EUKLIDÉSZ

Elemek

5̄10

EUKLIDÉSZ

Elemek

FSZEK X/4 könyvtár
0 013500 552313

GONDOLAT · 1983

A mű eredeti címe:

Στοιχεῖα

Fordította és jegyzetekkel ellátta:

MAYER GYULA

A fordítást az eredetivel egybevetette,
Szakmailag ellenőrizte és az előszót írta:

SZABÓ ÁRPÁD

199.392

FŐVÁROSI SZABÓ ERVIN KÖNYVTÁR
BUDAPEST
12

ISBN 963 281 267 0

© Mayer Gyula, 1983. Hungarian translation

Tartalom

Előszó

Euklidész műve, amelynek új magyar fordítását veszi most a kezébe az olvasó, a matematika „klasszikusa". Mindannak nagy része, amit a középiskolában matematikából – különösen pedig amit mértanból, *geometriából* – tanultunk, megvan már az Elemekben. Sőt, sok helyütt a világon még nem is olyan régen ezt – az Elemeket – tanították az iskolában matematika órán. Alig is van még egy olyan munka, amely a könyvnyomtatás feltalálása óta olyan sok kiadásban látott volna napvilágot, mint Euklidész Elemei. – Ugyanakkor azonban a szerzőről magáról nagyon keveset, majdnem semmit sem tudunk. Kételyek merültek föl egyesekben legutóbb még a név helyesírását illetően is.

Euklidész nevét ugyanis az ókoriak nem egyszerű i-vel, hanem *e+i* betűkkel írták, amelyek eredetileg egy ún. kettőshangzót (diftongust) jelöltek. Ezt az utóbbit *Erasmus* nyomán (1467–1535) régi görög szövegekben *ej*-nek szokták olvasni. Ez a magyarázata annak, miért tettek kísérletet a közelmúltban többen arra, hogy a matematikus nevét is következetesen *Eukleidész*-nek írják. – Nem tartjuk fontosnak ezt a próbálkozást már csak azért sem, mert ennek a matematikusok körében közismert névnek az esetében a legtöbb európai nyelv ragaszkodik az *i* hanghoz. Ezt tette magáévá korábban a magyar nyelvhasználat is. A magyar matematikusok különben is régen hozzászoktak már ahhoz, hogy *Bolyai János*sal kapcsolatban „nem euklidészi" geometriáról beszéljenek. Ebben a másik, gyakrabban használt megjelölésben tehát már amúgyis az *i* hangot használjuk. Azonkívül lehetővé teszi a hagyományossá lett majdnem latinos írásmód *(Euklidész)* azt is, hogy megkülönböztessük az ókori matematikust az ugyanolyan nevű, de kevésbé jelentős 4. századi filozófustól (a megarai Eukl*ei*désztől), akivel már az ókorban gyakran összetévesztették. (Az összetévesztés egyébként Tiberius császár korától a 16. századig, tehát nem kevesebb mint másfél évezreden keresztül makacsul újra meg újra felbukkant.)

A matematikus *Euklidész*ről tehát személy szerint úgyszólván semmit sem tudunk. Mindazt, amit mégis elmondhatunk róla, műveiből, főként éppen az Elemekből kell kiolvasnunk. Azt pl., hogy mikor élhetetett, ilyen okoskodással szokták megállapítani.

Munkájából azonnal kiderül, hogy ezt csak a *Platón* és *Arisztotelész* utáni időben írhatták. Minthogy pedig Arisztotelész i. e. 322-ben halt meg, ez máris fontos „terminus post quem". De az is bizonyos, hogy Euklidész műve megelőzi a két híres ókori matematikust: *Apollóniosz*t és *Arkhimédész*t. Arkhimédész, aki már idézi Euklidész Elemeit, i. e. 287 és 212 között élt. Euklidész tehát nagyjából i. e. 300 körül írhatta munkáját. – Jól összevág ezzel a datálással az is, amit annál a *Proklosz*nál olvasunk, aki időszámításunk 5. századában élt, és akitől ránk maradt az euklidészi Elemek I. könyvéhez írt legjobb ókori kommentár. Van ugyanis Proklosz magyarázatai között egy olyan rövid áttekintés a legrégibb görög matematikusokról, amely újkori föltevés szerint még Arisztotelész tanítványától, a 4. századi *Eudémosz*tól származhat. Ennek a többek által nagyra tartott eudémoszi áttekintésnek a gondolatmenete ugyancsak megerősíteni látszik az Euklidész életkorára vonatkozó kronológiai következtetést.

Ugyanígy felelünk arra a kérdésre is: Hol élhetett, vagy hol működött Euklidész? – A híres késő-antik matematikus, *Papposz* – akinek az életkora egyébként szintén meglehetősen bizonytalan (időszámításunk 4. századának a *vége*, vagy inkább az *eleje*?) – említi „Matematikai Gyűjtemény" című munkájában, hogy a nagy *Apollóniosz* hosszabb ideig együtt volt Alexandriában *Euklidész tanítványaival.* Eszerint tehát Euklidész is Alexandriában élt. Vagy csak ott tanított egy darabig? Talán éppen az alexandriai „Múszeion" gazdag könyvtára tette volna lehetővé számára nagy műve összeállítását? – Ezek már inkább csak találgatások Papposz adata nyomán.

Elmondja még Papposz, hogy Euklidész lelkiismeretes, nyíltszívű, barátságos, szerény egyéniség volt. Nem zárkózott el a nála fiatalabbak ötletei, okfejtése elől; szívesen meghallgatta, mérlegelte ezeket is. Az pedig soha eszébe nem jutott volna, hogy mások érdemeit, gondolatait úgy tüntesse föl, mintha azok tőle származnának. – Ez az utóbbi megállapítás nyilván azzal függ össze, hogy Euklidésznek az Elemekben túlnyomórészt korábbi matematikusok tételeit, bizonyításait kellett rendszerbe foglalnia. Összeállításának azonban nem az volt a célja, mintha ő mindazt, amit előad, teljes egészében saját műveként akarta volna az olvasó elé tárni – ezt a gondolatot akarja kiemelni Papposz megjegyzése.

Ezzel pedig már ki is merítettük az Euklidészre vonatkozó antik híradásokat. Az a két anekdota, amely ezenkívül még Euklidész nevéhez fűződik, már nem őt magát jellemzi. Inkább az derül ki ezekből, hogyan gondolkoztak a régiek a matematikáról.

Elmondja pl. az előbb már említett Proklosz, hogy egy alkalommal maga Ptolemaiosz király, miután meghallgatta Euklidész egyik matematikai tárgyú előadását, azt kérdezte volna tőle: Miért nem lehet a matematikát *egyszerűbben* tanítani? Euklidész pedig azt felelte volna erre: azért nem, mert a matematikához *nem vezet királyi út*. – A kényelemhez szokott királyt és a szellemi nehézségeket büszke öntudattal vállaló matematikust állítja szembe egymással ez az anekdota, és nem arról a „szerény Euklidészről" beszél, akit Papposz említett.

Még jellemzőbb ennél az a másik rövid elbeszélés, amelyet *Sztobaiosz*nál olvasunk, aki nagyjából kortársa volt Proklosznak. Ez a történet meg azt állítja, hogy megkérdezte egyszer valaki Euklidésztől: Aztán mi haszna lesz abból, ha megtanulta a matematika tételeit bizonyításaikkal együtt? Euklidész pedig erre – mondja tovább a folytatás – szólította volna rabszolgáját: Adjon már egy oboloszt a kérdezőnek, *hogy valami haszna is legyen abból*, *amit tanult*. – Mert antik elgondolás szerint azt, aki elég földhöz ragadt ahhoz, hogy a matematikának (és főként pedig a matematikai *bizonyításnak*) a *hasznát* keresse, ahelyett, hogy belefelejtkeznék a matematikai gondolatok szépségébe – azt csak így lehet kifizetni. – Ez az anekdota is arra vall, milyen szoros szálak fűzik a görög, az euklidészi matematikát az idealista, közelebbről a platóni filozófiához.

Bizonyos, hogy Euklidész messze legfontosabb és legismertebb műve az *Elemek*. De mielőtt erről beszélnénk, említsük itt meg egyéb, hasonlóképpen matematikai tárgyú munkáit, bár ezeknek egy részéről éppen csak tudunk.

1. A „*Pszeudaria*"-t („Hamis tételek" vagy „Álbizonyítások") pl. csak címéről ismerjük, a munka maga elveszett. Nyilván arról szólhatott: hogyan kerülhetjük el a matematikában a téves gondolatokat, a rossz levezetéseket.

2. A „*Dedomena*" (= „Adott mennyiségek") című megmaradt munkája azt mutatja be, hogyan számíthatók ki bizonyos adott mennyiségekből más olyanok, amelyek az előbbiekkel összefüggenek ugyan, de közvetlenül nem ismertek. (A modern magyarázók általában *félreértik* ezt a munkát és úgy fogják föl, mintha ez valami „euklidészi algebra" kulcsa lenne.)

3. Egy másik, a *síkidomok felosztásáról* szóló munka csak jóval későbbi arab fordításban maradt ránk.

4. A „*Poriszmoi*" olyan tételeket mutat be, amelyek középhelyet foglalnak el a „theórémák" és a „szerkesztési feladatok" között.

5. Külön munkája foglalkozott a „*mértani helyekkel*".

6. Szólt Euklidésznek egy elveszett munkája a „kúpszeletekről". Ami ebben lényeges volt, az feltehetően belekerült *Apollóniosz* hasonló tárgyú munkájának abba a részébe, amely szerencsére fennmaradt. – Említsük itt meg mindjárt azt is, hogy Apollóniosz a kúpszeletek elméletében messze túljutott Euklidész eredményein.

7. Fennmaradt Euklidésznek egy műve a perspektíváról, „*Optika*" címen.

8. A tükörképekkel foglalkozik a „*Katoptrika*".

9. A régi pythagoreusok zeneelméletét foglalja össze az, amelyiknek latin címe: *Sectio Canonis* (= „A kánon metszése"), és végül

10. elemi asztronómia a „*Phainomena*" című. Az égbolt félgömbjének látszólagos mozgását, a csillagok felkelését-lenyugvását tárgyalja.

Annyi mindenesetre kiderül már ebből a puszta felsorolásból is: milyen problémakörök foglalkoztatták a görög matematikusokat az i. e. 4. század végén.

De jóval fontosabbnak tartotta ezeknél a műveknél már az ókor Euklidész nagy munkáját, az *Elemek*et. Erről kapta szerzőjük kitüntető nevét: *Sztoikheiótész* = „az, aki az Elemeket írta", minthogy az Elemek neve görögül: *Sztoikheia.*

Csakugyan, jegyezzük meg itt mindjárt: úgy látszik, senki sem írt az egész ókornak Euklidészt követő évszázadaiban még egyszer olyan természetű munkát, mint amilyen Euklidész Elemei. Különösen feltűnő ez azért, mert bár igaz, hogy az egész korábbi, Euklidész előtti görög matematikáról nagyon keveset tudunk, mégis biztos értesülésünk van arról, hogy éppen az Euklidészt megelőző nem egészen 150 év során hárman is kísérleteztek egy-egy olyan jellegű munkával, mint amilyen a mi számunkra Euklidész műve lett. Az egyik az 5. század második felének híres szofistája – és egyben tehetséges matematikusa – a khioszi *Hippokratész* volt. Ő lett az első, Proklosz híradása szerint, aki Elemeket állított össze. Ugyancsak Proklosz említi mint ilyen munkák szerzőit az egyébként ismeretlen *León*t, és egy bizonyos magnésziai *Theudiosz*t.

Bár ezek a mi számunkra már csak puszta nevek – *Hippokratész, León* és *Theudiosz*, mint az Euklidészéhez hasonló „Elemek" szerzői – hiszen ezekből az összeállításokból semmi sem maradt fönn, sőt, úgy látszik, nem forgott közkézen ennek a háromnak a munkája már az ókorban sem; Prokloszon kívül egy antik szerző sem beszél ezekről a régi Elemekről. De egy bizonyos szempontból talán mégsem lényegtelen az, hogy tudunk Euklidészen kívül még három korábbi kísérletezőről. Ez ugyanis arra mutat, mintha egy bizonyos, történetileg jól körülhatárolható időszakaszban – talán éppen Euklidésszel zárult ez a kor – különös *aktualitása* lett volna egy ilyen természetű matematikai munka összeállításának.

A következőkben mindenekelőtt megpróbáljuk kideríteni: mi lehetett az *aktualitása* annak, hogy többen is írtak Elemeket a matematika kibontakozásának azon a szakaszán, amelynek záróköve az ókorban, a mi szemünkben, éppen Euklidész nagy műve.

*

Az Euklidészt magyarázó Proklosz írja a következőt:

„Minthogy azt állítjuk, a matematika feltételekből kiinduló tudomány, amely bizonyos princípiumokból (elvekből) vezeti le következtetéseit

…, annak, aki Elemeket állít össze, külön kell tárgyalnia a tudomány princípiumait (az elveket), és külön azokat a dolgokat, amelyeket az előbbiekből vezet le. A princípiumokról nem kell számot adnia (ezeket nem kell bebizonyítania). De feltétlenül be kell bizonyítania mindazt, amit a princípiumokból következtet…"

„Princípiumok" vagy „elvek" a neve ebben az idézetben mindannak, amit Euklidész mint *definíciókat*, *posztulátumokat* és *axiómákat* sorol fel. A másik csoport viszont – az, ami a princípiumokból következik – a *tételek* (= theórémák) és a *szerkesztési feladatok* összessége. [Nevezhetjük ezt az utóbbi csoportot összefoglaló értelemben egyszerűen „tételek"-nek is, minthogy igazában nincs lényeges különbség *tétel* és *geometriai feladat* között. Minden szerkesztési feladat megfogalmazható tétel formájában is.]

Proklosz tehát egyrészt kettéosztja a matematika egészét – princípiumokra és theórémákra – másrészt pedig leszögezi, hogy a matematikus *a princípiumokat nem bizonyítja be* – ezeket bizonyítás *nélkül* fogadja el igazaknak. De *be kell bizonyítania mindazt, amit a princípiumokból következtet.* Más szóval: a matematika olyan *bebizonyított állítások* (tételek) rendszere, amelyek *be-nem-bizonyított* (bizonyítás *nélkül* elfogadott) *elvekre* (princípiumokra) épülnek.

Valóban jól talál ez a jellemzés mind Euklidész művére, mind pedig az egész matematikára. A kérdés csak az: Hogyan jutottak el a görögök oda, hogy így értsék és így építsék föl a matematika rendszerét – *már Euklidész előtt?* Mert nyilvánvaló, hogy Proklosznak igaza van. Addig, amíg nem választják szét egyszer s mindenkorra a bizonyítás nélkül elfogadott matematikai elveket és a belőlük levezetett (bebizonyított) tételeket, gondolni sem lehet arra, hogy valaki az Euklidészéhez hasonló Elemeket állítson össze. Valamiképpen érvényesülnie kellett az ilyen megkülönböztetésnek már annak a másik három szerzőnek az esetében is, aki Euklidész előtt az övéhez hasonló feladatra vállalkozott. – De nézzük csak meg közelebbről, mi az értelme egyáltalán az *elvek* és *tételek* szétválasztásának.

Ha megelégednénk olyan válasszal, amilyent erre a kérdésre Arisztotelész követői adnának, egyszerűen azt is mondhatnánk: Bizonyítás nélkül igaznak kell elfogadnunk a tételek egy részét (a princípiumokat), mert ha nem tennénk ezt, ha be akarnánk bizonyítani ezeket is, akkor ez a törekvésünk elkerülhetetlenül *regressus ad infinitum*hoz vezetne.

Bár ez kétségtelenül így van, de magyarázatnak ez talán mégsem elég. Mert ez a megokolás nem hívja fel a figyelmet arra, hogy az előbb feltett kérdés tulajdonképpen *a bizonyítással elérhető evidencia problémájához kapcsolódik.*

Annak a korábbi matematikai ismeretnek, amelyet az ember a mindennapi életben oly gyakori számolások, mérések során szerzett meg, még aligha volt szüksége elméleti bizonyításra. Hiszen gyakorlati, empirikus ismeret volt ez, amelyet maga az empíria, a gyakorlat igazolt.

Ha egyelőre a matematika keretein belül maradunk, és így vizsgáljuk a kérdést, valószínűbb, hogy a bizonyítás szükségességének a gondolata inkább az olyan matematikai természetű megfigyelésekkel kapcsolatban merült föl, amelyeknek helyes vagy helytelen voltáról *pusztán a gyakorlat, az empíria alapján nem lehet dönteni.* Ilyen tapasztalati úton el nem dönthető elemi matematikai megfigyelés pl. a következő kettő.

1. Bizonyos, hogy a görög matematikusokban egyszer föl kellett merülnie a kérdésnek: Tegyük föl, hogy adva egy négyzet, amelynek az oldalát valamilyen mértékszámmal fejeztük ki. Mekkora lesz ennek a négyzetnek az átlója ugyanazokban a mértékegységekben kifejezve, mint amelyeket az oldal megmérésére alkalmaztunk? – Kézenfekvő, hogy egy ilyen kérdésre kezdetben méréssel vagy számítással keresik a választ. Aztán észreveszik, hogy hiába próbálkoznak, nem találnak sem egész-, sem törtszámot, amellyel a négyzet átlóját az oldalhoz tudnák mérni. Azt tapasztalják, hogy a legjobb esetben is csak megközelítik a keresett mértéket. Dehát csakugyan így lesz ez *minden* esetben? – Erre a kérdésre a gyakorlat nem ad megnyugtató választ. Mert a próbálkozás csak azt mutatja, hogy az adott konkrét esetben nem sikerült a kísérlet. De vajon nincs-e mégis a végtelenül sok ki nem próbált eset között olyan is, amely más eredményre vezet? Végtelenül sok esetet nem próbálhatunk ki, a próba mindig csak véges számú lehet.

2. Ugyanígy nem dönthető el empirikusan a következő egyszerű aritmetikai probléma sem. – Könnyű belátni azt, hogy a természetes számok sora *végtelen*, azaz: *nincs legnagyobb természetes szám*. Mert bármilyen nagy számot veszünk is példaként, mindjárt hozzáadhatunk még 1-et, és ezzel máris túljutottunk azon, amelyet az előbb feltételesen „legnagyobb számnak" vettünk. De próbáljuk meg most ezt a gondolatmenetet egy kissé érdekesebb formában. – Osszuk a természetes számokat két csoportba. Legyen az egyik csoport azoké a számoké, amelyeknek *nincs valódi osztójuk*, mint 2, 3, 5, 7, ...; ezek az ún. *prímszámok*, amelyek ti. csak önmagukkal és az egységgel oszthatók (ezért mondjuk róluk, hogy „nincs valódi osztójuk"). A másik csoportba pedig tartozzanak azok a számok, amelyeknek *van valódi osztójuk*. Ezek az utóbbiak az *összetett számok*. Ezek ti. felépíthetők mint csupa prímszám szorzatai, összetételei, pl. $6 = 2 \cdot 3$. – Azt már beláttuk az előbb, hogy „nincs legnagyobb természetes szám", vagyis: a természetes számok sora végtelen. De hogy állunk a prímszámokkal? Ezekből is végtelen sok volna tán? Vagy van esetleg egy „utolsó", „legnagyobb prímszám", és mindaz, ami ezután jön, ami nagyobb ennél, az már csak összetett szám lehetne, amelyet nála kisebb prímszámok szorzataként állíthatnánk elő?

Világos, hogy *ez* a probléma sem dönthető el empirikusan, azzal, hogy egyszerűen hivatkozunk arra, amit tapasztalunk. A tapasztalás helyett ebben az esetben is *elméleti bizonyításhoz* kell folyamodnunk.

Mai történeti tudásunk szerint az elméleti bizonyítás problémája a görögöknél legkorábban nem a matematikában, hanem az ún. eleai filozófiában merült föl az i. e. 5. század első felében. Az eleai iskola képviselői – *Parmenidész*, *Melisszosz* és *Zénón* – azt tanították, hogy a tudás, amelyet érzékszerveink útján nyert tapasztalásból merítünk, azaz: empirikusan szerzünk, megbízhatatlan, félrevezető. Az érzékszervek útján nyert benyomások önmaguknak ellentmondó állításokra vezetnek. Az eleai filozófusok csakugyan ki is tudták mutatni az ellentmondást még az olyan legegyszerűbb állításokban is, amelyeknek helyességét a mindennapi életben rajtuk kívül senki sem merte volna kétségbevonni. Ezzel közvetve arra is rámutattak, hogy hamisnak, tévesnek tekintendő az az állítás, amely ellentmondásra vezet. (*Helyes*, vagy *igaz* csak a megcáfolt állítás *ellenkezője* lehet.)

