egymástól.

Rajzzal én már nem is tudom tovább kísérni, hogy mi lesz, ha még több közbülső pont szerepel; mindenki el tudja képzelni, hogy a könyök egyre jobban kisimul, és akkor a pont előtti és pont utáni irány egyre kevesebbel fog különbözni. Azt a közös irányt kellene a görbe irányának tekinteni e pontban, amihez a könyök szárai mindjobban közelednek, amíg a könyök kisimul.

Ha beláttuk, hogy ezek egy közös irányhoz közelednek, akkor elég lesz, ha csak az egyikükkel foglalkozunk.

Vegyük például a pont utáni egyenesdarabokat. Az irányuk jobban látszik, ha meghosszabbítjuk őket:

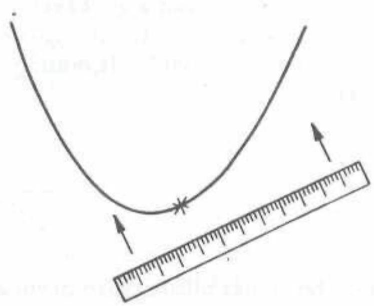
Így sorra a görbevonal egy-egy szelőjét kapjuk. Amint a beosztás sűrűbb lesz, a szomszédos pont egyre közelebb jut a mi pontunkhoz, és a szelőnek mind rövidebb darabja esik a görbe belsejébe. Jól megfigyelhetjük, hogy mi történik, ha a szelőt egy vonalzóval helyettesítjük és ezt forgatjuk kifelé, egy pontját állandóan leszorítva a mi pontunkra:



Lesz egy pillanat, amikor a szomszédos pont éppen beleesik a mi pontunkba, a vonalzó elpattan a görbétől:

A szelőből érintő lett:

Úgy érezzük, hogy ebben a pillanatban fogtuk meg azt az irányt, amihez a könyök felső szára közeledik. Ha egy ilyen irányú vonalzóval kívülről közelednénk a görbe felé, akkor a vonalzó éppen a mi pontunkban érne a görbéhez, itt egy pillanatra összesimulna vele, s ha összesimulnak, egy az irányuk. Mi pedig ab-



ban a kényelmes helyzetben vagyunk, hogy ezt az irányt nem kell az összesimulásnak parányi helyén vizsgálnunk: az egyenes a végtelenségig megőrzi ennek a pillanatnak az emlékét, mindvégig ugyanez marad az iránya.

Most már tudjuk, hogy mit értsünk egy sima görbe irányán egy adott pontjában: a kérdéses pontban húzott érintő irányát. És ezt tökéletesen jellemezhetjük például egy olyan hányadossal, amivel a lejtő emelkedését fejeztük ki. Ez lesz a differenciálhányados.

Az érintő fogalmával egyszer már találkoztunk: amikor tisztán algebrai úton arra az eredményre jutottunk, hogy egy kúpszeletnek egy egyenessel 0, 1 vagy 2 közös pontja van, és azt mondtuk, hogy ha egy közös pontjuk van, akkor az egyenes érinti a kúpszeletet. A kúpszeletekre ez így igaz is; de egyáltalán nem az a döntő érintőtulajdonság, hogy egyetlen közös pontja legyen a szóban forgó egyenesnek a görbével. Ha például még könyöke van egy görbének:

az ezen átmenő egyenest a rajzon egyáltalán nem tekinthetjük érintőnek, ha csak egyetlen közös pontja van is a görbével; itt szó sincs arról, hogy ez irányt jelezne. E pontban nincs is egyértelmű iránya a görbének, de a mi egyenesünk még csak a bal vagy a jobb oldali irányt sem jelzi.

Másrészt ennek az egyenesnek:

két közös pontja van a görbével, *az első pontban* mégis érintőnek kell tekintenünk, olyan szépen simul a görbéhez.

Még az sem döntő tulajdonság, hogy: érintő érint, szelő szel. Mert például ez az egyenes:

az összesimulás pillanatában orvul át is szeli a görbét. De azért kifogástalanul simul mind az alsó, mind a felső ághoz; semmi okunk sincs arra, hogy ne tekintsük érintőnek.

Egyedül az dönt, hogy egyre közeledő szomszédos pontokon átmenő szelők elpattanásakor jutunk-e a szóban forgó egyeneshez. A két utóbbi esetben ez így van; tessék vonalzóforgatással kipróbálni.

Ha tehát egy érintő irányát akarjuk meghatározni, általában nem kerülhetjük el a bíbelődést az egyre jobban közeledő szelőkkel.

Persze eszünkbe sem jut, hogy a vonalzóforgatást pontos módszernek tekintsük. Ha valami komoly törvényszerűség megállapításához volna szükségünk a görbe irányának ismeretére, nem mernénk egy vonalzóforgatással kapott eredménnyel előállni. A precíziós módszert nem várhatjuk a rajztól, csak a számolástól.*

Egy határozott példából indulok ki: az

$$y = x^2$$

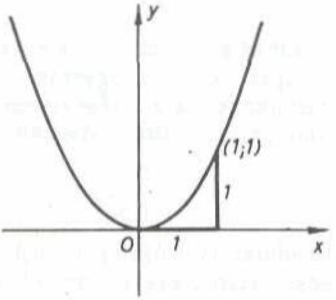
egyenlettel megadott függvény menetét szeretném követni. Már tudjuk, hogy ennek a képe parabola; állapítsuk meg teljes pontossággal, hogy milyen irányú e parabola érintője abban a pontban, melynek x koordinátája 1.

E pontban az y koordináta:

$$y = 1^2 = 1,$$

tehát parabolánk az (1; 1) ponton megy át; az (1; 1) pontban húzott érintő irányát keressük.

A görbe képe már jó ismerősünk:



* Aki nem kíváncsi a differenciálhányados és az integrál fogalmára, a babramunkát pedig unja, az kivételesen át is lapozhatja a fejezet hátralevő részét és a következő fejezetet.

Tudjuk, hogy mi a teendőnk: fel kell vennünk a görbén az (1 ; 1) ponthoz egyre közelebb eső szomszédos pontokat, az (1 ; 1) ponton és egy-egy ilyen szomszédján át szelőt kell húznunk, meg kell állapítanunk e szelők irányát – például egy olyan hányados alakjában, ahogyan a vasúti töltés emelkedését fejeztük ki – és aztán meg kell néznünk, hogy mihez közelednek ezek az irányok, amíg a szelők az elpattanáshoz közelednek.

Úgy fogjuk felvenni a szomszédos pontokat, hogy az (1 ; 1) ponttól előbb 1 egységgel, azután 1 tized, majd 1 század, 1 ezred egységgel megyünk jobbra és így tovább. Tehát a szomszédos pontok x koordinátái rendre:

$$1+1=2, \quad 1{,}1, \quad 1{,}01, \quad 1{,}001, \ldots$$

lesznek. Ezeknek a pontoknak az y koordinátáit is ki kell számítani, $y=x^2$ miatt négyzetre emeléssel; ez könnyű lesz, mert 2^2 persze 4, és még a Pascal-háromszög második sorából emlékezhetünk arra (a közbeszúrt 0 jegyektől és a tizedesvesszőtől eltekintve, de ezek is előfordultak már), hogy

$$1{,}1^2=1{,}21, \quad 1{,}01^2=1{,}0201, \quad 1{,}001^2=1{,}002001, \ldots$$

Még valamit előrebocsátok, nehogy a babramunka fontosabb meggondolások közben tartson fel minket: már igen sokat egyszerűsítettünk és így tudjuk, hogy szabad a tört számlálóját és nevezőjét ugyanazzal a számmal osztani. De ha például 2-vel egyszerűsítve

$$\frac{6}{8}=\frac{3}{4},$$

akkor fordítva is:

$$\frac{3}{4}=\frac{6}{8},$$

vagyis megszorozni is szabad a számlálót és a nevezőt 2-vel, általában ugyanazzal a számmal. Ettől ugyan kevésbé egyszerű lett itt a tört alakja, de jó hasznát vesszük e tudásunknak, ha pl. tizedesszámok szerepelnek a törtben, pl. ha ilyen kényelmetlen osztással állunk szemben:

$$\frac{0{,}21}{0{,}1}.$$

Hiszen tudjuk, hogy tizedesszámot úgy szorozhatunk 10-zel, hogy egy hellyel jobbra visszük a tizedesvesszőt; egész szám elejére pedig felesleges 0-kat írni, tehát itt a számlálót és a nevezőt 10-zel szorozva

$$\frac{0{,}21}{0{,}1}=\frac{2{,}1}{1}=2{,}1\text{-et}$$

kapunk. Ugyanígy lesz

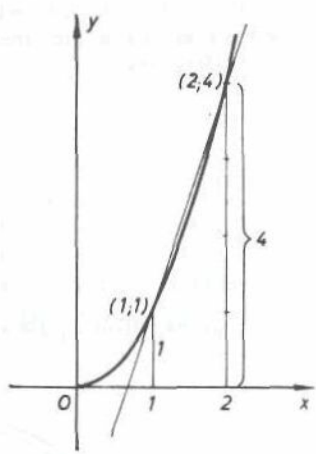
$$\frac{0{,}0201}{0{,}01}\text{-}$$

ból, ha 100-zal szorozzuk a számlálót és a nevezőt,

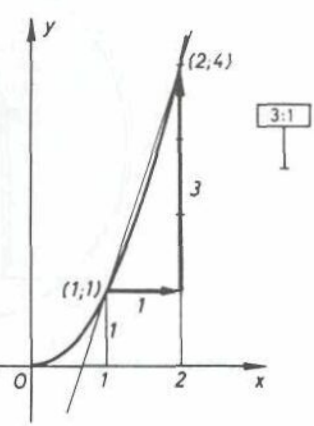
$$\frac{0{,}02\,01}{0{,}01} = \frac{2{,}01}{1} = 2{,}01,$$

és így tovább.

Most már hozzáfoghatunk. Az első szomszédosnak szánt pont x koordinátája 2, y koordinátája $2^2 = 4$, az (1; 1) ponton és ezen a (2; 4) ponton át húzzuk az első szelőt:



Először ennek a szelőnek az irányát akarjuk megállapítani. Világos, hogy az (1; 1) ponttól 1 egységgel haladtunk jobbra – ennyi az x koordináták különbsége – és 3 egységgel fölfelé, mert ennyivel nőtt a második pont y koordinátája a mi pontunk feje fölé: ennyi a két y koordináta különbsége. Ezt még egy ábrán tüntetem fel, vastagítva:



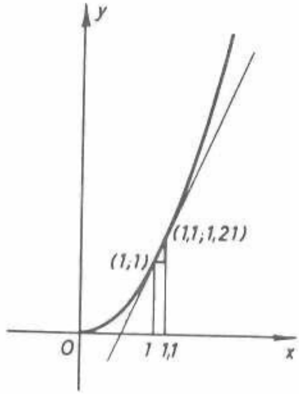
Tehát az első szelő emelkedése:

$$3:1,$$

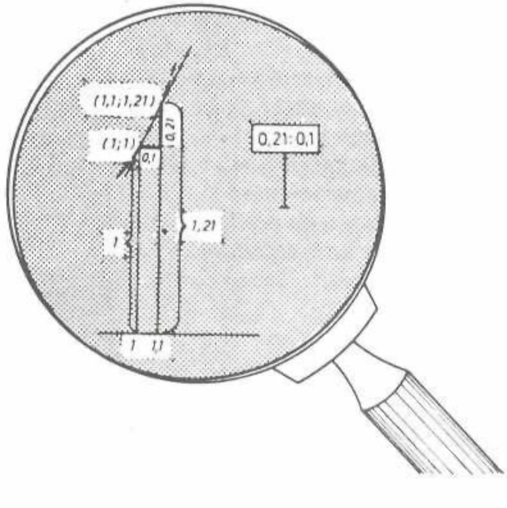
azaz

$$\frac{3}{1} = 3 = \underline{\underline{2+1}} \text{ (nem ok nélkül írom így).}$$

Most vegyük a következő szomszédos pontot: itt $x = 1{,}1$, és előre kiszámítottam, hogy $y = 1{,}1^2 = 1{,}21$, tehát itt az $(1{,}1; 1{,}21)$ pontról van szó. Ha a mi pontunkon és ezen át próbálok szelőt húzni, ismét megvastagítva az emelkedését, itt a pici méretek már összeolvadni látszanak:



Helyezzük nagyítóüveg alá a rajz szóban forgó darabját:



Mennyivel mentünk itt jobbra? 0,1-del, ennyi az x koordináták különbsége. Mennyivel nőtt a második pont y koordinátája a mi pontunk feje fölé? Annyival, amennyi a két y koordináta különbsége, azaz

$$1{,}21 - 1 = 0{,}21$$

egységgel. Tehát a második szelő emelkedése:

$$0{,}21 : 0{,}1,$$

azaz

$$\frac{0{,}21}{0{,}1}$$

és már előrebocsátottam, hogy ez annyi, mint

$$\underline{\underline{2{,}1 = 2 + \frac{1}{10}}}.$$

Ha a következő szomszédos pontra térünk át, amelyben $x = 0{,}01$ és – amint előre kiszámítottam – $y = 1{,}01^2 = 1{,}0201$, még jóval erősebb nagyításra volna szükség, de talán már függetleníthetjük magunkat a rajztól, hiszen már észrevehettük, hogy mindig az y koordináták különbségét kell osztani az x koordináták különbségével. E pontban és az eredeti (1; 1) pontban az y koordináták különbsége

$$1{,}0201 - 1 = 0{,}0201,$$

az x koordinátáké

$$1{,}01 - 1 = 0{,}01,$$

tehát a harmadik szelő emelkedése:

$$0{,}0201 : 0{,}01,$$

azaz

$$\frac{0{,}0201}{0{,}01}$$

és erről előrebocsátottam, hogy ugyanannyi, mint

$$\underline{\underline{2{,}01 = 2 + \frac{1}{100}}}.$$

Ugyanígy mehetünk tovább és azt kapjuk, hogy az y-különbségek és az x-különbségek hányadosai – röviden, a „különbségi hányadosok" –, melyek az elpattanáshoz egyre jobban közeledő szelők emelkedéseit szolgáltatják, sorra

$$2+1,\quad 2+\frac{1}{10},\quad 2+\frac{1}{100},\quad 2+\frac{1}{1000},\ \ldots$$

értékűek.

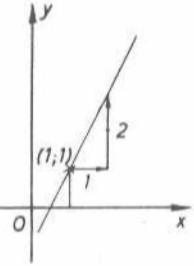
Azt már tudjuk, hogy az

$$1,\quad \frac{1}{10},\quad \frac{1}{100},\quad \frac{1}{1000},\ \ldots$$

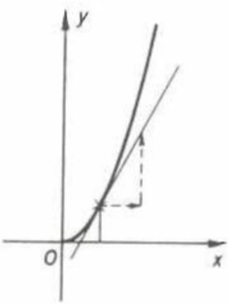
sorozat a csokoládépélda pontosságával 0-hoz konvergál, tehát teljes pontossággal

$$\underline{\underline{2}}$$

az a szám, amelyet ezek az emelkedések mindjobban megközelítenek. Márpedig az elpattanó szelő az érintő, tehát a parabola (1 ; 1) pontjában húzott érintő emelkedése 2, vagyis $\frac{2}{1}$. Ennek alapján meg is rajzolhatjuk ezt az érintőt:



és ha megszerkesztjük mellette a parabolát sok-sok közbülső érték segítségével, meg is lesz az az érzésünk, hogy ez az egyenes érinti:



Tehát amíg pontatlanul rajzolgattunk, melléktermékként egy egészen pontos számolási eljárás is hullott az ölünkbe az érintő irányának meghatározására: fel kell venni a pontunk szomszédságában egy másik pontot a görbén; a két pont y koordinátáinak különbségét el kell osztani az x koordináták különbségével és meg kell nézni, hogy mihez közelednek az így nyert hányadosok, amíg a szomszédos pont a mi pontunkhoz közeledik.

„Különbség" idegen szóval „differencia", ezért a különbségi hányadost differenciahányadosnak is nevezik, és azt a határozott értéket, amelyhez a differenciahányadosok közelednek, differenciálhányadosnak. A differenciálás tehát az, aminek beharangoztam: precíziós számolási eljárás a sima görbe érintőinek meghatározására és így egyszersmind a görbe egész menetének megvizsgálására is.

Mert más pontokban ugyanígy alkalmazható ez az eljárás: ha sima a görbe, minden pontjában van egy határozott elpattanási irány. Az (1; 1)-nél magasabban fekvő (2; 4) pontban már meredekebbnek érezzük a parabolát; ha az ehhez közeledő

$$x = 2+1,\quad 2{,}1,\quad 2{,}01,\quad 2{,}001, \ldots\text{-}$$

hez tartozó pontokban számítjuk ki a különbségi hányadosokat, sorra

$$4+1,\quad 4+\frac{1}{10},\quad 4+\frac{1}{100},\quad 4+\frac{1}{1000},\ldots$$

eredményt kapunk, és teljes pontossággal 4 az a szám, amelyet ezek mindjobban megközelítenek, tehát a (2; 4) pontban az érintő emelkedése $4 = \frac{4}{1}$, és ez valóban több, mint az (1; 1) pontban húzott érintő $2 = \frac{2}{1}$ emelkedése.

Hasonlóan mutatható ki, hogy a parabola $x = 3$-hoz tartozó pontjában 6, az $x = 4$-hez tartozó pontban 8 az érintő emelkedése; általában a parabola minden pontjában kétannyi, mint a szóban forgó pont x koordinátája. Ez az, amit úgy fejeznek ki, hogy az

$$y = x^2$$

függvény differenciálhányadosa – bármi legyen is x értéke –

$$\underline{\underline{2x.}}$$

És ezzel csakugyan a kezünkben van a parabola egész menete.

Hogy valami fix kiindulásunk legyen, azt az egyet még a függvényegyenletből olvassuk ki, hogy a parabola átmegy a 0 ponton, mert ha $x = 0$, akkor $y = x^2 = 0^2 = 0$. A többit már a differenciálhányados árulja el.

Legyen pl. x valami negatív szám. Akkor a 2-szerese, 2x, ugyancsak negatív, vagyis az érintő emelkedése negatív: egy ilyen pontban lefelé halad az érintő és így egyszersmind a hozzá simuló görbe is. Ha pedig x pozitív, akkor a kétszerese is az: az ilyen pontban emelkedik a görbe. Ha x = 0, akkor a kétszerese, 2x is 0, tehát a 0 pontban 0 emelkedésű érintője van a görbének, a 0 emelkedésű lejtő pedig maga a vízszintes út; itt éppen maga az x tengely. Amint x abszolút értéke nő, a kétszerese is mind nagyobbá válik, és ezzel az érintő meredeksége is.

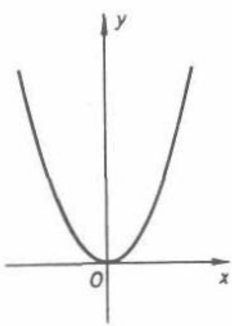
Mindezek a következő képet adják a görbéről: a 0 ponttól balra lefelé halad ez a görbe, a 0 pontban egy pillanatra vízszintessé válik, hozzásimul az x tengelyhez, innen kezdve azután emelkedik. Tehát a 0 pontban van a legmélyebb pontja. A 0 ponttól távolodva mindkét szára egyre meredekebbé lesz. – Mindezt már tudtuk is a parabolánkról; kevésbé ismert függvény esetén a differenciálhányados világosíthatott volna fel ezekről.

De a paraboláról való tudásunkat is tovább csiszolja a differenciálhányados ismerete:

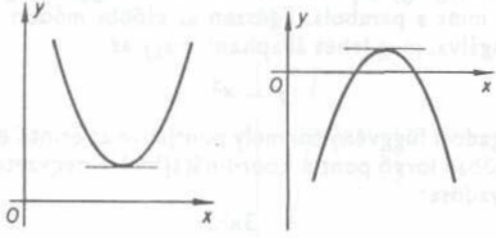
$$2x\text{-}$$

ről, a szorzatfüggvényről már a legelső lázgörbék megrajzolásakor is láttuk, hogy egyenes a képe (ez természetes is, hiszen elsőfokú); tehát ez a függvény egyenletesen növekszik. Ennélfogva a parabola szárainak meredeksége növekszik ugyan, de nem kapkodva, nem egyre rohamosabban, hanem csak szép egyenletesen.

Persze a parabola is kerülhet a szokott



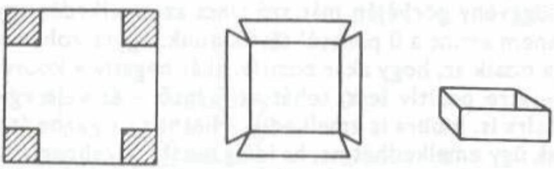
helyzettől eltérő pozíciókba is, pl. ilyenekbe:



és ilyenkor már probléma lehet, hogy hová esik a legmélyebb, illetőleg legmagasabb pontja. A differenciálhányados ezt rögtön kitapintja, hiszen most is ott vízszintes a parabola érintője.

Az ilyen legmélyebb vagy legmagasabb pontok keresése, vagy a függvény nyelvére átfogalmazva, egy függvény minimumának, illetőleg maximumának meghatározása a legváltozatosabb alkalmazásokra ad módot.

Például egy négyzetlapból dobozt akarunk készíteni úgy, hogy négy sarkából egy-egy kicsi négyzetet vágunk ki és a csonka részleteket felfelé hajlítjuk:



Az a kérdés, hogy mekkora darabokat vágjunk ki, ha maximális befogadóképességű dobozt akarunk kapni.

A kicsi négyzet oldalát nem ismerem, ezért x-nek nevezem. Igen könnyű feladat megállapítani, hogy a doboz köbtartalma hogyan függ x választásától. Az bizonyos, hogy ha x kicsi, azaz keveset vágunk le, akkor széles, de alacsony dobozunk lesz, ha pedig nagy négyzeteket vágunk le, azaz kisebb alapot hagyunk, akkor magasabb, de szűkebb lesz a doboz. Tehát x-et se túlságosan kicsinek, se túlságosan nagynak nem szabad választani, valahol középütt lesz az igazság. A differenciálhányados teljes pontossággal kitapintja, hogy akkor lesz maximális térfogatú dobozunk, ha a kicsi négyzet oldala a nagy négyzet oldalának kerek $\frac{1}{6}$ része.

Repül a nehéz kő, mi tudjuk hol áll meg, mert a differenciálhányados pontosan megérzi: hol az elhajított test pályájának a legmagasabb pontja.

Se szeri, se száma az alkalmazásoknak.

Vizsgáljunk meg egy olyan esetet, amikor a függvény görbéje nem olyan jó ismerősünk, mint a parabola. Egészen az előbbi módon, a különbségi hányadosokat vizsgálva, meg lehet állapítani, hogy az

$$y = x^3$$

egyenlettel megadott függvény bármely pontjában az érintő emelkedése 3-szor annyi, mint a szóban forgó pont x koordinátájának a négyzete, azaz e függvény differenciálhányadosa:

$$\underline{\underline{3x^2}}.$$

Mit lehet ebből kiolvasni?

Hogy valamiből kiindulhassunk, itt is magából a függvényből olvassuk ki, hogy

$$\text{ha } x = 0, \text{ akkor } y = 0^3 = 0,$$

tehát ez a görbe is átmegy a 0 ponton.

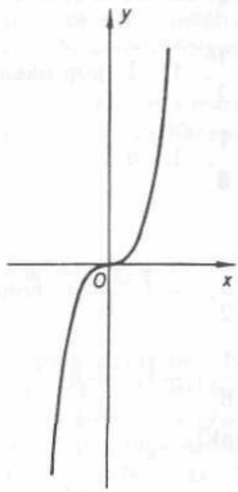
Most már hallgassuk meg a differenciálhányadost.

Ezen most az a feltűnő, hogy x a négyzeten szerepel benne (az ő saját képe parabola). Ebből két következtetést is levonhatunk: az egyik az, hogy az $y = x^3$ függvény görbéjén már szó sincs az emelkedés egyenletes növekedéséről, hanem amint a 0 ponttól távolodunk, egyre rohamosabban nő a meredekség; a másik az, hogy akár pozitív, akár negatív x koordinátákat nézünk, x^2 mindenesetre pozitív lesz, tehát az érintő – és vele együtt a görbe – a 0 ponttól balra is, jobbra is emelkedik. Minthogy a görbe átmegy a 0 ponton, ez előtt csak úgy emelkedhetett, ha idáig 0-nál mélyebben vonult, az x tengely alatt. A 0 pont után e magasság fölé emelkedik a görbe, tehát a 0 ponton átszeli az x tengelyt. Azonban,

$$\text{ha } x = 0, \text{ akkor } 3x^2 = 3 \cdot 0^2 = 3 \cdot 0 = 0,$$

tehát a 0 pontban 0 az érintő emelkedése, azaz itt vízszintes az érintő. A 0 ponton átmenő vízszintes ismét maga az x tengely. Az x tengely tehát érinti is a görbénket ugyanott, ahol átszeli: a 0 pontban. Ehhez közeledve balról egyre lanyhább az emelkedés, itt egy pillanatra megpihen a görbe, majd új erőre kapva ismét emelkedni kezd, előbb csak lassan, majd mind merészebben.