Úgy látszik, az eleai filozófia képviselői kezdetben beérték a puszta cáfolással. A folytonos cáfolgatás azonban könnyen szofisztikába torkollik. Ha minden állításban ki tudjuk mutatni az ellentmondást, akkor ez egyértelmű azzal, hogy „igaz állítás" tán nem is lehetséges.

Volt azonban az eleai filozófia továbbépítésének egy másik lehetősége. Ki lehetett indulni olyan állításokból, amelyeknek igaz voltát minden kétségen felül állónak tartották. Ezeket el lehetett fogadni ellenőrzés *nélkül*. Ezekre építhették a további vizsgálódást, és most már csak azt kellett ellenőrizniök: melyek azok a további állítások, amelyek összhangban vannak a kiindulásul elfogadott, az alapul vett állításokkal.

Így bontakozott ki az eleai filozófia vitáiból az a görög *dialektika*, amelyet különösen *Platón* műveiből ismerünk. Ennek a dialektikának egyik kikristályosodott formája az euklidészi matematika.

Amint látjuk, előfeltétele volt annak, hogy valaki kísérletet tegyen az Euklidészéhez hasonló matematikai Elemek összeállítására, az alábbi három:

1. Mindenekelőtt meg kellett lennie annak az igénynek, hogy a matematikai ismereteket szabatosan megfogalmazott állításokba – *tételekbe* – foglalják, és hogy ezeket a tételeket be is bizonyítsák. (Tételeket ti. a korábbi, a görögség előtti matematika még egyáltalán nem fogalmazott meg.)

2. Rá kellett jönniök arra, hogy a matematikai bizonyítás nem lehet egyszerűen a tapasztalatra, az empíriára való hivatkozás. Éppen ellenkezőleg: annak a matematikusnak, aki Elemeket akart összeállítani, az absztrakciónak olyan fokára kellett emelkednie, amely már *elfordul a közvetlenül, az érzékszervekkel tapasztalható anyagi valóságtól. Az elméleti bizonyítás csak elméleti megfontolásokból indulhat ki.*

3. Ahhoz, hogy valaki összeállítsa a matematikai természetű állításoknak (tételeknek) valamiféle rendszerét, bizonyításaikkal együtt, okvetlenül kísérletet kell tennie arra is, hogy megállapítsa: melyek azok az állítások, amelyeket elfogad bizonyítás nélkül, milyen princípiumokra, elvekre építi rendszerét. – Feltehető, hogy a matematikai princípiumok összeállítását *próbálkozások* előzték meg. Nem valószínű, hogy azokat a matematikai elveket (definíciókat, posztulátumokat és axiómákat), amelyeket Euklidész művében találunk, bárki

már az első próbálkozásra hiánytalanul össze tudta volna állítani. Ezért van az, hogy még *Arisztotelész* is – aki pedig majdnem egy egész évszázaddal később élt, mint az a khioszi *Hippokratész*, aki elsőnek állított össze Elemeket – hosszasan értekezik arról, milyenek legyenek a matematika bizonyítás nélkül elfogadott elvei.

Igaz, nem tudjuk, milyen mértékben ismerték föl ezt a három követelményt már Euklidész előtt azok a szerzők, akik éppenúgy, mint ő maga, megpróbálták összeállítani a matematika Elemeit, és mennyire tudták ki is elégíteni az ilyen igényeket. Arra sem vállalkozhatunk ebben az összefüggésben, hogy magából Euklidészből mutassuk ki a korábbi Elemek nyomait. Elégedjünk meg itt azzal a megállapítással, hogy az euklidészi Elemek magas tudományos színvonala, a bizonyítások szigorúsága, világos, tiszta megfogalmazása, egyszóval: mindaz, ami Euklidészben az évszázadok hosszú során át felülmúlhatatlannak látszott, és amin úgyszólván csak a legújabbkori matematika tudott túlhaladni – mindez megerősíteni látszik az elgondolást, hogy nemcsak az Elemek egyes tételei, hanem magának az egész műnek a felépítése is több megelőző kísérlet után érlelődött olyanná, amilyen formában ránk maradt.

Arra a kérdésre tehát, hogy mi lehetett az *aktualitása* annak, hogy már az Euklidészt megelőző másfél évszázad során többen kísérleteztek azzal, hogy matematikai Elemeket írjanak, összefoglalóan csak a következőket felelhetjük.

Az eleai filozófusok rájöttek arra, hogy az érzékszervek útján nyert benyomásaink, tapasztalataink *megbízhatatlanok*. Az empíria önmagában nem vezet igazi tudáshoz. Kimutatták azt is, hogy az önmagának *ellentmondó* állítás nem lehet igaz. (Ezzel közvetve az *ellentmondásmentességet* tették meg az igaz állítás kritériumának.) Ilymódon egyrészt fölmerült a *bizonyítás* igénye, másrészt pedig össze kellett állítani (legalább is a matematikában) azoknak a lehetőleg „egyszerű" tételeknek a rendszerét, amelyeket *bizonyítás nélkül* igaznak tarthattak; ezek lettek a matematika elvei, princípiumai.

Bizonyára nem véletlen az, hogy ezek a törekvések éppen abban az időben vezettek egymásután többször is Elemek összeállítására, amikor, úgy látszik, az egész görög szellemi életre különben is erősen hatott az eleai filozófia. (Elég lesz itt talán emlékeztetni a „látszat" és a „valóság" ellentétének problémájára, amely ugyanebben az időben annyira foglalkoztatta az egész görög irodalmat. Igazában ezt a problémát is az eleai tanítás állította az érdeklődés középpontjába.) Nagyjából az i. e. 450-től 300-ig terjedő kor ez.

Befejezésül egészítsük ki ezt a kitérést az Elemek bizonyításformáinak rövid áttekintésével.

Euklidész kétféle bizonyítást ismer. Nyomatékosan fel kell hívnunk e kettő közül a figyelmet arra, amelyiket az 5. századi *Platón* mint a matematikára különösen jellemző bizonyítást emleget. Ez a *reductio ad absurdum*, vagy más néven *indirekt bizonyítás*.* Ez volt már az eleai filozófusok *(Parmenidész* és *Zénón)* gyakran alkalmazott okoskodása. Ez abból áll, hogy kimutatja: igaznak kell lennie a bizonyításra kiszemelt tételnek, mert ugyanennek az ellenkezője – az állítás tagadása – ellentmondásra vezet, s ezért nem lehetséges.

Pl. az előbb említett két tétel közül az elsőt – azt, hogy a négyzet oldala és átlója *nem összemérhető mennyiségek* – a következő okoskodással bizonyítja be Euklidész (v. ö. az Elemek X. 27. függelékével).

Mindenekelőtt fogalmazzuk meg a bebizonyítandó tétel ellenkezőjét: „a négyzet oldala és átlója *összemérhető*". (Ezt az utóbbit fogjuk tehát cáfolni.)

A négyzet átlójára és két oldalára érvényes *Pythagorasz* tétele: az átfogó (ebben az esetben az *átló*) négyzete egyenlő a két befogóra (a négyzet oldalaira) emelt négyzetek összegével. Tehát

$$d^2 = 2a^2.$$

Ha d és a összemérhető, akkor ez a két szám relatív prím. (Illetőleg, ha nem relatív prím, akkor addig egyszerűsítjük őket, míg relatív prímek lesznek.) A felírt képlet arra vall, hogy d^2 *páros szám*. Mert csak páros szám lehet egyenlő egy másik szám duplájával. Persze, ugyanígy páros szám d is. Mert csak páros számnak a négyzete páros.

* *Pólya Gy.* könyve (A gondolkodás iskolája, Budapest 1957. 199) különbséget tesz a *reductio ad absurdum* (= visszavezetés a képtelenségre) és az *indirekt bizonyítás* között, minthogy az előbbi *cáfol* egy tételt *(x)*, az utóbbi pedig az ellenkező tételt *(non x)* állítja. A két név tehát ugyanazt a valamit két ellentétes oldalról mutatja be: éppen azáltal, hogy „*x*"-et cáfoljuk, bizonyítjuk „*non-x*"-et.

199.392
FŐVÁROSI SZABÓ ERVIN KÖNYVTÁR BUDAPEST 12

De éppen ezért a-nak *páratlannak kell lennie*, hiszen megegyeztünk már abban, hogy d és a relatív prímek.

Ha viszont d páros ($d = 2m$), akkor az előbbi képletet így is írhatjuk:

$$(2m)^2 = 2a^2, \text{ vagyis } 4m^2 = 2a^2.$$

Ha most ennek a legutóbbi egyenletnek mindkét oldalát osztjuk 2-vel, akkor azt kapjuk, hogy $2m^2 = a^2$. Ez viszont arra vall, hogy *a páros szám*, mert csak páros szám négyzete lehet egyenlő egy másik számnak a duplájával.

Dehát lehet-e valamely szám egyszerre páros is meg páratlan is - mert az előbb arra az eredményre jutottunk, hogy „a-nak páratlannak kell lennie"? - Nyilvánvaló, hogy nem. Okoskodásunk, amely egyébként hibátlan volt, azért vezetett abszurd ellentmondásra, mert kiindulásunk volt téves: az az állítás, hogy „a négyzet oldala és átlója *összemérhető*". Miután pedig ezt megcáfoltuk, ez egyszersmind bizonyítás arra is, hogy a tétel ellenkezője igaz: „a négyzet oldala és átlója *nem összemérhető*".

Az alapvető, bizonyítás *nélkül* elfogadott elv, amelynek segítségével sikerült megcáfolnunk bebizonyítandó tételünk ellenkezőjét, mindössze ez volt: „valamely szám nem lehet egyszerre páros is, meg páratlan is". Ez a princípium pedig nem egyéb, mint a páros és páratlan szám definíciójának más megfogalmazása. - Ezen az elven kívül szükségünk volt még a bizonyításhoz a Pythagorasz-tételre; ezt az adott esetben *már előzőleg bebizonyítottnak vettük*.

Vegyük észre azt is, hogy a bemutatott bizonyítás nem valamely konkrét négyzeten illusztrálja az átló és az oldal összemérhetetlenségét, hanem érvényes *minden* négyzetre. Mert *bármely* négyzet átlóját és oldalát jelölheti d és a - két mennyiség, amelyet a bizonyítás során „számoknak" gondolunk. *Minden* négyzet esetében érvényes az átlóra és oldalra a Pythagorasz-tétel. És *minden* számra érvényes az, hogy *vagy* páros, *vagy* páratlan, de nem lehet egyszerre mind a kettő. - Ez a bizonyítás tehát valóban *minden*, azaz: *végtelen sok* négyzetre érvényes.

Szinte még elegánsabb ennél az, ahogy Euklidész az előbb példaként említett másik tételt bebizonyítja: *a prímszámok sorozata vég-*

*telen.** Ennek a tételnek az indirekt bizonyításához ti. szinte nem is kell egyéb, mint a prímszámnak és az összetett számnak az a két definíciója, amelyre föntebb már utaltunk.** A gondolatmenet nagyjából a következő:

Fölállítjuk a bebizonyítandó tételnek ellentmondó állítást: „*Előállítható* a prímszámok véges sorozata". Erről az állításról kell a bizonyításnak kimutatnia, hogy ez téves, azaz igazában: „n e m á l l í t h a t ó e l ő a prímszámok véges sorozata".

Ha csakugyan előállítható a prímszámok véges sorozata, akkor ez azt jelenti, hogy fölírhatunk – esetleg egy nagyon hosszú sorban – *minden* prímszámot. Szimbolizálja pl. a következő három betű – a, b és c – a prímszámok *egész* sorát, mintha ezeken kívül már nem is volna több prímszám.*** Szorozzuk össze ezeket mind, és legyen

$$Q = a \cdot b \cdot c$$

valamilyen összetett szám. Kérdés: Milyen szám lesz akkor

$$(Q+1) = a \cdot b \cdot c + 1\ ?$$

Nyilván csak két lehetőségre gondolhatunk: vagy prímszám, vagy összetett szám. Nézzük meg külön-külön, mit jelent e két lehetőség.

1. Ha prímszám $(a \cdot b \cdot c+1)$, akkor nem igaz az, hogy az előbbi sor a, b, c tartalmaz minden prímszámot. Akármilyen sokat is szimbolizál ez a három betű, van ezeken kívül még több prímszám is, máris találtunk egyet: $(a \cdot b \cdot c \cdot +1)$.

2. De előfordulhat az is hogy $(a \cdot b \cdot c+1)$ *összetett szám*. [Mielőtt

* Elemek IX. 20. Az eredeti megfogalmazás szerint: „*Több* prímszám van, mint a prímszámok előállítható sorozata". Vö. *Pólya Gy.* i. m. 199.

** Euklidész a IX. 20. bizonyításában utal a VII. 36. és VII. 31. tételre is. Ez az utóbbi kettő azonban felfogható úgy is, mint közvetlen következménye az „összetett szám" definíciójának.

*** Jellemző Euklidész tömörségére, hogy az ő bizonyításában csakugyan mindösszesen három betű szimbolizálja a prímszámok elképzelt „teljes sorát". Ugyanez modern átírásban (pl. az említett *Pólya*-könyvben) így néz ki:

$$2,3,5,7,11,\ldots P$$

ahol P az elképzelt „legnagyobb prímszám".

tovább vizsgálnánk ezt a lehetőséget, tegyük félre egy pillanatra Euklidészt, és kérdezzük meg, tőle függetlenül: Csakugyan előfordulhat az is, hogy összetett számot kapunk, ha *1*-gyel növeljük a prímszámok valamilyen szorzatát? – Hogyne! Vegyük pl. ezt a két prímszámot: 2 és 13. Ezeknek szorzata $2 \cdot 13 = 26$ összetett szám, de ugyancsak összetett szám az 1-gyel nagyobb 27 is.] Ha tehát összetett szám $(Q+1)$, akkor ennek – az összetett szám definíciója értelmében – osztója kell legyen valamely prímszám. De ez az osztó nem lehet egyik sem azok közül a prímszámok közül, amelyeknek szorzata $Q = a \cdot b \cdot c$, mert ha ezek közül bármelyikkel osztjuk is $Q+1$-et, maradékul 1-et kapunk. Ez azt jelenti: csak olyan prímszám lehet a $Q+1$ összetett szám osztója, amelyet az előbb *kifelejtettünk*, amikor azt hittük, hogy a, b és c-vel felsoroltuk a prímszámokat mind. [Ha a előbbi illusztráló példára gondolunk, a $2 \cdot 13 + 1 = 27$-nek nem osztója a két prímszám, 2 és 13 közül egyik sem, de osztója egy „kifelejtett prímszám": a 3.]

Látjuk tehát: egyik esetben sem sikerült összeállítanunk a prímszámok teljes (véges) sorozatát, több prímszám van, mint amennyit bármikor is fel tudnánk sorolni: a prímszámok sora végtelen.

Feltűnhet ezen a bizonyításon az is, hogy bár azt állítjuk: több prímszám van, mint amennyit fel tudunk sorolni, és bár a bizonyítás csakugyan abból áll, hogy rámutatunk: a felsoroltakon kívül – bármilyen sokan legyenek is – *lennie kell még legalább egy prímszámnak*, de igazában mégis függőben marad: Melyik hát az a sorozaton túli prímszám, amelyikről beszélünk? Mert ez lehet: $(a \cdot b \cdot c+1)$, de lehet egy olyan is, amelyikről csak azt tudjuk, hogy *nem a*, *nem b* és *nem c*.

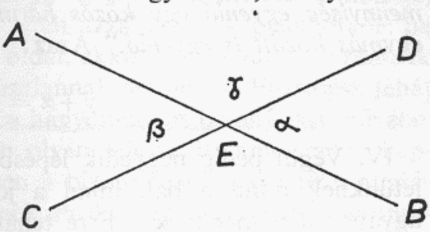
Az Elemek másik bizonyításformája az ún. *szintetikus bizonyítás*. (Görögül *szyntheszisz* „összetevés", „összeállítás" vagy „összerakás".) Ez abból áll, hogy több alapul vett – bizonyítás *nélkül* igaznak tartott – állítást (princípiumot) vagy esetleg már korábban bebizonyított, igazolt tételt úgy állítunk össze, hogy magából az összeállításból, a *szintézisből* derüljön ki: a bebizonyítandó tételnek szükségszerűen igaznak kell lennie, mert ez valójában nem is egyéb, mint „következménye" ismert és elfogadott princípiumoknak vagy korábban igazolt tételeknek.

A következőkben bemutatok Euklidész nyomán egy ilyen *négy* lépésből álló (I–IV.) szintetikus bizonyítást. De mielőtt idézném magát a tételt és bizonyítását, érdemes lesz előrebocsátani itt két megjegyzést. *Egyrészt* azt, hogy az alább idézendő tétel annyira egyszerű, hogy bizonyítása tulajdonképpen fölösleges. A szemlélet közvetlenül és azonnal igazolja az állítást. Nem valószínű, hogy ezt bárki – aki egyáltalán megértette, hogy miről van szó – valaha is megpróbálta volna kétségbevonni. A bizonyítás tehát ebben az esetben – amint ez egyébként többször előfordul az Elemekben – *öncélú.* Aki ezt megszerkesztette, az nyilván csak azt akarta a bizonyítással illusztrálni: íme, ez a tétel sem egyszerű princípium, hanem *levezetett theóréma.* – *Másrészt* érdemes lesz felhívni a figyelmet arra is: a bemutatandó szintetikus bizonyítás első lépése máris utalás egy másik, közvetlenül előtte bebizonyított és még egyszerűbb tételre. Csak azért *nem* ezzel a másik tétellel illusztrálom a szintetikus bizonyításformát, mert ez túlságos egyszerűsége miatt már nem is instruktív.

A tétel tehát, amelynek bizonyításáról szó lesz, az Elemek I. könyvének 15. theórémája, így hangzik:

Ha két egyenes metszi egymást, a keletkező csúcsszögek egyenlők."

Arról van tehát szó, hogy az *AB* és a *CD* egyenesek, amelyek metszik egymást, az α és β csúcsszögeket alkotják; α és β pedig egymás között egyenlők. (Természetesen csúcsszög a másik kettő is; γ és a vele szemben fekvő, amelyet az ábrán nem betűztünk meg. Beszélhetnénk ennek az utóbbi kettőnek az egyenlőségéről is.)



1. ábra

Euklidész, hogy a bizonyítást megkönnyítse, megbetűzi a két egyenes metszéspontját is, amely egyben a keletkező csúcsszögek közös pontja: *E.* A bizonyítás maga a következő *négy* lépésből áll.

I. Az *AB* és az ED egyenesekre pillantunk, és megállapítjuk: a két egymás mellett fekvő szög összege két derékszög: $\gamma+\alpha = 2R$. Éppen ezt mondja ki ti. a korábban bebizonyított I. 13 tétel:

„*Ha úgy keletkeznek szögek* (γ és α), *hogy egy egyenest* (*AB*) *állí-*

tunk egy egyenesre (*ED*), *akkor vagy két derékszög, vagy (összegben) két derékszöggel egyenlő szögek keletkeznek.*"

[Közbevetőleg azt is megjegyezhetjük, hogy ez az éppen idézett tétel csak kiegészíti az egyik princípiumot, az I. könyv 10. definícióját: „*Ha valamely egyenesre egyenest állítunk úgy, hogy egyenlő mellékszögek keletkeznek, akkor a két egyenlő szög derékszög, és az álló egyenest merőlegesnek mondjuk arra, amelyen áll.*"]

II. A második lépés csak abban különbözik az elsőtől, hogy most a *CD* és *AE* egyenesekre pillantunk, és megállapítjuk, hogy a β és γ szög összege is két derékszög kell legyen: $\beta+\gamma=2R$. Ezekre is érvényes ti. az előbb idézett tétel, mert most is egy egyenesre (*CD*) állítottunk egy másik egyenest (*AE*), és most is két szög keletkezett egymás mellett: β és γ.

III. A harmadik lépés abból áll, hogy észrevesszük: van két olyan egyenletünk, amelyeknek jobb oldalai azonosak:

$$\gamma+\alpha=2R$$

és

$$\beta+\gamma=2R.$$

Ezekre érvényes az Elemek egyik princípiuma, az 1. axióma: „*Ha két mennyiség egyenlő egy közös harmadikkal, akkor a két mennyiség egymás között is egyenlő.*" Azaz:

$$\gamma+\alpha=\beta+\gamma.$$

IV. Végül pedig negyedik lépésben észrevesszük, hogy új egyenletünknek mind a bal, mind a jobb oldalán egyformán szerepel ugyanaz a γ mennyiség. Erre tehát alkalmazhatjuk az Elemek egy másik princípiumát, a 3. axiómát: „*Ha egyenlőkből egyenlőket veszünk el, a maradékok egyenlők lesznek.*" Vonjuk ki az egyenlet mindkét oldalából γ-t; utána ez marad:

$$\alpha=\beta.$$

Éppen ezt akartuk bebizonyítani: a két csúcsszög, α és β egyenlő.

Látjuk tehát: a szintetikus bizonyítás felépítése abból áll, hogy úgy csoportosítunk, illetőleg alkalmazunk ismert és már igaznak elfogadott állításokat (princípiumokat vagy már korábban elfogadott tételeket), hogy alkalmazásuk, azaz a velük végzett műveletek közvetlenül vezessenek el a bizonyítandó tételhez.

Ahhoz, hogy a tárgyalt tételt ne egyszerűen csak a szemlélet alapján fogadjuk el igaznak, hanem azt is belássuk, hogy ennek csakugyan szükségszerűen így kell lennie, három másik már korábbról ismert tételre kellett gondolnunk. Sőt, a három közül az egyiket egymásután kétszer is alkalmaznunk kellett (lásd az I. és a II. lépést), mert csak így jutottunk közelebb a célul kitűzött bizonyításhoz. Azonkívül nem elég még az sem, hogy egyszerűen csak hivatkozzunk a három fölhasznált tételre. Elengedhetetlen a bizonyításhoz – legalább részben – az alkalmazott tételek föntebb követett sorrendje is. A III. és IV. lépés csak az I. és II. után kerülhet sorra.

Az Elemekben található bizonyítások nagy része feltehetően éppenúgy az Euklidész előtti korból származik, mint a tételek és szerkesztések többsége. Vannak esetek, amelyekben a történeti kutatás konkréten ki is tudta mutatni a korábbi eredetet. Az egyik föntebb bemutatott bizonyítással kapcsolatban pl. már Arisztotelész elmondja, hogy ezt a négyzetre vonatkozó tételt azzal szokták bizonyítani: ha összemérhető lenne az átló és az oldal, akkor ugyanannak a számnak kellene egyszerre párosnak és páratlannak lennie. – Euklidész tehát ebben az esetben készen vette át a hagyományos bizonyítást művébe.

Vannak viszont az Elemekben olyan tételek is, amelyekkel kapcsolatban az antik források éppen a bizonyítást vagy a tétel általánosítását tulajdonítják Euklidésznek. Proklosz pl. a híres Pythagorasztételről mondja őszinte csodálattal, hogy ennek a bizonyítása az Elemekben (I. 47) magától Euklidésztől származnék, és mindjárt hozzáteszi azt is, hogy ugyanennek a tételnek egyik általánosítása a VI. könyben (31.) ugyancsak az Elemek szerzőjének a műve lenne. – Talán nem lesz fölösleges megemlíteni itt mindjárt azt is, hogy a modern kutatás ebben az összefüggésben némi szkepszissel fogadta Proklosz szavait. Egyrészt kétségbevonták, hogy az adott bizonyítás (I. 47) csakugyan Euklidésztől származnék, másrészt viszont – ami a tétel általánosítását illeti a VI. könyvben (31.) – a bizonyítást találták kissé elnagyoltnak, hiányosnak – egyáltalán nem csatlakozva ezúttal Proklosz lelkesedéséhez.

Ne feledkezzünk meg arról sem, hogy azok, akik a legutóbbi évtizedek során behatóbban foglalkoztak az Elemekkel, nem a „nagy matematikust" látták Euklidészben, nem is „rendszerező munkáját" emelték ki, inkább *didaktikai érdemeit* hangsúlyozták. Egyben utaltak ezek a megfigyelők arra, hogy a 13 könyvből álló Elemek színvonala korántsem mindenütt egységes. Vannak benne egészen kiváló, elsőrangú matematikusra valló részek, de olyanok is, amelyek azt a benyomást keltik a modern olvasóban, mintha az előbbieknél jóval gyengébbek lennének. Ezt azzal magyarázták, hogy azokban a könyvekben, amelyekben Euklidész kiváló matematikus elődök munkásságára támaszkodott, ott az ő színvonala is meglepően magas lett; ahol viszont nem álltak a rendelkezésére ilyen előmunkálatok, ott nem is tudta megközelíteni a különben magas színvonalat.

Tekintsük át ezek után nagy vonásokban az Elemek *első 13 könyvének* a tartalmát. Csak ezek a könyvek származnak ugyanis kétségtelenül magától Euklidésztől. Bár van az Elemek legtöbb fennmaradt kéziratában – a késő-ókorra mennek vissza ezek mind – egy XIV., sőt még egy XV. könyv is. De tudjuk erről a kettőről, hogy ezeket csak utólag csatolták Euklidész munkájához. A XIV. könyv szerzője az alexandriai *Hypsziklész* volt az i. e. 2. században. A XV. könyv pedig még későbbi eredetű, időszámításunk 6. századából való.

Azonnal feltűnik mindenkinek, aki ezt a munkát elfogulatlanul veszi a kezébe, hogy Euklidész túlnyomórészt a *geometriával* foglalkozik; az *aritmetika* ezen belül csak egészen alárendelt szerephez jut, nem is foglalkozik vele több csak az Elemek három könyve: a VII., VIII. és IX. Pedig ez az eljárás egyáltalán nincs összhangban azzal, amit Proklosz az Elemekhez írt kommentárjában, az ún. „második előszóban" kifejt. A magyarázó ugyanis egyértelműen leszögezi: a matematika tudománya két részből áll: aritmetikából és geometriából. Sőt Proklosz nyomatékosan hangsúlyozza: a geometriát pedig csak a *második hely* illeti meg az aritmetika után. A megokolás erre a rangsorolásra kettős:

Egyrészt a számok elvontabbak (absztraktabbak) mint a geometriai idomok. A számok között van olyan *legkisebb*, amelyből minden további szám felépíthető: az 1. (A görög aritmetika ragaszkodott az 1 oszthatatlanságának a gondolatához. Kisebb szám mint 1 *nincs.* A törteket két-két szám aránya helyettesíti.) De nem így a geometria. A geometriában *nincs legkisebb;* itt megvan a „végtelenül osztható"; ahol pedig ez föllép, ott mindjárt jelentkezik az is, amit a görögök *alogon*nak („ésszel föl nem foghatónak") neveztek.

Bizonyos, hogy Proklosz rangsorolása csakugyan sokkal jobban megfelel a görög tudomány szellemének, mint az, hogy Euklidész első helyre teszi a geometriát, és csak mellékes szerepet biztosít az aritmetikának. Mi lehet ennek a magyarázata? – Bármilyen különös is, de be kell ismernünk: az Euklidésszel foglalkozó modern irodalom nem adott eddig általánosan elfogadott választ arra a kérdésre: miért lett a görög matematika túlnyomórészt geometria?

Aligha lehet igazuk azoknak, akik a geometria előtérbe kerülését a régi görögök *szemléletességre törekvésével* akarták magyarázni. Az euklidészi tudomány igazában nem szemléletes, sőt igyekszik tudatosan háttérbe szorítani a szemléletességet.

Én magam már korábban azzal próbáltam megokolni a geometria túlsúlyba jutását, hogy utaltam arra: minden jel arra mutat, hogy a deduktív görög matematika kibontakozásának korában jóval nehezebb probléma volt a geometria elvi megalapozása, mint az aritmetikáé. Ez már önmagában is fontosabbá tehette a geometria Elemeinek az összállítását. – Hozzáfűzhetem ehhez most mint további érvet azt a megfigyelést, hogy a pythagoreusok fontos matematikai diszciplínája volt az *asztronómia.* Ez pedig a görögöknél sokkal inkább geometria és nem aritmetika. Ez is hozzájárulhatott ahhoz, hogy elvben ugyan az aritmetikát tartották a matematika első számú részének, de mégis fontosabbnak érezték az Elemekben a geometria kidolgozását.

Az I. könyv a 13 közül az egyik legérdekesebb; nemcsak azért, mert – ami a fölépítést illeti – egyike a legjobban kidolgozottaknak. Szinte káprázik belé a szemünk, amikor észrevesszük: ennek a könyvnek mind a 48 tétele szigorú sorrendben követi egymást, mint mondani szokták: minden tétel vaskövetkezetességgel épül a megelőzőekre, míg el nem éri a tárgyalás az előre kitűzött célt: a 47.-ben a Pythagorasz-tételt, a 48.-ban pedig ugyanennek a megfordítását: „ha a háromszög egyik oldalára emelt négyzet egyenlő a másik két oldalra emelt négyzetek összegével, akkor *derékszögű* háromszöggel van dolgunk."

Érdekes ez a könyv azért is, mert itt találjuk, rögtön az elején, a legtöbb matematikai princípiumot. Euklidész három csoportba osztva sorolja föl ezeket: 1. *definíciók*, 2. *posztulátumok* és 3. *axiómák*. Ami a definíciókat illeti, a mai matematikus nem ért egyet azzal, hogy Euklidész definiál olyan fogalmakat is, mint *pont*, *vonal*, *egyenes* stb. Manapság az ilyen alapvető fogalmakat definíció nélkül használjuk. Sőt, hajlandók lennénk logikai szempontból elhibázottnak tartani az ilyesmire irányuló definíciós kísérletet. Következik ez egyszerűen abból, hogy a mi elgondolásunk másban látja a definíció szerepét, mint amiben ezt Euklidész kortársai látták.

Annak a görög dialektikának, amely az eleai filozófiából bontakozott ki, előírása volt, hogy a vita résztvevőinek mindenekelőtt abban kellett megegyezniök, *amiről* a vita folyt. Olyan erre vonatkozó állításokat kellett keresniök, amelyeket, jóllehet egymással szemben álló résztvevők a vitában, mégis egyformán magukévá tudtak tenni. Ilyen szerepet szánt Euklidész a geometria tárgyalásában a definícióknak. Vegyük észre azt is, hogy vannak Euklidész definíciói között olyanok, amelyeket később a tételek tárgyalása során soha nem használ. Beszél pl. a 22. definíció *rombuszról*, *romboidról* és *trapézről* anélkül, hogy a tételek később akár csak egyetlen egyszer is ilyen néven említenének valamely paralelogrammát. Logikai szempontból, persze, hiba az ilyen *fölösleges definíció*. De annál tanulságosabb történeti szempontból. Bizonyíték ez egyrészt arra, hogy a korábbi, az Euklidész előtti görög geometria ilyen fogalmakat is használt. Másrészt pedig némi fény derül ebből arra is: hogyan dolgozhatott Euklidész. Nyilván kitette maga elé a korábbi Elemeket – nem tudjuk melyiket, *Hippokratész*, *León* vagy *Theudiosz* munkáját – és amit ezekben használhatónak talált, azt átvette saját összeállításába. A *rombusz*, *romboid* és *trapéz* nevek alighanem ilyen korábbi matematikai munkákból kerültek át hozzá – figyelmetlenségből.

A *posztulátumok* a tárgyalásra kerülő geometriai idomok megszerkeszthetőségét biztosítják, és így a matematikai *egzisztencia* problémájához kapcsolódnak. Megszerkeszthetők a geometriai idomok azért, mert mint az első két posztulátum kimondja: bármely két pont összeköthető egyenes vonallal, illetőleg bármely adott egyenes tetszés szerint meghosszabbítható. A harmadik posztulátum a tetszőleges sugarú kör megszerkeszthetőségét mondja ki. – Ezek szerint az első három posztulátum lehetővé teszi a *vonalzó* és a *körző* használatát. (Csak ez a kettő a geometria klasszikus, megengedett segédeszköze.)

A *posztulátum* megjelölés latin fordítása a megfelelő görög *aitéma* szakkifejezésnek. A dialektikából, illetőleg az eleai filozófiából származik ez a fajta princípium is. Szó volt már arról, hogy a dialektikus vita résztvevőinek előre meg kellett egyezniök a közösen elfogadott kiinduló tételekben. De előfordulhatott az is, hogy csak az egyik résztvevő *kérte* („követelte", „posztulálta") egy-egy elvnek az elfogadását, de nem volt bizonyos az, hogy hozzájárul-e ehhez a másik is. Ilyen *egyoldalúan* követelt kiindulási elv volt a *posztulátum.* Csakugyan az az első három, amelyre épp az imént utaltunk, a *mozgás* megengedését kívánja. (*Mozgás nélkül* sem egyenes nem húzható, sem kör nem rajzolható.) Az eleai filozófia viszont tagadta a mozgás lehetőségét, és ennek megfelelően a matematikusok igyekeztek kiiktatni a mozgást a geometriából. Minthogy viszont mozgás nélkül nincs geometriai szerkesztés, posztulálni kellett legalább a vonalzó és körző használatának a lehetőségét.

Külön föl kell még hívnunk a figyelmet a híres 5. posztulátumra. (A 4. csak előkészítése ennek az 5.-nek.) Egyesek úgy gondolják, hogy ez a híres *párhuzamossági posztulátum* talán magától Euklidésztől származik. Mint ismeretes, Euklidész után több mint 2000 éven át többször próbát tettek ezzel: hátha nem is posztulátum ez, hanem tétel, amit be is lehetne bizonyítani. Az egyik legelső, aki a vitát eldöntötte, *Bolyai János* volt; ő ti. enélkül a posztulátum nélkül építette föl ún. abszolút geometriáját. Ezzel igaza lett Euklidésznek is – szemben a későbbi, de Bolyai *előtti* kísérletezőkkel: a kérdéses állítás valóban eldönthetetlen posztulátum, és nem tétel.*

* Érdemes lesz itt megemlíteni: ez a párhuzamossági posztulátum több régi Euklidész-kiadásban úgy szerepel mint „*11. axióma*". Ezért lett *Bolyai János* munkájának címe: „*Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens: a veritate aut falsitate Axiomatis XI. Euclidei, a priori haud unquam decidenda, independentem: adjecta ad casum falsitatis quadratura circuli geometrica.*"

A princípiumok harmadik csoportja: az *axiómák*. Több Arisztotelész-idézet igazolhatja, hogy korábban csakugyan ezt a megjelölést használták ezekre a bizonyítás nélkül elfogadott elvekre: *axiómata*. A másik név, amelyet ezekre Euklidész szövege használ *(koinai ennoiai)*, feltehetően későbbi eredetű, és azzal a felfogással függ össze, amelyet ezekről az elvekről *Arisztotelész* nyomán vallottak. Arisztotelész ugyanis meg volt győződve róla – amint ezt Proklosz szövege is hangsúlyozza – hogy az axiómák olyan állítások, amelyeknek igaz voltát „józaneszű ember nem vonhatja kétségbe". Magukévá tették ezt a nézetet a későbbi görög matematikusok is.

Több jel arra mutat viszont, hogy korábban – az Euklidész, sőt az Arisztotelész *előtti* időkben – sokan úgy gondolták: *a priori nem dönthető el, igazak-e vagy hamisak az axiómák*. Láttuk már, hogy ezt vallotta *Bolyai János* a másik princípiumról, a párhuzamossági posztulátumról. És hogy csakugyan így gondolkoztak már az ókorban a princípiumoknak erről a másik csoportjáról is, azt mindjárt illusztrálhatjuk az egyik euklidészi axiómával: *„az egész nagyobb, mint a rész"*. Mai megítélésünk szerint ez az állítás csak az ún. *véges halmazokra* érvényes. Hiszen *végtelen halmaz* éppen az, amelynek *van az egésszel ekvivalens rész-halmaza*, amelyre tehát nem érvényes az idézett axióma. De alighanem így gondolkozott erről a kérdésről már az eleai *Zénón* is, mert különben nem állíthatta volna föl paradoxonát: *„A fele idő egyenlő a duplájával."*

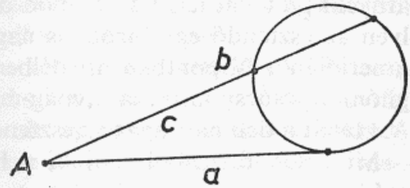
A II. könyv jóval rövidebb, mint a megelőző, mindössze 14 tételből áll. Figyelemre méltó ez a könyv történeti szempontból különösen azért, mert ennek a tételeiben ismerte föl több modern kutató az ún. *geometrikus algebrát*. Óvatos megfogalmazásban ez azt jelenti: ezeket a tételeket mi manapság algebrai formában tárgyaljuk. Más kérdés az, hogy vajon csakugyan algebrai problémák adtak-e alkalmat már az ókorban ezeknek a kidolgozására. – Bár a magam részéről *tévesnek* tartom, meg kell itt röviden említenem azt az elterjedt történeti felfogást, amely szerint az Euklidész művében „geometrikus algebrának" elnevezett tételek Babilónban eredetileg *tiszta algebra* lettek volna; ezt vették volna át a görögök, már Euklidész előtt, *geometrizált formában.*

Érdekes, hogy Proklosz egy alkalommal elmondja: mire használták az ókoriak pl. a *II. 10* tételt. (Ezt ti. magunktól aligha találtuk volna ki.) Rájöttek arra – már a Platón *előtti* korban – hogyan szerkeszthetők olyan négyzetek, amelyeknél az *átló* és az *oldal* aránya „megközelíti az összemérhetőséget". Ha pl. az oldal 5 egység, akkor az átló megközelítően: 7; ha az oldal 12, akkor az átló kb. 17 stb. Mi ezt a fölismerést ma így fogalmaznánk meg: az adott szabály szerint előállított törtek: 7/5, 17/12, 41/29, ... d/a egyre inkább megközelítik a $\sqrt{2}$ értékét. – Ezt a fölismerést igazolták az ókoriak a *II. 10* tétellel.

Az Elemek III. és IV. könyve, ha lehet, még szorosabban kapcsolódik egymáshoz, mint a megelőző két könyv. A III. 37, a IV. 16 tételből áll. Az előbbi a körnek néhány alapvető tulajdonságát foglalja tételekbe, a másik pedig a körbe (és a kör köré) írható szabályos sokszögeket – *háromszög*, *négyszög*, *ötszög*, *hatszög* és a körbe írt *tizenötszöget* – tárgyalja. A „*kört*", „*középpontját*", „*átmérőjét*" és a „*félkört*" már bemutatta egy-egy definíció az I. könyv elején, minthogy szükség volt ezekre a fogalmakra már az I. és II. könyv egyik-másik tételében. A III. könyv további, körre vonatkozó 11 definícióval egészíti ki a korábbiakat.

Úgy látszik, a körrel kapcsolatos tételek kidolgozására – azaz gyakorlatilag mindarra, amit a III. és IV. könyv tárgyal – a görög *alkalmazott matematika* egyik ágában, az *asztronómiában* került sor. Kimutatható ez több Euklidésznél tárgyalt tételről.

Vegyük pl. elsőnek a III. 36. tételt. Ez ti. azt mondja ki – az itt bemutatott 2. ábrán illusztrálva: ha valamely körhöz egy rajta kivüleső *A* pontból érintőt (lásd az *a* szakaszt) és szelőt (*b*) húzunk, akkor az érintő (*a*) középarányos lesz az egész szelő (*b*) és a szelőnek a körön kívüleső darabja (*c*) között. Tehát:



2. ábra

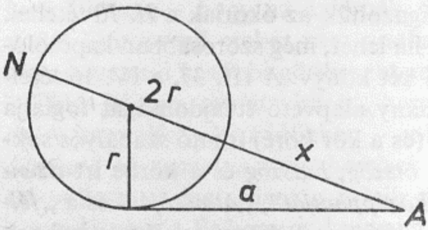
$$b : a = a : c.$$

Igaz, a III. 36. tétel ezt az állítást nem mint arányt, hanem mint egy téglalapnak és egy négyzetnek az egyenlőségét fogalmazza meg:

$$b \cdot c = a^2.$$

De erre a különös megfogalmazásra csak azért kényszerült az Elemek szerzője, mert az V. könyv előtt nem akarta használni az *arány* fogalmát.

Aligha tudnánk egykönnyen kideríteni, mi adott alkalmat e tétel fölismerésére, ha nem olvasnánk Euklidésznél ennek egymásután két bizonyítását. Ő ti. elsőnek azt a speciális esetet mutatja be, amelyben a körön kívüleső pontból húzott szelő a kör középpontján megy át, amint ezt a 3. ábra mutatja.



3. ábra

Elég egy pillantást vetnünk erre az ábrára, hogy fölismerjük: ez nem egyéb, mint az a „szimbolikus világkép", amelyet a hellenisztikus asztronómia és matematikai földrajz olyan gyakran használt az ún. gnómónnal kapcsolatban: *r* a vízszintes síkban függőlegesen fölállított gnómón, a napóra mutatója; az *a* szakasz (meghosszabbítva) a dél-északi irányt mutatja, erre a vonalra esik mindig a gnómón déli árnyéka; *a* tehát lehet a gnómón déli árnyéka valamely megadott helyen az esztendő egy bizonyos napján; a kör maga szimbolikusan a „meridián", *N* pontban áll délben a nap; a Föld szimbolikusan a gnómón csúcspontja: a „világ-meridián" körének a középpontja. *NA* tehát a déli napsugár az esztendő valamely napján.