Mindezek alapján a következő kép alakul ki bennünk a görbéről:



Most ábrázoljuk az

$$y = x^3$$

függvényt.

$$\begin{aligned}
\text{Ha } x &= 0, \text{ akkor } y = 0^3 = 0\\
\text{Ha } x &= 1, \text{ akkor } y = 1^3 = 1\\
\text{Ha } x &= 2, \text{ akkor } y = 2^3 = 8\\
\text{Ha } x &= -1, \text{ akkor } y = (-1)^3 = -1\\
\text{Ha } x &= -2, \text{ akkor } y = (-2)^3 = -8,
\end{aligned}$$

és néhány közbülső helyen:

$$\text{Ha } x = \frac{1}{2}, \text{ akkor } y = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1\cdot1\cdot1}{2\cdot2\cdot2} = \frac{1}{8}$$

$$\text{Ha } x = -\frac{1}{2}, \text{akkor } y = \left(-\frac{1}{2}\right)^3 = -\frac{1}{8}$$

$$\text{Ha } x = \frac{1}{4}, \text{ akkor } y = \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1\cdot1\cdot1}{4\cdot4\cdot4} = \frac{1}{64},$$

$\frac{1}{64}$ ábrázolására pedig már egy ceruzával tett pont is túlságosan magas volna;

rajzunkon az a látszat, hogy már itt az x tengelyhez simul a görbe (a differenciálhányados finomabb vizsgálata ezt az erősebb simulást is elárulja).
Tehát a

$$0, \ \frac{1}{2}, \ 1, \ 2 \quad \text{pontokban sorra}$$

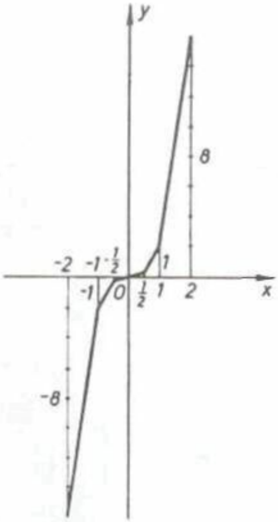
$$0, \ \frac{1}{8}, \ 1, \ 8$$

egységet felfelé, és a

$$-\frac{1}{2}, \ -1, \ -2 \quad \text{pontokban}$$

$$-\frac{1}{8}, \ -1, \ -8$$

egységet lefelé kell mérnünk:



Ez csakugyan az a kép, amelyet a differenciálhányados előre megérzett. A közbülső helyeken sem lehet a legkisebb kilengés sem, mert a differenciálhányados azt is elárulta volna. És természetesen nemcsak a hozzávetőleges képet érzi meg, hanem minden pontban teljes pontossággal kitapintja a görbe irányát.

Nem csoda, hogy a matematikusok sorra meghatározták a szóba jöhető függvények differenciálhányadosait, és annyit dolgoztak ezekkel, hogy oda-vissza könyv nélkül fújják valamennyit.

Ha pedig a fizikus fordul egy függvényért a matematika kelléktárához, a matematikus a függvénnyel együtt átnyújtja a differenciálhányadost is, mintegy pontos használati utasítás gyanánt.

17. SOK KICSI SOKRA MEGY

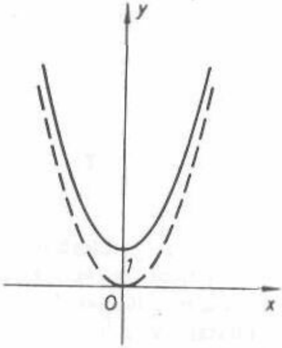
Már annyi szorzással volt dolgunk az életben, hogy az egyszeregyet betéve tudjuk oda-vissza, és így a fordított műveletben is egy pillanat alatt ráismerünk arra, hogy 5 volt az a szám, amelyet 4-gyel szorozva 20-at kaptunk eredményül. A matematikus a használatos függvények differenciálhányadosait is oda-vissza fújja, tehát ezeket is azonnal felismeri, ha a szeme elé kerülnek. Ha valaki a $2x$ függvényről beszél, most már nekünk is okvetlen eszünkbe fog jutni, hogy ez a $2x$ valahonnan ismerős: honnan is? – igen, ez volt az $y = x^2$ függvény differenciálhányadosa. Itt is beszélhetünk tehát a művelet megfordításáról: ha adva van egy függvény, kérdezhetjük, hogy van-e olyan függvény, amelynek éppen ő a differenciálhányadosa, és ha van, hát melyik az. Ha van, ezt az ő „integráljának" nevezik, például $2x$ integrálja az $y = x^2$ függvény. Itt is vannak fogások, mint az egyenletek megoldásában, amelyek segítségével közelebb lehet hozni a kitaláláshoz a keresett függvényt, ha nem ismerünk rá azonnal. Legyen például x^2 a megadott függvény. Ez nagyon emlékeztet $3x^2$-re, amiről már tudjuk, hogy az $y = x^3$ egyenlettel megadott függvénynek a differenciálhányadosa. Csakhogy a mi x^2-ünk – bármi is x – éppen a harmadrésze a $3x^2$-nek. Hát akkor talán az x^3 harmadrészének, az

$$y = \frac{x^3}{3}$$

függvénynek lesz a differenciálhányadosa. Könnyen be lehet bizonyítani, hogy ez így is van.

De a fogások a legtöbb esetben nem segítenek; általánosabb módszerre volna szükség. És még egy hiba van az előbbi kitalálós módszerben: azt nem árulta el a differenciálhányados, hogy például az $y = x^2$ függvény görbéje átmegy a 0 ponton; ezt magából a függvényből kellett kiolvasnunk annak idején. Hogy gondolhatjuk akkor, hogy a differenciálhányados egymagában elég a görbe teljes rekonstruálásához?

Csakugyan nem egészen elég, és ezt egy pillanat alatt beláthatjuk: toljuk feljebb a parabolánkat például 1 egységgel:



Világos, hogy a puszta feltolástól a görbe alakja nem változott, a meredeksége minden pontban ugyanaz maradt, tehát a differenciálhányadosa ismét a régi; a görbe egyenlete mégis megváltozott, mert minden egyes pont y koordinátája 1-gyel több lett, tehát az az y, ami eddig x^2 volt, most $x^2 + 1$-gyé növekedett, és így a feltolt parabola egyenlete:

$$y = x^2 + 1.$$

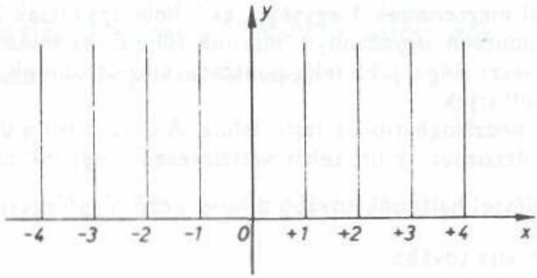
Pusztán az irány alakulásából, azaz a differenciálhányadosból még nem lehet kitalálni, hogy erről a függvényről van-e szó vagy a régiről, vagy azon számtalan függvény egyikéről, amelyek parabolánk fel- és letologatásával jönnek létre. Ennyiben tehát még határozatlan a feladatunk.

De ha csak egyetlen pontját megadjuk a keresett görbének, már határozottá válik: ha például „kezdőérték" gyanánt azt mondjuk, hogy a görbének át kell mennie a 0 ponton, akkor ez az adott differenciálhányados mellett csakis az eredeti parabolánk lehet. Ez ki fog derülni a továbbiakból.

Az általános módszert a parabolán mutatom be: tegyük fel, hogy nem ismertünk rá a 2x függvény integráljára. Keressük azt a görbét, amelyről csak annyit tudunk, hogy *átmegy a 0 ponton,* és érintőjének emelkedése bármely pontban *2x*.

Itt is rajzzal kezdjük, de a célunk egy precíziós módszer ellesése.

Osszuk fel az x tengelyt először egységnyi közökre, és az osztópontokban húzzunk függőlegeseket az egyelőre ismeretlen y koordináták számára:



Csak az $x = 0$ pontban tudjuk, hogy itt y is 0; itt kezdjük megrajzolni – persze még csak közelítően – a görbét.

A rajz alapgondolata az, hogy az érintő egy kis darabon hozzásimul a görbéhez, tehát az érintési ponttól egy kis távolságban még jól helyettesítheti a görbét. Én most két-két függőleges közét tekintem ilyen kis távolságnak. Tehát először is megrajzolom a 0 ponthoz tartozó érintőt és felteszem, hogy ez jobbra egészen a +1, balra egészen a —1 pontban húzott függőlegesig reprezentálja keresett görbénket. Ahova így eljutottam, azt a két pontot tekintem a görbe $x = +1$-hez, illetve $x = -1$-hez tartozó pontjának, s megrajzolom belőlük kiindulva a megfelelő érintőket, egészen a következő függőleges vonalig. Az így nyert pontokat a görbe $x = +2$-höz, illetve $x = -2$-höz tartozó pontjainak tekintem, megrajzolom az e pontokhoz tartozó érintőket a következő függőlegesig s. í. t. Az érintőket természetesen mindig a megadott emelkedés alapján rajzolom meg; az $x = 0$ pontban ez

$$2x = 2 \cdot 0 = 0,$$

az $x = 1$ pontban

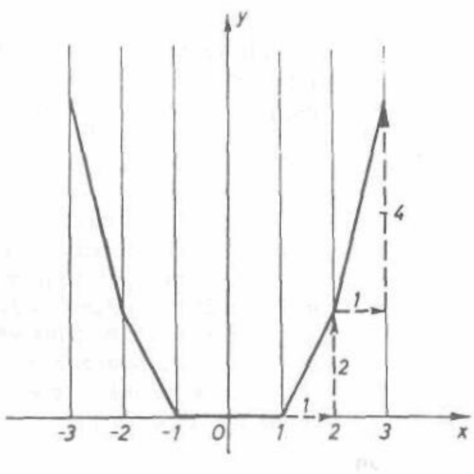
$$2x = 2 \cdot 1 = 2$$

és tudjuk, hogy a 2x szorzatfüggvény egyenletesen növekszik, tehát az ezután egyenlő közökben következő pontokban mindig 2-vel több, azaz sorra 4, 6, 8, . . . az emelkedés, hasonlóan 0-tól bal felé sorra —2, —4, —6, . . . Eszerint az érintő emelkedése a

0,	1,	2,	—1,	—2	pontokban sorra:
0,	2,	4,	—2,	—4.	

Persze azt is tudjuk, hogy pl. 2 emelkedés, azaz $\frac{2}{1}$ emelkedés azt jelenti, hogy jobbra 1, fölfelé 2 egységgel kell haladnunk, és hasonlóan —2 emelkedés azt, hogy balra kell megtennünk 1 egységet és fölfelé ugyancsak 2-t. Tehát pl. a +1 és a —1 pontban ugyanannyit mérünk fölfelé, ez mutatja, hogy a rajz szimmetrikus lesz; elég a jobb felét pontosan megrajzolnunk, a bal felét egyszerűen átmásolhatjuk.

Ezek után hozzáfoghatunk a rajzoláshoz. A 0 pontban a 0 emelkedés azt jelenti, hogy vízszintes az út, tehát vízszintesen megyünk az 1 pontig, ott $2 = \frac{2}{1}$ emelkedéssel haladunk tovább a következő függőlegesig, innen $4 = \frac{4}{1}$ emelkedésű út visz tovább:



Így még meglehetősen nyers képe alakul ki a parabolának.

Ellenőrizzük számítással is az eredményünk pontosságát. Szorítkozzunk az $x = 3$ pontra; számítsuk ki, hogy mi az $y = x^2$ görbének az y koordinátája e pontban:

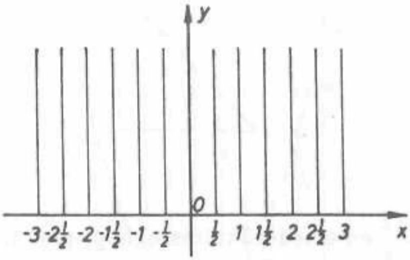
$$\text{ha } x = 3, \text{ akkor } y = 3^2 = 9.$$

Persze most még nem szabad tudnunk, hogy az $y = x^2$ függvényről van szó, de mert titokban mégis tudjuk, ez lehet számunkra a mérték: azt fogjuk megnézni, hogy a mi darabos görbénknek az $x = 3$ ponthoz tartozó koordinátája mennyiben tér el ettől a 9-től.

A rajz mutatja, hogy vonalunk szóban forgó y koordinátájához fokozatosan emelkedtünk fel úgy, hogy amíg a 0 pontból ide jutottunk, minden útbaeső emelkedés összetevődött; tehát itt

$$y = 0 + 2 + 4 = 6 = 9 - \underline{\underline{3}},$$

és 3 egység még elég nagy eltérés. Sűrítsük az osztópontokat: húzzunk most $\frac{1}{2}$ egységnyi közökben függőleges vonalakat:



Az érintő emelkedése a 0 pontban ismét 0 (ez az érintő vízszintes); az $x = \frac{1}{2}$ pontban:

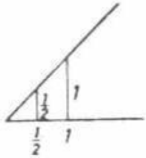
$$2x = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1,$$

és az egyenlő közökben egyenletesen növekszik az emelkedés, tehát most mindig 1-gyel lesz nagyobb az egymást követő osztópontokban:

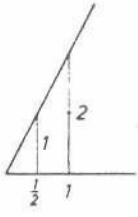
Az érintő emelkedése a

0,	$\frac{1}{2}$,	1,	$1\frac{1}{2}$,	2,	$2\frac{1}{2}$,	$-\frac{1}{2}$,	-1,	$-1\frac{1}{2}$	-2,	$-2\frac{1}{2}$	pontban sorra
0,	1,	2,	3,	4,	5,	—1,	—2,	—3,	—4,	—5.	

Még valamit meg kell gondolnunk, mielőtt a rajzoláshoz hozzáfoghatnánk: a 0 pontban 0 az emelkedés, innen vízszintesen kell mennünk az $\frac{1}{2}$ pontba, idáig rendben van a dolog. De az $\frac{1}{2}$ pontban 1 az emelkedés, azaz $\frac{1}{1}$, innen tehát 1 egységgel kellene jobbra haladnunk, és 1-gyel fölfelé. Márpedig nem azért húztunk félegységenként függőlegeseket, hogy most megint egy egész egységgel menjünk jobb felé. Csak azt kell meggondolnunk, hogy ha egy vasúti töltés emelkedése $\frac{1}{1}$, azaz 1 métert vízszintesen téve meg mellette, 1 méterrel kerül fölénk, akkor $\frac{1}{2}$ métert haladva mellette, még csak $\frac{1}{2}$ méterrel lesz fölöttünk:



Ugyanígy igaz a $2=\frac{2}{1}$ emelkedésű töltésre, hogy nem 1, hanem $\frac{1}{2}$ métert téve meg mellette, még nem 2, csak 1 méterrel emelkedik fölénk:



Ha tehát félegységenként haladunk tovább, akkor az imént kiszámított emelkedéseknek mindig a felét kell megtennünk fölfelé, így például 0-tól jobb felé haladva a

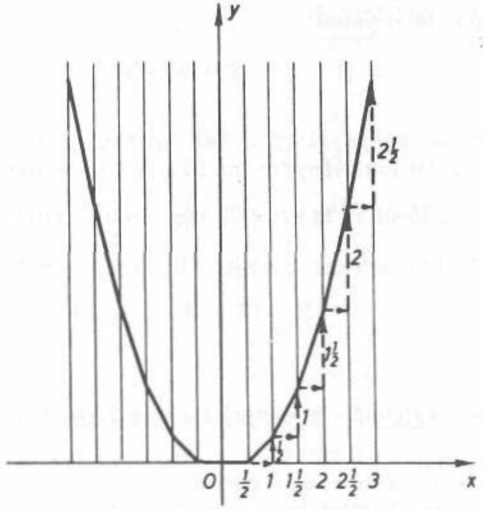
$$0, \quad \frac{1}{2}, \quad 1, \quad 1\frac{1}{2}, \quad 2, \quad 2\frac{1}{2} \text{ pontokban}$$

$$0, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad 5 \text{ helyett sorra}$$

$$0, \quad \frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2}\cdot 2=1, \quad \frac{1}{2}\cdot 3=1\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2}\cdot 4=2, \quad \frac{1}{2}\cdot 5=2\frac{1}{2}$$

egységet.

Most már semmi akadálya sincs annak, hogy elkészítsük a rajzot:



Ez már majdnem parabolává látszik kisimulni, csak az x tengellyel való összesimulást jelzi még túlzottan.

Számítsuk ki ismét az $x = 3$ ponthoz tartozó y koordináta értékét. Ez itt nem magukból az emelkedésekből tevődik össze 0-tól 3-ig, csak ezeknek $\frac{1}{2}$-szereseiből; jobb ezeket a már kiszámított

$$0, \quad \frac{1}{2}, \quad 1, \quad 1\frac{1}{2}, \quad 2, \quad 2\frac{1}{2}$$

helyett ismét

$$\frac{1}{2}\cdot 0, \ \frac{1}{2}\cdot 1, \ \frac{1}{2}\cdot 2, \ \frac{1}{2}\cdot 3, \ \frac{1}{2}\cdot 4, \ \frac{1}{2}\cdot 5$$

alakban írni, tehát itt

$$y = \frac{1}{2}\cdot 0 + \frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot 2 + \frac{1}{2}\cdot 3 + \frac{1}{2}\cdot 4 + \frac{1}{2}\cdot 5.$$

$\frac{1}{2}\cdot 0 = 0$, ezt elhagyhatjuk.

Ha minden tagot $\frac{1}{2}$-szer kell venni, egyszerűbb előbb összeadni őket és csak az eredmény felét venni:

$$y = (1 + 2 + 3 + 4 + 5)\cdot\frac{1}{2}\,.$$

Így a zárójelben csak egész számokat kell összeadni, sőt ezeket is lehet ügyesebben, az én Zsuzsi tanítványom módján: a „közepüket", a 3-at vehetjük ehelyett 5-ször, ez 15-öt ad, és ezt kell még $\frac{1}{2}$-szer venni, így $\frac{15}{2}$ lesz; ha még 3-at adnánk a 15-höz, a 9-cel osztható 18 szám lenne belőle, tehát végül is

$$y = \frac{15}{2} = \frac{18}{2} - \frac{3}{2} = 9 - \underline{\underline{\frac{3}{2}}}.$$

Az előbbi görbe megfelelő y koordinátája még 3 egészben különbözött 9-től, ez már csak $\frac{3}{2}$-ben.

Amíg a darabos görbéink lassanként kisimulnak – ami persze gyarló eszközeink miatt csak nagyon hozzávetőleges eredményt adhat –, melléktermékként egy bármeddig finomítható számolási eljárást is kapunk a kezünkbe az $x = 3$ ponthoz tartozó y koordináta kiszámítására. Világos, hogy ha $\frac{1}{4}$ egységenként folytatjuk a felosztást, akkor az emelkedés a 0 pontban ismét 0, az $x = \frac{1}{4}$ pontban

$$2x = 2\cdot\frac{1}{4} = \frac{2}{4}, \text{ egyszerűsítve } \frac{1}{2}$$

lesz, és az egyenlő közökben mindig $\frac{1}{2}$-del növekszik, tehát ekkor a 0 ponttól kezdve

az érintő emelkedése a

0,	$\frac{1}{4}$,	$\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$,	$\frac{3}{4}$,	1,	$1\frac{1}{4}$,	$1\frac{1}{2}$,	$1\frac{3}{4}$.	2,	$2\frac{1}{4}$,	$2\frac{1}{2}$,	$2\frac{3}{4}$	pontban
0,	$\frac{1}{2}$,	$\frac{2}{2}$,	$\frac{3}{2}$,	$\frac{4}{2}$,	$\frac{5}{2}$,	$\frac{6}{2}$,	$\frac{7}{2}$,	$\frac{8}{2}$,	$\frac{9}{2}$,	$\frac{10}{2}$;	$\frac{11}{2}$	

és itt negyedegységenként akarunk jobbra haladni, tehát mindezeknek a negyedrészét kell csak megtenni az egyes pontokban fölfelé, mert ha egy emelkedő töltés mellett negyedakkora utat teszünk meg vízszintesen, csak negyedannyival emelkedik is fölénk. Ezekből a negyedrészekből tevődik össze a mi y-unk, míg az $x = 3$ pontba jutunk:

$$y = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{4}{2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{5}{2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{6}{2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{7}{2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{8}{2} +$$

$$+ \frac{1}{4}\cdot\frac{9}{2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{10}{2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{11}{2}.$$

$\frac{1}{4}\cdot 0$ persze 0 és elhagyható.

Itt minden egyes tagot $\frac{1}{4}$-szer kell venni, azaz tulajdonképpen osztani kell 4-gyel,s ezenkívül még egy 2-vel való osztást is jelez mindegyikük nevezője. Már tudjuk, hogy ha valamit 4-gyel és azután 2-vel osztunk, ugyanannyit kapunk, mintha egyszerre $4\cdot 2 = 8$-cal osztanók; azonkívül lehet az osztandókat előbb összeadni és csak az eredményt osztani 8-cal. Tehát

$$y = (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11)\cdot\frac{1}{8}.$$

Ilyen sok tag esetén már igazán nagyszerű, hogy Zsuzsi módszere áll a rendelkezésünkre: csak az összeadásban szereplő számok középsőjét, a 6-ot kell 11-szer vennünk; ez 66-ot ad, és 8-cal osztva $\frac{66}{8}$-ot. 66-hoz még 6-ot kellene adni, hogy a 9-cel osztható 72 számhoz jussunk, tehát

$$y = \frac{66}{8} = \frac{72}{8} - \frac{6}{8} = 9 - \frac{6}{8};$$

$\frac{6}{8}$ még egyszerűsíthető 2-vel, tehát

$$y = 9 - \frac{3}{4};$$

e finomításban már csak $\frac{3}{4}$ hiányzik 9-ből.

Ehhez az eredményhez már rajz nélkül jutottunk, de mégis arra gondolva, hogy mit tennénk, ha rajzolnánk. Folytatni már minden rajzra való gondolás nélkül is lehet. A következő lépés a 0-tól 3-ig terjedő távolság nyolcadrészekre osztása volna; az osztópontokban sorra

$$2x = 2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

lépésekkel növekedne az emelkedés, tehát e pontokban az emelkedés

$$0,\quad \frac{1}{4};\quad \frac{2}{4},\quad \frac{3}{4},\quad \frac{4}{4},\quad \frac{5}{4},\ldots$$

volna; ezeket a számokat kellene sorra a közök $\frac{1}{8}$ hosszúságával szorozni és összeadni az $x = 3$ pontig. Az eredmény

$$y = 9 - \underline{\underline{\frac{3}{8}}}$$

volna és könnyen be lehet látni, hogy ez így folytatódik akármeddig. A

$$3,\quad \frac{3}{2},\quad \frac{3}{4},\quad \frac{3}{8},\ldots$$

sorozat pedig 0-hoz konvergál (ha 3 tortát mind több és több ember közt osztanak fel, egyre elenyészőbb nagyságú darab jut egyre), tehát *teljes pontossággal* 9 az a szám, amelyet a mi egyre jobban kisimuló görbéink $x = 3$-hoz tartozó y koordinátái mind pontosabban megközelítenek; 9, azaz 3^2: az $y = x^2$ függvénynek az $x = 3$ pontban felvett értéke.

Ugyanígy lehet bebizonyítani, hogy görbéink y koordinátái az $x = 1$ pontban $1 = 1^2$-hez, az $x = 2$ pontban $4 = 2^2$-hez, az $x = 4$ pontban $16 = 4^2$-hez, általában bármely pontban a szóban forgó pont x koordinátájának négyzetéhez, x^2-hez konvergálnak, a mi darabos görbéink tehát az

$$y = x^2$$

parabolává simulnak ki. Vagy függvény-nyelven: hacsak egyetlen kezdőérték is adva volt, a

$$2x$$

függvényből rekonstruálni lehetett azt a függvényt, amelynek ő a differenciálhányadosa.

Közben pedig szert tettünk a keresett precíziós módszerre: a megadott ponttól a vizsgált pontig (nálunk 0-tól 3-ig) közökre kell osztani az x tengelyt, a közök hosszúságát megszorozni az adott függvénynek az osztópontokban felvett értékeivel, és mindezt összeadni. Így ún. „integrálközelítő összegeket" kapunk; ha egyre jobban sűrítjük a felosztást, ezek az integrál értékéhez konvergálnak a vizsgált pontban. Be kell vallanom, hogy ez a legtöbb esetben sok vesződséggel jár; hiába, a fordított műveletek keserves műveletek.

A közelítő összegeket területekkel is szemléltethetjük.

Hiszen bármely közelítő összeg minden tagja egy-egy szorzat: a köz hosszúságát szorozzuk az adott függvény egy-egy értékével. Márpedig azt tudjuk, hogy szorzatot szemléltethetünk egy olyan téglalap területével, amelynek két szomszédos oldala akkora, mint a két tényező. Így a közelítő összeg minden egyes tagja egy-egy téglalapot ad; az egész összeget szemléltethetjük úgy, hogy ezeket a téglalapokat szépen egymás mellé rakjuk.