Mint sok forrásból tudjuk, a hellenisztikus tudomány gondosan számon tartotta városról-városra a gnómónnak és *napéjegyenlőségi déli árnyékának* az arányát. Mert ebből az arányból kiszámítható volt a kérdéses hely földrajzi szélessége, azaz fokokban mért távolsága az Egyenlítőtől. (Csak példaként említem meg, hogy a hellenisztikus irodalom szerint ez az arány Athénben 4:3, Rhodoszban 7:5, Alexandriában 5:3.)

A mérések tehát azt mutatták, hogy városról-városra más a gnómónnak és napéjegyenlőségi déli árnyékának az aránya. De ha valaki erre a szimbolikus világképre nézett, azonnal megállapíthatta (az Elemek III. 36. tétel értelmében): a déli árnyék (*a*) – nemcsak napéjegyenlőségkor, hanem bármikor – középarányos az egész szimbolikus napsugár ($b = NA$) és ennek a meridián körön kívüleső darabja között. (Nota bene: ezt az utóbbi szakaszt megkapták úgy, hogy az egész szimbolikus napsugárból (NA) levonták a gnómón kétszeresét.)

A másik tétel, amelynek az asztronómiában betöltött szerepéhez nem fér kétség, a IV. könyvben az utolsó, a 16., a körbe írt szabályos *tizenötszög* szerkesztését tárgyalja. A kommentátor *Proklosz* beszél arról, hogy ez azért került bele az Elemekbe, mert nagy hasznát vették a régi asztronómusok: a szabályos tizenötszög oldalával mérték a két pólusnak, az ekliptika és az egyenlítő pólusának egymástól való távolságát. Csakugyan, a szabályos tizenötszög egyik oldalához tartozó középponti szög: 24°. Úgy látszik, ez volt a legrégibb kísérlet az ekliptika ferdeségének a megmérésére. Csak mellékesen említem meg ebben az összefüggésben, hogy a mérést – amint ez kétségtelenül rekonstruálható – ugyanazon a *szimbolikus asztronómiai gnómón-világképen* végezték, amelyre fentebb, a III. 36. tárgyalása során már utaltam. Mai mérés szerint egyébként az ekliptika ferdesége hozzávetőleg: 23°27′. Tudjuk azt is (a nagy ókori csillagásznak *Klaudiosz Ptolemaiosz*nak a művéből), hogy nem sokkal Euklidész után már *Eratoszthenész* pontosabban megmérte ugyanezt a hajlásszöget, némileg korrigálva a régi mérési eredményt (24°), majd még tovább tökéletesítette ugyanezt a mérést a nikaiai *Hipparkhosz*.

Nem lesz fölösleges utalni ezzel a két utóbbi tétellel kapcsolatban – III. 36 és IV. 16 – arra is, hogy mind a kettő régi pythagoreus eredetű. Azonkívül: feltétlenül szükségük volt az ókori matematikusoknak e két tétel felépítéséhez olyan tételekre is, amelyeket a modern irodalom „geometrikus algebra" néven tart számon. Felmerül itt ti. a gyanú: Vajon nem a korai, Euklidész előtti görög asztronómiában kell-e keresnünk az ún. „geometrikus algebra" eredetét?

Egy ókorból származó iskolai följegyzés, egy ún. *szkholion*, amelynek szerzőjét nem ismerjük, azt állítja: sokan úgy tudják, hogy Euklidész az Elemek V. könyvében Platón fiatalabb kortársának, a híres matematikusnak és csillagásznak, Eudoxosznak az arányelméletét foglalta össze. (A *szkholionok* eredetileg margóra írt rövid följegyzések voltak, amelyeket egy-egy az iskolában tanított szerzőnek a művéhez fűztek. Később – még az ókorban – fölismervén ezeknek az iskolai följegyzéseknek hasznos voltát, összegyűjtve külön ki is adták közülök egyiket-másikat. Ilyen szkholionból származik tehát az V. könyvre vonatkozó értesülésünk.)

Csakugyan, ha elolvassuk ez előtt a könyv előtt azt a mesterien megfogalmazott 5. definíciót, amely azt határozza meg, hogy *mi az aránypár*, szívesen hitelt adunk az ismeretlen ókori forrásnak. Mert ez a definíció valóban csak olyan nagy matematikustól származhat, aki rájött arra, hogyan lehet új alapokra helyezni az egész korábbi arányelméletet az ún. *összemérhetetlen* (= *inkommenzurábilis*) mennyiségek felfedezése után. Ebből állt Eudoxosz matematikai érdeme. Bizonyos ugyanis, hogy volt a görög matematikának arányelmélete már Eudoxosz előtt. Sőt, meg is maradt számunkra sok minden ebből a régi tanításból – amint erre majd mindjárt kitérünk. Előbb azonban arra hívjuk itt még fel a figyelmet, hogy Euklidész az Elemek első négy könyvébe egyáltalán semmit sem vett be ebből a korábbi, Eudoxosz előtti elméletből. Úgy látszik, ő az arányok tárgyalását mindjárt azon a színvonalon akarta elkezdeni, amely az ő idejében a legkorszerűbb volt. Ez történt az V. könyvben.

Dehát hogy van az, hogy Euklidész csak az V. könyvben jut el az arányokhoz? Korábban ez a probléma föl se merült volna nála? – A jelek arra mutatnak, hogy volt az ókoriaknak egy szellemes módszerük arra, hogyan kerüljék meg az arány problémáját. Mielőtt az V. könyvet vennénk a kezünkbe, mutassunk be erre a fent már említett III. 36. tételen kívül még két példát a korábbi könyvekből.

Az Elemek I. könyvének 44. tétele egy olyan feladatnak a megoldását tárgyalja, amely némileg egyszerűsített formában így hangzanék: legyen adva egy téglalap, amelynek oldalai b és c; ezt át kell alakítanunk egy olyan másik vele egyenlő területű téglalappá, amelynek csak a oldalát ismerjük. A feladat tehát képletben:

$$ax = bc.$$

Ugyanez aránypár formájában így írható föl:

$$a:b = c:x.$$

Keressük az aránypár negyedik tagját, x-t. De megoldható ez a feladat – amint ezt az I. 44. tétel mutatja – arányok említése nélkül, pusztán felületek egymás mellé helyezésével is.

Hasonló ehhez annak a feladatnak a megoldása, amelyet – ugyancsak némileg egyszerűsített formában – a II. 14. tétel szerint így fogalmazhatnánk meg: Hogyan alakítunk át adott téglalapot vele egyenlő területű *négyzetté?* Ha az adott téglalap két oldala a és b, akkor ez a feladat aránypár formájában így írható föl:

$$a:x = x:b.$$

Keressük a téglalap két oldalának középarányosát.

Jegyezzük meg ezzel a feladattal kapcsolatban azt is: az antik szaknyelv a téglalapnak négyzetté való átalakítását *tetragóniszmosz*-nak, „négyzetesítésnek" nevezte. Arisztotelész pedig több ízben kifejti: a *tetragóniszmosz* azért megoldható feladat, mert két mennyiség között mindig van középarányos. Világosan kiderül ebből a megjegyzésből, hogy az ókoriak tisztában voltak vele: a téglalapnak négyzetté való átalakítása tulajdonképpen a középarányos problémájának a megoldása. – De ugyanígy arányossági problémát tárgyalt a korábban említett másik két tétel is: az I. 44. és a III. 36.

Kérdés ármost: Miért lett az ókoriaknál az eredeti arány-problémából az egyenlő felületek problémája? – A történeti kutatás erre azt a plauzibilis magyarázatot találta: feltehetően azért, mert fölismervén az összemérhetetlen (inkommenzurábilis) mennyiségeket, észrevették azt is, hogy ezzel megalapozatlanná lett egész korábbi arányelméletük. [Gondoljunk pl. a következő esetre. Amikor a középarányost keressük két olyan szám között, amelyeknek szorzata *nem négyzetszám*, akkor tulajdonképpen egy *irracionális számot* keresünk. De kiküszöbölhetjük mind az „*irracionális szám*", mind pedig az „*arány*" fogalmát, ha ugyanezt a feladatot úgy fogjuk föl, mint valamely téglalap átalakítását vele egyenlő területű négyzetté.]

A történészek rekonstrukciója szerint tehát a görög matematika régi arányelmélete – az, amelyet valamikor az 5. század folyamán a pythagoreusok dolgoztak ki, és amely még csak a *számokat* vette figyelembe – válságba jutott akkor, amikor rájöttek az összemérhetetlen mennyiségek létezésére. Ezen a válságon kezdetben úgy próbáltak úrrá lenni, hogy figyelmen kívül hagyva az *arány* problémáját, a felmerült feladatokat úgy fogalmazták meg, ahogy azt az I. 44., II. 14. és III. 36. tételek példáján láttuk. Ez azonban, úgy látszik, csak átmeneti megoldás volt annak a görög matematikának a kibontakozásában, amelynek záróköve Euklidész Elemei. Az új arányelméletet Eudoxosz teremtette meg, ez pedig az V. könyv 5. definíciójából indult ki.

Csakugyan, elég jól ismerjük azt a régebbi elméletet is, amely megelőzte az Eudoxoszét. Ez még az aránynak abból a meghatározásából indult ki, amelyet a VII. könyv 21. definíciójában olvasunk.

A különös éppen az, hogy Euklidész fölvette művébe ezt a korábbi, pusztán csak a számokra érvényes arányelméletet is, holott ez Eudoxosszal már túlhaladottá lett. Hiszen Eudoxosz általánosabb elmélete értelem szerint magába foglalja ezt is.

De éppen azért, mert megvan Euklidész művében egy-egy ilyen tételnek mind a korábbi, mind pedig a későbbi (eudoxoszi) megfogalmazása, érdemes ezeket összehasonlítani egymás között. Aki pl. elolvassa a VII. könyv 11. tételét, és rögtön utána az V. 19.-et, előbb meglepődve tapasztalja, hogy a kettő csaknem szórul-szóra azonos. De ha jobban megnézzük, észrevesszük, hogy a VII. könyv theórémája még csak *számokról* beszél, az V. könyvben pedig majdnem ugyanaz *mennyiségekről* állapítja meg majdnem „ugyanazt". – De ugyanígy szorosan összetartoznak a VII. 12. és párja az V. 12.; vagy a VII. 13. és a neki megfelelő V. 16. tétel, és így tovább még több más.

Persze mindezekben az esetekben lényegesen különböznek egymástól a „párhuzamos tételek" bizonyításai. Azokat a bizonyításokat, amelyeket a kérdéses tételek *számokra* érvényes esetében alkalmaztak, nem lehetett mechanikusan „ráhúzni" a tétel általánosabb formájára. Az a körülmény tehát, hogy a két-két tétel megfogalmazása majdnem szórul-szóra azonos, igazában csalóka látszat.

A VI. könyv annak az eudoxoszi arányelméletnek az alkalmazása a planimetriára, amelyet elöljáróban az V. könyv alapozott meg. Az arány a geometriában mindenekelőtt az idomok hasonlóságával kapcsolatban jut szerephez; ezért kezdődik a VI. könyv egy olyan definícióval, amely éppen az *egyenesvonalú idomok hasonlóságát* határozza meg.

Érdemes lesz azonban itt legalább egy példán azt is bemutatni, milyen helyet foglal el ez a VI. könyv a görög geometria történeti kibontakozásában. Vegyük példának ebből a könyvből a 13. tételt, amely azt tárgyalja, hogyan szerkesztjük meg két adott szakasz középarányosát. Elég egy futó pillantást vetni arra az ábrára, amelyet Euklidész e tételhez csatolt, hogy észrevegyük: ez valahogy nagyon ismerős. Persze, *majdnem* ugyanezt az ábrát látjuk a II. könyv 14. tétele mellett is. Voltaképpen ott is két mennyiség középarányosának a megszerkesztéséről volt szó, csakhogy ott a feladat – amint erre az imént utaltunk már – még olyan megfogalmazásban került elénk: hogyan alakítunk át valamely adott téglalapot vele egyenlő területű négyzetté. Minthogy azonban lényegében ez a feladat mégiscsak a középarányost szerkeszti meg, használhatta Euklidész ebben az esetben is *majdnem* ugyanazt az ábrát, mint amelyik később a VI. 13. tételnél került sorra. Mert csakugyan, gondoljunk arra, hogyan szerkesztjük meg az iskolában még ma is két adott szakasz középarányosát.

Előbb összeadjuk a két szakaszt – amelyek közül az egyik feltétlenül nagyobb, mint a másik* – egy egyenes mentén, majd megfelezzük a két szakasz összegét, és a felező pontból mint középpontból a két szakasz összegének felével félkört rajzolunk. Aztán a félkör átmérőjére – abban a pontban, ahol a két összeadott szakasz érintkezik – *merőlegest* emelünk a kör kerületéig. Majd kijelentjük, hogy ez a most emelt *merőleges* a keresett *középarányos*. – Megokoljuk pedig ezt az állításunkat a következőképpen.

Összekötjük a megszerkesztett merőleges végpontját a kör kerületén a két adott szakasz egy-egy végpontjával ugyancsak a kör kerületén. Ily módon kapunk (az ismert Thalész-tétel értelmében) egy félkörön nyugvó derékszögű háromszöget. Ezt a derékszögű háromszöget bontja megszerkesztett *merőlegesünk* két kisebb egymás között hasonló derékszögű háromszögre. Maga a *merőleges* – ebben az utóbbi két hasonló derékszögű háromszögben – kettős szerephez jut: egyrészt rövidebb befogója a nagyobb, másrészt hosszabb befogója a kisebb derékszögű háromszögnek. Ennek a kettős szerepnek a következménye az, hogy a szóban forgó *merőleges* középarányos

* Ha ti. a két szakasz egyenlő, akkor „középarányosuk" is egyenlő velük.

a két adott szakasz között. (Minthogy ezek a szakaszok ugyancsak befogói a két hasonló derékszögű háromszögnek.)

Lényegében ezzel a gondolatmenettel okolja meg Euklidész VI. 13. tétele a középarányos szerkesztését. De *egészen más* a szerkesztés megokolása az előbbivel párhuzamos II. 14. tétel esetében. – Mert jól vigyázzunk: az ábra ugyan *majdnem* ugyanaz a két esetben, *de távolról sem ugyanaz a két tétel gondolatmenete.* Figyeljük csak meg a következőket.

Mind a két esetben előbb összeadjuk a két szakaszt – amelyekhez ti. a középarányost szerkesztjük – majd megfelezzük a két szakasz összegét, és a felezőpontból félkört rajzolunk a két szakasz összegének a felével mint sugárral. De *más* a célunk ezzel a félkörrel a VI. 13., és ismét *más* a II. 14. tétel esetében.

A VI. 13. tételhez azért van szükségünk a félkörre, hogy megkapjuk (a Thalész-tétel értelmében) azt a félkörön nyugvó derékszögű háromszöget, amelyet a kérdéses *merőleges* két kisebb hasonló derékszögű háromszögre bont majd. – A II. 14. tétel szerkesztéséhez viszont azért kell a „*két szakasz összegének a fele*", mert ez lesz az *átfogója egy derékszögű háromszögnek.* Erre az átfogóra emelünk – gondolatban – egy négyzetet, hogy aztán kivonjuk az *átfogó négyzetéből* az „*egyik befogó négyzetét*". A Pythagorasz-tétel szerint ennek a kivonásnak az eredménye a „*másik befogó négyzete*" lesz. – Az imént említett „egyik befogó" – amelynek négyzetét kivonjuk az átfogó négyzetéből – a II. 14. tétel szerkesztése szerint, a két adott szakasz érintkezési pontjától az összegük felezési pontjáig terjedő szakasz-rész lesz. A „másik befogó" szerepe pedig az érintkezési pontba emelt *merőleges*nek jut. – Már ebből is látható, milyen szellemesen kapcsolja össze a II. 14. tétel bizonyítása egyfelől a Pythagorasz-tételt, másfelől pedig azt a II. 5.-öt,* amelynek lényege abban foglalható össze: ha kivonunk egy nagyobb négyzetből egy kisebb négyzetet, olyan idomot kapunk (egy „gnómónt" – a szónak abban az értelmében, ahogy ezt az Elemek II. könyve 2. definíciója használja**), amely könnyen átalakítható téglalappá.

* A *II. 5.* tételt az ún. „geometrikus algebrához" szokták sorolni.

** Vigyázat! Nem cserélendő össze az Elemekben használt „gnómón" fogalom a napóra mutatójával, amelyről már szó volt ebben az Előszóban.

Az, aki először jött rá a II. 14. szerkesztésére, a következőképpen fordította visszájára az imént összefoglalt fölismerést. A téglalap két oldala *összegének a feléből* konstruált egy négyzetet. (Ez lett az átfogóra emelt négyzet.) A téglalap két oldala *különbségének a feléből* konstruált egy kisebb négyzetet. (Ez lett az egyik befogóra emelt négyzet.) Amikor pedig kivonta a kisebb négyzetet a nagyobbikból, arra hivatkozott, hogy egyfelől a két négyzet különbsége maga a téglalap, másfelől pedig – a Pythagorasz-tétel értelmében – a különbség a másik befogóra (azaz: arra a bizonyos *merőlegesre*) emelt négyzet. Így lehetett megoldani – az *arány* fogalmának használata nélkül – a téglalap átalakítását vele egyenlő területű négyzetté. A megoldás, persze, mind a két esetben ugyanaz a szakasz volt: az a *merőleges*, amelyet a két adott szakasz összeadásakor keletkező érintkezési pontba emelünk a kör kerületéig.

Még jobban elmélyítheti a középarányosság problémájának történeti megértését – illetőleg konkréten: az Elemek VI. 13. tétel magyarázatát – ha figyelembe veszünk néhány olyan kétségtelenül régebbi eredetű tételt, amelyet az Elemek VIII. könyve őrzött meg számunkra. Gondolok itt főként a VIII. könyv olyan tételeire, mint a 11., 12., 18. és 20.

A két első ezek közül csak annyit állapít meg, hogy két négyzetszám között van *egy*, két köbszám között pedig van *két* középarányos. [Illusztrálhatja az előbbi állítást a 4 és a 9 (2^2 és 3^2), amelyek között 6 a középarányos: $4:6 = 6:9$; az utóbbit pedig a 8 és a 27 (2^3 és 3^3), amelyek között 12 és 18 a középarányos: $8:12 = 12:18 = 18:27$.]

Önmagában ez a két tétel még nem túl jelentős. De egyszerre érdekesebb lesz mind a kettő, ha összehasonlítjuk őket a VIII. könyv 18. és 20. tételével. Ez az utóbbi kettő ugyanis azt mondja ki – használva a régi pythagoreus terminológiát: két „hasonló síkszám" között mindig van *egy* középarányos (VIII. 18.), illetőleg: ha van két szám között *egy* középarányos, akkor a két szám „hasonló síkszám" (VIII. 20.). – „Síkszám" a VII. könyv elején megadott terminológia szerint (lásd ezekhez a VII. könyv 16. és 21. definícióját) bármely szám, amelyet felbontottunk két tényező szorzatára. „Hasonló síkszám" pedig az olyan kettő, amelyet ábrázolhatunk mint két egymáshoz hasonló téglalapot; ilyen pl. a 6 és

24, mert $6 = 2 \cdot 3$ illetőleg $24 = 4 \cdot 6$, és $2:3 = 4:6$; vagy 6 és 54, mert $6 = 2 \cdot 3$ illetőleg $54 = 6 \cdot 9$. Ezért 6 és 24 között középarányos a 12, mert $6:12 = 12:24$; vagy 6 és 54 között középarányos a 18, mert $6:18 = 18:54$.

Ez a négy tétel együttesen azt látszik igazolni, hogy volt a görög aritmetika fejlődésében egy korszak, amikor az kötötte le a matematikusok figyelmét: mikor *van*, és mikor *nincs* középarányos két szám között. – Egy magasabb fejlődési fok volt ennél az, amikor rájöttek: ha vonalszakaszokkal ábrázolnak két számot, akkor ezekhez *mindig* megszerkeszthető a középarányos, csakhogy ez az utóbbi nem mindig egész- vagy törtszám. (Tehát a görög aritmetika szerint: néha *nem* szám!) Ezen a fokon azonban inkább még csak megkerülték és nem oldották meg a középarányos problémáját. Ezt a fokot mutatja a II. 14. tétel. – Egy még magasabb fejlődési fok – az eudoxoszi – az volt, amikor a problémát már úgy oldották meg, ahogy azt a VI. 13. tétel tanítja.

Párhuzamba állítottuk tehát a II. 14. és a VI. 13. tételeket. De ugyanígy szoros összefüggés mutatható ki egyfelől a II. 5. és 6., másfelől a VI. 28. és 29. tételek között. Ezeket az utóbbiakat – mind a II., mind a VI. könyvből – az ókori hagyomány úgy tartotta számon mint a „pythagoreus Múzsa" ajándékait.

A VI. könyvvel átmenetileg félbeszakad a geometria tárgyalása. Anélkül, hogy az eddig előadottakhoz szervesen kapcsolódnék, közbeékelődik a 3 aritmetikai könyv: VII–VIII–IX. Kitűnik ennek a háromnak szorosabb egysége már abból is, hogy Euklidész a VII. könyv elején sorolja föl azt a 23 definíciót, amelyre az aritmetikában szüksége lesz. A VIII. és IX. könyv nem vezet be újabb definíciókat. A páros és páratlan elméletére pl. csak a IX. végén függelékszerűen kerül ugyan sor, de ennek a definíciói is már a VII. könyv elején olvashatók.

Szó volt már róla, hogy a VII. és VIII. könyv több tétele korábbi eredetű; nemcsak az Eudoxosz előtti korból származnak ezek, hanem feltehetően megelőzik azokat a geometriai tételeket is, amelyek, mint mondottuk: „megkerülik az összemérhetetlenség problémáját."

Csakugyan, a történészek az Euklidésznél található egész aritmetikát pythagoreus eredetűnek tartják, azaz: nagyjából a Platón előtti korból származtatják. Hozzátehetjük, hogy Euklidész, úgy látszik, nem is vette föl művébe az egész akkor ismert pythagoreus aritmetikát. Beszél pl. a kétségtelenül pythagoreus „*tökéletes számokról*" (olyan számok ezek, amelyek egyenlők saját osztóik összegével pl. $6 = 1+2+ +3$, vagy $28 = 1+2+4+7+14$), de nem említi az ugyancsak pythagoreus „*barátságos számokat*" (ezekre az jellemző, hogy az egyik osztóinak összege a másik szám, és megfordítva; pl. 220 és 284, mert

220 osztói: $1+2+4+5+10+20+11+22+44+55+110 = 284$, és
284 osztói: $1+2+4+71+142 = 220$).

De ugyanígy nincs szó Euklidésznél a pythagoreus sokszög-számokról, a különféle számsorokról és összegezésükről; nem olvassuk nála, hogy 1-től fölfelé a páratlan számok összege mindig négyzetszám, és hogy ezért két egymást követő négyzetszám különbsége mindig páratlan szám; stb., kimaradt művéből sok más érdekes aritmetikai megfigyelése a pythagoreusoknak, ami mind már régen megvolt.

Általános jellemzésül elmondhatjuk az euklidészi aritmetikáról, hogy ez csak az egész számokkal foglalkozik; az 1-et mint minden szám alkotó elemét *nem* tekinti számnak; ismeri a prímszám-összetett szám, páros-páratlan, négyzet- és köbszám, osztó, közös osztó, többes, legnagyobb közös osztó, legkisebb közös többes stb. fogalmát.

A IX. könyv végén 16 tétel (21–36.) – amelyeknek archaikus jellege szembeötlő – a páros és páratlan elmélete. Érdekesek ezek nemcsak azért, mert *egyrészt* a „tökéletes számokról" szóló tételben (IX. 36.), *másrészt* a négyzet oldala és átlója összemérhetetlenségének a kimutatásában (X. könyv 27. függelék) kulminálnak, hanem azért is, mert a szerencsés véletlen lehetővé tette datálásukat: *i. e. 500 körül.* (A szicíliai kómikus költő, *Epikharmosz* egyik töredéke félreérthetetlenül céloz ezekre a tételekre.) Jelenleg ez – a páros és páratlan elmélete – a görög matematika legrégibb ismert tételsorozata.

Az Elemek 13 könyve között legterjedelmesebb a X. könyv; nem kevesebb mint 115 tételből és 4 előrebocsátott definícióból áll. De ez egyszersmind a legkevésbé olvasott és a *legnehezebb* könyv is. Így nyilatkozott erről már a 13. században az itáliai *Fibonacci* (Leonardo Pisano, 1180–1250), a 16. század végén a németalföldi Simon *Stevens* (1548–1620), és azóta még sokan mások, akik egyáltalán megkísérelték, hogy elmélyedjenek a matematikai irracionalitásoknak ebben az impozáns antik elméletében. Általában magasztalni szokták ennek a könyvnek „szigorú, logikus felépítését”, rendkívül „tömör és rövid bizonyításait”, amelyek – kevés kivételtől eltekintve – a modern igényeket is kielégítik. De bármilyen egyöntetű tisztelettel, elismeréssel beszélnek is erről a könyvről, részletes, meggyőző történeti elemzése a modern irodalomból eddig nem ismeretes.

El szokták mondani ezzel kapcsolatban, hogy amiképpen az Elemek V. könyvében *Eudoxosz* eredményeit foglalta össze Euklidész, ugyanúgy ez a X. könyv tulajdonképpen *Theaitétosz* műve lenne. – Csakugyan van nyoma annak, hogy megpróbálták ennek a könyvnek egyes tételeit már az ókorban annak az egyébként nem ismert és fiatalon elhunyt matematikusnak tulajdonítani, akinek nevét Platón egyik dialógusa, a „Theaitétosz” viseli. Úgy látszik, ez a dialógus már az ókorban nagy hatással volt azokra, akiket érdekelt a matematika. Az újkorban is, egészen a legutóbbi időkig, ki akarták olvasni ebből a dialógusból a „történeti Theaitétosznak” egy matematikai felfedezését. Ez mindenesetre tévedés. Platón dialógusában ilyesmiről *nincs szó.* – Ugyanígy bizonyos az is, hogy az a szkholion, amely az Elemek X. 9. tételét Platónra hivatkozva Theaitétosznak tulajdonítja, *egyszerűen téved.* Platón szövege nem erősíti meg állítását. – Éppen azért, mert ebben a két részletkérdésben nyilvánvaló a tévedés, függőben kell maradnia annak a másik, általánosabb érdekű kérdésnek: Csakugyan Theaitétosz-e a X. könyv szerzője. Azoknak az érveknek alapján, amelyekre eddig hivatkozni szoktak, ez a kérdés aligha dönthető el. Az mindenesetre bizonyos, hogy a X. könyv szerzője kiváló matematikus volt.

Nem vállalkozhatunk itt e könyv tételeinek összefoglalására, inkább csak a keretét vázoljuk. A matematikai irracionalitás antik elmélete a szakaszok összemérhetőségének vagy összemérhetetlenségének (kommenzurabilitás-inkommenzurabilitás) a kérdéséből indult ki. Összemérhető vagy összemérhetetlen két szakasz aszerint, hogy *van-e* közös mértékük vagy *nincs.* (Ha *nincs* valamely szakasznak közös mértéke egy másikhoz viszonyítva, akkor mi erre azt mondjuk, hogy ennek a hosszúsága csak *irracionális* számmal fejezhető ki.) Lehet azonban valamely szakasz „*hosszúsága szerint összemérhetetlen*”, de „*összemérhető a rá emelt négyzet szerint*”; pl. a négyzet átlója összemérhetetlen az oldallal „hosszúság szerint", de összemérhető ugyanazzal a rá emelt „négyzet szerint", minthogy az átló négyzete éppen kétszer akkora, mint az oldal négyzete. – Rövid jellemzésül megjegyezhetjük: a X. könyv összesen *tizenötféle* szakaszt különböztet meg; ezek közül racionális *kettő*, és irracionális *tizenhárom*. – Ami pedig a tételek fölhasználását illeti, Euklidész a X. könyv tételeit csak a XIII. könyvben, a szabályos testekkel kapcsolatban alkalmazza.

A görög *geometria* szó – amelyet magyarra *mértan*nak szoktunk fordítani – eredetileg *földmérést* jelent. Ennek megfelelően a matematikának ez az ága korábban *síkmértan* („planimetria") volt. Csak később épülhetett erre a *testmértan*, a *sztereometria*. Ezzel az utóbbival foglalkozik az Elemek utolsó három könyve, a XI., XII. és XIII.

Kimutatható a görögök érdeklődése a sztereometria problémái iránt már az 5. századból. *Plutarkhosz* említi pl. *Démokritosz* következő problémáját. Vegyük egy kúpnak, amelynek egyenes az alkotója, az alapkörrel párhuzamos metszetét. Ez a metszet az eredeti kúpot két részre bontja: egy felső kisebb kúpra, és egy alsó csonkakúpra. Egy-egy körlap mind a csonkakúp fedőlapja, mind pedig a kisebb kúp alapja. Kérdés: Vajon a két kör egyenlő-e, vagy nagyobb-e a csonkakúp fedőlapja? Mert nyilvánvaló, hogy végtelen sok ilyen metszet lehetséges; a két kör egymáshoz való viszonya pedig mindig ugyanaz kell legyen. – Ha egyenlő a két kör, akkor nem kúppal, hanem hengerrel van dolgunk. Ha viszont nagyobb a csonkakúp fedőlapja (kisebb a felső, a kisebb kúp alapja), akkor az eredeti kúp alkotója nem egyenes, hanem a kúp alapjától a csúcsa felé vezető lépcsősor.

Sztereometriai probléma megoldását készítette elő *Hippokratész*nek az a találó javaslata, hogy a kocka megduplázásához meg kellene találnunk a módját annak, hogyan iktatunk *két középarányost* a kocka éle és ugyanennek a mennyiségnek a kétszerese közé. Meg is oldotta ezt a problémát – bár *nem* klasszikus módon, azaz *nem* „csak vonalzó és körző használatával" – valamivel később Hippokratész után, *Arkhytasz*.

A felsorolt három adat tehát – *Démokritosz* problémája, *Hippokra-*

tész javaslata, és *Arkhytasz* említett megoldása – mind arra vall, hogy a sztereometria Euklidész korában már elég régi tudomány volt.

Ennek ellenére több jele van annak, hogy abban az időben, amikor sor került az Elemek összeállítására, *a sztereometria még nem volt olyan érett tudomány, mint a planimetria.* Illusztrálhatjuk ezt pl. a következő megfigyeléssel.

Euklidész a síkmértant – mint láttuk már – 5 posztulátummal vezette be. Igazában szüksége lett volna ezekhez hasonló más posztulátumokra a sztereometriában is. A XI. könyv elején azonban nincs egy posztulátum sem, csak 28 új definíció. De ha jobban megnézzük ennek a XI. könyvnek első három tételét, nem lesz nehéz rájönnünk, hogy ezeknek a bizonyításai – az igazat megvallva – *nem sokat érnek.* Amint erre már többen utaltak: ez a három „tétel" valójában inkább három posztulátum lehetne, amelyet jobb lett volna bizonyítási kísérlet nélkül elvként elfogadtatni. Hogy erre csakugyan megvolt a lehetőség, azt mutatja az eudoxoszi V. könyv példája. Bár itt sincs posztulátum, de van ennek a könyvnek a definíciói között egy olyan, amely minden további nélkül lehetne posztulátum is: a *negyedik;** ezt nevezték el a 19. században nem éppen találó névvel *„arkhimédészi alaptörvénynek"*.

Rövid összefoglalásként elmondhatjuk: a XI. könyv 39 tétele bevezetés a testmértanba. A tételek itt is bizonyos, didaktikai szempontból „emelkedőnek" nevezhető sorrendben követik egymást. A térben elhelyezett egyenesek és síkok viszonylag „egyszerűbb" problémáitól lépésről-lépésre jutunk el a testszögeken keresztül a prizmákhoz, a parallelepipedonhoz és a kockához. Általában azzal jellemezhető a XI. könyv, hogy ebben – a párhuzamosságtól eltekintve – még csak olyan sztereometriai kérdésekről van szó, amelyek tárgyalhatók a *végtelen* problémájának érintése nélkül. Éppen ebben különbözik ez a könyv az utána következő XII.-től.

A XII. könyv feltűnő vonása, hogy alkalmazza az ún. *exhaustio módszerét*, pl. a 2., 3., 4., 5., a 10., 11., 12. tételben – és egy kissé más

* Igazában nincs lényeges különbség *definíció, posztulátum* és *axióma* között. E nevek ma már szinte tetszés szerint fölcserélhetők. A megkülönböztetés csak *történeti* szempontból lehet érdekes.

formában a 16–18. tételekben. *Arkhimédész* a forrásunk arra, hogy ez a módszer *Eudoxosz*tól származik. Röviden az *exhaustio*-t (= „kimerítés") – amelynek elnevezése erősen félrevezető, mert tulajdonképpen nem „kimerítésről", hanem éppen ellenkezőleg valami *kimeríthetetlennek* a megközelítéséről van szó – a következőképpen jellemezhetjük. Vegyük példának a kör területét. Ezt úgy közelítjük meg, hogy mind nagyobb oldalszámú szabályos sokszöget írunk a körbe; bár ezeknek a területe mindig *kisebb* lesz, mint a kör területe, de minél nagyobb a sokszög oldalszáma, annál inkább megközelíti a sokszög területe a kör területét – szinte úgy mondhatnánk: „*alulról*". Ha ugyanakkor szabályos sokszögeket írunk a kör köré kívülről, ezekkel is megközelítjük a kör területét „*felülről*". Mert a kör köré írt szabályos sokszögek területe mindig *nagyobb* lesz ugyan a kör területénél, de minél nagyobb ezeknek a sokszögeknek az oldalszáma, annál közelebb jutunk a kör területéhez. Így aztán a két határ közé szorítva annyira közel juthatunk a kör területéhez, amennyire csak akarunk – bár tudjuk, hogy *magát a kör-területet mégsem érjük el soha, de ott van ez feltétlenül valahol a két közelítő határ között.* – Ezt a módszert alkalmazza tehát a XII. könyv a felületek és köbtartalmak kiszámítására. – Amikor, persze, Euklidész térfogat-kiszámításairól beszélünk, ne gondoljunk konkrét mérésekre, számokkal való operációkra. Euklidésznél inkább csak olyan térfogat-megállapító tételeket találunk, mint a XII. 10.: „*Minden kúp harmadrésze az egyenlő magasságú és ugyanazon alapon álló hengernek.*" Stb.

Végül a XIII. könyvben Euklidész több olyan tétel után, amely az aranymetszéssel foglalkozik, áttér az öt szabályos test tárgyalására. – Ami az aranymetszésre vonatkozó tételeket illeti, ezeknek legalább egy része, úgy látszik, valami olyan *húrtáblázatot* készít elő, amilyent tulajdonképpen csak jóval későbbi korból, az időszámításunk 2. századában élő csillagásznak, *Klaudiosz Ptolemaiosz*nak a művéből ismerünk. A történeti kutatás eddig kevés figyelemre méltatta azt a kérdést: mennyiben készíti elő már Euklidész az asztronómia húrtáblázatát, ezt az „ókori trigonometriát".

Az öt szabályos test: a tetraéder, hexaéder (kocka), oktaéder, pentagondódekaéder és ikoszaéder. – Tárgyalásuknál Euklidész mindig egy adott gömbből, illetőleg a gömb átmérőjéből indul ki.

Amiképpen a IV. könyv a szabályos sokszögeket egy körbe írta, úgy írja a XIII. könyv a szabályos testeket egy adott átmérőjű gömbbe. Kiszámítja aztán Euklidész minden szabályos test élének és a köréje írt gömb átmérőjének az arányát.

A későbbi ókor a szabályos testeket „platóni testek" néven tartotta számon, minthogy beszél ezekről Platón a „Timaiosz" című dialógusban. Bizonyos azonban, hogy ezeknek a szabályos testeknek egy része tudományos vizsgálódások tárgya volt (különösen a pythagoreusok körében) már jóval a Platón előtti korban.

Egyébként az egész XIII. könyv olyan önmagában is kerek, zárt egész, hogy voltak modern kutatók, akik feltették: eredetileg ez Euklidész önálló műve lett volna, amelyet talán csak utólag csatolt az Elemekhez. Mások viszont azt emelték ki: mintha éppen a szabályos testek tárgyalása lett volna az egész euklidészi Elemek végső célja.

IRODALOM

További tájékoztatásul Euklidészről és az antik matematikáról megemlítem itt az alábbiakat:

Szabó Árpád: A görög matematika kibontakozása (Gyorsuló Idő sorozat) Budapest, 1978.

Szabó Árpád: Anfänge der griechischen Mathematik, Budapest 1969, és ua. angolul: The Beginnings of Greek Mathematics, Budapest, 1978.

T. L. Heath: The thirteen books of Euclid' s Elements. I–II–III. (second edition, 1925; Dover Publication)

A. Frajese – L. Maccioni: Gli Elementi di Euclide, Torino, 1970 (olasz fordítás és magyarázatok)

B. L. v. d. Waerden: Egy tudomány ébredése. Gondolat, Budapest, 1977.

Szabó Árpád

Első könyv

Definíciók

1. Pont az, aminek nincs része.*
2. A vonal szélesség nélküli hosszúság.
3. A vonal végei pontok.
4. Egyenes vonal* az, amelyik a rajta levő pontokhoz viszonyítva egyenlően fekszik.
5. Felület az, aminek csak hosszúsága és szélessége van.
6. A felület végei (=szélei) vonalak.
7. Síkfelület* az, amelyik a rajta levő egyenesekhez viszonyítva egyenlően fekszik.
8. A síkszög két olyan egysíkbeli vonal egymáshoz való hajlása, amelyek metszik egymást, és nem fekszenek egy egyenesen.
9. Ha a szöget közrefogó vonalak egyenesek, egyenes vonalúnak nevezzük a szöget.*
10. Ha valamely egyenesre egyenest állítunk úgy, hogy egyenlő mellékszögek keletkeznek, akkor a két egyenlő szög derékszög, és az álló egyenest merőlegesnek mondjuk arra, amelyen áll.
11. Tompaszög az, amelyik nagyobb a derékszögnél.
12. Hegyesszög pedig, amelyik kisebb a derékszögnél.
13. Határ az, ami vége valaminek.
14. Alakzat az, amit egy vagy több határ vesz körül.
15. A kör síkbeli alakzat, amelyet *egy* vonal vesz körül [ezt nevezzük körvonalnak] úgy, hogy az e vonal és egy, az alakzat belsejében fekvő pont közé eső szakaszok egyenlők egymással.
16. Ezt a pontot a kör középpontjának nevezzük.

17. A körnek átmérője bármely, a középponton át haladó egyenes vonal, amely mindkétoldalt a kör kerületén végződik. Az ilyen egyenes félbevágja a kört.
18. A félkör olyan alakzat, amelyet egy átmérő és az általa kimetszett körív vesz körül. ⟨A félkör középpontja ugyanaz a pont, mint amelyik a köré is.⟩*
19. Egyenes vonalú alakzatok (azaz sokszögek)* azok, amelyeket egyenes vonalak vesznek körül, háromoldalúak, amelyeket három, négyoldalúak, amelyeket négy, sokoldalúak pedig, amelyeket négynél több egyenes vesz körül.
20. A háromoldalú alakzatok közül egyenlő oldalú háromszög az, amelynek három egyenlő oldala van, egyenlő szárú, amelynek csak két egyenlő oldala van, ferde pedig, amelynek három nem egyenlő oldala van.
21. Továbbá a háromoldalú alakzatok közül derékszögű háromszög az, amelynek van derékszöge, tompaszögű, amelynek van tompaszöge, hegyesszögű pedig, amelynek három hegyesszöge van.
22. A négyoldalú alakzatok közül négyzet az, amelyik egyenlő oldalú és derékszögű, téglalap, amelyik derékszögű, de nem egyenlő oldalú, rombusz, amelyik egyenlő oldalú, de nem derékszögű, romboid, amelynek a szemközti oldalai és szögei egyenlők egymással, de sem nem egyenlő oldalú, sem nem derékszögű. A többi négyoldalú neve legyen trapéz.*
23. Párhuzamosak azok az egyenesek, amelyek ugyanabban a síkban vannak és mindkétoldalt végtelenül meghosszabbítva egyiken sem találkoznak.

Posztulátumok

1. Követeltessék meg, hogy minden pontból minden ponthoz legyen egyenes húzható.
   F.: I. 1–2., 5–7., 9., 12.; III. 11.
2. És hogy véges egyenes vonal egyenesben folytatólag meghosszabbítható legyen.
   F.: I. 2., 5., 16., 21.

3. És hogy minden középponttal és távolsággal legyen kör rajzolható.
F.: I. 1–3., 12.; II. 14.
4. És hogy minden derékszög egymással egyenlő legyen.*
F.: I. 14–5., 47.; II. 9–10.; III. 1. 3–4., 19., 32.; IV. 4.; VI. 8., 30.
5. És hogy ha két egyenest úgy metsz egy egyenes, hogy az egyik oldalon keletkező belső szögek (összegben) két derékszögnél kisebbek, akkor a két egyenes végtelenül meghosszabbítva találkozzék azon az oldalon, amerre az (összegben) két derékszögnél kisebb szögek vannak.
F.: I. 29., 44.; II. 10.; IV. 4–5.; VI. 3–4.