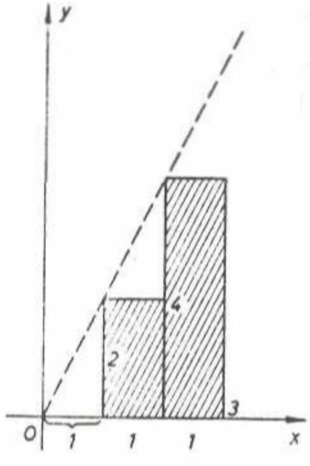
Próbáljuk csak: az első összegünk

$$0+2+4$$

volt; itt nem látszanak a szorzatok, de ekkor 1 egység volt a közök hosszúsága, tehát írjuk ezt az összeget ilyen alakban:

$$1\cdot 0+1\cdot 2+1\cdot 4.$$

Most már ábrázolhatjuk:

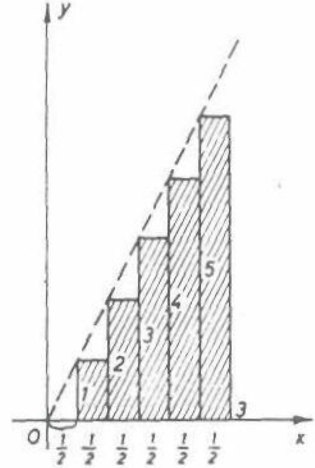


(1·0 vehető a 0-tól 1-ig terjedő hosszúságú és 0 magasságú téglalapnak, ez persze csak egy vízszintes vonaldarab.)

Második közelítő összegünk ez volt:

$$\frac{1}{2}\cdot 0+\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot 2+\frac{1}{2}\cdot 3+\frac{1}{2}\cdot 4+\frac{1}{2}\cdot 5.$$

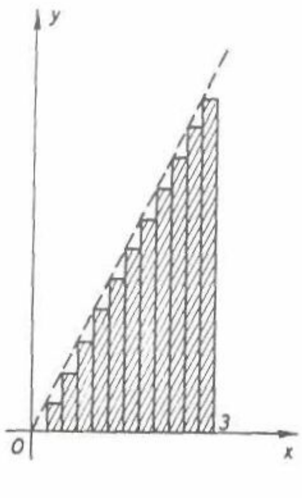
Ennek a képe:



Harmadik közelítő összegünk már 12 tagú volt:

$$\frac{1}{4}\cdot 0+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{5}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{6}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{7}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{8}{2}+$$
$$+\frac{1}{4}\cdot\frac{9}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{10}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{11}{2}.$$

Ezt $\frac{1}{2}$ egységekkel lehet könnyen ábrázolni; a számok kiírására már nincs is hely, csak rajzolok:



Látható, hogy e lépcsős idomok egyre jobban és jobban közelítik meg egy derékszögű háromszög területét; arra a háromszögre célzok, amely a szaggatottan rajzolt egyenes alá esik minden ábránkban. Ugyanis minden ábrában ugyanaz az egyenes szerepel: az első rajzról még jól leolvasható, hogy az emelkedése

$$2:1,$$

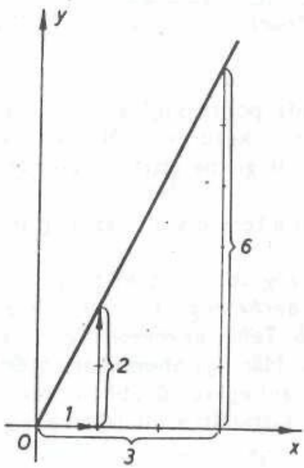
és könnyen utánajárhatunk, hogy ennyi a másik két rajzon is. Nemrégen kértem, hogy tessék ráismerni: a 0 ponton átmenő 2 : 1 emelkedésű egyenes az volt, amelynek egyenlete így szólt:

$$y = 2x.$$

De hiszen ez éppen a megadott függvényünk! Annak a képe ez az egyenes. Tehát a közelítő összegek éppen az adott függvény képe alá eső területet közelítik meg egyre pontosabban. De kár, hogy ezt nem tudtuk előre, hiszen egy derékszögű háromszög területét nagyon könnyű kiszámítani! – csak a befogókat kell szorozni egymással és az eredmény felét venni. A vízszintes befogó a vizsgált $x = 3$ pontig terjedő darab, tehát 3 egység, a függőlegest számítsuk ki:

$$\text{ha } x = 3, \text{ akkor } y = 2x = 2 \cdot 3 = 6,$$

tehát a második befogó 6 egység:



ennélfogva a háromszög területe:

$$\frac{3 \cdot 6}{2} = \frac{18}{2} = 9$$

egység, és ez valóban megegyezik az előbbi fáradságos úton nyert eredménnyel.

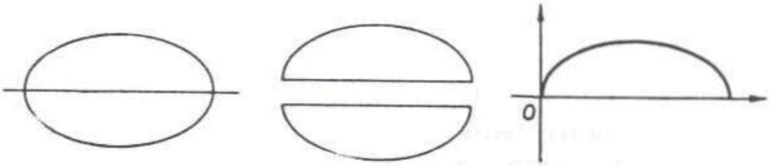
Így jöhet a területszámítás az integrálszámítás segítségére. Mert ez nem volt véletlenség: hacsak nem valami nagyon vad függvényről van szó, mint amilyen a szüntelenül 0 és 1 közt ugráló Dirichlet-féle függvény (amikor is az integrál-közelítő összegeknek eszük ágában sincs konvergálni), mondom, normálisabb függvény esetén a közelítő összegek mindig ilyen lépcsős területekkel ábrázolhatók:

és ezek a csokoládé-példa pontosságával közelítik meg az adott függvény görbéje alá eső területet, a kezdőponttól a vizsgált pontig, ha a felosztást határtalanul sűrítjük. Tehát görbe alatti terület és integrál: ugyanaz a fogalom, két fogalmazásban.

Megfordítva azonban a területszámítás még sokkal többet köszönhet az integrálszámításnak.

Derékszögű háromszög területét ki tudjuk számítani és tudjuk, hogy minden más háromszög derékszögű háromszögekre, minden sokszög pedig háromszögekre bontható. Tehát egyenesekkel határolt idomok területét kiszámítani nem probléma. Már úgy-ahogy beletörődtünk abba is, hogy a kör területét ki lehet számítani egyre sűrűbben belezsúfolt háromszögek segítségével. De hogyan lehet kiszámítani általában egy görbevonal határolta területet?

Ilyen területeket egyenesekkel felszabdalhatunk úgy, hogy egy-egy darabot az egyenes oldalával ráfektethessünk az x tengelyre:



Az egyes részletek területét külön számítjuk ki, egy ilyen görbe alatti terület kiszámítása pedig már integrálszámítási feladat. Megeshetik, hogy éppen könnyen kitalálható integrállal van itt dolgunk, és akkor egy pillanat alatt megmondhatjuk, hogy mekkora a terület.

Például már kitaláltuk, hogy x^2 integrálja az

$$y = \frac{x^3}{3}$$

függvény, helyesebben a sok lehetséges függvény közül ez már az, amely a 0 ponton megy át, mert

$$\text{ha } x = 0, \text{ akkor } \frac{x^3}{3} = \frac{0^3}{3} = 0.$$

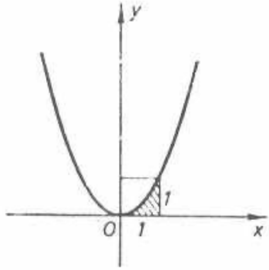
Ebből egy pillanat alatt kiszámíthatjuk az

$$y = x^2$$

egyenletű parabola alatti területet. Például az $x = 1$ pontig ez annyi, mint az integrál értéke az $x = 1$ helyen, vagyis

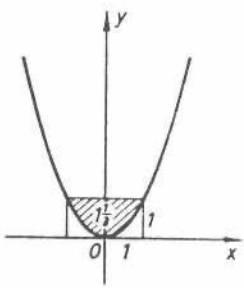
$$\frac{1^3}{3} = \frac{1}{3} \text{ területegység.}$$

Tehát a bevonalkázott terület, amely nyilván csak egy részét foglalja el az egységnyi négyzetnek, ennek pontosan az $\frac{1}{3}$ részével egyenlő:

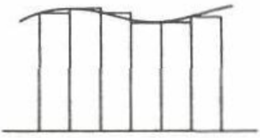


Ugyan kit érdekel az, hogy mekkora terület esik a parabolán *kívül*? Ez lehet érdektelen kérdés, de egy pillanat alatt kiszámítható belőle a parabola szárai közé eső terület is bármilyen magasságig. Például, ha az iménti négyzet $\frac{1}{3}$ része van kívül, akkor $\frac{2}{3}$ része belül esik; ha ehhez még a baloldali tükörképét is hozzávesszük, azt kapjuk, hogy a következő rajzon bevonalkázott terület

$$2\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{3}=\frac{3}{3}+\frac{1}{3}=1\frac{1}{3}\text{ egység:}$$



Még egyszer fel szeretném hívni a figyelmet a sok kicsi téglalapra, amelyekkel a területet megközelítettük:



Amint a felosztást sűrítjük, téglalapjaink egyre keskenyebbekké válnak; minden egyes téglalapnak szükségképpen 0-hoz konvergál a területe, a sokat elcsépelt sokfelé osztott torta értelmében. És ezek a 0 felé keskenyülő csíkok együttvéve mégis valami 0-tól különböző határozott területet közelítenek meg, ennek még csak kicsinek sem kell lennie: az itt tárgyalt háromszög területe például 9 egység volt. Igen, mert amilyen mértékben elvékonyodnak, ugyanolyan mértékben sokasodnak is a téglalapok, és a sok kicsi sokra megy. Leheletnyi homokrétegek egymásra rakódása a piramisokat is betemeti idővel; sok kicsi ember gondol valamit és egyszercsak nagyot fordul a világ. Az apró hatások „integrálódnak".

HARMADIK RÉSZ

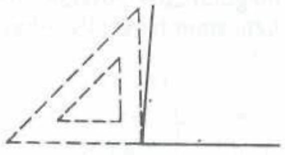
A tiszta ész önkritikája

18. ÉS MÉGIS SOKFÉLE A MATEMATIKA

Alig van ismertebb matematikus, akivel egyszer meg ne történt volna, hogy valami titokzatos idegen egy hosszabb-rövidebb írásművet nyújtott át neki legféltettebb kincseként, és ebben a kör négyszögesítése volt „megvalósítva". Miről is van itt szó?

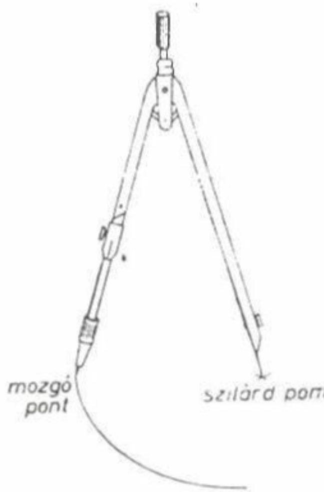
Ha valaki ezt mondja: „Ismertem egy derékszögű háromszög két befogóját és ezekből megszerkesztettem a háromszöget" – akkor rögtön felmerül a kérdés: „Milyen eszközöket használtál?" Tegyük fel, hogy ő az üzletben kapható, fából való „derékszögű háromszöget" :

használta, ennek az oldalai mentén húzta végig a ceruzáját. Hát az ilyen gyártmányok tökéletességében nem nagyon lehet bízni. „Fordítsd csak meg ezt a faháromszöget a vele rajzolt derékszög mellett és így húzzál mellette egyeneseket!" A legtöbbször ilyen siralmas lesz az eredmény:



a faháromszög bizony nem pontosan derékszögű.

Már a régi görögök nagy gonddal választották meg a szerkesztésben felhasználható eszközöket. A vonalzót csak arra engedték használni, hogy egyetlen egyenes vonalat húzzanak mellette (arra már nem, hogy derékszöget); bár ez is megalkuvás, a vonalzó élét sem igen sikerül teljesen egyenesre gyártani. Kört már sokkal pontosabb eszközzel rajzolhatunk: nem valami kész fakör mentén kell a ceruzánkat végighúzni, hanem a körzővel mi magunk alakítjuk a kört; ha nem laza a kapcsolat a körző két szára közt, akkor az egyik szár hegyes végét szilárdan leszúrva egy pontba, a másik szár ceruzás vége csakugyan állandó távolságban mozog ettől a szilárd ponttól és így igazi kört ír le:



Más eszközt aztán már nem is engedtek használni a régi görögök geometriai szerkesztéseikben; és persze annál megbízhatóbbnak bizonyult egy szerkesztés, minél inkább támaszkodott a körzőre, minél ritkábban kellett közben a vonalzóhoz nyúlni. Évszázadokkal később kiderült, hogy a vonalzó teljesen nélkülözhető: mindazok a szerkesztések, amelyek körző és vonalzó segítségével elvégezhetők, megoldhatók pusztán körző segítségével is; persze körzővel egyenes vonalat húzni nem lehet, ilyenkor pl. egy négyzetet a négy csúcspontja képviseli:

de az ilyen pontokból is elég jól elképzelhetjük az ábrát.

Mi azonban maradjunk most a körző és a vonalzó használata mellett. Természetesen felmerül a kérdés: milyen szerkesztéseket lehet pusztán e két eszköz felhasználásával elvégezni?

Ebbe a tárgykörbe tartozik a kör négyszögesítésének problémája is. Adva van egy kör és a feladat: olyan négyzet szerkesztése, amelynek a területe pontosan ugyanakkora, mint az adott köré.

Már tudjuk, hogy a kör területét teljes pontossággal meg lehet határozni, hozzá egyre jobban közeledő egyenes vonalú idomok segítségével. Ha például 1 egységnyi sugárral rajzoltuk a kört, így egy egészen határozott irracionális számot kapunk a területe mértékéül; ez a szám így kezdődik:

$$3{,}14\ldots$$

és a tizedesjegyek kiszámítása bármeddig akadálytalanul folytatható. Ez az irracionális szám olyan fontos szerepet játszik a matematikában, hogy külön nevet is kapott: ő a középiskolából is jól ismert

$$\pi.$$

Ha csakugyan ilyen pontosan ismerjük az egységsugarú kör területét, akkor persze azonnal meg tudjuk mondani, hogy melyik az a négyzet, amelynek ugyanekkora a területe. Hiszen a négyzet területét úgy számíthatjuk ki, hogy az egyik oldalának hosszát a második hatványra emeljük; és van olyan szám, amelynek második hatványa π: ez az, amit $\sqrt{\pi}$ -vel jelölnek. Tehát az a négyzet, amelynek minden oldala $\sqrt{\pi}$, megoldja ezt a feladatot.

Csakhogy nem az volt ám a kérdés, hogy van-e ilyen négyzet, hanem az, hogy körző és vonalzó segítségével pontosan meg lehet-e szerkeszteni.

Hogy $\sqrt{\pi}$ irracionális, az még nem volna akadálya a megszerkeszthetőségnek, hiszen olyan négyzetet, amelynek egyik oldala $\sqrt{2}$, már megrajzoltunk egyszer, amikor a halastavat bővítettük kétszeresre; és az ott vázolt gondolatot igen könnyű pontos szerkesztéssé alakítani át. Vajon nem lehet-e $\sqrt{\pi}$-t is valami módon megszerkeszteni körzővel és vonalzóval?

A próbálkozások hosszú évszázadokon át nem vezettek eredményre. A megoldáshoz végül is az vezetett el, hogy a geometriai problémát lefordították az algebra nyelvére.

Mit lehet rajzolni vonalzóval és körzővel? Egyeneseket és köröket. Azt pedig már tudjuk, hogy az algebra nyelvén az egyenesek elsőfokú, a körök bizonyos másodfokú egyenleteket jelentenek. Az ilyen egyenletek közös megoldásaiból épül fel mindaz, amit körzővel és vonalzóval szerkeszteni lehet.

Mármost sikerült bebizonyítani, hogy $\sqrt{\pi}$, sőt maga π sem lehet megoldása nemcsak az ilyen egyenleteknek, de még bármily magasfokú egyenleteknek sem, hacsak bele nem csempésszük valahogy π-t az egyenletbe (például az

$$x - \pi = 0$$

egyenletből, ha a π kivonandót összeadandóul visszük a jobboldalra,

$$x = \pi$$

adódnék). Azt mondják, hogy π nem is „algebrai" szám, hanem „transzcendens".

Ennélfogva bizonyos, hogy a kör négyszögesítése nem oldható meg; a matematikának ismét fényesen sikerült bebizonyítani a maga tehetetlenségét egy feladat körülhatárolt módon való megoldásában.

Azon a felfedezésen kívül, hogy vannak „transzcendens" számok, amelyek semmiféle algebrai egyenlet megoldásai közt nem szerepelhetnek (meg lehet mutatni, hogy $e = 2{,}71\ldots$, a természetes logaritmus alapszáma, ugyancsak ilyen, sőt, hogy általában az irracionális számok túlnyomó része „transzcendens"), még egyet szeretnék kiemelni az előbbi gondolatmenetből: a módszertisztaságot, amire a régi görögök annyira ügyeltek. Nem általánosságban volt arról szó, hogy valahogyan létrehozható-e olyan négyzet, amelynek területe egyenlő a körével – a múlt század végén szerkesztettek is olyan készüléket, amely egész mechanikusan gyártani tud egy ilyen négyzetet –, hanem tisztán és pontosan arról, hogy e négyzet szerkesztése körzővel és vonalzóval sikerülhet-e. Így minden matematikus számára már mindörökre eldőlt ez a kérdés negatív irányban; csak a szegény bolondok nem hiszik ezt el, akiknek fantáziáját izgatja a „körnégyszögesítés" kifejezésben rejlő fantasztikum.

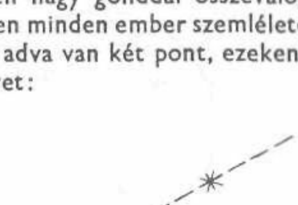
A módszertisztaság, a feltételek világos megfogalmazása okozza, hogy a matematikusok sohasem beszélnek egymás mellé, mint más tudományok űzői oly gyakran; minden idők és minden országok matematikusai pontosan megértik egymás szavát. A matematikusok az érthetetlenségükről hírhedtek, pedig talán senki más nem fogalmazza meg a mondanivalóit olyan messzemenő tekintettel a másik emberre, mint éppen a matematikus. A matematika tárgyaihoz természetesen ugyanannyi személyes teher tapad, mint minden más tárgyhoz. Például „pont" vagy „egyenes" igen különböző lehet az egyes emberek elképzelésében. Kedves Kürschák professzorunk az első óráját azzal kezdte, hogy az egyik társnőmet e váratlan kérdéssel lepte meg: „Kisasszony, látott már pontot?" „Nem láttam." „Rajzolt már pontot?" „Rajzoltam, azaz" – kapott észbe a társnőm – „csak akartam rajzolni, de nem sikerült." (Azt hiszem, professzorunk ettől a választól szerette meg a mi évfolyamunkat egész életére.) Az a ceruza-, vagy krétalerakódás, amit az ember rajzol, és ami nagyítóüveg alatt valóságos hegységnek látszik, természetesen nem pont. Mindenkinek van valami elképzelése a pontról, ezt próbálja rajzzal utánozni.

Az egyenesről való elképzelések még személyesebbek lehetnek. Hiszen az egyenes éppen nem egyszerű vonal: kisgyerekek, primitív emberek sohasem rajzolnak egyenest, spontán vonaluk görbeív. Egyenes húzásához már magasfokú önfegyelemre van szükség. Éppen ezért, ha a matematikus bebizonyított valamit pontokról és egyenesekről, ezt így adja tudtára a másik embernek: „Nem tudom, hogy neked milyen képed van a mértani idomokról. Az én elképzelésem olyan, hogy bármilyen két ponton át tudnék egyenest húzni. Megegyezik ez a te képeddel?" Ha a válasz igenlő, csak akkor folytatja: „Bebizonyítottam valamit, amiben a pont és az egyenes tulajdonságai közül nem használtam fel semmi mást, mint ezt az egyet, amiben már egyetértettünk. Tehát most már gondolhatsz nyugodtan a te pontjaidra és egyeneseidre, mégis meg fogsz érteni."

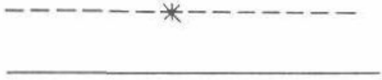
A matematika nem képzeli, hogy abszolút igazságokat képes kimondani. Tételei mindig ilyen „ha – akkor" fogalmazású szerény állítások. *Ha* csak körzőt és vonalzót használunk, *akkor* a kör nem négyszögesíthető. *Ha* pontokon és egyeneseken ilyen és ilyen tulajdonságú idomokat értünk, *akkor* igazak róluk a következők.

Igaz, hogy az iskolában nem ilyen tételekhez szoktunk, és az eddigi fejezetekben sem volt ilyen a tételek megfogalmazása. Aki ismeretet közöl, az jól teszi, ha nem készen adja az eredményeket, hanem mintegy keletkezésükben; a keletkezés lázában pedig nem forrnak még ki a pontos feltételek. De a nagy alkotó korszakokat rendszerint kritikai korszakok követik: a matematikusok visszatekintenek a befutott útra és kibontogatják a kész eredmények magvát.

Ilyen nagy rendszerező volt Euklidész, e téren az ő geometriai műve maradt a minta évszázadokon át. Először felsorolja az alapfogalmakat és a rájuk vonatkozó alapfeltételeket (ezeket nevezik máig is axiómáknak); csak annak szólnak az ezután következő bizonyítások, akinek olyan elképzelése van pontokról, egyenesekről, síkokról, hogy a rájuk vonatkozó axiómákat igaznak fogadja el. Éppen ezért igen nagy gonddal összeválogatott axiómák ezek, megannyi olyan állítás, amiben minden ember szemlélete megegyezik; például közöttük van az is, hogy ha adva van két pont, ezeken át mindig húzhatunk egyenest, éspedig csakis egyet:



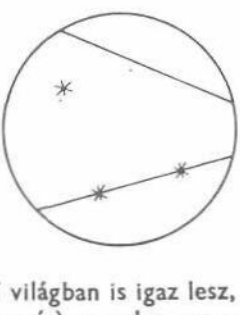
A mű kétezer éves, és ezalatt mindössze egyetlen axióma körül támadt vita. Ez a híres párhuzamossági axióma: hogy egy egyeneshez egy rajta kívül fekvő ponton át egyetlen olyan egyenest lehet húzni, amely őt nem metszi, bármilyen messze sem:



ez az, amelyiket párhuzamosnak mondanak vele. Erre még visszatérek.

Előbb azonban az axiomatikus tárgyalásnak egy másik lehetőségére szeretnék rámutatni: ha a tételek bizonyítása olyan, hogy közben bárki szabadjára engedheti a fantáziáját a pontok, egyenesek, síkok elképzelésében, azzal az egyetlen kikötéssel, hogy az axiómákban rejlő feltételeket teljesítik ezek az idomok, akkor még csak az sem fontos, hogy egyáltalán valamilyen értelemben is pontok, egyenesek, síkok legyenek azok a tárgyak, amelyekre az illető gondol; hiszen megeshetik, hogy más tárgyak is teljesítik az axiómák feltételeit, és akkor a bizonyítás ezekről a más tárgyakról mond ki valami ugyancsak helytálló tételt. Ez olyan „egyet mondok, kettő lesz belőle", amilyennel már találkoztunk, amikor a „dualitásról" volt szó: az ott szereplő tételek igazak maradnának akkor is, ha volna olyan csavaros fantáziájú ember, aki egyenesen pontot ért és ponton egyenest. (Tessék visszaemlékezni az ott felhozott példára: három pont egy háromszöget határoz meg, ha nincsenek egy egyenesen – három egyenes egy háromszöget határoz meg, ha nincsenek [vagyis nem mennek át] egy ponton.)

Ha például valaki ponton csak egy adott kör belsejébe eső pontot ért (a kerületre eső pontokat már nem), egyenesen pedig csak egy egyenesnek e kör belsejébe eső darabját érti:

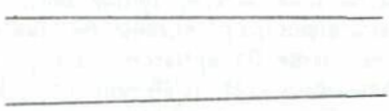


még ebben a szűk látókörű világban is igaz lesz, hogy két ponton át (azaz a kör belsejébe eső két ponton át) egyetlen egyenest (azaz a kör széléig terjedő egyenesdarabot) lehet húzni, tehát itt is igaz lesz minden tétel, amit pusztán ennek az axiómának a felhasználásával vezetünk le pontokról és egyenesekről.

Most térjünk vissza a párhuzamossági axiómához. Azt hiszem, aki egy kicsit elgondolkozott rajta, az el is fogadją, hogy csak egyetlen párhuzamost lehet húzni egy adott ponton át egy adott egyeneshez, és nem látja, hogy mi lehet ezen problematikus. A legtöbb ember szemlélete csakugyan olyan, hogy a párhuzamossági axiómát minden vita nélkül fogadja el.

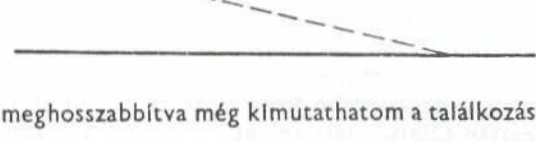
Velem azonban ez történt, amikor egy régi gimnázium első (a mai 5. általánosnak megfelelő) osztályát tanítottam.