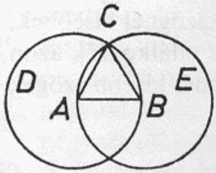
Axiómák

1. Amik ugyanazzal egyenlők, egymással is egyenlők.
F.: I. 1–3., 13–5., 26., 28–30., 35–6., 39–41., 44–6., 48.; II. 4–6., 8–11.; III. 5–6., 22., 25., 27., 31–7.; IV. 3–5.
2. Ha egyenlőkhöz egyenlőket adunk hozzá, az összegek egyenlők.
F.: I. 13., 29., 32., 34–5., 43., 45., 47–48.; II. 5–8., 10., 12–3.; III. 8., 15., 22., 31–2., 35–6.
3. Ha egyenlőkből egyenlőket veszünk el, a maradékok egyenlők.
F.: I. 2., 5., 14–5., 28., 35., 43., 46.; II. 9–11., 14.; III. 14., 26., 28., 32., 35–6.; IV. 3.; V. 5–6.
4. Ha nem egyenlőkhöz egyenlőket adunk hozzá, az összegek nem egyenlők.*
F.: I. 17., 21.; II. 10.; V. 25.
5. Ugyanannak a kétszeresei egyenlők egymással.
F.: I. 14–5., 41–2., 47.; II. 8.; IV. 12.
6. Ugyanannak a fele részei egyenlők egymással.
F. I. 37–8.; II. 9–10.; III. 14., 21., 27.; IV. 8–9., 12.
7. Az egymásra illeszkedők egyenlők egymással.
F.: I. 4., 8.
8. Az egész nagyobb a résznél.
F.: I. 6–7,, 14., 16., 18., 20., 24., 26., 39–40., 44.; II. 10.; III. 1–2., 4–6., 8., 11., 13., 16., 18–9., 27., 31.; VI. 30.; XI. 5.
9. Két egyenes vonal nem fog közre területet.*
F.: I. 4.; XI. 3., 7.

I. 1. Tétel

*Állítsunk adott véges egyenesszakasz fölé egyenlő oldalú háromszöget!**

Legyen AB az adott véges egyenesszakasz. Az AB véges egyenesszakasz fölé kell tehát egyenlő oldalú háromszöget állítani.



Legyen BCD az A középpontú, AB távolsággal rajzolt kör (3. P.), továbbá ACE a B középpontú, BA távolsággal rajzolt kör, és a C pontból, amelyben metszik egymást a körök, illesszük az A, B pontokra a CA, CB egyeneseket (1. P.).

Minthogy az A pont középpontja a CDB körnek, AC egyenlő AB-vel, továbbá, minthogy a B pont középpontja a CAE körnek, BC egyenlő BA-val. De megmutattuk, hogy CA is egyenlő AB-vel, tehát CA és CB mindketten egyenlők AB-vel. Amik viszont ugyanazzal egyenlők, egymással is egyenlők, tehát CA is egyenlő CB-vel (1. Ax.), így CA, AB és BC mindhárman egyenlők egymással.

Tehát az ABC háromszög egyenlő oldalú, és az adott AB véges egyenesszakasz fölé állítottuk. Éppen ezt kellett megtenni.

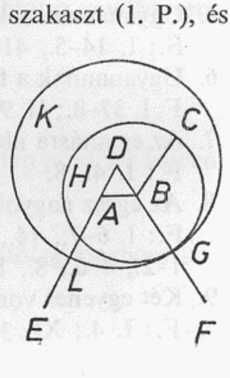
F.: I. 2., 9–11.

I. 2. Tétel

Helyezzünk el adott ponthoz adott szakasszal egyenlő szakaszt!

Legyen A az adott pont, BC pedig az adott szakasz. Az A ponthoz az adott BC szakasszal egyenlő szakaszt kell tehát elhelyezni.

Illesszük az A pontból a B pontra az AB szakaszt (1. P.), és állítsuk fölé a DAB egyenlő oldalú háromszöget (I. 1.), és legyenek AE, BF a DA, DB egyenesszakaszok egyenes menti meghosszabbításai (2. P.), és legyen CGH a B középpontú, BC távolsággal rajzolt kör (3. P.), továbbá GKL a D középpontú, DG távolsággal rajzolt kör.

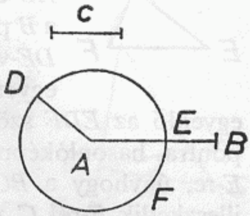


Minthogy a B pont középpontja a CGH körnek, BC egyenlő BG-vel.* Továbbá, minthogy a D pont középpontja a KLG körnek, DL egyenlő

DG-vel. Ezekből *DA* egyenlő *DB*-vel, tehát a maradék *AL* egyenlő a maradék *BG*-vel (3. Ax.). De megmutattuk, hogy *BC* is egyenlő *BG*-vel, tehát *AL* és *BC* mindketten egyenlők *BG*-vel. Amik viszont ugyanazzal egyenlők, egymással is egyenlők, tehát *AL* is egyenlő *BC*-vel (1. Ax.).

Tehát az adott *A* ponthoz az adott *BC* szakasszal egyenlő *AL* szakasz fekszik. Éppen ezt kellett megtenni.

F.: I. 3.; VI. 10–11.



I. 3. Tétel

*Vonjunk ki két adott, nem egyenlő egyenesszakasz közül a nagyobbikból egy, a kisebbel egyenlő szakaszt!**

Legyen *AB* és *c* a két adott, nem egyenlő szakasz, s legyen közülük *AB* a nagyobb. A nagyobb *AB*-ből kell tehát egy a kisebb *c*-vel egyenlő szakaszt kivonni.

Feküdjék az *A* pontnál a *c* szakasszal egyenlő *AD* (I. 2.), és legyen *DEF* az *A* középpontú, *AD* távolsággal rajzolt kör (3. P.).

Minthogy az *A* pont középpontja a *DEF* körnek, *AE* egyenlő *AD*-vel. De *c* is egyenlő *AD*-vel. Tehát *AE* és *c* mindketten egyenlők *AD*-vel, úgyhogy *AE* is egyenlő *c*-vel (1. Ax.).

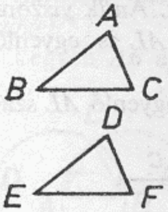
Tehát a két adott *AB* és *c* szakasz közül a nagyobbikból, *AB*-ből kivontuk a kisebb *c*-vel egyenlő *AE*-t. Éppen ezt kellett megtenni.

F.: I. 5–6., 9., 11., 16., 18., 20., 22., 24., 26., 46., 48.; II. 1., 8–11.; 14.; III. 15.; IV. 1.; VI. 1., 4., 9., 11–6., 28–9.; X. 17.; XII. 15.; XIII. 14–15.

I. 4. Tétel

Ha két háromszögnek két-két oldala páronként egyenlő, és egy-egy szöge is egyenlő, az, amelyet az egyenlő oldalak fognak közre, akkor az alapok is egyenlők, és a háromszögek is egyenlők, és a többi szög is páronként egyenlő, amelyekkel szemben az egyenlő oldalak fekszenek.*

Legyen *ABC* és *DEF* két háromszög, melyeknek két-két oldala, *AB*, *AC* és *DE*, *DF* páronként egyenlő, *AB* a *DE*-vel, *AC* pedig a *DF*-fel, és a *BAC* szög egyenlő az *EDF* szöggel. Azt állítom, hogy a *BC* alap is egyenlő az *EF* alappal, és az *ABC* háromszög egyenlő a *DEF* háromszöggel, és a többi szög is páronként egyenlő, amelyekkel szemben az egyenlő oldalak fekszenek, az *ABC* a *DEF*, az *ACB* pedig a *DFE* szöggel.



Ha ugyanis az *ABC* háromszöget a *DEF* háromszögre illesztjük** úgy, hogy az *A* pontot a *D* pontra, az *AB* egyenest pedig a *DE* egyenesre helyezzük, akkor a *B* pont is illeszkedni fog *E*-re, minthogy *AB* egyenlő *DE*-vel; de ha *AB* illeszkedik *DE*-re, akkor az *AC* egyenes is illeszkedik *DF*-re, minthogy a *BAC* szög egyenlő az *EDF* szöggel, úgyhogy a *C* pont is illeszkedni fog az *F* pontra, hasonlóképp mivel *AC* egyenlő *DF*-fel. De *B* is illeszkedik *E*-re, úgyhogy a *BC* alap illeszkedik az *EF* alapra. Ha ugyanis *B* illeszkedik *E*-re, *C* pedig *F*-re, de a *BC* alap nem illeszkedik *EF*-re, akkor két egyenes vonal területet fog közre; ami nem lehetséges (9. Ax.). Tehát illeszkedik a *BC* alap *EF*-re, és egyenlő vele, és a többi szög is illeszkedik a többi szögre, úgyhogy az egész *ABC* háromszög illeszkedik az egész *DEF* háromszögre, és egyenlő vele, és egyenlő *ABC* a *DEF*-fel, *ACB* pedig *DFE*-vel (7. Ax.).

Ha tehát két háromszögnek két-két oldala páronként egyenlő, és egy-egy szöge is egyenlő, az, amelyet az egyenlő oldalak fognak közre, akkor az alapok is egyenlők, és a háromszögek is egyenlők, és a többi szög is páronként egyenlő, amelyek az egyenlő oldalakkal szemben fekszenek. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: I. 5–6., 10., 16., 24–6., 33–5., 47.; III. 7–8., 17., 25–6., 29–30., 33.; IV. 5–6., 13.; VI. 5–6.; XI. 4., 6., 8., 20., 22–4., 26., 29., 35., 38.; XII. 3., 16.; XIII. 7–8., 10–1., 13–4.

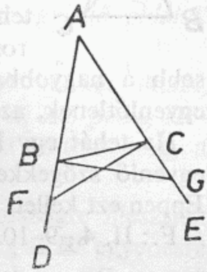
I. 5. Tétel

Az egyenlő szárú háromszögeknek az alapon fekvő szögei egyenlők egymással, és ha meghosszabbítjuk az egyenlő oldalakat, akkor az alap alatt egymással egyenlő szögek keletkeznek.

Legyen *ABC* egyenlő szárú háromszög, melynek *AB* oldala egyenlő az *AC* oldallal, és legyenek *BD*, *CE* az *AB*, *AC* szakaszok egyenes menti meghosszabbításai (2. P.). Azt állítom, hogy az *ABC* szög egyenlő az *ACB*, a *CBD* pedig a *BCE* szöggel.

Legyen ugyanis F a BD egy tetszőlegesen kiválasztott pontja, és vonjuk le a nagyobb AE-ből a kisebb AF-fel egyenlő AG-t (I. 3.), és húzzuk meg az FC és GB szakaszokat (1. P.).

Minthogy AF egyenlő AG-vel, AB pedig AC-vel, e két-két oldal, FA, AC és GA, AB páronként egyenlő; és ugyanazt az FAG szöget zárják be; az FC alap tehát egyenlő a GB alappal, és az AFC háromszög egyenlő az AGB háromszöggel, és a többi szög is páronként egyenlő, amelyekkel szemben az egyenlő oldalak fekszenek, ACF az ABG-vel, AFC pedig az AGB-vel (I. 4.). És minthogy a teljes AF egyenlő a teljes AG-vel, s ezekből AB egyenlő AC-vel, a maradék BF egyenlő a maradék CG-vel (3. Ax.). De megmutattuk azt is, hogy FC egyenlő GB-vel, tehát e két-két oldal, BF, FC és CG, GB páronként egyenlő; és a BFC szög egyenlő CGB-vel, és a BC közös alapjuk, tehát a BFC háromszög is egyenlő a CGB háromszöggel, és a többi szög is páronként egyenlő, amelyekkel szemben az egyenlő oldalak fekszenek, tehát FBC egyenlő a GCB, BCF pedig a CBG szöggel (I. 4.). Minthogy megmutattuk, hogy a teljes ABG szög egyenlő a teljes ACF szöggel, s ezekből a CBG szög egyenlő BCF-fel, így a maradék ABC szög egyenlő a maradék ACB-vel (3. Ax.); és az ABC háromszög alapján fekszenek. Megmutattuk azt is, hogy az FBC szög egyenlő GCB-vel; és ezek meg az alap alatt vannak.



Az egyenlő szárú háromszögeknek tehát az alapon fekvő szögei egyenlők egymással, és ha meghosszabbítjuk az egyenlő oldalakat, akkor az alap alatt egymással egyenlő szögek keletkeznek. Éppen ezt kellett megmutatni.

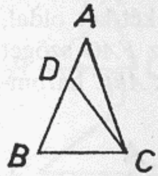
F.: I. 7., 18–20., 24., II. 4., 9–10.; III. 2–3., 16., 20., 31.; IV. 10., 15.; VI. 3., 7.; XIII. 7–10.

I. 6. Tétel

Ha egy háromszög két szöge egyenlő egymással, akkor az egyenlő szögekkel szemben fekvő oldalak is egyenlők egymással.

Legyen az ABC háromszög ABC szöge egyenlő az ACB szöggel. Azt állítom, hogy az AB oldal is egyenlő az AC oldallal.

Ha ugyanis *AB* nem egyenlő *AC*-vel, akkor egyikük nagyobb. Legyen *AB* a nagyobb, és vonjuk le a nagyobb *AB*-ből a kisebb *AC*-vel egyenlő *DB*-t (I. 3.), és húzzuk meg a *DC* egyenest (1. P.).



Minthogy *DB* egyenlő *AC*-vel, *BC* pedig közös oldal, így e két-két oldal, *DB*, *BC* és *AC*, *CB* egymással páronként egyenlő, és a *DBC* szög egyenlő *ACB*-vel; tehát a *DC* alap egyenlő az *AB* alappal, és a *DBC* háromszög egyenlő az *ACB* háromszöggel (I. 4.), a kisebb a nagyobbal (8. Ax.); de ez lehetetlen, tehát *AB* és *AC* nem egyenlőtlenek, azaz egyenlőek.

Ha tehát egy háromszög két szöge egyenlő egymással, akkor az egyenlő szögekkel szemben fekvő oldalak is egyenlők egymással. Éppen ezt kellett megmutatni.

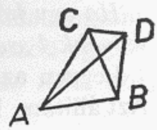
F.: II. 4., 9–10.; III. 25., IV. 9–10.; VI. 3., XIII. 7–8.

I. 7. Tétel

Ugyanarra az egyenesre nem lehet adott két szakasszal páronként egyenlő másik két szakaszt állítani úgy, hogy más ponton találkozzanak, de ugyanazon az oldalon feküdjenek, és ugyanazok a pontok legyenek a végeik, mint az előző szakaszoknak.

Tegyük föl ugyanis, hogy lehetséges, és álljon ugyanazon az *AB* egyenesen másik két, adott két szakasszal, *AC*-vel és *CB*-vel páronként egyenlő *AD* és *DB* úgy, hogy más pontban találkozzanak: míg az előzők *C*-ben, ezek *D*-ben, de ugyanazon az oldalon feküdjenek, és ugyanazok a pontok legyenek a végeik, azaz *CA* legyen egyenlő *DA*-val, és ugyanaz az *A* legyen a vége, s *CB* a *DB*-vel, és ugyanaz a *B* legyen a vége; és húzzuk meg a *CD*-t (1. P.).

Minthogy *AC* egyenlő *AD*-vel, az *ACD* szög is egyenlő *ADC*-vel (I. 5.); tehát az *ADC* szög nagyobb *DCB*-nél (8. Ax.); így még inkább nagyobb* a *CDB* szög *DCB*-nél (8. Ax.). Hasonlóképp, minthogy *CB* egyenlő *DB*-vel, a *CDB* szög is egyenlő *DCB*-vel (I. 5.). De azt is megmutattuk, hogy nagyobb is nála; ez viszont lehetetlen.



Tehát nem lehet ugyanarra az egyenesre, adott két szakasszal páronként egyenlő másik két szakaszt állitani úgy, hogy más pontban találkozzanak, de ugyanazon az oldalon feküdjenek és ugyanazok a pontok legyenek a végeik, mint az előző szakaszoknak. Éppen ezt kellett megmutatni.

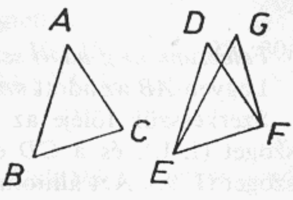
F.: I. 8.

I. 8. tétel

Ha két háromszögnek két-két oldala páronként egyenlő, és alapjuk egyenlő, akkor a szögeik is egyenlők, amelyeket az egyenlő oldalak zárnak be.

Legyen *ABC* és *DEF* két háromszög, melyeknek két-két oldala, *AB*, *AC* és *DE*, *DF* páronként egyenlő, *AB* a *DE*-vel, *AC* pedig *DF*-fel; és legyen a *BC* alap egyenlő az *EF* alappal. Azt állítom, hogy a *BAC* szög is egyenlő az *EDF* szöggel.

Ha ugyanis az *ABC* háromszöget a *DEF* háromszögre illesztjük úgy, hogy a *B* pontot az *E* pontra, a *BC* egyenest pedig az *EF* egyenesre helyezzük, akkor a *C* pont is illeszkedni fog *F*-re, minthogy *BC* egyenlő *EF*-fel; de ha *BC* illeszkedik *EF*-re, akkor a *BA*, *CA* szakaszok is illeszkednek *ED*-re és *DF*-re. Ha ugyanis a *BC* alap illeszkedik az *EF* alapra, de a *BA* és *AC* oldalak nem illeszkednek *ED*-re és *DF*-re, hanem eltérnek tőlük, mint *EG* és *GF*, akkor ugyanazon az egyenesen adott két szakasszal páronként egyenlő másik két szakasz áll úgy, hogy más pontban találkoznak, de ugyanazon az oldalon fekszenek és ugyanazok a pontok a végeik. Így azonban nem állhatnak (I. 7.); tehát nem igaz, hogy, noha a *BC* alap illeszkedik az *EF* alapra, a *BA*, *AC* oldalak nem illeszkednek *ED*-re és *DF*-re. Tehát illeszkednek; úgyhogy a *BAC* szög is illeszkedik az *EDF* szögre, és egyenlő vele (7. Ax.).



Ha tehát két háromszögnek két-két oldala páronként egyenlő és alapjuk egyenlő, akkor a szögeik is egyenlők, amelyeket az egyenlő oldalak zárnak be. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: I. 9., 11–2., 23., 48.; III. 1., 3., 9., 28., 37.; IV. 9., 12.; VI. 5.; XI. 4., 6., 8., 10., 23., 29., 35.; XIII. 7., 17., 18. L.

I. 9. Tétel

Felezzünk meg adott egyenes vonalú szöget!

Legyen *BAC* az adott egyenes vonalú szög. Ezt kell megfelezni. Legyen *D* az *AB* tetszőlegesen választott pontja; vonjuk le *AC*-ből az *AD*-vel egyenlő *AE*-t (I. 3.), és húzzuk meg *DE*-t (1. P.); legyen *DEF* a *DE*-vel szerkesztett egyenlő oldalú háromszög (I. 1.); húzzuk meg *AF*-et. Azt állítom, hogy az *AF* egyenes felezi a *BAC* szöget.

Minthogy ugyanis *AD* egyenlő *AE*-vel, *AF* pedig közös (oldal), e kettő-kettő, *DA*, *AF* és *EA*, *AF* páronként egyenlő. És egyenlő a *DF* alap az *EF* alappal; tehát a *DAF* szög egyenlő az *EAF* szöggel (I. 8.).

Tehát az *AF* egyenes felezi az adott *BAC* egyenes vonalú szöget. Éppen ezt kellett megtenni.

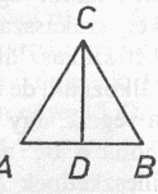
F.: I. 10.; IV. 4., 11., 13–4., VI. 3.

I. 10. Tétel

Felezzünk meg adott szakaszt!

Legyen *AB* az adott szakasz. Az *AB* szakaszt kell feleznünk.

Szerkesszük föléje az *ABC* egyenlő oldalú háromszöget (I. 1.), és a *CD* egyenes felezze meg az *ACB* szöget (I. 9.). Azt állítom, hogy a *D* pont felezi az *AB* szakaszt.



Minthogy ugyanis *AC* egyenlő *CB*-vel, *CD* pedig közös (oldal), e kettő-kettő, *AC*, *CD* és *BC*, *CD* páronként egyenlő; és egyenlő az *ACD* szög a *BCD* szöggel; az *AD* alap egyenlő tehát a *BD* alappal (I. 4.).

D tehát felezi az adott *AB* szakaszt. Éppen ezt kellett megtenni.

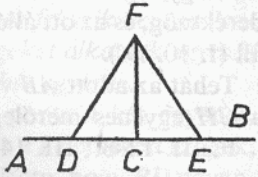
F.: I. 11–2., 16., 42., II. 6., 9–11., 14.; III. 1., 9–10., 14–5., 25., 30., 33., IV. 5., 8., VI. 27–9., X. 17., 33–5., 60. L., 60., 100.; XIII. 1.

I. 11. Tétel

*Húzzunk adott egyeneshez adott pontjából derékszögben egyenest!**

Legyen *AB* az adott egyenes, *C* pedig a rajta adott pont. A *C* pontból kell egyenest húznunk az *AB* egyeneshez derékszögben.

Legyen *D* az *AC* tetszőlegesen választott pontja, és legyen rajta (az *AC* egyenesen) a *CD*-vel egyenlő *CE* (I. 3.); álljon *DE* fölött az *FDE* egyenlő oldalú háromszög (I. 1.), és húzzuk meg *FC*-t. Azt állítom, hogy az adott *AB* egyeneshez adott *C* pontjából derékszögben húztuk az *FC* egyenest.



Minthogy ugyanis *DC* egyenlő *CE*-vel, *CF* pedig közös (oldal), e kettő-kettő, *DC*, *CF* és *EC*, *CF* páronként egyenlő; és egyenlő a *DF* alap az *FE* alappal; tehát a *DCF* szög egyenlő az *ECF* szöggel (I. 8.); és ezek mellékszögek. De ha egy egyenesre egy egyenest úgy állítunk, hogy egyenlő mellékszögek keletkeznek, akkor a két egyenlő szög derékszög (I. 10. D.), tehát *DCF* és *FCE* derékszögek.

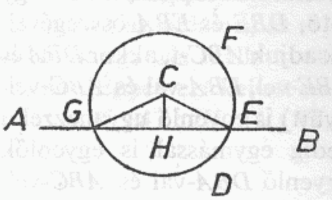
Tehát a *CF* egyenes az adott *AB* egyeneshez derékszögben áll a rajta adott *C* pontból. Éppen ezt kellett megtenni.

F.: I. 13., 46., 48.; II. 1., 9–10.; III. 1., 10., 15–7., 19., 25., 30., 32–4.; IV. 2–3., 5–7.; VI. 13., 16., 31.; X. 33.; XI. 11., 19.

I. 12. Tétel

Bocsássunk adott végtelen egyenesre rajta kívül adott pontból merőleges egyenest!

Legyen *AB* az adott végtelen egyenes, *C* pedig a rajta kívül adott pont. Az adott *AB* végtelen egyenesre kell a rajta kívül adott *C* pontból merőleges egyenest bocsátani.



Legyen *D* az *AB* egyenes másik oldalán tetszőlegesen választott pont, és *EFG* a *C* középpontú, *CD* távolsággal rajzolt kör (3. P.), és *H* az *EG* egyenes felezőpontja (I. 10.), és húzzuk meg a *CG*, *HC* és *CE* egyeneseket (1. P.). Azt állítom, hogy az adott *AB* végtelen egyenesre a *CH* egyenes merőlegesen van húzva a rajta kívül adott *C* pontból.

Minthogy ugyanis *GH* egyenlő *HE*-vel, *HC* pedig közös (oldal), e kettő-kettő, *GH*, *HC* és *EH*, *HC* páronként egyenlő; és egyenlő a *CG* alap a *CE* alappal; a *CHG* szög tehát egyenlő az *EHC* szöggel (I. 8.). És mellékszögek. De ha egy egyenesre egy egyenest úgy állítunk rá, hogy egyenlő mellékszögek keletkeznek, akkor a két egyenlő szög derékszög, és az ott álló egyenest merőlegesnek mondjuk arra, amelyen áll (I. 10. D.).

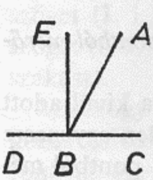
Tehát az adott *AB* végtelen egyenesre a rajta kívül adott *C* pontból a *CH* egyenes merőlegesen van húzva. Éppen ezt kellett megtenni.
F.: II. 12–3.; III. 14–6., 18., 35–6.; IV. 4., 13.; XI. 11.

I. 13. Tétel

Ha úgy keletkeznek szögek, hogy egy egyenest állítunk egy egyenesre, akkor vagy két derékszög, vagy (összegben) két derékszöggel egyenlő szögek keletkeznek.

Álljon ugyanis az *AB* egyenes a *CD* egyenesen, és legyenek *CBA* és *ABD* a keletkezett szögek. Azt állítom a *CBA* és *ABD* szögekről, hogy vagy mindkettő derékszög, vagy két derékszöggel egyenlők.

Mert ha a *CBA* szög egyenlő *ABD*-vel, akkor mindkettő derékszög (I. 10. D.). Ha pedig nem, akkor legyen *BE* a *B* pontból a *CD* egyeneshez derékszögben húzott egyenes (I. 11.); tehát *CBE* és *EBD* mindkettő derékszög; s minthogy a *CBE* szög egyenlő e kettő, *CBA* és *ABE* összegével, ha közös (tagnak) hozzájuk adjuk *EBD*-t,* akkor *CBE* és *EBD* (összegben) egyenlő lesz e hárommal, *CBA*-val, *ABE*-vel és *EBD*-vel (2. Ax.). Hasonlóképpen, minthogy a *DBA* szög egyenlő e kettő, *DBE* és *EBA* összegével, ha közös (tagnak) hozzájuk adjuk *ABC*-t, akkor *DBA* és *ABC* (együtt) egyenlő lesz e hárommal, *DBE*-vel, *EBA*-val és *ABC*-vel. De megmutattuk, hogy *CBE* és *EBD* (együtt) is egyenlő ugyanezzel a hárommal, az ugyanazzal egyenlők pedig egymással is egyenlők (1. Ax.), tehát *CBE* és *EBD* (együtt) is egyenlő *DBA*-val és *ABC*-vel. De *CBE* és *EBD* mindkettő derékszög, tehát a *DBA* és *ABC* szögek (összege) két derékszöggel egyenlő.



Ha tehát úgy keletkeznek szögek, hogy egy egyenest állítunk egy egyenesre, akkor vagy két derékszög, vagy (együtt) két derékszöggel egyenlő szögek keletkeznek. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: I. 14–5., 17., 28–9., 32.; III. 32.; IV. 3., 15.; VI. 7.

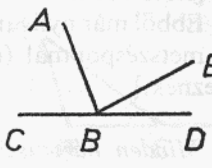
I. 14. Tétel

Ha valamely egyenesen levő pontnál két egyenes fekszik nem ugyanazon az oldalon, és két derékszöggel egyenlő szögeket alkotnak egymás mellett, akkor (ugyanazon az) egyenesen van a két egyenes.

Feküdjék ugyanis az *AB* egyenesen levő *B* pontnál két egyenes, *BC* és *BD* nem ugyanazon az oldalon, és legyenek a keletkezett szögek, *ABC* és *ABD*, két derékszöggel egyenlők. Azt állítom, hogy *BD* ugyanazon az egyenesen van, mint *CB*.

Ha ugyanis *BD* nincs egy egyenesen *BC*-vel, legyen *BE* egy egyenesen *CB*-vel.

Minthogy tehát *AB* a *CBE* egyenesen áll, az *ABC* és *ABE* szögek két derékszöggel egyenlők (I. 13.). De *ABC* és *ABD* is két derékszöggel egyenlők (együtt), tehát *CBA* és *ABE* (együtt) egyenlő *CBA*-val és *ABD*-vel (együtt) (4. P., 1. és 5. Ax.). Vonjuk le a közös *CBA*-t, így a maradék *ABE* egyenlő a maradék *ABD*-vel (3. Ax.), a kisebb a nagyobbal (8. Ax.), de ez nem lehetséges. Tehát *BE* nincs ugyanazon az egyenesen, mint *CB*. Hasonlóképp mutathatnánk meg, hogy egyetlen más egyenes sem (sincs ugyanazon az egyenesen, mint *CB*), csak *BD*, tehát *CB* ugyanazon az egyenesen van, mint *BD*.



Ha tehát valamely egyenesen levő pontnál két egyenes fekszik nem ugyanazon az oldalon, és (együtt) két derékszöggel egyenlő szögeket alkotnak egymás mellett, akkor ugyanazon az egyenesen van a két egyenes. Éppen ezt kellett megmutatni.

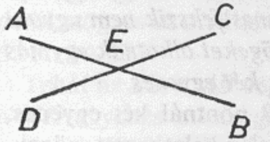
F.: I. 45., 47.; III. 14.; VI. 14–5., 23., 25., 32.; X. 25.; XI. 38.

I. 15. Tétel

Ha két egyenes metszi egymást, a keletkező csúcsszögek egyenlők.

Messe ugyanis egymást e két egyenes, *AB* és *CD*, az *E* pontban. Azt állítom, hogy az *AEC* szög egyenlő *DEB*-vel, a *CEB* pedig *AED*-vel.

Minthogy ugyanis az *AE* egyenes a *CD* egyenesen áll, és *CEA*, *AED* a keletkezett szögek, így a *AED*, *CEA* szögek (együtt) két derékszöggel egyenlők (I. 13.). Hasonlóképp, minthogy a *DE* egyenes az *AB* egyenesen áll, és *AED*, *DEB* a keletkezett szögek, így az *AED*, *DEB* szögek (együtt) két derékszöggel egyenlők (I. 13.). De megmutattuk, hogy a *CEA*, *AED* szögek is (együtt) két derékszöggel egyenlők; tehát *CEA* és *AED* (együtt) egyenlő *AED*-vel és *DEB*-vel (4. P., 1. és 5. Ax.). Vonjuk le a közös *AED*-t, így a maradék *CEA* egyenlő a maradék *DEB*-vel (3. Ax.). Hasonlóképp mutatható meg, hogy *CEB* és *DEA* is egyenlők.



Ha tehát két egyenes metszi egymást, a keletkező csúcsszögek egyenlők. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: I. 16., 28–9., 44.; II. 10.; III. 25.; IV. 15.; XI. 4., 33., 38.

[*Következmény*

Ebből már nyilvánvaló, hogy ha két* egyenes metszi egymást, akkor a metszéspontnál (együtt) négy derékszöggel egyenlő szögek keletkeznek.]

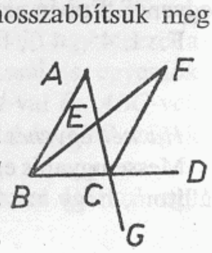
I. 16. Tétel

Minden háromszögben az egyik oldal meghosszabbításakor keletkező külső szög nagyobb mind a két szemközti belső szögnél.

Legyen *ABC* egy háromszög, és legyen az egyik oldala, *BC*, a *D* pontig meghosszabbítva. Azt állítom, hogy *ACD* külső szög nagyobb mind a két szemközti belső szögnél, *CBA*-nál és *BAC*-nél.

Legyen *E* az *AC* felezőpontja (I. 10.), és húzzuk meg *BE*-t, majd hosszabbítsuk meg egyenes mentén *F*-ig, és helyezzük el a *BE*-vel egyenlő *EF*-et (I. 3.), és húzzuk meg *FC*-t, és hosszabbítsuk meg *AC*-t *G*-ig.

Minthogy *AE* egyenlő *EC*-vel, *BE* pedig *EF*-fel, e kettő-kettő, *AE*, *EB* és *CE*, *EF* páronként egyenlő; és az *AEB* szög egyenlő *FEC*-vel, mert csúcsszögek (I. 15.); tehát az *AB* alap egyenlő az *FC* alappal, és az *ABE* háromszög egyenlő az *FEC* háromszöggel, és a többi szög is páronként egyenlő,



amelyekkel szemben az egyenlő oldalak fekszenek (I. 4.); tehát egyenlő a *BAE* szög *ECF*-fel. *ECD* pedig nagyobb *ECF*-nél (8. Ax.), tehát *ACD* nagyobb *BAE*-nél. A *BC* szakasz megfelezése után hasonlóképp mutatható meg az is, hogy a *BCG* szög, azaz *ACD* (I. 15.) nagyobb *ABC*-nél is.

Minden háromszögben tehát az egyik oldal meghosszabbításakor keletkező külső szög nagyobb mind a két szemközti belső szögnél. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: I. 17–8., 21., 26–7.; III. 2., 23.

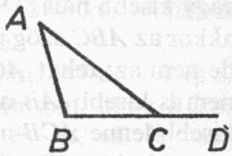
I. 17. Tétel

Minden háromszögben két szög (együtt) kisebb két derékszögnél, bárhogy is választjuk őket.

Legyen *ABC* egy háromszög. Azt állítom, hogy az *ABC* háromszögben két szög kisebb két derékszögnél, bárhogy is választjuk őket.

Legyen ugyanis *BC* a *D*-ig meghosszabbítva.

És minthogy *ACD* külső szöge az *ABC* háromszögnek, nagyobb a szemközti *ABC* belső szögnél (I. 16.). Adjuk hozzájuk közös (tagnak) az *ACB* szöget, így az *ACD* és *ACB* szögek (együtt) nagyobbak, mint *ABC* és *BCA* (együtt) (4. Ax.). De az *ACD* és *ACB* szögek (együtt) két derékszöggel egyenlők (I. 13.), tehát *ABC* és *ACB* kisebbek két derékszögnél. Hasonlóképp mutathatnánk meg, hogy a *BAC* és *ACB* szögek is kisebbek két derékszögnél, meg a *CAB* és *ABC* szögek is.



Minden háromszögben tehát két szög (együtt) kisebb két derékszögnél, bárhogy is választjuk őket. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: III. 16., 31.; VI. 4., 7.; XI. 14.

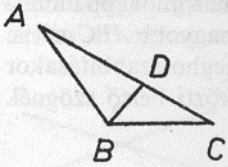
I. 18. Tétel

Minden háromszögben a nagyobb oldal nagyobb szöggel szemben fekszik.

Legyen ugyanis *ABC* egy háromszög, melyben az *AC* oldal nagyobb *AB*-nél. Azt állítom, hogy az *ABC* szög is nagyobb a *BCA* szögnél.

Minthogy ugyanis *AC* nagyobb *AB*-nél, helyezzük el az *AB*-vel egyenlő *AD*-t (I. 3.), és húzzuk meg *BD*-t.

Minthogy ADB külső szöge a BCD háromszögnek, nagyobb a szemközti DCB belső szögnél (I. 16.). Viszont az ADB szög egyenlő ABD-vel, minthogy az AB oldal is egyenlő az AD oldallal (I. 5.); tehát az ABD szög is nagyobb ACB-nél; tehát annál inkább nagyobb az ABC szög ACB-nél (8. Ax.).



Minden háromszögben tehát a nagyobb oldal nagyobb szöggel szemben fekszik. Éppen ezt kellett megmutatni.

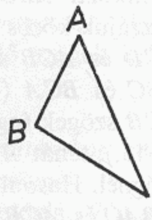
F.: I. 19.

I. 19. Tétel

Minden háromszögben a nagyobb szöggel szemben nagyobb oldal fekszik.

Legyen ABC egy háromszög, melyben az ABC szög nagyobb a BCA szögnél. Azt állítom, hogy az AC oldal is nagyobb az AB oldalnál.

Ha ugyanis nem, akkor AC vagy egyenlő AB-vel, vagy kisebb nála. De AC nem egyenlő AB-vel, mert akkor az ABC szög is egyenlő lenne ACB-vel (I. 5.); de nem az; tehát AC nem egyenlő AB-vel. De AC nem is kisebb AB-nél, mert akkor az ABC szög is kisebb lenne ACB-nél (I. 18.); de nem az; tehát AC nem kisebb AB-nél. Megmutattuk, hogy nem is egyenlő vele. Tehát AC nagyobb AB-nél.



Minden háromszögben tehát a nagyobb szöggel szemben nagyobb oldal fekszik. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: I. 20., 24., III. 2., 16., 18.

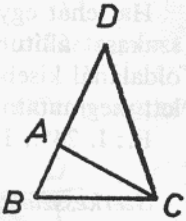
I. 20. Tétel

Minden háromszögben két oldal (együtt) nagyobb a harmadiknál, akárhogy is választjuk őket.

Legyen ugyanis ABC egy háromszög. Azt állítom, hogy az ABC háromszögben két oldal (együtt) nagyobb a harmadiknál, akárhogy is választjuk őket, BA és AC (együtt) nagyobb BC-nél, AB meg BC az AC-nél, BC meg CA pedig nagyobb AB-nél.

Hosszabbítsuk meg ugyanis BA-t a D pontig, és legyen AD egyenlő a CA-val (I. 3.); húzzuk meg DC-t.

Minthogy tehát DA egyenlő AC-vel, az ADC szög is egyenlő az ACD szöggel (I. 5.); a BCD szög nagyobb tehát az ACD szögnél (8. Ax.); minthogy pedig DCB egy háromszög, melyben a BCD szög nagyobb BDC-nél, és a nagyobb szöggel szemben nagyobb oldal fekszik, így DB nagyobb BC-nél (I. 19.). DA pedig egyenlő AC-vel; tehát BA és AC (együtt) nagyobb BC-nél. Hasonlóképp mutathatnánk meg, hogy AB és BC is nagyobb CA-nál, BC és CA pedig AB-nél.



Tehát minden háromszögben két oldal nagyobb a harmadiknál, akárhogy is választjuk őket. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: I. 21–2.; III. 7–8., 11–2., 15.; XI. 20., 22.

I. 21. Tétel

Ha egy háromszög egyik oldalára a végpontjaiban belül két szakaszt állítunk, akkor az álló szakaszok a háromszög másik két oldalánál (együtt) kisebbek, de nagyobb szöget fognak közre.

Álljon ugyanis az ABC háromszög egyik oldalán, BC-n, a B és C végpontokon belül két szakasz, BD és DC. Azt állítom, hogy BD és DC a háromszög másik két oldalánál, BA-nál és AC-nél (együtt) kisebbek, de a BAC szögnél nagyob BDC szöget fogják közre.

Legyen ugyanis BD az E-ig meghosszabbítva. És minthogy minden háromszögben két oldal (összege) nagyobb a harmadiknál, az ABE háromszög két oldala, AB és AE (összegben) nagyobb BE-nél (I. 20.). Adjuk hozzájuk közös (tagnak) EC-t, így BA és AC (együtt) nagyobbak, mint BE és EC (4. Ax.). Hasonlóképp, minthogy a CED háromszög két oldala, CE és ED, nagyobb CD-nél, adjuk hozzájuk közös (tagnak) DB-t, így CE és EB nagyobbak, mint CD és DB. De megmutattuk, hogy BA és AC nagyobbak, mint BE és EC, tehát BA és AC annál inkább nagyobbak, mint BD és DC.

Továbbá, minthogy minden háromszögben a külső szög nagyobb a szemközti belső szögnél, így a *CDE* háromszög *BDC* külső szöge nagyobb *CED*-nél (I. 16.). Ugyanezért az *ABE* háromszög *CEB* külső szöge is nagyobb *BAC*-nél. De megmutattuk, hogy a *BDC* szög nagyobb *CEB*-nél, tehát a *BDC* szög annál inkább nagyobb *BAC*-nél.

Ha tehát egy háromszög egyik oldalára a végpontjaiban belül két szakaszt állítunk, akkor az álló szakaszok a háromszög másik két oldalánál kisebbek, de nagyobb szöget fognak közre. Éppen ezt kellett megmutatni.

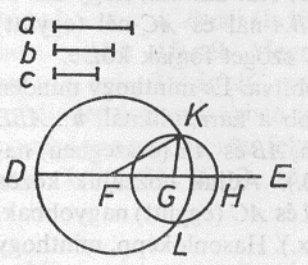
F.: I. 24*., III. 8.

I. 22. Tétel

Szerkesszünk háromszöget három szakaszból, melyek három adott szakasszal egyenlők! Szükséges, hogy két szakasz (együtt) nagyobb legyen a harmadiknál, akárhogy is választjuk őket [mert minden háromszögben két oldal (együtt) nagyobb a harmadiknál, akárhogy is választjuk őket (I. 20.)].

Legyen *a*, *b* és *c* a három adott szakasz, és legyen közülük kettő (együtt) a harmadiknál nagyobb, akárhogy is választjuk őket, *a* meg *b* a *c*-nél, *a* meg *c* a *b*-nél és végül *b* meg *c* az *a*-nál. Tehát *a*-val, *b*-vel és *c*-vel egyenlő szakaszokból kell háromszöget szerkesztenünk.

Vegyünk egy *DE* (fél)egyenest, melynek *D* legyen a végpontja, *E* felé pedig legyen végtelen, és mérjük rá az *a*-val egyenlő *DF*-et, a *b*-vel egyenlő *FG*-t és a *c*-vel egyenlő *GH*-t (I. 3.), és legyen *DKL* az *F* középpontú, *FD* távolsággal rajzolt kör, továbbá *KLH* a *G* középpontú, *GH* távolsággal rajzolt kör, és húzzuk meg *KF*-et és *KG*-t. Állítom, hogy *a*-val, *b*-vel és *c*-vel egyenlő három szakaszból van szerkesztve a *KFG* háromszög.



Minthogy ugyanis az *F* pont középpontja a *DKL* körnek, *FD* egyenlő *FK*-val. De *FD* egyenlő *a*-val, tehát *KF* is egyenlő *a*-val. Továbbá, minthogy a *G* pont középpontja az *LKH* körnek, *GH* egyenlő *GK*-val. De *GH* egyenlő *c*-vel, tehát *KG* is egyenlő *c*-vel. De *FG* is egyenlő *b*-vel, e három szakasz tehát, *KF*, *FG* és *GK* egyenlő e hárommal, *a*-val, *b*-vel és *c*-vel.