Minden tanuló kezében volt egy négyzet és el kellett mondaniok, hogy mit figyelnek meg az oldalain. Hamarosan elhangzott a „párhuzamos" szó, hiszen ezt a szót ők már az életben is hallhatták. Megkérdeztem, hogy mit értenek párhuzamosságon. Az egyik kislány azt mondta, hogy a párhuzamosok egyenlő irányúak, a másik azt, hogy mindig egyenlő messze maradnak egymástól, a harmadik azt, hogy nem találkoznak, bármennyire is meghosszabbítjuk őket. „Ez mind helyes" – mondtam – „bármelyiket egyedül elfogadhatjuk a párhuzamosság ismertetőjeléül, a másik kettő már következik belőle." Erre feláll az első padban a kis Anna, az osztály legmélyebben gondolkodó tanulója. „Nem lenne jó, ha azt fogadnók el ismertetőjelül, hogy sohasem találkoznak. Mert én el tudok képzelni két olyan egyenest, amelyek nem maradnak egyenlő messze egymástól, folyton közelednek, és mégsem találkoznak soha, bármennyire is hosszabbítjuk meg őket." Rajzzal is jelezte, hogy ilyen egyeneseket képzel:



El kellett hinnem, hogy csakugyan ilyen a szemlélete.

Tapasztalatilag utánajárni persze nem lehet ilyesminek. Ha egy nagyon kevéssel lehajlítom a mi megszokott párhuzamosunkat:



akkor eléggé meghosszabbítva még kimutathatom a találkozást az adott egyenessel. De ha még sokkal-sokkal kevésbé hajlítottam volna le, ha sorra $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, ... – ekkora körívvel fordul lefelé az egyenes, e végtelen sorozatot bármeddig folytatva honnan tudhatom, hogy egyszercsak nem jutok-e egy olyan kicsi lehajláshoz, amely mellett már csakugyan nem metszi egyenesünk az alsót? Hiszen *végig* nem járhatom a végtelen sorozatot.

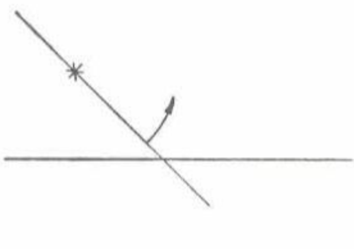
Példánk pedig van olyan vonalra, amely egy egyeneshez állandóan közeledik, anélkül, hogy azt valaha is elérné: ilyen volt a hiperbolánk bármelyik szára.

Nem olyan csodálatos tehát, hogy vannak emberek, akik az egyenes közeledést is el tudják képzelni ilyennek. Az elképzeléseinket az érzésvilágunk is irányítja. El tudom például gondolni, hogy ha valakit már nagyon régen elszakítottak egy kedves hozzátartozójától, annak a képzeletében élesen kirajzolódik a határtalan közeledés képe, a találkozás lehetősége nélkül.

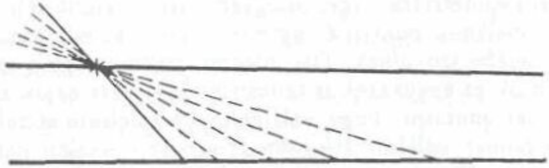
Bárhogyan is van, Euklidész óta újra és újra akadtak emberek, akiknek a szemlélete olyan volt, mint az én Anna tanítványomé. Egész bizonyosak nem voltak a maguk elképzelésében, hiszen a nagy többség szemben állt velük, de azt mindenesetre vitatták, hogy a párhuzamossági axióma ugyanolyan magától értetődő volna, mint a többi alapigazság. „Tessék bebizonyítani, csak olyan feltételeket használva fel, amiket mi sem vitatunk; akkor majd elfogadjuk."

Századokon át próbálták a matematikusok a párhuzamossági axiómát bebizonyítani a többi axióma segítségével, de mindhiába.

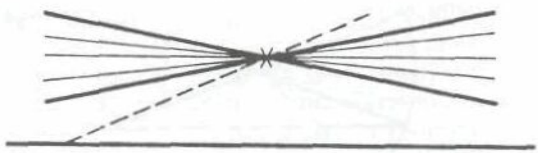
A mi Bolyai Jánosunk mert először nyíltan állást foglalni az ellenkező szemlélet mellett: „Azt a bizonyos párhuzamossági axiómát nem sikerül bebizonyítani, mert nem is igazság. Én így látom: ha egy egyeneshez egy külső ponton át metsző egyenest húzok, és azt elkezdem forgatni:



akkor egyre távolabb és távolabb fogja metszeni az adott egyenest, majd egyszer csak elpattan tőle:



és ez az elpattanó egyenes még mindig hajlik egy kicsit feléje. Persze, ha még tovább forgatom, még kevésbé fogja metszeni, egészen addig, amíg a túlsó oldalon nem hajlik erősebben az alsó egyenes felé:



Tehát a külső ponton át két elpattanó egyenes vezet, a közéjük eső végtelen sok egyenes közül egyik sem metszi az adott egyenest, a náluk lejjebb hajlók pedig valamennyien. – Ide körém mindenki, aki ugyanígy látja; most megcsinálom a mi geometriánkat!"

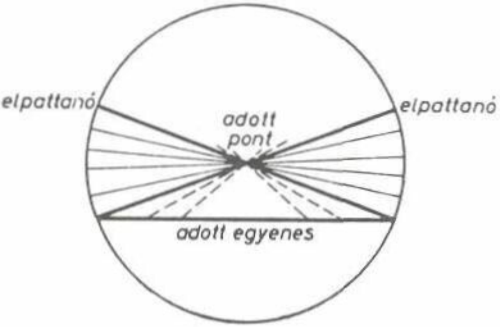
Bolyai tehát a párhuzamossági axióma ellenkezőjét vette fel alapfeltételül, minden más euklideszi axiómát megtartott, és megnézte, hogy ezekből a feltételekből milyen tételek vezethetők le a pontokról, egyenesekről, síkokról. Így épül fel a Bolyai-geometria, amiben sok minden másképp van, mint az euklideszi geometriában; ízlés dolga, hogy melyiket fogadjuk el.

Semmit sem von le Bolyai érdeméből – bár őt, szegényt, teljesen összetörte –, hogy vele egy időben mások is felfedezték e másféle geometria lehetőségét. Igen gyakori jelenség ez: úgy látszik, mintha az idő lassanként megérlelne egy-egy problémát, és vannak, akik ezt megérzik a föld különböző pontjain egyszerre, egymástól függetlenül.

De valami még nincs itt rendben: hátha mégis be lehet bizonyítani a párhuzamossági axiómát és akkor az egész Bolyai-geometria egy hamis feltevésen alapul, előbb-utóbb majd egy sereg ellentmondás fog kisülni belőle?

Erre ma már van megnyugtató válaszunk: Euklidész és Bolyai geometriája megbízhatóság szempontjából is egyenrangúak. Ha a Bolyai-geometria valaha is ellentmondásra vezetne, akkor ellentmondó volna az euklideszi geometria is.

Ugyanis egészen az euklideszi geometrián belül lehet „modellt" szerkeszteni a Bólyai-geometriára: úgy, ahogyan már az előbb leírtam egy szűk látókörű világot, melynek pontjai és egyenesei mind az euklideszi geometria egy körének belsejébe szorulnak. Ott megmutattam, hogy e szűkebb értelemben vett pontok és egyenesek is teljesítik Euklidész egyik alapfeltételét; nos hát meg lehet mutatni, hogy valamennyi alapfeltételét teljesítik (ha az egybevágóság fogalmát kellően átfogalmazzuk), az egyetlen párhuzamossági axiómától eltekintve. Erre éppen az ellenkező dolog igaz, Bolyai alapfeltevése:



Az elpattanó egyenesek azok, amelyek az adott pontból az adott egyenes szélső pontjaihoz: a kör széléhez vezetnek; az ezek közé eső egyenesek (a körön belül) Euklidész szerint sem metszik az adott egyenest. Bolyai axiómája tehát nem mondhat ellent a többi euklideszi axiómának, mert íme e szűk világban szépen megférnek egymás mellett.

Így tehát már két egyenrangú geometriával találkoztunk, és semmi akadálya sincs annak, hogy még többes számban beszéljünk geometri*ák*ról. Mert most már minden szemlélettől függetlenül is tovább játszhatjuk ezt a játékot: bármelyik axióma helyett, amely a többi axióma segítségével nem bizonyítható be, felvehetjük az ellenkezőjét és megnézhetjük, hogy milyen tételeket lehetne bebizonyítani ebből az ellenkező feltevésből. Sőt felvehetünk egészen más alapfeltételeket is, hiszen nem érdemes olyan nagyon ragaszkodni a szemléletből leszűrt alapfeltételekhez, ha egyszer a Bolyai-geometria megmutatta, hogy ez milyen ingatag alap, milyen különböző eredményekhez vezethet, ha két ember közül ki-ki a maga szemléletére hallgat.

Így épült fel a geometriák egész sora egymás mellett. És ez nem puszta játék: a mai fizika éppen az ilyen elvont módon felépült geometriák segítségével tudja megmagyarázni a valóság jelenségeit.

Az ember szemlélete nem megmásíthatatlan: a tudomány fejlődése is egyre formálja. Amikor felfedezték, hogy a Föld nem valami lapos korong, és bele kellett törődni abba, hogy ellenlábasaink a régi elképzelés szerint fejjel lefelé sétálnak a Földön, óriásit fejlődött az ember szemlélete. Ha a mai fizika relativitástanának eredményei tartóssá válnak és átmennek a köztudatba, akkor egy idő múlva már nem lesznek olyan nagy többségben az euklideszi szemléletű emberek, és a ma elvont játéknak látszó geometriák valamelyike a valóság geometriájává válhat.

Utóirat a negyedik dimenzióról

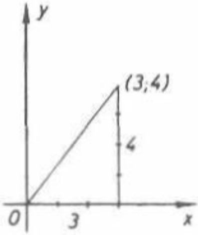
Még a „modell" szóra szeretnék visszatérni: az euklideszi geometrián belül „modellt" tudtunk készíteni a Bolyai-geometria számára úgy, hogy az euklideszi sík egy darabját körülhatároltuk egy körrel, és a Bolyai-geometria minden idomának a kör belsejének egy-egy tárgya felelt meg, a Bolyai-geometria minden tételének egy-egy olyan tétel, amely a kör belsejében bizonyítható. Két tudományág ilyen összefonódásával már régebben is találkoztunk: amikor az algebrában találtunk modellt a geometria számára. Hiszen a pontoknak számpárokat, a vonalaknak kétismeretlenes egyenleteket feleltettünk meg, és így az algebrának egy olyan részét határoltuk körül, amelyen belül minden geometriai idomot egy-egy algebrai tárgy, minden geometriai tételt egy-egy algebrai tétel reprezentált. Így algebrai úton vezethettünk le geometriai igazságokat, és megfordítva is: a geometria eredményeit a görbéknek megfelelő függvények vizsgálatában hasznosíthattuk.

Mindez a síkban volt így, de minden további nélkül átvihető a térre is: a térben három szám határoz meg egy pontot (ha az a bizonyos madárfészek a réten egy fa tetején lett volna, a helyének pontos meghatározásához még az is hozzátartozott volna, hogy milyen magas a fa: mekkora létrát kell magunkkal vinni, ha el akarjuk érni), így a tér idomainak háromismeretlenes egyenletek feleltethetők meg. A három ismeretlent jelölhetjük x-szel, y-nal és z-vel. Ha pl. ilyen alakú egyenlettel van dolgunk:

$$z = 3x + 2y,$$

akkor rögtön látható, hogy z értéke x megválasztásától is, y megválasztásától is függ; ez a z úgynevezett kétváltozós függvény. (Sokszor találkozunk ilyennel az életben; például egy életbiztosítás díja attól is függ, hogy hány éves a biztosított, és attól is, hogy mekkora összegről szól a biztosítás.) Amit tehát a tér geometriai idomairól bizonyítunk be, az a kétváltozós függvényekre hat vissza.

Mármost a térben nem kell mindent újra kezdenünk: a síkban kapott tételek nagy része egyszerűen általánosítható a térre. Például a síkban így kaphatjuk meg egy pontnak, mondjuk a (3; 4) pontnak a távolságát a 0 ponttól:



e távolság az átfogója annak a derékszögű háromszögnek, amelynek két befogója az illető pont két koordinátája. A Pitagorasz-tétel szerint tehát az ő négyzete egyenlő e két befogó négyzetének összegével, és így ő maga:

$$\sqrt{3^2 + 4^2}.$$

Be lehet bizonyítani, hogy például a három koordinátával jellemzett térbeli (3; 4; 5) pont távolsága a 0 ponttól:

$$\sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2}.$$

Ilyen egyszerű általánosítás vezet sokszor a síkból a térbe, s ennek a függvényekre is az a hatása, hogy egy sereg tétel az egyváltozós függvényekről egyszerűen általánosítható a kétváltozós függvényekre.

Mármost 3, 4, ... akárhány változós függvényekkel is kerülhetünk szembe; igazán kár, hogy a kétdimenziós síkból átmehettünk ugyan a háromdimenziós térbe, de a háromdimenziós térből nem mehetünk tovább: négydimenziós terünk már nincs. Az algebrai modell azonban megengedi, hogy úgy tegyünk, mintha volna: nevezzünk pontnak például egy ilyen számnégyest: (3; 4; 5; 6), és nevezzük a

$$\sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2}$$

számot e pont távolságának a 0 ponttól. Dolgozzunk ezekkel a számokkal úgy, mint a valóságos pontoknak megfelelő hasonló számokkal, és nézzük meg, hogy milyen tételek következnek ebből a háromváltozós függvényekre. Igazolni lehet, hogy e fiktív módon nyert tételek csakugyan igazak; tehát érdemes volt úgy tenni, mintha léteznék a negyedik dimenzió is.

Hasonlóan vezethetjük be az 5, 6, ... sőt végtelen dimenziós absztrakt tereket is. A minta mindig a mi jól ismert terünk, és a cél mindig: a használhatóság a függvények vizsgálatában.

Nem ismeretlen fogalmak ezek a mi számunkra: a többdimenziós pontok ideális elemek, segítségünkre jönnek egy elképzelt világból, és ismét eltűnnek, ha akarjuk, nélkülük is helytálló, biztos eredményeket hagyva hátra.

19. AZ ÉPÜLET MEGINOG

A nagy kritikai korszakok egyik tevékenysége a kész eredmények magvának kibontogatása, a tételek feltételeinek földerítése, egyszóval: az axiomatizálás. Ez egyszersmind körülhatárolja a matematika egy-egy ágát: összetartozó egésznek tekintjük mindazt, ami ugyanazon axiómák rendszeréből vezethető le.

De amint visszatekintünk a befutott útra, észrevesszük, hogy itt is, ott is felbukkannak bizonyos gondolatok; vannak fogalmak, amelyek rendszerezésünk közben sem határolódnak el: a matematika különböző ágaiba is belejátszanak. Így kínálkozik egy második tevékenység: különválasztani és önálló vizsgálat tárgyává tenni a több helyütt is fellépő elemeket.

Például emlékezzünk vissza arra, hogy racionális számok közt a szorzás és az osztás – a 0 osztó esetétől eltekintve – mindig elvégezhető volt, és eredményül ismét racionális számot adott. Tehát a racionális számok – 0-t kihagyva közülük – mintegy zárt csoportot alkottak a szorzás és az osztás műveletével kapcsolatban; az egész számok már nem viselkedtek ilyen exkluzív módon: az osztás bizony kivezetett közülük.

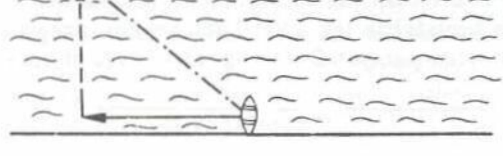
Abban már megegyeznek az egész számok a racionális számokkal, hogy összeadás és kivonás dolgában zárt csoportot alkotnak – persze pozitív és negatív egész számokra gondolok, ezek köréből csakugyan nem vezetnek ki e műveletek és még a 0-t sem kell kizárnunk.

De nem is kell ilyen sok szám ahhoz, hogy egy művelet és megfordítása tekintetében zárt csoportot alkothassanak: ha csak a következő két számot vesszük szemügyre:

$$+1, \quad -1,$$

ezeket akárhányszor szorozgatva és osztva egymás közt, mindig csak $+1$ és -1 egyike lesz az eredmény.

És e fogalomkör nem szorítkozik a számolási műveletekre. Emlékezzünk csak vissza a vektorokra: azok is zárt csoportot alkottak a maguk furcsa (és könnyen meg is fordítható) összeadásával kapcsolatban; két vektor együttes hatásának az eredője ismét valamilyen vektor volt:



Ez a művelet pedig már csak átvitt értelemben összeadás; valójában itt mozgások, erők összetételéről van szó.

Még sokáig folytathatnám a példák felsorolását.

E sok helyütt fellépő „csoport" fogalom önálló vizsgálata, a „csoportelmélet" rendkívül termékenynek bizonyult: a modern algebrának ez a magva, és a mai fizika is felhasználja; a különböző geometriák pedig egyenesen egy-egy csoport elméletének foghatók fel.

A csoportok maguk is bizonyos tulajdonságú „halmazok", és ez az a fogalom, amivel a matematika különböző területein lépten-nyomon találkozunk. Szinte elkerülhetetlen, hogy hol ponthalmazokról, hol számhalmazokról, hol bizonyos függvények halmazáról mondjunk ki valamit, amikor a matematikáról beszélünk.

Cantor tette önálló vizsgálódás tárgyává ezt a fogalmat: az úgynevezett „halmazelmélet" az ő alkotása.

Emlékezzünk vissza egy kicsit: beszéltünk például a racionális számok halmazáról, az ennek megfelelő ponthalmazról a számvonalon, és megállapítottuk, hogy e halmaz minden egyes pontja „sűrűsödési hely". Ez nagyon fontos fogalom a ponthalmazok elméletében: akkor nevezünk egy pontot egy halmaz sűrűsödési helyének, ha még oly szűk környezetébe is mindig esik valami pont a halmazból.

Már arra is láttunk példát, hogy milyen módszerekkel dolgozik a ponthalmazelmélet; hadd frissítsem ezt föl egy újabb példán.

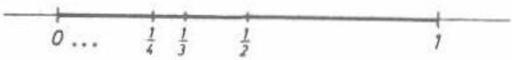
Az

$$1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad 5, \quad \ldots$$

természetes számok végtelen sokan vannak, mégsem sűrűsödnek sehol: mindig egész egységekkel lépdelnek tovább. De ha végtelen sok számot egy véges számközben zsúfolunk össze, mint ahogyan az

$$1, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{5}, \ldots$$

sorozat tagjai valamennyien benne vannak a 0-tól 1-ig terjedő számközben:

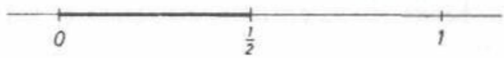


akkor e számközben biztosan van valahol sűrűsödési helyük.

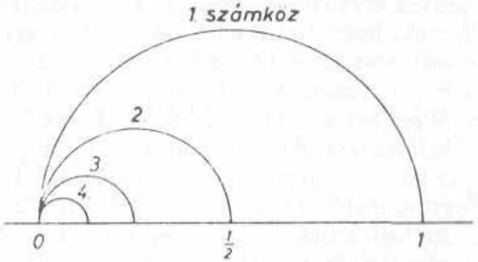
Ezt teljes általánosságban így lehet bebizonyítani: tegyük fel, hogy egy végtelen halmaz minden pontja a 0-tól 1-ig terjedő számközbe esik:

hogy hová, az mindegy. Felezzük meg ezt a számközt. Legalább az egyik felébe még mindig végtelen sok pontja esik a halmaznak, mert ha mindkét felében csak véges sokan volnának, mondjuk, 1 millió az egyikben, 10 millió a másikban, ez összesen is csak 11 millió volna, tekintélyes, de véges szám. Az előbb felhozott példában a számköz bal felébe esik végtelen sok pont.

Most tehát az eredeti számköz helyett vegyük szemügyre azt a felét, amelyben a halmaznak végtelen sok pontja van – vagy bármelyik felét, ha mindketten ilyenek. Mondjuk, hogy ez lesz az új számköz:



Erre tökéletesen megismételhetjük az iménti gondolatot: áttérhetünk róla a saját egyik felére: egy olyan felére, amelyikben még mindig végtelen sok halmazpont lesz; és ezt a felezést folytathatjuk a végtelenségig. Így egymásba skatulyázott egyre szűkebbre zsugorodó számközökhöz jutunk; példánkban:



Könnyen belátható, hogy e számközök hosszúsága 0-hoz konvergál; itt ismét a tréfás csomaggal van dolgunk, amelynek minden burkolatán belül egy újabb burkolat van, és mindannyiuk közös mélyén egyetlen papírgombóc: itt is beláthatjuk, hogy egyetlen pont fog beleesni valamennyi számközbe. Ez a pont biztosan sűrűsödési helye lesz a halmaznak, mert bármilyen szűk környezetébe is beleesnek a még szűkebbre zsugorodott számközeink, és ezekben nem is egy, hanem végtelen sok pontja is van a halmaznak.

Most érkeztünk el a tudásnak arra a magas fokára, amelyen már arra is megfelelhetünk: hogyan fog a matematikus oroszlánt. A kísérleti fizikusok oroszlánfogási módszere közismert, hiszen ezt minden kezdő megértheti és alkalmazhatja: a kísérleti fizikus ráönti a Szaharát mindenestül egy szitára és ami átmegy, az a Szahara, ami fönnmarad, az az oroszlán. A matematikus viszont módszeresen jár el, a következőképpen:

Két esetet kell megkülönböztetni.

1. eset: Az oroszlán nyugalomban van.

Ekkor készítsünk egy alul nyitott ketrecfélét, amelybe az oroszlán belefér. Majd osszuk a Szaharát két egyenlő részre. Legalább az egyikben benne lesz az oroszlán (ha ti. a határvonalon nyugszik, akkor mind a kettőben benne lesz). Most vegyünk szemügyre egy ilyen fél Szaharát. Ezt is felezzük meg: legalább az egyik felében hever az oroszlánunk. És így tovább. Ezeket a felezéseket folytatva, egyre szűkülő egymásba skatulyázott területekhez jutunk; előbb-utóbb valamelyik terület már szűkebb lesz, mint a ketrec alapja, és ebben is benne van az oroszlán. Helyezzük rá ketrecünket: megfogtuk az oroszlánt.

2. eset. Az oroszlán mozog.

Akkor ez a módszer nem alkalmazható.

Pont.

Ennyit a ponthalmazelméletről.

Olyan halmazelméleti bizonyításokkal is megismerkedtünk már, amelyek nemcsak ponthalmazokra érvényesek. Például az az összepárosítási módszer, amellyel megállapítottuk, hogy a racionális számok halmaza ugyanolyan számosságú, mint a természetes számoké, az irracionális számok számossága viszont nagyobb a racionális számokénál, bármilyen más halmazokra is alkalmazható; hiszen ha jól emlékszem, táncoló fiúk és lányok halmazáról tértünk át e kevésbé vidám halmazokra. Amit halmazok számosságáról mondunk ki, az mind egyaránt igaz lehet a táncoló párok, a valós számok vagy akár a magyar nyelven megfogalmazható mondatok halmazára is. Cantor ilyen általánosságban foglalkozott halmazokkal. Egy sereg szép tételt bizonyított be a végtelen halmazok számosságáról, a véges számfogalom e kiterjesztéséről a végtelenbe. Megmutatta például, hogy nemcsak két különböző számosság van: a természetes számsoré és a valós számoké; nincs olyan nagy számosságú halmaz, amelynél még nagyobb számosságú ne volna. Babits „a végtelen tornyos épületeinek" nevezte e mind magasabbra tornyosuló számosságokat. És Cantor ezek közt műveleteket is vezetett be: összeadást, szorzást, a mi kicsi számaink közötti műveletek képmására. Ez az igazi nagy játék: a játék a végtelennel. Úgy látszott, hogy ennél magasabbra már nem hághat az emberi szellem.

És ekkor megingott az egész épület.

A matematikában, ebben a szinte unalmasan biztosnak hitt tudományban, a múlt század végén ellentmondások bukkantak fel. Éppen ott, ahol a legmagasabbra emelkedett: a halmazelméletben kerültek napfényre a sebezhető pontjai.

A sok ellentmondás közül elmondok egyet, a legkomolyabbat: az úgynevezett Russel-féle antinómiát. Először a köztudatba is átment tréfás fogalmazásban.

A hadsereg egy szakaszának borbélyát így lehet definiálni: ő az a tagja a szakasznak, aki köteles szakaszában mindazokat borotválni, akik egyedül nem borotválkoznak, de – időkímélés céljából – tilos neki azokat is borotválni, akik egyedül borotválkoznak. A kérdés az, hogy ez a katona borotválja-e önmagát vagy sem.

Ha igen, akkor ő egyike azoknak, akik egyedül borotválkoznak, s egy ilyet tilos megborotválnia.

Ha nem, akkor ő is azok közé tartozik, akik nem borotválkoznak egyedül, és aki ilyen, azt köteles megborotválni.

Nincs mit tennie.

Persze, egy ilyen tréfában már a fogalmazás is pontatlan. Lássuk a komolyabb példát.

Egy halmaz rendesen nem eleme önmagának. Például a természetes számok halmazának elemei számok és nem halmazok, így ő maga, halmaz lévén, nem tartozhatik a saját elemei közé.

De az is megeshetik, hogy egy halmaz elemei közé halmazok is tartoznak. Például képzeljük el az összes lehetséges számhalmazt, és ezek együttesét tekintsük egyetlen halmaznak. Az így nyert halmaznak egyik eleme például a természetes számok halmaza, egy másik eleme a 10 alatti számoké és így tovább; minden eleme egy-egy halmaz. De ő maga mégsem tartozik az elemei közé, hiszen az ő elemei csupa számból álló halmazok, ő maga pedig csupa halmazból álló halmaz.

De ha most minden elképzelhető halmazt fogunk össze egyetlen halmazzá, akkor már példánk van olyan halmazra, amely maga is az elemei közé tartozik. Hiszen ő maga is halmaz, és minden halmaznak elő kell fordulnia az elemei közt.

Aki úgy érzi, hogy ezt már fáradságos lesz végiggondolni, az ne is gondolja végig; nem lesz rá szükség a továbbiakban. Elég, ha ezt az álláspontot foglaljuk el: egy rendes halmazban nincsenek ilyen furcsaságok. Nevezzünk tehát „rendesnek" egy halmazt, ha ő maga nem szerepel az elemei közt és ne törődjünk azzal, hogy van-e más halmaz is a világon. Képzeljük el, hogy valamennyi „rendes" halmazt fogunk össze egyetlen nagy halmazzá.

De ármost az így nyert halmaz maga „rendes" lesz-e?

Ha „rendes", akkor ő maga is, mint minden „rendes" halmaz, az elemei közé tartozik. Hopp, de hiszen ez rendellenesség!

Ha nem „rendes", akkor elemei közt – hiszen azok mind „rendes" halmazok – nem is foglalhat helyet. De hiszen ez az, amit rendesnek neveztünk!

Tehát, ha rendes, akkor rendellenes, ha rendellenes, akkor rendes; mindenképpen ellentmondáshoz jutottunk.

És ezen nem lehet segíteni.

Ezt sem lehet mondani: a halmazelmélet elhamarkodottan szárnyalt fölfelé, ejtsük el az egészet, és térjünk vissza a matematika szerényebb, de biztosabb területeire. Hiszen mi tudjuk, hogy honnan szűrődött le a halmazelmélet: ott bujkálnak a gondolatai a matematika minden ágában. Ha a halmazelméletben hiba van, akkor már semmit sem érezhetünk sebezhetetlennek.

Máig sem ültek el a megrázkódtatás hullámai.

A matematikusok olyan állást foglalnak vele szemben, ahogyan emberek általában tartós veszély esetén viselkedni szoktak. A legtöbben gondolni sem akarnak rá, ki-ki maga mesterségét folytatja, idegesen tiltakoznak, ha valaki mégis szóba hozza a veszélyt.

Néhányan pedig megpróbálják menteni a helyzetet.

Természetesen először magában a Russel-féle antinómiában keresték a hibát. Maga Russel is így vélte, hogy az ebben szereplő halmaz definíciója helytelen. „Circulus vitiosus" a definíció, mert maga a definiálandó halmaz is belejátszik: minden „rendes" halmazt csak akkor foghatnánk össze egyetlen halmazzá, ha már az így keletkező halmazról is eldöntöttük volna, hogy rendes-e, s így beveendő-e az elemek közé.

Sajnos azonban, a matematika minden ága lépten-nyomon él ezzel a „circulus vitiosus"-szal; már a természetes számok körében is szokásos az ilyen definíció: „vegyük szemügyre a legkisebb olyan számot, amelynek ilyen és ilyen tulajdonságai vannak". Ez a szám is belejátszik a saját definíciójába: a legkisebbet csak valamennyi ilyen tulajdonságú szám közül választhatjuk ki; valamennyi közt pedig ő is ott van.

A legradikálisabb mentési kísérlet az úgynevezett intuicionistáké. (Az „intuicionizmus" elnevezés itt nem éppen szerencsés; ne kutassuk az értelmét.) Ez az irány öregebb, mint az antinómiák, de az antinómiák új lendületet adtak neki. Az új intuicionizmus Brouwer nevéhez fűződik. Ő elveti az egész addigi matematikát, és új, biztosabb alapokon próbálja felépíteni. Csak azt fogadja el, amit valami módon meg is lehet konstruálni; hiszen amit megkonstruáltunk, az tagadhatatlanul megvan, azt többé nem tehetik antinómiák nem létezővé. Elveti a „puszta egzisztenciabizonyításokat", például az algebra alaptételének régi bizonyítását, mert ez nem ad módot az egyenlet gyökeinek megkonstruálására. Nem akar tudni „aktuális végtelenről", hiszen egy halmaznak mindig csak véges sok elemét tudjuk megkonstruálni, ha ez határtalanul folytatható is. A végtelen halmaz tehát szerinte csak „potenciálisan végtelen": mindig a keletkezés stádiumában van, és sohasem tekinthető befejezettnek, lezártnak.

A klasszikus matematikából így csak romok maradnak fenn, és ami mégis megmarad, azt szinte áttekinthetetlenül elkomplikálja a tényleges konstrukció véghezvitele minden egyes speciális esetben.

Igazi mentési akciónak csak Hilberté tekinthető. Ennek a jelentősége túlnőtt a puszta veszélyelhárításon: a matematikának egy új, termékeny ága született belőle. Erről lesz szó a továbbiakban.

20. ÖNÁLLÓSUL A FORMA

Nem kell azt hinni, hogy a halmazelmélet ma is az antinómiák terhét vonszolja magával. Amikor itt volt az ideje (égetően sürgőssé éppen az ellentmondások tették), hogy az eredeti „naiv" halmazelméletet rendbe szedjék, az axiómarendszerét felállítsák, volt rá gondjuk a matematikusoknak, hogy elég szűken határolják körül az alapfeltételekben a halmazfogalmat. Úgy, hogy belül maradt mindaz, ami a halmazelméletben értékes, a bajt okozó halmazok azonban kívül rekedtek. De ez eléggé mesterséges rendszabálynak látszik; Poincaré hasonlatával élve, kerítést vontunk a nyáj körül, hogy megóvjuk a farkasoktól, de nem tudhatjuk, hogy nem rejtőzött-e el néhány farkas a kerítésen belül is. Újabb ellentmondások felbukkanása ellen semmiképpen sem vagyunk biztosítva.

Korunk egyik legnagyobb matematikusa, Hilbert, életének utolsó 20 esztendejében azt a célt tűzte ki maga elé, hogy bevilágítson minden zugba, ami az axiómák kerítésén belül esik. Ő is elismeri, hogy a „circulus"-os definíciókkal, a „puszta egzisztenciabizonyításokkal", az „aktuális végtelennel" szemben felhozott aggodalmak jogosak, mindezekben ott rejtőzhetik a veszély. De miért dolgozunk ilyen veszélyes, véges eszünket meghaladó, „transzfinit" fogalmakkal? Jó okunk van rá, és nem is fogunk kényszerítő ok nélkül lemondani róla. Ezek teszik lehetővé, hogy nagy, átfogó elméleteket építsünk ki, hogy összefüggéseket derítsünk fel távoli területek között. Jól rávilágít erre az intuicionizmus felaprózódó, részekre széthulló matematikája. Nem akarjuk elejteni a veszélyes fogalmakat, amelyek egyetlen hatalmas épületté forrasztják össze a matematikát.

A transzfinit eszközök olyan szerepet játszanak a logikánkban, mint a végtelen távoli egyenes, vagy az „*i*" a matematikán belül: ezeket a logika „ideális elemeinek" tekinthetjük. És úgy kell bánni velük, mint az ideális elemekkel: bevezetni, ha hasznosnak bizonyulnak (és milyen hasznosnak bizonyultak!), de gondosan megvizsgálni, hogy nem kerülhetnek-e ellentmondásba a régi szabályainkkal. Ennélfogva a feladat, ami ezen a téren még vár ránk: a transzfinit eljárások ellentmondás-mentességének megvizsgálása.

Hilbert tehát magát a matematikára alkalmazott logikát: a következtetéseket, bizonyításokat akarja precíz matematikai vizsgálódás tárgyává tenni. Ennek első feltétele az, hogy megtisztítsuk őket minden esetlegességtől, ami a pontatlan nyelvi kifejezés mellett rájuk tapad, hogy kifejtsük belőlük a félreérthetetlen, tiszta formát.

A számok is csak úgy válhattak pontos viszgálódás tárgyává, hogy nem 5 ujjról, 5 almáról, 5 mondatról beszéltünk többé, hanem arról a puszta formáról, ami mindezekben közös: ezt neveztük a számuknak, és jelöltük az 5-ös jellel. Ha az állításokat akarjuk vizsgálódásunk alá vonni, ezeknek a tartalmától is el kell tekintenünk; az ilyen állításokban: „2·2 = 4", „két ponton át egy egyenes húzható", „a hó fehér" pusztán az érdekel minket, ami mindannyiukban közös: hogy igazak, és erre is bevezethetünk egy új jelet; pl. ezt:

$$\uparrow.$$

A „2·2 = 5", „két egyenes két pontban metszi egymást", „a hó fekete" állítások közös logikai értéke az, hogy mind hamisak; ennek a jele ez lehet:

$$\downarrow$$

(mint a régi római cirkuszban a feltartott és a lefelé fordított hüvelykujj: az előző állításoknak megadjuk a felmentést, az utóbbiaknak nem).

A matematikában csak olyan állítások érdekelnek minket, amelyek felveszik e két logikai érték egyikét (szóval: igazak vagy hamisak).

Itt tehát egy sokkal egyszerűbb számtan van alakulóban, mint akár a természetes számoké: még a természetes számok is végtelen sokan voltak, itt pedig mindössze két érték szerepel.

Nagyon könnyű lesz itt felírni a műveletek egyszeregyét.

Mert igazán számolásról van szó; logikai műveletek is lesznek: olyan összekapcsolásai az egyes állításoknak, amelyekkel a matematikában lépten-nyomon élünk.

Hogy melyek ezek a kapcsolatok, azt igen egyszerű módon eldöntheti bármely matematikus, hacsak nem beszél a világ minden kultúrnyelvén. Nem kell mást tennie, mint elővenni egy ismeretlen nyelven írt matematikakönyvet, és megfigyelni, hogy milyen szavakat kénytelen kikeresni a szótárból olvasás közben. Meglepve fogja tapasztalni, hogy ha a

„nem", „és", „vagy", „ha, akkor", „akkor és csak akkor",
„minden", „van olyan", „az, amelyik"

kifejezéseket már jól begyakorolta, egy idő múlva észre sem veszi, hogy idegen nyelvű könyvet olvas, folyékonyan ért mindent. Hiszen a képletek nemzetköziek, a szöveg csak hangsúlyoz, erre nincs elkerülhetetlenül szükség; a nélkülözhetetlen logikai kapcsolatok pedig ott vannak a felsorolt néhány szócskában.

Hogy szól például a „nem" szócska egyszeregye? Ez igen egyszerű: egy igaz állítás tagadása (például: „2·2 *nem* egyenlő 4-gyel") természetesen hamis, egy hamis állítású (például „2·2 *nem* egyenlő 5-tel") igaz, tehát az egész egyszeregy ebből áll:

$$\text{nem } \uparrow = \downarrow$$
$$\text{nem } \downarrow = \uparrow .$$

A „nem" szócskát szokás ilyen – ugyancsak lefelé fordított – kampóval rövidíteni:

$$\neg ,$$

tehát pl.

$$\neg\ (2 \cdot 2 = 5)$$

a tagadása annak, hogy $2 \cdot 2 = 5$. E jelöléssel a „nem" egyszeregye:

$$\neg \uparrow = \downarrow$$
$$\neg \downarrow = \uparrow .$$

Könnyen felírhatjuk az „és"-nek megfelelő logikai művelet egyszeregyét is. Ha két igaz állítást „és"-sel kapcsolunk össze, akkor ismét igaz állítást kapunk, pl. „$2 \cdot 2 = 4$ és két ponton át egyetlen egyenes húzható" ugyancsak igaz. Tehát

$$\uparrow \text{ és } \uparrow = \uparrow .$$

De ha csak az egyik is hamis a két összekapcsolt állítás közül, az már elront mindent: „$2 \cdot 2 = 4$ és $2 \cdot 3 = 7$" hamis állítás, hiába van egy igaz részlete is. Két hamis állítás összekapcsolása „és"-sel persze annál inkább hamis. Tehát az egyszeregy így folytatódik:

$$\uparrow \text{ és } \downarrow = \downarrow$$
$$\downarrow \text{ és } \uparrow = \downarrow$$
$$\downarrow \text{ és } \downarrow = \downarrow .$$

És ezzel már ki is merítettünk minden lehetőséget; ez szép véges egyszeregy, sokkal könnyebb, mint a szorzásé.

Hát a „vagy" egyszeregye? Tisztáznunk kell előbb, hogy miféle „vagy"-ra gondolunk. Mert a nyelvi kifejezés itt már sokértelmű.

„Vagy bolondok vagyunk s elveszünk egy szálig,
Vagy ez a mi hitünk valóságra válik"

– az egyik bizonyosan be fog következni, de mindkettő semmi esetre: ezek kizárják egymást.

„Ha a Szaharát kettéosztjuk, egyik vagy másik felében ott hever az oroszlán" – valamelyik felében biztosan, de az is lehet, hogy mindkettőben (ha éppen a határvonalon nyújtózkodik).

„Vagy beszél az ember, vagy eszik" – ez a kettő kizárja egymást, de egyiknek sem kell okvetlenül bekövetkeznie: mást is tehet a szájával az ember, megeshetik például, hogy ki sem nyitja.

A matematikában legtöbbször a második értelemben használatos a „vagy szócska, azaz, a „vagy"-gyal összekapcsolt állítások itt akkor tekinthetők igaznak, ha *legalább* az egyik állítás igaz, megengedve azt is, hogy mindketten azok, csak azt zárva ki, hogy egyikük sem az. Eszerint a „vagy" művelet egyszeregye:

$$\uparrow \text{ vagy } \uparrow = \uparrow$$
$$\uparrow \text{ vagy } \downarrow = \uparrow$$
$$\downarrow \text{ vagy } \uparrow = \uparrow$$
$$\downarrow \text{ vagy } \downarrow = \downarrow.$$

Ha már megvan az egyszeregy, ezt tekinthetjük a „vagy" logikai művelet definíciójának, és így ebből már kitisztultak a nyelvi esetlegességek: ezt a kapcsolatot már csak egyféleképpen lehet érteni. A másik két értelemben vett „vagy" aztán a mi „vagy"-unk felhasználásával ugyancsak precízen megfogalmazható.

Világos, hogy itt is vannak „műveleti szabályok"; például az „és" műveletben is, a „vagy" műveletben is felcserélhető a két állítás sorrendje, csakúgy mint a tényezők a szorzásban.

Nem akarom egészen kimeríteni ezt a tárgyat, bár a két logikai érték adta kevés számú lehetőséget elég hamar ki lehetne meríteni.

Inkább arra mutatok példát: hogyan lehet itt „számtant" űzni. Például tudjuk, hogy egyetlen alap hatványait úgy szorozhatjuk egymással, hogy a kitevőket összeadjuk, ez esetben tehát a szorzást összeadásra vezethetjük vissza. Vajon van-e ilyen összefüggés a logikai műveletek között is?

Vegyünk egy példát az annyira kedvelt detektívregények köréből. Próbáljuk kitalálni: ki a tettes? – a következő tényállásból:

Egy gyilkossági pernek két gyanúsítottja van: Péter és Pál. Négy tanút hallgatnak ki. Az első így vall:

„Én csak azt tudom, hogy Péter ártatlan."

A második így:

„Csak annyit tudok, hogy Pálnak ártatlannak kell lennie."

A harmadik:

„Tudom, hogy az első két vallomás közül *legalább* az egyik igaz."

A negyedik:

„Teljes bizonyossággal állíthatom, hogy a harmadik tanú hamisan vallott."

És a tények a negyedik tanút igazolják. Hát ki a tettes?

Bontogassuk csak le, fokozatosan haladva visszafelé: a negyedik vallomás igaznak bizonyult, tehát a harmadik tanú csakugyan hamisan vallott. Szóval nem igaz, hogy az első két vallomás közül *legalább* az egyik igaz. Egyik sem lehet igaz. Az sem, hogy Péter ártatlan, az sem, hogy Pál. Tehát mindketten gyilkosok: tettestársak voltak.

Most hámozzuk ki a gondolatmenet logikai magvát.

Hiába ismerem a vallomásokat, a logikai értéküket ismeretlennek kell tekintenem, hiszen nem tudom róluk, hogy igazak-e. Nevezzük az első két tanú állításának logikai értékét x-nek, illetőleg y-nak. A harmadik tanú azt vallotta, hogy ezek közül *legalább* az egyik igaz, vagyis – hiszen a mi „vagy" műveletünk éppen ezt a „legalább"-ot fejezi ki – hogy

$$x \text{ vagy } y$$

igaz állítás. Ezt tagadta a negyedik tanú és a tagadás jele $\neg$, tehát szerinte ez az igazság:

$$\neg\,(x \text{ vagy } y).$$

Amikor végiggondoltuk, kiderült, hogy ez egyértelmű azzal, hogy az első vallomásnak is és a másodiknak is éppen az *ellenkezője* igaz, vagyis az igazság ez:

$$\neg\,x \text{ és } \neg\,y.$$

Tehát a gondolatmenet logikai tartalma az, hogy akár igaz az x és az y, akár nem igazak, a

$$\underline{\underline{\neg\,(x \text{ vagy } y)}}$$

állítás mindig egyértelmű a

$$\underline{\underline{\neg\,x \text{ és } \neg\,y}}$$

állítással, és így egy „vagy"-kapcsolatról egy „és"-kapcsolatra lehet áttérni és viszont.

Persze általában nem tréfákon át vezet az út ilyen összefüggésekhez. A helyességüket egész gépies módon ellenőrizni lehet: x és y helyébe a lehetséges $\uparrow$, illetve $\downarrow$ értékeket írva, ki lehet próbálni, hogy ugyanazt az eredményt adja-e mindig a fenti két állítás. Összesen négy lehetőséget kell így kipróbálni: lehet, hogy

1) mind x, mind y értéke ↑,
2) x értéke ↑, de y értéke ↓,
3) x értéke ↓, de y értéke ↑,
4) mind x, mind y értéke ↓.

Próbálkozzunk az elsővel: mi lesz a

$$\neg\,(x \text{ vagy } y)$$

állításából, ha x is, y is ↑ ? A „vagy" egyszeregye szerint (nem kell gondolkozni rajta, tessék megnézni)

$$\uparrow \text{ vagy } \uparrow\, = \,\uparrow;$$

így ez esetben

$$x \text{ vagy } y = \uparrow,$$

tehát ekkor a

$$\neg\uparrow$$

állítással van dolgunk, ez azonban a „nem" egyszeregye szerint

$$\underline{\underline{\downarrow}}\,.$$

Hát a

$$\neg\, x \text{ és } \neg\, y$$

állításnak mi lesz az értéke, ha x is, y is ↑ ? Ekkor

$$\neg\, x = \neg\uparrow\, = \,\downarrow$$

és

$$\neg\, y = \neg\uparrow\, = \,\downarrow,$$

tehát a

$$\downarrow \text{ és } \downarrow$$

állítással van dolgunk és ez az „és" egyszeregye szerint ugyancsak

$$\underline{\underline{\downarrow}}\,.$$

Ugyanígy lehet kimutatni a másik három esetben is, hogy a vizsgált két állítás valóban egyenértékű.

Itt is lehet algebrát csinálni: gondolni egy állítást, mindenféle logikai műveletet csinálni vele, végül megmondani, hogy igaz állításhoz jutottunk-e vagy hamishoz, és azt kívánni: ebből találják ki, hogy a gondolt állítás igaz volt-e, vagy hamis. Itt különösen nagy jelentősége van a következő fajta játéknak:

„Gondolj egy állítást, ezt és a saját tagadását kapcsold össze „vagy"-gyal; most semmit sem kell elárulnod és én mégis megmondom: mindenképpen igaz eredményre jutottál." Ezt így lehet jegyezni: a gondolt állítás x, a tagadása $\neg$ x, ezéknek összekapcsolása „vagy"-gyal:

$$x \text{ vagy } \neg x,$$

és erről állítom azt, hogy mindenképpen ↑ az értéke, akár ↑ volt x, akár ↓. Próbáljuk ki:

Ha x értéke ↑, akkor a „nem" egyszeregye szerint

$$\neg x = \neg \uparrow = \downarrow,$$

tehát az

$$\uparrow \text{ vagy } \downarrow$$

állítással van dolgunk; tessék megnézni a „vagy" egyszeregyében, hogy ennek az értéke csakugyan ↑.

Ha pedig x értéke ↓, akkor $\neg x = \neg \downarrow = \uparrow$ a „nem" egyszeregye szerint, tehát erről az állításról van szó:

$$\downarrow \text{ vagy } \uparrow,$$

és a „vagy" egyszeregye azt mondja, hogy ez ugyancsak ↑.

Vannak tehát olyan kapcsolatok állítások között, amelyek a bennük szereplő állításoktól egész függetlenül – nemcsak a tartalmuktól, de még a logikai értéküktől sem függően – mindig igazak. Ezeket tisztán a logikai struktúrájuk teszi igazzá; logikai identitásoknak hívják őket. És ezek azok az állítások, amelyek döntő szerepet játszanak a matematikában.

Játszhatunk tovább úgy is, hogy nem az egész állítás ismeretlen, csak az alanyát nem áruljuk el. Például: „Gondoltam egy számot, azt állítom, hogy ez páros. Most ezzel az állítással csinálok mindenféle műveletet". Az állítás így jegyezhető:

„x páros."

Hogy egy ilyen állítás igaz-e, vagy hamis, az természetesen attól függ, hogy mi az x. Ha pl. $x = 4$, akkor az állítás igaz, ha $x = 7$, akkor hamis. Itt tehát olyan állítással van dolgunk, amelynek értéke x-nek függvénye; és így eljutottunk a logika függvénytanához.

Azonnal gyárthatunk többváltozós logikai függvényt is: „Gondoltam három pontot és azt állítom, hogy ezek egy egyenesen feküsznek". Ez az állítás így jegyezhető:

„x, y, z egy egyenesen fekszik"

– és logikai értéke az x, y és z pontok megválasztásától függ. Ha három ilyen pontot választunk:

akkor igaz, ha három ilyet:

akkor hamis. Itt fel kell figyelnünk arra, hogy az ismeretlenek nem akárhogyan választhatók: az első példánkban a természetes számok közül kellett választani x-et, a másodikban x, y és z a sík vagy a tér pontjai közül került ki. De hiszen matematikai függvényeink körében is így volt ez már: ott is meg kellett mondani, hogy az ismeretlen milyen halmazból választható. Ezt a halmazt itt a szóban forgó függvény „individuum-tartományának" nevezik.

És most jönnek be a veszélyes műveletek: ezeket éppen a logikai függvényekre alkalmazzuk. Ilyen pl. a „minden" szócska. Az első logikai függvényünkre alkalmazva:

„Minden x mellett x páros"

(persze ez úgy értendő, hogy a természetes számok közül vett minden x mellett) mindenesetre állítást kapunk, ha hamisat is, hiszen egy pillanat alatt adhatunk rá ellenpéldát: például 5 nem páros. Tehát

„Minden x mellett x páros" $= \downarrow$.

Ha viszont a „van olyan" szócskát alkalmazzuk függvényünkre:

„Van olyan x, amely mellett x páros"

már igaz állítás lesz:

„Van olyan x, amely mellett x páros" $= \uparrow$.

Látjuk tehát, hogy akár a „minden", akár a „van olyan" szócska olyan logikai műveletet jelent, amelyeket logikai függvényekre alkalmazhatunk, és eredményül egy határozott értékű állítást adnak. A mi példánkban a „minden"-nel kezdődő állítás értéke $\downarrow$ volt, egész határozottan (x-től többé nem függően), a „van olyan"-nal kezdődőé pedig egész határozottan $\uparrow$.

Ezek az új műveletek pedig már behozzák a transzfinit elemet. „Az individuum-tartomány *minden* elemére igaz valami" – ha az individuum-tartomány végtelen, például a természetes számok, vagy a sík pontjainak halmaza, itt olyan hangot ütünk meg a végtelennel szemben, mintha az készen és lezártan a kezünkben volna. „*Van olyan* x egy végtelen individuum-tartományban" – mintha végig tudnók járni e végtelen tartományt, hogy megkeressünk benne egy ilyen x-et. Az előbbi módon mondunk ki tételeket az „aktuális végtelenről", az utóbbi módon hangzanak el „puszta egzisztenciaállítások": „van olyan"-kijelentések anélkül, hogy a szóban forgó individuumot elő is tudnók állítani. Így jönnek be a logikába az „ideális elemek", amelyek csak az ellentmondás-mentesség bizonyítása után nyerhetnek polgárjogot.

A logikai függvénytan állításai persze ugyanolyan egzakt módon megfogalmazhatók, mint akár az

$$x \text{ vagy } \neg x$$

identitás. Hogy a nyelvi kétértelműségnek árnyéka se tapadhasson tovább e tiszta logikai állításokhoz, jobb az eddigi használt szavak helyett is jeleket vezetni be, ahogy ezt a „nem" szócskával már meg is tettük. Így jönnek létre a szimbolikus logikának immár igazán nemzetközileg olvasható könyvei, amelyekben hosszú oldalakon át egyetlen szó sem fordul elő, csak jelek sorozatai. És a szakember úgy kiérzi belőlük a szöveget, mint a muzsikus a dallamot, ha kottát olvas.

Már Leibniz kezdte meg egy tiszta és félreérthetetlen logikai jelbeszéd kiépítését; ezt sokan formálták tovább, míg végre Hilbert, munkatársa, Bernays segítségével a mai hajlékony és finom eszközzé nem csiszolta, amely olyan egzakt formát adhat a matematika következtetési módjainak, hogy ezek így már matematikai vizsgálódás tárgyává lehetnek.

21. A FELETTES-MATEMATIKA ÍTÉLŐSZÉKE ELŐTT

Most itt az ideje, hogy elővegyük a matematika egy jól körülhatárolt ágát és megvizsgáljuk: lehetnek-e benne ellentmondások?

Hogy mi a körülhatárolás módja, azt már tudjuk: ki kell hámozni az idevágó tételek alapfeltételeit, az axiómákat, és akkor mondhatjuk, hogy az egész tudományág abból áll, ami ezekből az axiómákból levezethető.

Az axiómákat a szimbolikus logika nyelvén írhatjuk le, így azok egyetlen félreérthető szó nélkül, néhány matematikai és logikai jel egymásutánjából állnak.

Most még ezt kell megvizsgálnunk: mit jelent az, hogy valami az axiómákból „levezethető"? Vagyis a következtetés lépéseit kell még precízen megfogalmaznunk.

Amikor egy állítás helyességéből egy másik állítás helyességére következtetünk, és ezt a mi szimbolikus írásmódunkkal jegyezzük, egyszerűen bizonyos jelek egymásutánjáról valami más jelsorozatra térünk át. Emlékezzünk csak vissza az egyenletek megoldására, az is ilyen lépésekből állt: például az

$$\frac{5x}{2} + 3 = 18$$

jelsorozatról az

$$\frac{5x}{2} = 15$$

jelsorozatra volt célszerű áttérni. Ezt először jól meggondoltuk, mondván: ha valamiből 3 hozzáadása után 18 lett, akkor azelőtt 15 volt. De azután megfigyeltük, hogy a két jelsorozat közt *formailag* mindössze az a különbség, hogy az első jelsorozat bal oldalán még volt egy 3-as összeadandó, és ennek már nincs nyoma a második jelsorozatban, viszont a jobboldali szám a második jelsorozatban 3-mal kevesebb, mint az elsőben. Ebből azt a pusztán *formai* szabályt vontuk le, hogy szabad az egyenlet egyik oldaláról egy összeadandót kivonandóul vinni át a másik oldalra – és ezentúl minden igazi meggondolás nélkül alkalmaztuk ezt a szabályt. A tartalmilag is átgondolt következtetésből így gépies „játékszabály" lett: „Szabad bizonyos jeleket így és így megváltoztatva, innen oda vinni". Olyan ez, mint a sakkjáték szabályai: szabad a királlyal bármely irányban lépni egyet.

Hát ezt tehetjük meg általában, amikor axiómáinkból tovább következtetünk: megnézzük, hogy a következtetés milyen *formai* változtatásnak felel meg a jelsorozatainkban, és ezt a formai változtatást ezentúl minden tartalmi meggondolás nélkül alkalmazzuk.

Ezek után akár teljesen el is felejthetjük, hogy miről van szó a kérdéses tudományágban és ezt mondhatjuk: van néhány értelmetlen jelsorozatunk (ezeket nevezzük axiómáknak) és néhány játékszabályunk, amely megmondja, hogy egy adott jelsorozatról milyen más jelsorozatra szabad áttérnünk (ezeket nevezzük következtetési szabályoknak). Így most már csakugyan olyan hajlékony és engedelmes anyaggá vált a tételek és bizonyítások e rendszere a matematikus kezében, mint akár a számok: kipróbálhatja rajtuk a matematika jól bevált eljárásait.

Ezeket az eljárásokat azonban már korántsem szabad gépiesen, játékszabályok szerint alkalmaznia. Jól meg kell gondolnia minden egyes lépését: vajon ez vitathatatlanul megengedett következtetés-e, nem csúsztak-e bele veszélyes elemek? Egy percig sem szabad szem elől vesztenie a célt: ő a transzfinit elemek használatának jogosultságát akarja igazolni a vizsgált tudományágban; semmi hitele sem volna egy ilyen igazolásnak, ha ő maga is ugyanolyan veszélyes elemekkel dolgoznék. Olyan tisztán kell tartania az eszközeit, hogy ezekben még a legaggodalmaskodóbb intuícionista se találhasson kivetnivalót.

Így kettéhasad a matematika: egyrészt teljesen formális rendszerekre, formai játékszabályokkal következtetések helyett, másrészt egy minden lépésének tartalmát jól meggondoló, csak veszélytelen következtetéseket alkalmazó felettes-matematikára, az ún. „metamatematikára", amely mintegy felülről vizsgálja a formális rendszereket és főcélja: a vizsgált tudományágak ellentmondástalanságának bizonyítása.

De ha azt kutatjuk, hogy nem juthatunk-e játékszabályaink útján valamilyen ellentmondáshoz, nem kell-e akkor mégis megvizsgálnunk a rendszer állításainak a tartalmát is? Hiszen azt hihetnők, hogy egy mondatnak nem a formája, hanem a tartalma az, hogy ellentmondás van benne.

Ezen az segít, hogy elég egyetlen ellentmondásra szorítkoznunk, például – ha a természetes számok beletartoznak a rendszerbe – erre:

$$1=2.$$

Ezt az egyszerű jelsorozatot a formájáról is megjegyezhetjük: tudomásul vesszük, hogy egy 1-es, egy „=" jel és egy 2-es egymásutánja ellentmondást jelent. Többre pedig nincs is szükségünk. Egyszer már volt szó arról, hogy vannak tréfák, amelyek azt bizonyítják be, hogy $1=2$, és már ott megemlítettem, hogy ha csak egyetlen ellentmondó állítást csempészünk is be a következtetésbe, akkor már minden levezethetővé válik, még az is, hogy $1=2$. Elég tehát azt bizonyítanunk, hogy ez az egyetlen $1=2$ formula nem vezethető le a rendszerben; akkor már bizonyos, hogy abba semmi módon sem lopakodhattak be ellentmondások.

A metamatematika pontosan megfogalmazott feladata tehát: megmutatni, hogy a vizsgált rendszer axiómáinak nevezett jelsorozatokból kiindulva és a játékszabályokat alkalmazva, sohasem juthatunk $1=2$ alakú jelsorozathoz.

Néhány egyszerű esetben maga Hilbert mutatott példát az ilyen ellentmondásnélküliség-bizonyításra, majd tanítványai tágabb rendszerekre is átvitték ezt az eljárást. Az első azonban, Hilbertet is megelőzve, König Gyula volt ezen a téren, ő, aki a modern matematikának csaknem minden ágát átültette Magyarországra.

Most már minden eszköz készen volt arra, hogy egy nagy, kiterjedt tudományágat vessünk vizsgálat alá. Elsőül persze a természetes számok tudománya kínálkozott, az úgynevezett számelmélet. Minden jel arra vallott, hogy csak egy kicsit össze kell szedni az erőket és Hilbert gondolatai kiterjeszthetők az egész számelméletre, minden bennefoglalt veszélyes fogalommal egyetemben.

Ekkor történt, hogy Hilbert „bizonyításelméletét", ezt a szép óvatosan épülő új tudományágat, megrázta a vihar.

Egy fiatal bécsi matematikus, Gödel, éppen a bizonyításelmélet módszereivel élve (hogy hogyan, arról az utolsó fejezet fog képet adni) bebizonyította, hogy a számelmélet ellentmondás-mentességét nem lehet igazolni olyan eszközökkel, amelyeket formálisan le lehetne írni magán a vizsgált rendszeren belül.

Értsük meg: a metamatematika nem formális eszközökkel dolgozik, neki állandóan tudnia kell, hogy mit csinál, ő mindig tudatosan következtet, sohasem gépiesen. De ebből még nem következik, hogy az ő következtetéseiből nem is *lehetne* formális játékszabályokat csinálni. Persze, hogy lehetne, ha valaki a metamatematika céljaitól függetlenül el akarna ezzel játszadozni. Ehhez még csak nem is kell Neumann Jánosnak lennie, akiről szállóigévé vált: más matematikus azt bizonyítja be, amit tud, Neumann azt, amit akar (állítólag ő mondta a bolognai kongresszuson, hogy a metamatematika formalizálása nem érdekes, de ő egy doboz csokoládéért bármikor hajlandó megcsinálni). És *ha* formalizáljuk a metamatematikát, szinte magától értetődőnek tűnik, hogy az ő aggályosan gondos, minden veszélyes elemet kikerülő következtetési módjai már jóval szűkebb keretek közt is formalizálhatók, mint a vizsgált tudományág a maga transzfinit elemeivel. És íme, Gödel eredménye azt mondja, hogy az ellentmondás-mentesség csak olyan eszközökkel lehet bizonyítható, amelyek túlnőnek a vizsgált rendszer keretein. Ki fogja megnyugtatónak érezni a veszélyes elemek igazolását, még az ő rendszerüknél is tágabb körből vett eszközök segítségével? Úgy látszott, hogy ez a bizonyításelmélet csődje; letehetjük a tollat.

Maga Hilbert ezt egy pillanatig sem hitte. Meg volt győződve arról, hogy van kivezető út: kell lennie olyan következtetési módnak, amely kicsúszik a vizsgált rendszer keretei közül, és mégis véges eszünk valami konkrét képességére épít úgy, hogy még az intuícionisták is elfogadják.

Megindult a kutatás ilyen következtetési mód után. És ez sikerrel is járt: Gentzen találta meg az alkalmas eszközt a metamatematika számára az ún. „transzfinit indukció" egyik esetében, és ennek segítségével be is bizonyította a teljes számelmélet ellentmondás-mentességét. A természetes számok nyája már békében élhet és fejlődhet: közöttük bizonyára nem bukkanhatnak fel soha farkasok.

A „transzfinit indukció" veszélyesnek hangzik; valójában azonban a következő veszélytelen gondolatról van itt szó.

Ha az

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5, \ldots$$

természetes számsor bármely távoli tagjából kiindulva, bármilyen lépésekben lépkedünk visszafelé, biztos, hogy csak véges számú lépést tehetünk meg. Ha akár 1 milliónál indulunk is el és 1 egységnyi lépésekkel tipegünk visszafelé, 1 millió lépés után akkor is lejutunk az 1-hez.

Most rendezzük át a természetes számsort, például úgy, hogy előbb a páratlan számok következzenek és csak a végtelen sok páratlan szám után a párosak:

$$1,\ 3,\ 5,\ 7, \ldots,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8, \ldots$$

Ha ebben a rendezésben lépkedünk visszafelé, vagyis, ha egyre előbb álló számokat válogatunk ki belőle, véges sok lépés után ez a kiválogatás is szükségképpen megszakad. Ugyanis, ha valamely páratlan számnál indulunk, ez ugyanolyan magától értetődő, mint amikor az eredeti sorrendben volt szó a természetes számsorról. Ha pedig egy páros számnál indulunk, ugyanígy láthatjuk be, hogy visszafelé haladva előbb-utóbb kifogyunk a páros számokból, ezután már valamilyen páratlan számot kell választanunk; mihelyt pedig páratlan számra ugrunk át, bármilyen nagy is ez, már egyetlen sorozatban mozgunk és ez olyan, mint a természetes számsor az eredeti elrendezésben.

Lehet persze a természetes számsort sokkal bonyolultabban is átrendezni; például olyan csoportokra választva szét, amelyekben a 3-mal osztható számok, majd a 3-mal oszthatókat 1-gyel követő számok, végre a 3-mal oszthatókat 2-vel követő számok sorakoznak fel (vegyük ide a rend kedvéért a 0-t is):

$$0,\ 3,\ 6,\ 9, \ldots,\ 1,\ 4,\ 7,\ 10, \ldots,\ 2,\ 5,\ 8,\ 11, \ldots$$

Ha itt a harmadik csoport valamelyik számánál indulunk el visszafelé, véges sok lépés után át kell ugranunk a második csoportba és akkor már ugyanaz a helyzet, mint az előbb vizsgált esetben.

Végtelen sok csoportot is kaphatunk, ha például különválasztjuk a páratlan számokat, azután azokat, amelyek 2-nek csak az első hatványával oszthatók, majd azokat, amelyek $2^2 = 4$-gyel oszthatók, de $2^3 = 8$-cal nem s. í. t.:

$$1,\ 3,\ 5,\ 7, \ldots,\ 2,\ 6,\ 10,\ 14, \ldots,\ 4,\ 12,\ 20,\ 28, \ldots,$$
$$8,\ 24,\ 40,\ 56, \ldots$$

Attól, hogy itt végtelen sok csoport van, nem kell megijedni: mihelyt egy határozott számnál indulunk el, ez benne van valamenyik csoportban és ezt már csak véges sok csoport előzi meg.

Minden esetben láthattuk, hogy a visszafelé lépkedés tulajdonképpen azt jelenti, hogy egy bonyolultabb rendezésről egy kevésbé bonyolultra megyünk át. Így egyszersmind az is kiderül, hogy ha kiindulunk a természetes számsor valami bonyolult elrendezéséből, és erről egyre kevésbé bonyolult elrendezésekre térünk át, véges sok lépés után el fogunk érkezni a bonyodalom nélküli egyszerű sorozathoz.

Mármost Gentzen azt használja fel bizonyításában, hogy egy bizonyos – az itt felhozottaknál még jóval bonyolultabb – elrendezésből szintén csak véges sok lépés vezethet visszafelé. Ez véges ésszel is jól megfogható állítás, mégis kicsúszik a vizsgált rendszer keretei közül.

Hogyan lehet ezt az eszközt felhasználni az ellentmondás-mentesség bizonyításában?

Egy ellentmondásmentesség-bizonyítás gondolatmenete mindig így szól: tegyük fel, hogy valaki azt állítja, ő kihozott egy ellentmondást a rendszer axiómáiból. Átnyújt egy levezetést, amely az axiómákból indult ki, a megengedett játékszabályok alkalmazásával jutott tovább, és befejezése: 1 = 2. A mi feladatunk az, hogy kimutassuk: ez a levezetés hibás, és meg is keressük benne a hibát.

Ha egyetlen veszélyes elem sem szerepelt a hozott bizonyításban, akkor nyilvánvaló, hogy megtalálhatjuk benne a hibát: helyes kiindulásból vitathatatlan következtetési módokkal csak úgy juthatott valaki a hamis 1 = 2 eredményhez, ha közben hibát követett el.

De ha valami transzfinit elem is csúszott bele a bizonyításba, akkor ez már nem olyan bizonyos: az ellentmondást a transzfinit elem is okozhatta.

A bizonyítás befejezése azonban így szól: 1 = 2. Ebben már nyoma sincs semmi transzfinit fogalomnak. Ha a bizonyításba mégis belejátszott valami ilyesmi, akkor csak az történhetett, hogy ez – az ideális elemek régi szokása szerint – megjelent, hatott és ismét el is tűnt. Hátha nélküle is elvégezhető lett volna a bizonyítás? – ahogyan a trigonometria egyes formulái levezethetők „*i*" segítségével, de anélkül is.

Ha csak egyetlen veszélyes elem lép fel, vagy csak egymástól függetlenül lépnek fel néhányan, ez így is van: Hilbert megmutatta, hogy az ilyen bizonyítások átalakíthatók veszélytelen bizonyításokká, azokban pedig azonnal meg tudjuk keresni a hibát.

Azonban az ideális elemek – mint a képzeletbeli szellemvilág testetlen, egymáson is áthatolni tudó lényei – felléphetnek a legbonyolultabb szövevényben is egymással. Egy nagyon szövevényes bizonyításból pedig már nem lehet egyszerűen kiküszöbölni a transzfinit elemeket.

Mármost Gentzen megfigyelte, hogy a bizonyítások e szövevénye a természetes számsor bonyolult átrendezéseire emlékeztet. És ha egy ilyen komplikált bizonyításra alkalmazzuk Hilbert eljárását, akkor nem tűnnek ugyan el belőle a transzfinit elemek, de a bizonyítás olyan levezetéssé alakul át, amelynek szövevényessége a természetes számsornak valamivel kevésbé bonyolult átrendezéséhez hasonlít. Ugyanez történik, ha most megismételjük Hilbert eljárását erre a már kevésbé szövevényes levezetésre. Márpedig tudjuk, hogy a természetes számsor egyre kevésbé bonyolult elrendezésein át lépkedve, véges számú lépés után egy minden bonyodalom nélküli sorozathoz jutunk. Tehát Hilbert gondolatát véges sokszor alkalmazva el kell jutnunk egy minden szövevényesség nélküli bizonyításhoz: olyanhoz, amelyben már nincsenek transzfinit elemek,és ebben már minden nehézség nélkül meg lehet keresni a hibát.

Szép, tiszta matematikai gondolatmenet ez és az eredménye is nagy jelentőségű: a régi módszerekbe vetett bizalom helyreállítása legalábbis a számelmélet terén. A matematikusok nagy része – azok, akik tudni sem akarnak a veszélyről – mégis idegenkedve áll szemben a bizonyításelmélettel, inkább filozófiának tartják, mint matematikának. Ők csak akkor ismerik el a matematika egy új ágának létjogosultságát, ha ezt a matematika többi területein is termékenyen lehet alkalmazni. Hilbert, hogy ezeknek is megmutassa: mit tud a bizonyításelmélet, a leggrandiózusabb régi problémát, a halmazelmélet kontinuumsejtését vetette alá a bizonyításelmélet módszereinek.

Itt a következőről van szó: a nagyság szerint rendezett természetes számok körében teljes a rend, ott minden számnak megvan a közvetlen rákövetkezője: a 3-nak a 4, a 12-nek a 13. A törtek körében erről már szó sem lehet: egy törthöz még oly közel is találunk újabb törteket. Még inkább így van ez, ha minden valós számot beengedünk: ezek már folytonosan, kontinuusan nyúlnak végig a számvonalon, elválaszthatatlanul összefolyva egymással; éppen ezért szokás a számosságukat „kontinuumnak" nevezni.

Mármost a Cantor-bevezette végtelen számosságok körében is fel lehet vetni ezt a kérdést: van-e minden számosságnak közvetlen rákövetkezője? A felelet az, hogy van; a végtelen számosságok e szempontból a természetes számokhoz hasonlítanak. A legkisebb végtelen számosság a természetes számsoré. Felmerül a kérdés: melyik a közvetlenül rákövetkező? Tudjuk, hogy a kontinuum, a valós számok számossága, nagyobb nála; de vajon ez követi-e közvetlenül, nincs-e kettőjük között még más számosság is? Sok mély vizsgálódás fűződik e kérdéshez; egyre inkább kialakult a matematikusokban az a sejtés, hogy a kontinuum közvetlenül követi a természetes számsor számosságát. Ezt nevezték „kontinuumsejtésnek", vagy akik nagyon hittek benne, „kontinuumtételnek". De nem boldogultak vele.

A legújabb időkben aztán (Hilbert gondolatain indulva el) Gödel a bizonyításelmélet eszközeivel bebizonyította, hogy az a feltevés, hogy a kontinuumsejtés igaz, nem hozhat be ellentmondást a halmazelméletbe. Tehát a kontinuumtétel vagy független a halmazelmélet axiómáitól, vagy levezethető belőlük*; mindenképpen jogosan használhatjuk fel bizonyításainkban: ettől

* Legújabban Cohen bebizonyította, hogy független tőlük.

sohasem fognak ellentmondások létrejönni. A bizonyítás módja olyan, mint a Bolyai-geometria ellentmondás-mentességéé: Gödel megszerkesztett a halmazelméletben egy „modellt", amelyben a halmazelmélet axiómái és a kontinuumtétel jól megférnek egymás mellett.

Ezután már teljes joggal mondhatta Hilbert a bizonyításelmélet kételkedőinek: „Gyümölcséről ismerik meg a fát!"

Utóirat a végtelenbe vetített szemléletről

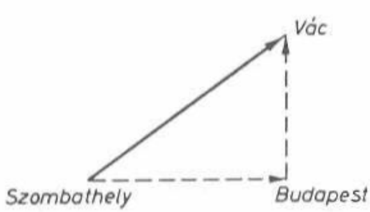
A természetes számok elméletének ellentmondás-mentessége immár biztosítva van, és könnyen át lehet alakítani a bizonyítást más megszámlálható halmazok, tehát a pozitív és negatív egész számok, a törtek, vagyis általában a racionális számok elméletének ellentmondásmentesség-bizonyításává is.

Hátra van még a valós számok halmaza, és itt új nehézségekkel kerülünk szembe.

Az irracionális számokat egyre jobb közelítésekkel, egyre szűkebb skatulyába zárással fogtuk meg, itt tehát már nem számelméletről, hanem analízisről van szó. Itt már állandó a végtelen folyamatok szereplése és ez újfajta veszélyes elemeket hoz magával.

Ott, ahol először volt szó erről a gondolatkörről, vigyáztam arra, hogy őszintén fogalmazzam meg azt a nagyon veszélyes mondatot, amin az analízis áll, vagy bukik. Így szólt ez a mondat: „*A szemléletünk azt mondja*, hogy ha határtalanul folytatjuk is az egymásba skatulyázott számközök képzését, az, amivé összezsugorodnak, mindnyájuknak közös része lesz." Már hogy mondhat valamit a szemléletünk egy végtelen folyamatról? Elfelejtettük volna, hogy a végesben tapasztaltakat semmi jogunk sincs átvinni a végtelenre? Mondhatok erre újabb példát is, ami ismét kellően gondolkozóba ejthet.

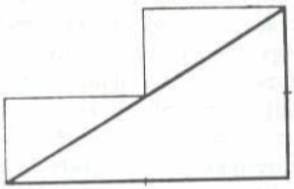
Nem kell matematikusnak lenni ahhoz, hogy belássuk: két pont közt a legrövidebb távolság az egyenes út. Ha valaki Szombathelyről Vácra repül, hamarabb ér oda egyenesen, mintha kerülő utat tenne Budapesten át:



Ebből mindjárt az is kiolvasható, hogy a háromszög két oldala együttvéve hosszabb, mint a harmadik oldal.

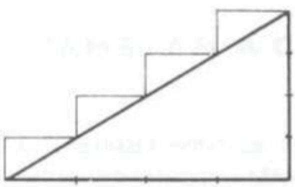
Nos, hát én most mégis be fogom bizonyítani, hogy egy derékszögű háromszög két befogója együttvéve pontosan egyenlő az átfogó hosszúságával. Ez nyilvánvalóan bolondság; erre képes a végtelen folyamatokra alkalmazott „szemlélet".

Rajzoljunk egy lépcsőt az átfogó fölé úgy, hogy a vonalai párhuzamosak legyenek egy-egy befogóval:



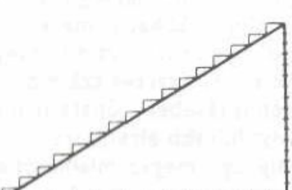
Világos, hogy a két függőleges darab együttvéve akkora, mint a függőleges befogó, a két vízszintes darab, mint a vízszintes befogó. Az egész lépcsővonal hossza tehát a két befogó összegével egyenlő.

Ugyanez igaz négyrészes lépcső esetén is:



A vízszintes darabok együttvéve ismét a vízszintes befogóval, a függőlegesek a függőleges befogóval egyenlők.

És ha tovább osztjuk az átfogót:



változatlanul igaz marad, hogy a két befogó összegével egyenlő a lépcsővonal hossza. Másrészt egyre kevésbé lehet a lépcsőt az átfogótól megkülönböztetni és „a szemléletünk azt mondja", hogy a felosztást határtalanul folytatva, a lépcső egybe fog olvadni az átfogóval. Eszerint az átfogó is egyenlő volna a két befogó összegével.

Most hát elmélkedhetünk a végtelenbe vetített szemlélet megbízhatóságáról.

Mindamellett azon a bizonyos kritikus mondaton áll, vagy bukik az analízis. Vagy hiszünk benne minden alap nélkül, csak azért, mert szeretnők elhinni, vagy nincs más hátra, mint a bizonyításelmélet módszereihez folyamodni: megvizsgálni, hogy egy ilyen állítás nem vezethet-e ellentmondásokra.

Az analízis axiómarendszerébe tehát ilyen újabb transzfinit elemek lépnek be. Ha ezeket is beengedjük, már olyan tág lesz a rendszer, hogy a transzfinit indukció Gentzen felhasználta esete, sőt még jóval komplikáltabb esetei is beleférnek. Márpedig itt is igaz Gödel tétele: a rendszer ellentmondástalansága nem bizonyítható be olyan eszközökkel, amelyek magában a vizsgált rendszerben formalizálhatók. Azt tehát már nem remélhetjük, hogy az eddigi módszerek minden további nélkül elegendők lesznek az analízis ellentmondás-mentességének bizonyításához; itt új vagy finomabb segédeszközöket kell keresnünk. Ez máig is nyitott terület a kutatás számára.

22. MIT NEM TUD A MATEMATIKA?

A számelmélet ellentmondás-mentességének bizonyítása egyszersmind rámutatott az axiomatizálás egyik fogyatékosságára. Az ott alkalmazott transzfinit indukció a természetes számok nyelvén megfogalmazható, véges ésszel jól megfogható eljárás volt: mégis kisiklott a természetes számok elméletét átfogó axiómarendszer keretei közül.

Ez nem szórványos jelenség: egyetlen axiómarendszer sem képes szorosan megfogni azt, amit megfogni akar. Lesz, ami kisiklik belőle, lesz, ami nemkívántan is belejut. Sokat is markol, keveset is fog.

Hogy sokat markol, azt a norvég Skolem mutatta meg.

Ha csak a természetes számsort akarjuk megfogni axiómáinkkal, a maga eredeti elrendezésében, óhatatlanul belecsúsznak az axiómarendszerbe e számsor bonyolultabb elrendezései is: nem lehet ezektől elhatárolni.

Ha pedig egy megszámlálhatónál nagyobb individuum-tartományt, például a valós számok halmazát akarjuk pontosan elhatárolni axiómák segítségével, mindig lesz olyan megszámlálható halmaz is, amely befurakodik ide és teljesíti valamennyi axióma feltételét.

Hogy keveset fognak az axiómarendszerek, azt Gödel meglepő felfedezése tárta fel: az, hogy minden valamirevaló axiómarendszernek, amely a számelméletet tartalmazza, vannak eldönthetetlen problémái.

Hogy kell ezt érteni?

Mindmáig eldöntetlen régi problémái bőven vannak a matematikának. Említettem is ilyet: például azt, hogy van-e végtelen sok „ikertörzsszám" (amilyen például 11 és 13, vagy 29 és 31). Eldöntetlen az ún. Goldbach-féle sejtés is: megfigyelték, hogy

$$4 = 2 + 2,$$
$$6 = 3 + 3,$$
$$8 = 3 + 5,$$
$$10 = 3 + 7 = 5 + 5,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

úgy látszik, hogy a 2-nél nagyobb páros számok felírhatók – esetleg többféleképpen is – két törzsszám összegeként. Ez így van, ameddig csak megvizsgálták a számokat, de mindmáig csak sejtés, hogy minden határon túl is igaz marad.

Leghíresebbé a Fermat-féle sejtés vált az eldöntetlen problémák között. Itt arról van szó, hogy

$$3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2,$$

azaz

$$3^2 + 4^2 = 5^2,$$

és más egész számok is vannak, amelyek közül kettőt négyzetre emelve és összeadva a harmadikuk négyzetét kapjuk eredményül. Mármost Fermat, széljegyzeteket irkálva egy könyvbe, megjegyzi, hogy talált egy bizonyítást arra, hogy kettőnél magasabb kitevő esetén ez nem lehetséges; csakhogy a bizonyítás nem fér el a lapszélen. Az állítás tehát az, hogy nem gondolhatunk három olyan x, y és z egész számot, amelyek közt egy

$$x^3 + y^3 = z^3,$$

vagy

$$x^4 + y^4 = z^4,$$

vagy

$$x^5 + y^5 = z^5,$$
$$\dots\dots\dots\dots$$

kapcsolat áll fenn.

Fermat már rég nem él, a bizonyítását máig is próbálják rekonstruálni a matematikusok, de sikertelenül. Ez a sikertelenség, holott állítólag valakinek már a kezében volt a bizonyítás, olyan érdekességet adott ennek az önmagában eléggé érdektelen problémának, hogy végrendelet is akadt, amely igen tekintélyes összeget hagyott arra, aki eldönti. Gondolható, hogy ez még a körnégyszögesítésnél is jobban feltüzelte a hozzá nem értők fantáziáját; szerencsére ma már kissé lelohasztotta a vállalkozási kedvet, hogy a hagyományozott pénz azóta teljesen elértéktelenedett.

A matematikára mégis termékenyítően hatott ez a probléma: még új ideális elemeket, úgynevezett „ideálokat" is vezettek be, hogy hozzáférhessenek, és ezek igen hasznosnak bizonyultak az algebra jelentősebb területein is. De még így is csak speciális kitevőkre sikerült igazolni a Fermat-sejtést; a maga általánosságában ez máig is eldöntetlen. Fermat valószínűleg tévedett; bizonyára ő is csak valamelyik speciális eset bizonyítását találta meg.

Vannak azután bizonyos elhatárolt módszerek mellett bebizonyítottan megoldhatatlan feladatok is a matematikában. Ezek teljesen eldöntött problémák: eldőltek, csakhogy negatív irányban. Ilyen volt például az ötödfokú egyenlet megoldhatósága vagy a körnégyszögesítés kivihetősége. Ugyanebbe a tárgykörbe tartozik a szögharmadolás és a kocka megkétszerezése is; ezekről is eldőlt, hogy nem végezhetők el pusztán körzővel és vonalzóval. Szöget felezni tudunk e két eszközzel; három egyenlő részre osztani már nem. A kocka megkétszerezése a térbeli megfelelője a mi halastavunk megkétszerezésének, és a síkbeli feladatban még meg tudtuk szerkeszteni a nagy négyzet egyik oldalát körző és vonalzó segítségével; a térbeliben már nem sikerül az adott kockánál kétszerte nagyobb térfogatú kocka egy élének megszerkesztése a megengedett eszközökkel. Ezt a feladatot „déloszi probléma" címen is emlegetik, mert állítólag a szerencsétlenség sújtotta délosziaktól kívánták az istenek, hogy kocka alakú oltárukat megkétszerezzék. Bennük megvolt a jóakarat, de mindhiába. Platon azután megvigasztalta őket: az istenek e feladattal bizonyára csak a geometria ápolására akarták sarkallni a görögöket.

Gödel tétele azonban nem ez ideig eldöntetlen vagy negatív irányban eldőlt problémákról szól, hanem a használatos axiómarendszereken belül eldönt*het*etlen problémákról.

Hadd vázoljam Gödel gondolatmenetét.

Tegyük fel, hogy van egy jól megalkotott axiómarendszerünk a természetes számok tudománya, a számelmélet számára; az axiómákba belevittük mindazt, amire csak szükség lehet ezen a téren. És persze, arra vigyáztunk, hogy ellentmondás ne legyen a rendszerben. A szimbolikus logika nyelvén mondtuk el, tehát minden állítás egy-egy jelsorozat alakját ölti.

Most megtehetjük azt, hogy e jelsorozatok mindegyikének egy-egy számot feleltetünk meg – csakúgy, mint ahogy a sík pontjainak számpárokat feleltettünk meg annak idején. Ez így történhetik: van véges sok matematikai és logikai jelünk, feleltessük meg ezeknek az első néhány törzsszámot (most 1-et is a törzsszámok közé veszem). Így például 1-nek saját maga feleljen meg; több számjelre már ezután nem is lesz szükség, hiszen 2 felírható így: $1+1$, 3 így: $1+1+1$ és így tovább. Az „$=$" jelnek feleljen meg a 2, a „nem"-et kifejező „$\neg$" jelnek a 3, a „$+$" jelnek az 5 s. í. t., egész mindegy, hogy milyen sorrendben; mondjuk, hogy az utolsó jelnek 17 felelt meg. Most 19-től kezdve a többi törzsszámot feleltessük meg azoknak a nem ismert értékeket jelző x, y, ... betűknek, amelyek a rendszer állításaiban előfordulnak; például feleljen meg x-nek 19, y-nak 23 s. í. t.

Így egy ilyen szótárhoz jutunk:

1	1
$=$	2
$\neg$	3
$+$	5
—	—
x	19
y	23
—	—

Ebből rögtön kiolvasható, hogy pl. az

$$1=1$$

formulának az

$$1, 2, 1$$

számhármas felel meg.

Ebből egyetlen számot akarok csinálni. Ezt persze könnyen megtehetem, sokféleképpen is; ha például összeadom e három számot, akkor is egyetlen számot kapok: 4-et. Igen, de ez a 4-es el is nyelte őket: semmiképpen sem lehet felismerni, hogy miféle számokból tevődött össze, milyen sorrendben, még azt sem, hogy hányból. 4 lehet pl.

$$1+3 \text{ is,}\quad 3+1 \text{ is,}\quad 2+2 \text{ is,}\quad 1+1+2 \text{ is,}\quad 2+1+1 \text{ is,}$$

nemcsak

$$1+2+1.$$

Én pedig úgy akarok megalkotni egy számot, hogy pontosan rá lehessen ismerni: milyen tagokból olvadt össze. Erre is van mód: megszorozhatom például az első három törzsszámot:

2, 3, 5-öt

egymással, mindegyiket akkora kitevőre emelve, amekkorák

1, 2, 1

számhármasunk tagjai; akkor ez a szorzat jön létre:

$$\underbrace{2^1 \cdot 3^2 \cdot 5^1} = 10 \cdot 3^2 = 10 \cdot 9 = 90.$$

Az

$$1 = 1$$

formulának tehát a

90

számot feleltetjük meg. És erről viszont könnyen fel lehet ismerni, hogy milyen formulának a megfelelője: csak fel kell bontanunk nagyság szerint következő törzstényezőire:

$$\begin{aligned} 90 &= 2 \cdot 45 = \\ &= 2 \cdot \overbrace{3 \cdot 15} = \\ &= 2 \cdot 3 \cdot \overbrace{3 \cdot 5} = \\ &= 2^1 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \end{aligned}$$

és így ismét kibukkantak a kitevőkben az

1, 2, 1

törzsszámok, amelyeknek a szótárban az

1, =, 1

jelek felelnek meg, tehát hibátlanul visszakapjuk 90-ből a neki megfelelő

$$1 = 1$$

formulát.

A rendszer minden állításának egy-egy szám felel meg így. És hasonlóan feleltethetünk meg minden bizonyításnak is egy-egy számot. Hiszen egy bizonyítás – formailag tekintve – nem egyéb, mint néhány állítás egymásutánja (ahol is az utolsó állítás az előzőkből következik). Az állításoknak pedig már számokat feleltettünk meg, és így, ha például három állításból áll egy bizonyítás, akkor egy számhármas fog megfelelni neki. Egy számhármast pedig teljesen az előbbi módon olvaszthatunk össze egyetlen számmá úgy, hogy e számból bármikor fel is lehet ismerni az alkotórészeit: csak meg kell csinálnunk a törzstényezős felbontását.

Ha például egy rettenetesen nagy számról már tudjuk, hogy valamelyik megfeleltetésben előfordult, továbbá volt olyan angyali türelmünk, hogy megcsináltuk a törzstényezős felbontását és ezt kaptuk:

$$2^{90\,000\,000\,000\,000\,000\,000}3^{90},$$

akkor először is látjuk, hogy a kitevők nem törzsszámok, tehát nem egyszerű állításnak felelt meg ez a szám, hanem bizonyításnak. Mégpedig olyan bizonyításnak, amelyben mindössze két állítás szerepelt: azok, amelyeknek a kitevőkben fellépő

$$90\,000\,000\,000\,000\,000\,000$$

illetőleg

$$90$$

felel meg. Ha e két számot törzstényezőkre bontjuk, visszanyerhetjük belőlük a megfelelő állításokat. Az elsőben tizenkilenc 0 van, tehát ez

$$9\cdot 10^{19} = 3^2\cdot 10^{19} = 3^2\cdot 2^{19}\cdot 5^{19}$$

hiszen $10 = 2\cdot 5$; az alapokat nagyság szerint rendezve:

$$2^{19}\cdot 3^2\cdot 5^{19},$$

a kitevőkben tehát a

$$19,\ 2,\ 19$$

számhármas szerepel. A második szám felbontása már ismerősünk:

$$90 = 2^1\cdot 3^2\cdot 5^1,$$

tehát ez az

$$1,\ 2,\ 1$$

számhármasból épült fel. Megismétlem a szótárt:

1	....	1
=	....	2
⌉	....	3
+	....	5
- - - - - - - - - -		
x	....	19
y	....	23
- - - - - - - - - -		

Kiolvashatjuk belőle, hogy az első számhármas, azaz

$$19,\ 2,\ 19$$

az $\quad x = x$

formulának, a második számhármas, azaz

$$1,\ 2,\ 1$$

az $\quad 1 = 1$

formulának felel meg.

Ez a bizonyítás tehát mindössze ennyit mondott: abból, hogy tetszés szerinti x mellett

$$x = x,$$

következik, hogy

$$1 = 1.$$

Ez bizony még elég szánalmas kis bizonyítás és már ehhez csillagászati nagyságú szám tartozott; képzelhető, mekkora szám felel meg egy valamirevaló bizonyításnak. De a lényeges az, hogy tudjuk: mégis megfelel neki valami határozott szám, és ebből a számból – ha egy emberélet alatt nem is, de legalább elvben – rekonstruálni lehet a bizonyítást.

Így lehet lefordítani a rendszer formuláit és bizonyításait bizonyos természetes számokra. De mire jó ez?

A metamatematika a rendszert kívülről vizsgálja; az ő állításai a rendszer ilyen és ilyen alakú formuláiról, bizonyításairól szólnak. Most ezeket az állításokat a szótár segítségével át lehet fogalmazni úgy, hogy ilyen és ilyen törzstényezőkkel rendelkező természetes számokról szóljanak.

Például, amint a rendszer jeleivel felírható formulákat vizsgálgatja a metamatematika, megállapíthatja, hogy az

$$1 = 1$$

és a

$$\neg (1 = 1)$$

jelsorozatokkal óvatosan kell bánni, mert egyik a másiknak a tagadása. Már láttuk, hogy

$$1 = 1\text{-}$$

nek

$$2^1 \cdot 3^2 \cdot 5^1 = 90$$

felel meg. A szótár szerint (ha eltekintünk attól, hogy a zárjelek is jelek, ezeknek is bizonyos számokat kellene valójában megfeleltetni):

1	 1	a
=	 2	$\neg (1 = 1)$
$\neg$	 3	formulának a
+	 5	3, 1, 2, 1
– – – – – – – – – –		sorozat felel meg, vagyis – az első négy

törzsszám

$$2,\ 3,\ 5,\ 7$$

lévén – a

$$2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^2 \cdot 7^1$$

szám. Számítsuk ki ezt is:

$$2^3\cdot 3^1\cdot 5^2\cdot 7^1 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7 =$$

$$= 10\cdot 10\cdot 2\cdot 3\cdot 7 = 100\cdot 42 = 4200.$$

Állítsuk még egyszer egymás mellé a törzstényezős felbontásokat:

$$90 = \quad 2^1\cdot 3^2\cdot 5^1$$

$$4200 = 2^3\cdot 3^1\cdot 5^2\cdot 7^1.$$

Tehát azt a metamatematikai állítást, hogy *„az*

$$1 = 1 \text{ és } \neg\,(1 = 1)$$

alakú jelsorozatok egymás ellentétét fejezik ki", így lehet átfogalmazni: *„90 és 4200 olyan számok, hogy az utóbbinak törzstényezős felbontása 2^3-nal kezdődik, az ezután következő törzsszámok kitevői pedig sorra ugyanazok, mint a 90 törzstényezős felbontásában szereplő kitevők."*

Ebben az utóbbi mondatban már nyoma sincs metamatematikának, ez tiszta számelméleti állítás. A vizsgált rendszer pedig éppen arra való, hogy a számelméleti állításokat meg lehessen fogalmazni benne. Tehát ezt a mondatot is fel lehet írni teljesen a vizsgált rendszer jeleivel úgy, hogy egyetlen szó sem marad benne. Egyike lesz a közönséges, szürke jelsorozatoknak; nem látszik meg rajta, hogy milyen kétértelmű. Pedig kétértelmű: kétféle szöveg is kiolvasható belőle. Az egyik a számelméleti szöveg, ami a rendszer minden formulájából kiérezhető, ha visszagondolunk arra, hogy milyen tartalmuk volt eredetileg a jeleknek; a másik az, amit a benne megtestesített metamatematikai állítás mond ki.

És amint Gödel az ilyen kétértelmű jelsorozatokkal és a nekik megfelelő számokkal játszogatott, rábukkant egy számra – mondjuk, hogy ez 8 milliárd; valójában pontosan tudjuk, hogyan épül fel törzstényezőkből, de a kiszámításához egy emberélet sem volna elég – és észrevette, hogy ez a következőket tudja: Ha az előbb tárgyalt mondat mintájára a rendszer jeleivel írjuk fel ezt a metamatematikai állítást:

„*A 8 milliárdnak megfelelő formula nem bizonyítható be a rendszerben*"

– és megnézzük, hogy az így nyert formulának a szótár szerint milyen szám felel meg, ámulva fogjuk tapasztalni, hogy éppen 8 milliárd. Tehát a „8 milliárdnak megfelelő formula": maga ez a formula. Így ő kereken ezt mondja ki az egyik értelmével:

„Én magam nem vagyok bizonyítható."

Értsük meg, ez nem játék a szavakkal, nem szofizma, egy közönséges szürke formula van előttünk, egy letagadhatatlan jelsorozat, olyan mint a többi. Csak ha megnézzük a szótárunk segítségével, hogy miféle kétértelműséget csempészett bele ebbe a jelsorozatba a metamatematika, akkor vesszük észre, hogy ártatlan képével ezt a furcsa szöveget dúdolja:

„Én nem vagyok bizonyítható."

Nem csoda, hogy ez a formula eldönthetetlen a rendszerben, bármily ártalmatlan számelméleti állítást fejez is ki a másik értelmével.

Mert ha bizonyítható volna, ez ellenkezésbe kerülne azzal, amit a formula metamatematikai értelme mond ki, hiszen ez éppen az, hogy ő nem bizonyítható.

Ha pedig megcáfolható volna, ez a cáfolat éppen megerősítené az ő metamatematikai állítását, hogy ti. nem bizonyítható; tehát éppen a cáfolat bizonyítaná őt be.

Sem bizonyítani, sem megcáfolni nem lehet: eldönthetetlen.

Ismét hangsúlyozom: ha nem jut eszünkbe a szótár, ez egy közönséges, szürke formulája a rendszernek: összeadásokra és szorzásokra vonatkozó ártalmatlan számelméleti állítás. Ilyen alakú eldönthetetlen formulák létezését bizonyította be Gödel minden valamirevaló rendszerben. Nincs kizárva hogy közéjük tartozik például a Goldbach-sejtés is: lehet, hogy ezt azért nem sikerült mindmáig eldönteni, mert ha axiómarendszert hámoznánk ki mindazon eszközökből, amikkel eddig e sejtés körül kísérleteztek, akkor a szótáron át éppen ő dúdolná:

„Én nem vagyok bizonyítható a rendszerben."

Ugyanez vonatkozik bármely eddig el nem döntött problémára; e lehetőséggel szembe kell néznie minden matematikusnak.

Elképzelhető volna még egy ellenvetés: mindez csak az axiómarendszerek hiányossága. Bizonyára el lehet dönteni az ilyen Gödel-problémákat is, ha nem kötjük magunkat valami axiómarendszerhez. Nos hát Church olyan problémát is konstruált, amely a ma elképzelhető matematikai okoskodások egyikével sem dönthető el, egészen függetlenül attól, hogy következtetéseink valamilyen axiómarendszer keretei közé szoríthatók-e.

Itt kell befejeznem az írást: a mai matematikai gondolkodás korlátaiba ütköztünk. Korunk a tudatosítás kora, e téren a matematika is megtette a magáét: ő maga tárta fel saját képességeinek határait.

De vajon végleges akadályokba ütköztünk-e? A matematikatörténet minden eddigi zsákutcájából volt kivezető út . Church bizonyításának is van egy igen elgondolkoztató pontja: pontosan meg kellett fogalmaznia, hogy mit tekintsünk „ma elképzelhető matematikai okoskodás"-nak, ha erre a fogalomra a matematika eljárásait akarta alkalmazni. Amint valamit megfogalmazunk, már körül is határoltuk. És minden kerítés szűk. A felbukkanó eldönthetetlen problémák kibújnak alóla.

A kereteket majd bizonyára tágítani fogja a jövő fejlődés, ha ma még nem is látjuk: hogyan. Az örök tanulság: a matematika nem sztatikus, zárt, hanem élő, fejlődő valami; bárhogyan próbáljuk zárt formába merevíteni, talál magának rést: elevenen robban ki belőle.

Függelék

FORMABONTÁS A „KÉT KULTÚRA" ELLEN*

Uram: itt az idő. Nagy volt a nyár.
A napórákra add, hogy árnyad hulljon,
és hadd zúduljon szél a rétre már.

Rendeld, hogy teljék a gyümölcs, ha késett;
még két nap érje délszakibb tüzed,
késztessed teljesedni és űzzed
nehéz borba a végső édességet.

Ki most tanyátlan, nem lesz annak háza.
Ki most magányos, hosszan az marad,
virraszt, olvas, ró hosszú sorokat
és kergetőző lomb között cikázva
nyugtalan járja a fasorokat.

A cím ígérte formabontás: verssel kezdek egy matematikai cikket. Rilke „Őszi nap"-jával, saját fordításomban. Szerkesztettem egyszer egy oldalt az Egyetemi Lapokban, amelyen a (matematikai) Analízis I. Tanszék szólalhatott meg; az az oldal Ady Endre fényképével kezdődött (igaz, hogy nagy matematikusunknak, Fejér Lipótnak dedikált fényképével). Ezek nem véletlen találkozások. A fénykép mellé egy idézet került az én „Játék a végtelennel" könyvem előszavából:

„A könyv a nem-matematikus érdeklődésű intellektuális embernek szól: az irodalom, a művészet, a humánum emberének. Sok szépet kaptam arról az oldalról, most viszonzásul átnyújtom a matematikát. Hadd lássák meg: nem vagyunk olyan messze egymástól."

Az idézetet pedig ez követte: Sajnos, ennek megmutatására egyetlen újságoldal nagyon kevés; ennyivel mégis jelezni akartuk állásfoglalásunkat a sokat emlegetett „két kultúra" kérdésében.

A „Játék a végtelennel" a maga egészében egyetlen folyamatos bizonyítása annak, hogy a kultúra *egy*. Mint bevezetésében elmondtam, Benedek Marcellnek írt leveleimből jött létre, aki saját területén, írás közben fájlalta a matematikai ismeretek hiányát; érezve, hogy a matematikai anyagból bőven meríthetne képeket, hasonlatokat.

Itt most a fordított irányú kapcsolatról van szó. Rilke „Őszi nap"-ját azért tudtam (Benedek Marcell kedves szavai szerint „meglepő hűséggel és

* Megjelent a Magyar Tudomány 1969. 4. számában.

rilkei gazdagsággal") lefordítani, mert valahogyan mély hangulati közöm van az ősz képeihez. És talán ez váltott ki belőlem olyan szenvedélyes érdeklődést egy újabban megismert matematikai problémakör iránt is, hogy se éjjelem, se nappalom nem volt, amíg fel nem derítettem.

Már maga a tudományterület is, amelybe ez a problémakör tartozik, a „két kultúra" közös területe: a matematikai nyelvészet.

A gépi fordítás lehetőségeinek kutatásában vált kívánatossá olyan pontos definíciót találni a nyelvtanilag helyes mondat fogalma számára, amilyen a matematika egyes ágaiban a jól képzett formula definíciója. Ezzel a célkitűzéssel különböző matematikai grammatikák jöttek létre. Egyiküket, az ún. „CF-grammatikát"* (amelynek bizonyos általánosításai a számológépek céljaira készült mesterséges nyelvek grammatikájaként jól beváltak) a következő adatok határozzák meg: egy szótár (jelöljük S-sel), ennek egy részeként a nyelvtani segédfogalmak szótára (jelöljük F-fel), ebben a kitüntetett szerepű ⟨mondat⟩ fogalom (a segédfogalmakat ilyen csúcsos zárójelek közé írjuk megkülönböztetésül; a ⟨mondat⟩ fogalmat röviden M-mel is jelölhetjük), végre a nyelvtani szabályok tára (jelöljük N-nel). Rövid jelöléseinkkel tehát egy négytagú

$$S, F, M, N$$

sorozat határoz meg egy CF-grammatikát. A nyelvtani szabályok mindegyike arról szól, hogy hogyan jöhet létre egy segédfogalom szótárunk szavaiból. A szabályok egyike például

$$\langle\text{mondat}\rangle : \langle\text{alany}\rangle\ \langle\text{állítmány}\rangle$$

Ezzel röviden azt akarjuk kifejezni, hogy egy mondat létrejöhet egy alany és egy állítmány egymás után illesztésével is. Vagy

$$\langle\text{mondat}\rangle : \langle\text{mondat}\rangle \text{ és } \langle\text{mondat}\rangle$$

annak tömör kifejezése, hogy ha két mondatot az „és" kötőszóval kapcsolunk össze, ismét mondat jön létre. Az itt szereplő „és" már nem taglalható tovább, szótárunknak nem F-be tartozó, végleges, „terminális" fogalma. A szótár nem F-be tartozó részét „terminális szótár"-nak nevezik (rövid jele T). A szabályok állításait mindig kettősponttal jelezzük; ennek „baloldala" az a segédfogalom, amelyről a szabály szól; „jobboldala" pedig szótárunk szavainak (akár F-beli, akár T-beli szavainak) egy egymásutánja, „lánca" (lehet egyszavas

*„CF" a „context-free" („környezettől független") grammatika rövidítése. Van ugyanis „context-sensitive" („környezetre érzékeny") grammatika is. Eltérésük magyarázatára itt nem térek ki.

is). Egy szabály baloldalaként fellépő segédfogalom egy „kifejtéséhez" jutunk, ha a szabály jobboldalát írjuk a helyébe. Az ebben szereplő segédfogalmakat egyenként tovább fejtve ki, eljuthatunk a kiindulásul vett segédfogalom, pl. a ⟨mondat⟩ fogalom egy „terminális kifejtéséhez", amely már csupa terminális fogalomból áll. Nagyon egyszerű példaként, ha az N-beli szabályok közt szerepelnek ezek is:

⟨alany⟩ : a lomb

és

⟨állítmány⟩ : színes

annak tömör kifejezéseként, hogy a T terminális szótár „a" és „lomb" szavainak egymás után illesztésével is létrejöhet egy mondat alanya, és a terminális szótár „színes" szava egymagában is lehet egy mondat állítmánya, akkor alkalmazhatjuk a következő „levezetést" (egy-egy kifejtő mozzanat eredményét nyíllal jelölve):

⟨mondat⟩ → ⟨alany⟩ ⟨állítmány⟩ →
→ a lomb ⟨állítmány⟩ → a lomb színes

Tehát *a* ⟨mondat⟩ fogalom egy terminális kifejtése *egy* mondat: „a lomb színes". A CF-grammatikánk „generálta" nyelv a ⟨mondat⟩ segédfogalom valamennyi terminális kifejtéséből áll.

Matematika ebből úgy lesz, hogy az S, F, M, N betűket többé nem rövidítéseknek tekintjük, hanem teljesen eltekintünk a jelentésüktől; S-et bármilyen elemek (véges) halmazának, F-et S egy tetszés szerinti részének, M-et F egy tetszés szerinti elemének tekintjük, és ennek megfelelően definiáljuk formálisan az N-beli szabályokat és az ezeken alapuló levezetéseket. Az így nyert absztrakt nyelvek már pontos matematikai vizsgálat tárgyai lehetnek.

Az idevágó alapprobléma természetesen ez: milyen nyelvekhez lehet olyan CF-grammatikát (azaz megfelelő S, F, M, N sorozatot) szerkeszteni, amelynek az előbbiekben leírt módon létrejövő mondatai megegyeznek a szóban forgó nyelv nyelvtanilag helyes mondataival?

A matematikai formulanyelvekhez lehet.

A természetes nyelvek vizsgálata nagyon bonyolult. Előkészítésül egyszerűbb mesterséges nyelveken folytatnak vizsgálatokat.

Mesterséges nyelvet pedig lehet úgy konstruálni, hogy ne legyen CF-grammatika, amely a mondatait generálná (és ez pontos matematikai módszerekkel be is bizonyítható). Ilyen az a kétszavas nyelv is, amelyet én első látásra így interpretáltam: „Anna hódolóinak nyelve", melynek mindössze két szava van: „édes" és „Anna" (nem kétséges, hogy Kosztolányi mélyen bennem élő gyönyörű szép névalkotása szólalt meg itt). A nyelv pontos leírása ebben az interpretációban: Anna hódolói csak ilyen áradozásra képesek:

Anna Anna

vagy

édes Anna édes Anna édes

vagy

édes édes Anna édes édes Anna édes édes

vagy

édes édes édes Anna édes édes édes Anna édes édes édes

és így tovább, a végtelenségig.

Nos, nincs az a CF-grammatika, amely ezt a nyelvet produkálná.

Egy bonyolult természetes nyelv mondatainak CF-grammatikával generálhatóságára nincs sok remény. Újabb elgondolások szerint elég volna a nyelv legegyszerűbb „magmondatait" (a nyelv magvát alkotó mondatokat) állítani elő egy CF-grammatika mondataiként; a többi mondatot azután a magmondatokból kiindulva, már képezett mondatok bizonyos összeötvözéseivel lehetne létrehozni. Ha például a

„Lázban égek mindig"

és

„A láz harminchat fokos"

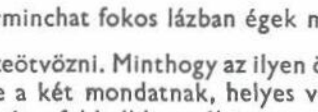
mondatok már létrejöttek, ezeket a

„Harminchat fokos lázban égek mindig"

mondattá lehetne összeötvözni. Minthogy az ilyen összeötvözés nem egyszerű egymás után illesztése a két mondatnak, helyes végrehajtásához be kell hatolni a mondatok mélyére, fel kell használni a mondatok „mélystruktúráját".

Egy mondat „mélystruktúrája" a mondat felépítésének történetét ábrázolja grafikusan, ún. „gráf" segítségével.

A mondat felépítését ábrázolta már az is, amit „levezetésnek" neveztem – itt arra célzok, amivel a ⟨mondat⟩ segédfogalomból egy mondatot vezettünk le (ezt: „a lomb színes"). Jobb taglalást adna, ha a levezetés egyes stációihoz nem csak egy nyíl vezetne, az előző stációból, hanem minden szavukhoz egy-egy nyíl, a soron levő segédfogalomból. De ha az egyes stációkat ekkor is sorra egymás után tüntetnénk fel, ezek a nyilak keresztül-kasul metszenék egymást. Célszerű nem egy vonalban előre, hanem lefelé is haladni, és így jön létre mondatunk „mélystruktúrája":



Könnyebb lesz az ábrázolás, ha a segédfogalmak helyett csak rövidítéseiket tüntetjük fel: a ⟨mondat⟩ helyett a (már alkalmazott) M-et, az ⟨alany⟩ helyett A-t, az ⟨állítmány⟩ helyett Á-t. Ezekkel a rövidítésekkel mondatunk mélystruktúrája mellett mindjárt egy bonyolultabbét is felvázolom. A közös pontokból induló nyilakat pedig megszámozom, hogy sorrendjüket is feltüntessem (ha csak egy nyíl indul egy pontból, azt persze 1-gyel számozva).

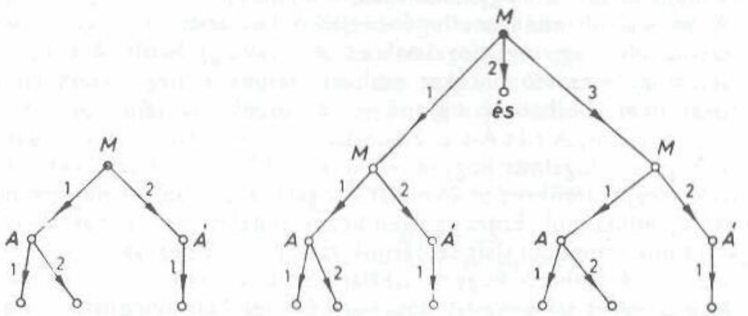
A bonyolultabb mondathoz az előzőkben felírtakon kívül, amelyek közt ez is szerepelt:

⟨mondat⟩ : ⟨mondat⟩ és ⟨mondat⟩

még két szabályra van szükség:

⟨alany⟩ : a napfény
⟨állítmány⟩ : fakó

Mindezek alapján a két mondat mélystruktúrája:



Így, egymás mellett, a két ábra egy kétmondatos szöveg mélystruktúráját adja. Olyan kicsire most ne nézzünk, hogy mondataink kisbetűvel kezdődnek, és az írásjelek is hiányoznak; ha verssorokként szerepelnének:

a lomb színes
a lomb színes és a napfény fakó

– ez nem is lenne szokatlan. (A mondatokat – balról jobbra haladva, a felül megbúvó „és"-t sem hagyva ki – a végpontokról olvastam le; ott jelentkeznek a terminális fogalmak.)

Hát itt vannak – szövegek vagy összeötvözendő mondatsorozatok mélystruktúráiként – azok a gráfok, amelyek annyira megragadták a képzeletemet.

Itt elég lesz a modern matematika absztrakt gráf-fogalma helyett az „egyszerű", véges gráf szemléletes fogalmát ismertetnem. Eszerint egy gráf bizonyos számú pontból (a gráf „csomópontjaiból") és egyes közéjük tartozó pontpárokat összekötő vonaldarabokból (a gráf „éleiből") áll. Nem számít, hogy az élek milyen vonalak, egyenesek-e, görbék-e, akár gumiból is lehetnének, tetszés szerint nyújthatóan, a sík fölé is kihúzhatóan – csak az számít, hogy két csomópontot összeköt-e él, vagy nem köt össze. Ha az éleken azt is feltüntetik (mint a mi ábránk nyilai), hogy melyik pontból melyik pontba irányulnak, akkor „irányított gráf"-ról van szó. A gráf összefüggő, vagy több összefüggő „komponensből" áll (a mi ábránk kettőből). Ha egy összefüggő gráfban nincs zárt vonal (kör, sokszög), hanem olyan ágas-bogas, mint a mi ábránk bármelyik komponense, akkor „fának" nevezik. A mi fáink minden csomópontjába pontosan egy él fut be, egy kivétellel: a befeketített csomópontba (a többit üres karikával jelöltem) nem fut be él. A kivételes pontot „gyökérpontnak" nevezik, és az olyan fát, amelynek van kivételes gyökérpontja, „állófának" (arra célozva, hogy nem kivágott fa – bár a mi ábránk fáit meg kellene fordítani, hogy „állófának" tűnjenek).

A mi gráfunk minden csomópontjához hozzárendeltük szótárunk egy-egy szavát, illetőleg, segédfogalmak esetén, egy-egy betűt. Azt nem mondhatnám, hogy a csomópontokat ezekkel „jelöltem meg", mert különböző pontokat nem jelölhetünk ugyanúgy, és ábránk második komponensében M-et 3 pontban is, A-t és Á-t 2–2 pontban is látunk. De az csak megállapodás dolga, hogy egy fogalmat hogyan jelölünk; betűk helyett színeket is használhatnánk megjelölésükre; a ⟨mondat⟩ fogalmat például M helyett mélykék színnel is jelölhetnénk. Ezért az ilyen hozzárendelést úgy is szokták kifejezni, hogy gráfunk csomópontjait szótárunk szavaival „színeztük".

Az is elképzelhető, hogy színskálát készítünk, és ebben számokkal jelöljük meg az egyes színárnyalatokat. Ilyen értelemben mondhatjuk, hogy gráfunk egy-egy élét az 1, 2, 3 színárnyalatok egyikével színeztük.

Egy szöveg persze több mondatból is állhat, ezek – és a mélystruktúráikat ábrázoló állófák – meghatározott sorrendben követik egymást. Ezért a szöveg mélystruktúráját „fasor"-nak neveztem el, de hozzátéve, hogy a pontos neve ez volna:

„Őszi fasor tükörképe a folyóban."

„Őszi", hiszen csupa szín: pontjai is, élei is színezettek. „Tükörkép", hiszen állófáinak gyökérpontját mindig legfelső pontként ábrázoljuk*. És „folyóban" – ez minden gráfra jellemző: ugyanazt ábrázolja, bárhogyan is zilálja ágainak képét a folyó sodra.

A problémakörrel ismerkedés első örömét ez a kép adta. De nem kisebb öröm a matematikai feladat megoldása sem: az ősz, a fasor, a tükörkép lehántása, hogy csak az egyértelmű, tiszta forma maradjon meg, ami pontos matematikai vizsgálódás tárgya lehet.

Ehhez az ad vezérfonalat, hogy egy állófánk bármely csomópontjába pontosan egy út vezet a gyökérpontból; hiszen két ilyen út együtt zárt vonalat alkotna, és fában nem lehet zárt vonal. Például ábránk „napfény"-nyel színezett pontjába azokon az éleken haladva jutunk el, amelyeket sorra a 3, 1, 2 jelű színárnyalatok színeznek. Ezt röviden úgy fejezhetjük ki, hogy a vizsgált ponthoz a

3, 1, 2

„színsorozat" tartozik.*

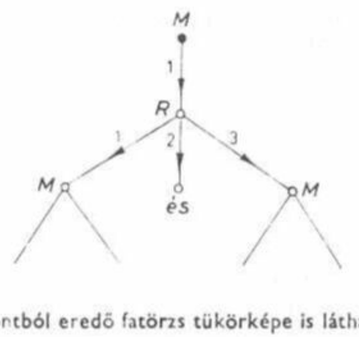
Így fasorunk minden csomópontját 3 adat jellemzi: (1) egy sorszám, annak jelzésére, hogy fasorunk hányadik állófájának csomópontjáról van szó; (2) egy véges számsorozat, mint odavezető színsorozat; (3) szótárunk egy szava, mint a csomópont színe. Azt mondjuk, hogy egy fasor minden csomópontját egy ilyen tagok alkotta 3 tagú sorozat, röviden „hármas" jellemzi.

Egy csomópontot jellemző hármas persze nem lehet akármilyen. Ha például egy fasor valamelyik csomópontját jellemző hármas első tagja 3, akkor feltétlenül előfordul a fasor csomópontjait jellemző hármasok között olyan is, amelynek 1, olyan is, amelynek 2 az első tagja; hiszen a fasor harmadik állófájáról csak akkor beszélhetünk, ha van első és második állófája is. Pontosan meg lehet határozni mindazokat a kapcsolatokat, amelyek szük-

*Ha valaki hiányolja ábránkból a fatörzseket, vegye fel például a következő szabályokat:

⟨mondat⟩ : mellérendelés
⟨mellérendelés⟩ : ⟨mondat⟩ és ⟨mondat⟩

Akkor — R-rel jelölve a ⟨mellérendelés⟩ fogalmat — így kezdődne ábránk második komponense:



ezen pedig a gyökérpontból eredő fatörzs tükörképe is látható.

ségképpen fennállnak az egyazon fasor pontjait jellemző hármasok között Ezekután a tiszta matematikai definíció: „Szótárként" felvehetünk egy tetszés szerinti véges S halmazt, „hármasnak" nevezünk egy tetszés szerinti 3 tagú sorozatot, amelynek első tagja természetes szám, második tagja egy természetes számokból álló véges sorozat, harmadik tagja S egy eleme; végre „fasor"-nak nevezzük hármasoknak egy véges halmazát, amelynek elemei közt az előbbiekben jelezett kapcsolatok állnak fenn.

Erre az anyagra már alkalmazhatók a matematika módszerei.

Hasonló vizsgálatokat már régebben is végeztem ún. „formula-gráfokkal". Ezek algebrai, logikai vagy absztrakt formulák szerkezetét szemléltető állófák, és többek közt arra is felhasználhatók, hogy a formulák különféle, zárójelek nélkül is egyértelmű alakjai olvashatók le róluk. A zárójelek megtakarítása nem jelentéktelen előny a számológépek gyakorlatában. Gráfot persze nem lehet bevinni a számológépbe; ezért javasoltam, hogy egy ilyen állófát 2 tagú sorozatok, „kettesek" halmazaként adjunk meg, az előbbiekhez hasonló módon (itt nem fasor, csak egyetlen állófa szerepel, ezért érhetjük be kettesekkel hármasok helyett). A ketteseket (dominókövekként) sokféle sorrendben rakhatjuk ki; más kirakásuk a formula más alakját állítja elő; így gyerekjáték egy formula különböző alakjait lefordítani egymásra. Ez hasznos, de benne van a játék öröme is; csakúgy, mint a játékos formai elemek átültetésében, ha valaki verset fordít.

* *
*

Verssel kezdtem, matematikával folytattam, a számológépek gyakorlatá val végeztem. Mindez összefonódik. A kultúra egy.

A formabontás bevallása talán menthetővé teszi, hogy tulajdonképpe lírai megnyilatkozással jelentkeztem egy tudományos folyóiratban. Szenve délyemről, a matematikai kutatásról vallottam, és arról, ami ezt szítja: a ber nem élő, életemet szépítő, matematikai vizsgálódásaimat is színező képekrő hangokról, játékos örömökről.

HASZNÁLAT UTÁN

Ha valaki vissza szeretne lapozni például az integrálhoz, a tartalomjegyzékben csak ilyen címet fog találni: „Sok kicsi sokra megy." Ezért utólag közlöm, hogy az egyes fejezetek milyen matematikai fogalmak lelőhelyei. (Ez ne riasszon vissza senkit!)

Első rész

1. Összeadás, szorzás, hatványozás.
2. A kocka köbtartalma. Függvények grafikus ábrázolása.
3. Számrendszerek. Oszthatósági szabályok.
4. Számtani sor. Téglalap és háromszög területe.
5. Konvex sokszögek átlói. Kéttagú kombinációk. A képlet.
   Utóirat: Topológia. Egybevágóság és hasonlóság. Szabályos testek.
6. Kombinatorika. Teljes indukció. Két tag összegének négyzete.
7. Felbontás törzstényezőkre. A törzsszámok eloszlása. Törzsszámtörvény.
8. Egyenletek. Az ötödfokú egyenlet megoldhatatlansága. Galois-elmélet.

Második rész

9. Negatív szám. Vektorok. Permanencia-elv.
10. Műveletek törtekkel. A számtani közép. Mindenütt sűrű halmaz. A racionális számok számossága.
11. Tört átalakítása tizedesszámmá és viszont. A skatulya-elv. Végtelen sorok.
12. Az irracionális szám. Pitagorasz-tétel. A valós számok számossága.
13. Logaritmustáblák. A hatványfogalom kiterjesztése. Sima görbék. Hiperbola. A 0 mint osztó.
14. Az általános függvényfogalom. Analitikus geometria.
    Utóirat:
    a) Szögfüggvények. A periodikus függvény approximációja.
    b) Projektív geometria. Invariánsok.
15. A végtelen távoli egyenes. Komplex számok. Összefüggés a szögfüggvények és a hatványfüggvény közt. Az algebra alaptétele. Függvények hatványsorba fejtése.
16. Az érintő iránya. A differenciálhányados. Szélső értékek.
17. Határozatlan és határozott integrál. Területszámítás.

Harmadik rész

18. A kör négyszögesítése. Transzcendens számok. Euklidész axiómarendszere. Bolyai-geometria. Különféle geometriák.
    Utóirat: A negyedik dimenzió.
19. Csoportelmélet. Halmazelmélet. Antinómiák. Intuícionizmus.
20. Szimbolikus logika.
21. Bizonyításelmélet. Metamatematika. A számelmélet ellentmondástalanságának bizonyítása. Kontinuumsejtés.
    Utóirat: Az analízis axiomatizálása.
22. Eldöntetlen és adott eszközökkel megoldhatatlan feladatok. Az úgynevezett eldönthetetlen problémák kérdése.

Függelék

Matematikai nyelvészet. Speciális gráfok.

ELŐSZÓ AZ ELSŐ KIADÁSHOZ

A könyv a nem-matematikus érdeklődésű intellektuális embernek szól: az irodalom, a művészet, a humánum emberének. Sok szépet kaptam arról az oldalról, most viszonzásul átnyújtom a matematikát. Hadd lássák meg: nem vagyunk olyan messze egymástól. Én nemcsak azért szeretem a matematikát, mert alkalmazni lehet a technikában, hanem főleg azért, mert szép. Mert játékos kedvét is belevitte az ember és a legnagyobb játékra is képes: megfoghatóvá tudja tenni a végtelent. Végtelenségről, ideákról hiteles mondanivalói vannak. És mégis annyira emberi, korántsem az a bizonyos kétszerkettő: magán viseli az ember alkotásának soha le nem zárt jellegét.

A könyv népszerű volta nem azt jelenti, hogy felületesen nyúlok a tárgyhoz. A fogalmak teljes tisztaságára törekedtem – az új megvilágítás talán a matematikusnak is mondhat valamit, a tanárnak bizonyára sokat is –, csak a könnyen unalmassá váló szisztematizálás, a valóban szemléletes dolgok definiálása, a technikai részletek maradtak el. (Az nem célja a könyvnek, hogy a matematika technikájára megtanítson.) Ha egy érdeklődő diák veszi a kezébe, képet kaphat úgyszólván az egész matematikáról. Kezdetben nem szántam ilyen hézagtalannak, az anyag magától bővült, írás közben, egyre kevésbé maradtak kihagyható részletek. Ha valamihez azelőtt az unalom emléke tapadt, most úgy éreztem: előveszek valami régi lomot, lefújom róla a port és csillogni kezd a kezemben.

Lehet, hogy a hangot helyenként naivnak fogja érezni az olvasó, de ezt szívesen vállalom: a naiv szembenállás az egyszerű tényekkel mindig az új felfedezés izgalmát idézi fel.

A bevezetésben mondom el: hogyan keletkezett a könyv. Benedek Marcell az az író, akiről ott szó esik. Neki kezdtem leveleket írni a differenciálszámításról, és az ő gondolata volt, hogy ebből könyv is lehetne.

Forrásokra nem hivatkozom. Sokat tanultam másoktól, de ezt ma már nem tudom elemeire bontani. Írás közben nem volt előttem könyv. Itt-ott kényszerítő erővel ötlött fel bennem valami hasonlat, aminek az eredetére is emlékeztem, pl. a remek Rademacher–Toeplitz könyvre,* vagy Beke kitűnő bevezetőjére az analízisbe; ha egyszer kialakult valaminek „a" módja, nem írhattam mást, csak azért, hogy eredetibb legyek. Főképpen arra vonatkozik ez, amit Kalmár Lászlótól kaptam. Ő évfolyamtársam volt és mesterem a matematikában; amit írok, azt elválaszthatatlanul átszövik az ő gondolatai. Külön is meg kell említenem, hogy tőle származik a „csokoládé-példa" a

* Rademacher–Toeplitz: Számokról és alakzatokról. Tankönyvkiadó, 1954.

végtelen sorok tárgyalásában, és a logaritmus-táblák kiépítésének egész gondolatmenete is.

Keresztnevükön idézni fogom önkénytelen kis munkatársaimat is az iskolapadokban; ők majd magukra ismernek. Itt említem meg Kató tanítványomat, aki most végezte a negyedik polgárit, és még keletkezésében szólt hozzá a könyvhöz: neki köszönöm, hogy a tehetséges diák szemével is látni tudtam az anyagot.

A legfontosabb segítség azonban a „nem-matematikus érdeklődésű ember" hozzászólása volt. Kedves barátom, Lay Béla színházi rendező, aki mindeddig azt hitte, hogy nincs füle a matematikához, végig követte az alakuló fejezeteket; csak az után tettem pontot, amivel ő meg volt elégedve. Nélküle talán létre sem jött volna ez a könyv.

A matematikus szemével Csillag Pál vizsgálta felül a kéziratot; az utolsó pillanatban Kalmár László is tudott időt szakítani egy gyors átfutásra; nekik köszönhetem a biztonság érzését.

Budapesten, 1943 őszén.

Dr. Péter Rózsa

ELŐSZÓ AZ ÚJABB KIADÁSOKHOZ

Előszó az 1957-es kiadáshoz

1943 óta 14 eseményektől terhes év telt el. Ezalatt Csillag Pál matematikus barátom és Kató tanítványom (Fuchs Kató) a fasizmus áldozatául estek. Anna tanítványom apja, akit annak idején illegális munkásmozgalmi tevékenységéért 17 évi börtönre ítéltek, kiszabadult; így ma talán már Anna képzeletében is találkoznak az egymáshoz egyre jobban közeledő egyenesek (lásd a 215. oldalt). A kiadásra kész könyv nem jelenhetett meg a német megszállás alatt; a készletet ezalatt bombatalálat is érte. A megmaradt példányok az 1945 — ös első szabad könyvnapon jelentek meg. A könyv német fordítása a múlt évben jelent meg és azonnal el is fogyott; nemrég készült el a második német kiadás. Hálás vagyok a Bibliotheca Kiadónak, hogy most lehetővé teszi a könyv elterjedését a magyar olvasók között is.

Az olvasó vegye figyelembe, hogy a könyv az én 1943-as gondolkodásmódomat tükrözi; alig változtattam rajta. Csak a befejezés változott meg lényegesen: azóta Kalmár Lászlóval közösen bebizonyítottuk, hogy az úgynevezett „abszolút eldönthetetlen problémák" létezése következik Gödel relatív-eldönthetetlen problémákról szóló tételéből; márpedig a következmény semmi esetre sem lehet nagyobb horderejű, mint az a tétel, amelyből következik.

Budapest, 1957 tavaszán.

Dr. Péter Rózsa

Az 1963-as kiadás mindössze egy új eredményt közlő lábjegyzetet fűzött az előzőhöz.

Az 1969-es kiadásért

nagy hálával tartozom a Tankönyvkiadónak, melynek vezetői gondjaikba vették ezt a nagyon keresett és régóta nem kapható könyvet. Az új kiadás az előzőtől sajtóhibáinak korrigálásán és néhány adatnak a mai helyzethez igazításán kívül abban tér el, hogy függelékként felvette egy nagyon ideillő cikkemet, amely a Magyar Tudományban jelent meg, és a „Játék a végtelennel"-re is hivatkozik. Címe: Formabontás a „két kultúra" ellen. Lírai mondanivalója mellett a matematikai nyelvészetből ad ízelítőt.

Időközben megjelent a könyv szlovák, román, angol, amerikai, lengyel, svéd, holland, dán, 3-ik és 4-ik német és két szovjet kiadása; megjelenőben van az olasz és a cseh kiadás.

Budapest, 1969. február.

Dr. Péter Rózsa