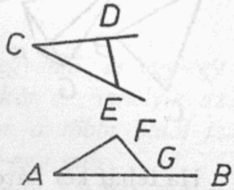
Három szakaszból tehát, *KF*-ből, *FG*-ből, és *GK*-ból, melyek egyenlők a három adott *a*, *b* és *c* szakasszal, háromszöget szerkesztettünk, *KFG*-t. Éppen ezt kellett megtenni.

F.: I. 23.

I. 23. Tétel

Szerkesszünk adott egyenesre, egy rajta levő ponthoz, adott egyenes vonalú szöggel egyenlő egyenes vonalú szöget.

Legyen *AB* az adott egyenes, *A* a rajta levő pont, *DCE* pedig az adott egyenes vonalú szög. Az adott *AB* egyenesre kell tehát a rajta levő *A* ponthoz az adott *DCE* egyenesvonalú szöggel egyenlő egyenes vonalú szöget szerkeszteni.



Legyen *D* és *E* egy-egy, a *CD* és *CE* egyeneseken tetszőlegesen választott pont, és húzzuk meg *DE*-t, és legyen *AFG* az e három szakasszal, *CD*-vel, *DE*-vel és *CE*-vel egyenlő három szakaszból szerkesztett háromszög (I. 22.), úgyhogy *CD* egyenlő *AF*-fel, *CE* az *AG*-vel és *DE* is *FG*-vel.

Minthogy tehát e két-két (oldal), *DC*, *CE* és *FA*, *AG* páronként egyenlő, és a *DE* alap is egyenlő az *FG* alappal, így a *DCE* szög egyenlő az *FAG* szöggel (I. 8.).

Az adott *AB* egyenesre tehát, a rajta levő *A* ponthoz, az adott *DCE* egyenes vonalú szöggel egyenlő *FAG* egyenes vonalú szöget szerkesztettünk. Éppen ezt kellett megtenni.

F.: I. 24., 31., 42.; III. 7–8., 25., 27., 33–4.; IV. 2–3.; VI. 5–7., 14–5., 18.; XI. 26., 31.

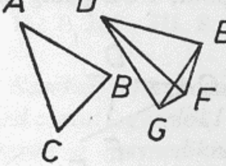
I. 24. Tétel

Ha két háromszögben két-két oldal páronként egyenlő, de az egyenlő oldalak által közrefogott szög nagyobb az egyikben, mint a másikban, akkor az egyiknek az alapja szintén nagyobb a másik alapjánál.

Legyen *ABC* és *DEF* két háromszög, amelyeknek két-két oldala, *AB*, *AC* és *DE*, *DF* páronként egyenlő, *AB* a *DE*-vel, *AC* pedig *DF*-fel, és legyen az *A*-nál levő szög nagyobb a *D*-nél levő szögnél. Azt állítom, hogy a *BC* alap szintén nagyobb az *EF* alapnál.

Minthogy ugyanis a *BAC* szög nagyobb az *EDF* szögnél, szerkesszünk a *DE* egyenesre, a rajta levő *D* ponthoz, a *BAC* szöggel egyenlő *EDG* szöget (I. 23.), és helyezzünk el egy mind *AC*-vel, mind *DF*-fel egyenlő *DG* szakaszt (I. 3.), és húzzuk meg *EG*-t és *FG*-t.

Minthogy tehát *AB* egyenlő *DE*-vel, *AC* pedig *DG*-vel, e két-két (oldal), *BA*, *AC* és *ED*, *DG* páronként egyenlő; és a *BAC* szög is egyenlő *EDG*-vel, tehát a *BC* alap egyenlő az *EG* alappal (I. 4.). Továbbá, minthogy *DF* egyenlő *DG*-vel, a *DGF* szög is egyenlő *DFG*-vel (I. 5.), a *DFG* szög tehát nagyobb *EGF*-nél (8. Ax.), még inkább nagyobb tehát az *EFG* szög *EGF*-nél (8. Ax.). És minthogy *EGF* egy háromszög, melyben az *EFG* szög nagyobb *EGF*-nél, a nagyobb szöggel szemben pedig nagyobb oldal fekszik, az *EG* oldal is nagyobb *EF*-nél (I. 19.). *EG* viszont egyenlő *BC*-vel, tehát *BC* is nagyobb *EF*-nél.*



Ha tehát két háromszögben két-két oldal páronként egyenlő, de az egyenlő oldalak által közrefogott szög nagyobb az egyikben, mint a másikban, akkor az egyiknek az alapja szintén nagyobb a másik alapjánál. Éppen ezt kellett megmutatni.

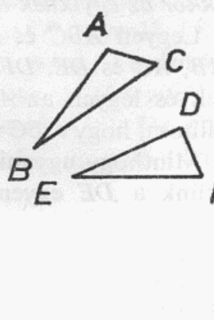
F.: I. 25.; III. 7–8., 15.; XI. 22.

I. 25. Tétel

Ha két háromszögben két-két oldal páronként egyenlő, az egyik alapja viszont nagyobb a másik alapjánál, akkor az egyenlő oldalak által közrefogott szög is nagyobb abban a háromszögben, amelynek alapja nagyobb, mint a másikban.

Legyen *ABC* és *DEF* két háromszög, amelynek két-két oldala, *AB*, *AC* és *DE*, *DF* páronként egyenlő, *AB* a *DE*-vel, *AC* pedig *DF*-fel, a *BC* alap viszont legyen nagyobb az *EF* alapnál. Azt állítom, hogy a *BAC* szög is nagyobb az *EDF* szögnél.

Ha ugyanis nem, akkor vagy egyenlő vele, vagy kisebb nála. De a *BAC* szög nem egyenlő *EDF* szöggel, mert akkor a *BC* alap is egyenlő lenne az *EF* alappal (I. 4.). De nem az, tehát a *BAC* szög nem egyenlő az *EDF* szöggel. De a *BAC* szög nem is kisebb az *EDF* szögnél, mert



akkor a *BC* alap is kisebb lenne az *EF* alapnál (I. 24.). De nem az, tehát a *BAC* szög nem kisebb az *EDF* szögnél. Megmutattuk, hogy nem is egyenlő vele, tehát a *BAC* szög nagyobb az *EDF* szögnél.

Ha tehát két háromszögben két-két oldal páronként egyenlő, az egyik alapja viszont nagyobb a másik alapjánál, akkor az egyenlő oldalak által közrefogott szög is nagyobb abban a háromszögben, amelynek alapja nagyobb, mint a másikban. Éppen ezt kellett megmutatni.

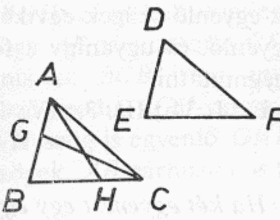
F.: XI. 20., 23.

I. 26. Tétel

Ha két háromszögben két-két szög páronként egyenlő, és egy-egy oldal is, akár az egyenlő szögek melletti oldal, akár az, amelyik az egyenlő szögek egyikével szemben fekszik, akkor a többi oldal is páronként egyenlő, és ugyanúgy a fönnmaradó egy-egy szög.

Legyen *ABC* és *DEF* két háromszög, melyeknek két-két szöge, *ABC*, *BCA* és *DEF*, *EFD* páronként egyenlő, az *ABC* szög a *DEF* szöggel, a *BCA* szög pedig az *EFD* szöggel. Legyen még egy-egy oldaluk is egyenlő, először az egyenlő szögek melletti *BC* és *EF*. Azt állítom, hogy a többi oldal is páronként egyenlő, *AB* a *DE*-vel, *AC* pedig *DF*-fel, és a fönnmaradó egy-egy szög is, *BAC* és *EDF*.

Ha ugyanis *AB* nem egyenlő *DE*-vel, akkor egyikük nagyobb. Legyen *AB* a nagyobb, és mérjünk föl egy *DE*-vel egyenlő *BG* szakaszt (I. 3.) és húzzuk meg *GC*-t. Minthogy tehát *BG* egyenlő *DE*-vel, *BC* pedig *EF*-fel, e két-két (oldal), *BG*, *BC* és *DE*, *EF* páronként egyenlő. És egyenlő a *GBC* szög a *DEF* szöggel, tehát a *GC* alap egyenlő a *DF* alappal, és a *GBC* háromszög egyenlő a *DEF* háromszöggel, és a többi szög is páronként egyenlő, amelyekkel szemben az egyenlő oldalak fekszenek, a *GCB* szög egyenlő tehát *DFE*-vel (I. 4.). De föltettük, hogy a *DFE* szög egyenlő *BCA*-val, tehát a *BCG* szög is egyenlő a *BCA* szöggel (1. Ax.), a kisebb a nagyobbal (8. Ax.), ez viszont nem lehetséges. Tehát *AB* és *DE* nem egyenlőtlenek, azaz egyenlők. De *BC* is egyenlő *EF*-fel, tehát e két-két (oldal), *AB*, *BC* és *DE*, *EF* páronként egyenlő.



És az *ABC* szög is egyenlő a *DEF* szöggel, tehát az *AC* alap egyenlő a *DF* alappal, és a fennmaradó *BAC* szög egyenlő a fönnmaradó *EDF* szöggel (I. 4.).

Most pedig legyenek az egyenlő szögekkel szemközt fekvő oldalak egyenlők, például *AB* és *DE*. Ismét azt állítom, hogy a többi oldal is páronként egyenlő, *AC* a *DF*-fel, *BC* pedig *EF*-fel, és ugyanígy a fönnmaradó egy-egy szög is, *BAC* és *EDF*.*

Ha ugyanis *BC* nem egyenlő *EF*-fel, akkor egyikük nagyobb. Ha ez lehetséges, legyen *BC* a nagyobb, és mérjünk föl egy *EF*-fel egyenlő *BH* szakaszt (I. 3.), és húzzuk meg *AH*-t. Minthogy *BH* egyenlő *EF*-fel, *AB* pedig *DE*-vel, e két-két (oldal), *AB*, *BH* és *DE*, *EF* páronként egyenlő. És egyenlő szögeket fognak közre, tehát az *AH* alap egyenlő a *DF* alappal, és az *ABH* háromszög egyenlő a *DEF* háromszöggel, és a többi szög is páronként egyenlő, amelyekkel szemben az egyenlő oldalak fekszenek, egyenlő tehát a *BHA* szög *EFD*-vel (I. 4.). De *EFD* egyenlő *BCA*-val, így az *AHC* háromszög *BHA* külső szöge egyenlő a szemközti *BCA* belső szöggel (1. Ax.), ez viszont nem lehetséges (I. 16.). Tehát nem igaz, hogy *BC* és *EF* nem egyenlők, azaz egyenlők. De *AB* is egyenlő *DE*-vel, így e két-két (oldal), *AB*, *BC* és *DE*, *EF* páronként egyenlő. És egyenlő szögeket fognak közre, tehát az *AC* alap egyenlő a *DF* alappal, és az *ABC* háromszög egyenlő a *DEF* háromszöggel, és ugyanígy a fönnmaradó *BAC* szög egyenlő a fönnmaradó *EDF* szöggel (I. 4.).

Ha tehát két háromszögben két-két szög páronként, és egy-egy oldal egyenlő, akár az egyenlő szögek melletti oldal, akár az, amelyik az egyenlő szögek egyikével szemben fekszik, akkor a többi oldal is egyenlő, és ugyanígy a fönnmaradó egy-egy szög. Éppen ezt kellett megmutatni.

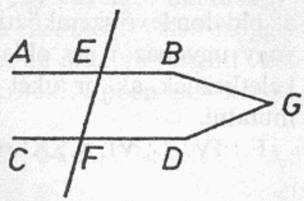
F.: I. 34.; III. 3.; IV. 4., 12–3.; XI. 4., 35., 38.; XII. 7.; XIII. 11.

I. 27. Tétel

Ha két egyenest egy egyenes úgy metsz, hogy egymás között egyenlő váltószögek keletkeznek, akkor a két egyenes párhuzamos egymással.

Messen ugyanis két egyenest, *AB*-t és *CD*-t egy *EF* egyenes úgy, hogy a keletkezett *AEF* és *EFD* váltószögek egymás között egyenlők legyenek. Azt állítom, hogy *AB* párhuzamos *CD*-vel.

Ha ugyanis nem, akkor az *AB* és *CD* egyenesek meghosszabbítva találkoznak vagy a *B* és *D*, vagy az *A* és *C* pontok oldalán. Legyenek meghosszabbítva, és találkozzanak *B* és *D* oldalán a *G* pontban. Ekkor a *GEF* háromszög *AEF* külső szöge egyenlő a szemközti *EFG* belső szöggel, ez viszont nem lehetséges (I. 16.), nem találkozik tehát az *AB* és a *CD* egyenes *B* és *D* oldalán. Hasonlóképp mutathatnánk meg, hogy az *A* és *C* pontok oldalán sem érhetnek össze. De az egyik oldalon sem találkozó egyenesek párhuzamosak (I. 23. D.), tehát *AB* párhuzamos *CD*-vel.



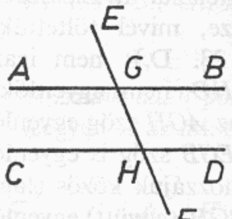
Ha tehát két egyenest egy egyenes úgy metsz, hogy egymás között egyenlő váltószögek keletkeznek, akkor a két egyenes párhuzamos. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: I. 28., 30–1., 33.

I. 28. Tétel

Ha két egyenest egy egyenes úgy metsz, hogy az ugyanazon az oldalon levő szemközti belső szöggel egyenlő külső szög keletkezik, vagy ugyanazon az oldalon két derékszöggel egyenlő belső szögek keletkeznek, akkor a két egyenes párhuzamos.

Messen ugyanis két egyenest, *AB*-t és *CD*-t, egy *EF* egyenes úgy, hogy a szemközti *GHD* belső szöggel egyenlő *EGB* külső szög keletkezzék, vagy az ugyanazon az oldalon keletkező *BGH* és *GHD* belső szögek (együtt) két derékszöggel legyenek egyenlők. Azt állítom, hogy *AB* párhuzamos *CD*-vel.



Minthogy ugyanis az *EGB* szög egyenlő *GHD*-vel, az *EGB* szög pedig *AGH*-val egyenlő (I. 15.), így az *AGH* szög is egyenlő *GHD*-vel (1. Ax.). És váltószögek, *AB* párhuzamos tehát *CD*-vel (I. 27.).

Másrészt, minthogy *BGH* és *GHD* (együtt) két derékszöggel egyenlő, és *AGH* meg *BGH* is két derékszöggel egyenlő (I. 13.), *AGH* meg *BGH* egyenlő *BGH* meg *GHD*-vel (1. Ax.). Vonjuk le a közös *BGH*-t, így a maradék

AGH egyenlő a maradék *GHD*-vel (3. Ax.). És váltószögek, *AB* párhuzamos tehát *CD*-vel (I. 27.).

Ha tehát két egyenest egy egyenes úgy metsz, hogy az ugyanazon az oldalon levő szemközti belső szöggel egyenlő külső szög keletkezik, vagy ugyanazon az oldalon két derékszöggel egyenlő belső szögek keletkeznek, akkor a két egyenes párhuzamos. Éppen ezt kellett megmutatni.

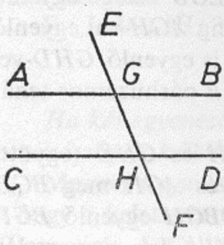
F.: IV. 7.; VI. 4.; XI. 6., 18.

I. 29. Tétel

*Ha párhuzamos egyeneseket metsz egy egyenes, akkor egymással egyenlő váltószögek keletkeznek, és a szemközti belső szöggel egyenlő külső szög keletkezik, és ugyanazon az oldalon (együtt) két derékszöggel egyenlő belső szögek keletkeznek.**

Messe ugyanis a párhuzamos *AB*, *CD* egyeneseket egy *EF* egyenes. Azt állítom, hogy az *AGH*, *GHD* váltószögek egyenlők, és az *EGB* külső szög egyenlő a szemközti *GHD* belső szöggel, és az ugyanazon az oldalon levő *BGH*, *GHD* belső szögek (együtt) két derékszöggel egyenlők.

Ha ugyanis az *AGH* szög nem egyenlő *GHD*-vel, egyikük nagyobb. Legyen *AGH* a nagyobb. Adjuk hozzájuk közös (tagnak) *BGH*-t; így *AGH* és *BGH* (együtt) nagyobb, mint *BGH* és *GHD* (2. Ax.). Azonban *AGH* és *BGH* (együtt) két derékszöggel egyenlő (I. 13.), tehát *BGH* és *GHD* (együtt) kisebbek, mint két derékszög. De a két derékszögnél kisebb szögek felől végtelenül meghosszabbított egyenesek találkoznak (5. P.); *AB* és *CD* tehát végtelenül meghosszabbítva találkozni fognak. De nem érnek össze, mivel föltettük, hogy párhuzamosak (I. 23. D.); nem igaz tehát, hogy *AGH* és *GHD* nem egyenlők, egyenlők tehát. Azonban az *AGH* szög egyenlő *EGB*-vel (I. 15.); tehát az *EGB* szög is egyenlő *GHD*-vel (1. Ax.). Adjuk hozzájuk közös (tagnak) *BGH*-t; így *EGB* és *BGH* (együtt) egyenlő *BGH*-val és *GHD*-vel (2. Ax.). Azonban *EGB* és *BGH* (együtt) két derékszöggel egyenlő



(I. 13.); tehát *BGH* és *GHD* is két derékszöggel egyenlők (1. Ax.).

Ha tehát párhuzamos egyeneseket metsz egy egyenes, akkor egymással egyenlő váltószögek keletkeznek, és a szemközti belső szöggel egyenlő külső szög keletkezik, és ugyanazon az oldalon (együtt) két derékszöggel egyenlő belső szögek keletkeznek. Éppen ezt kellett megmutatni.

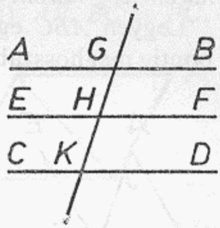
F.: I. 30., 32–5., 44–6.; II. 4., 9–10.; VI. 3., 24–5., 32.; XI. 8., 15., 38.; XII. 3–4.

I. 30. Tétel

Az ugyanazzal az egyenessel párhuzamos egyenesek egymással is párhuzamosak.

AB és *CD* legyenek mind a ketten párhuzamosak *EF*-fel. Azt állítom, hogy *AB* is párhuzamos *CD*-vel.

Messe őket ugyanis a *GK* egyenes.



Minthogy a *GK* egyenes a párhuzamos *AB* és *EF* egyeneseket metszi, az *AGK* szög egyenlő *GHF*-fel (I. 29.). Hasonlóképp, minthogy a *GK* egyenes a párhuzamos *EF* és *CD* egyeneseket metszi, a *GHF* szög egyenlő *GKD*-vel (I. 29.). De megmutattuk, hogy az *AGK* szög is egyenlő *GHF*-fel. Az *AGK* szög is egyenlő tehát *GKD*-vel (1. Ax.); és váltószögek. *AB* párhuzamos tehát *CD*-vel (I. 27.).

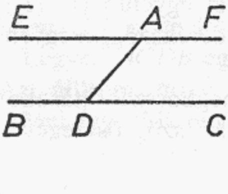
[Az ugyanazzal az egyenessel párhuzamos egyenesek tehát egymással is párhuzamosak.] Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: I. 44–5., 47., II. 2–8.; IV. 7–8.; VI. 26.; XII. 17.

I. 31. Tétel

Húzzunk adott ponton át adott egyenessel párhuzamos egyenest!

Legyen *A* az adott pont, *BC* pedig az adott egyenes. Az *A* ponton át kell tehát a *BC* egyenessel párhuzamos egyenest húzni.



Legyen *D* a *BC* egyenes egy tetszőlegesen választott pontja, és húzzuk meg *AD*-t; és szerkesszünk az *AD* egyeneshez a rajta levő *A* ponthoz egy, az *ADC* szöggel egyenlő *DAE* szöget

(I. 23.), és legyen *EA* egyenes menti meghosszabbítása az *AF* egyenes.

Minthogy e két egyenest, *BC*-t és *EF*-et, az *AD* egyenes úgy metszi, hogy a keletkezett *DAE* és *ADC* váltószögek egyenlők, az *EAF* egyenes párhuzamos *BC*-vel (I. 27.).

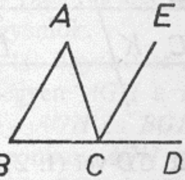
Az adott *A* ponton át tehát az adott *BC* egyenessel párhuzamos *EAF* egyenest húztunk. Éppen ezt kellett megtenni.

F.: I. 32., 37–40., 42., 44., 46–7., II. 1–10.; IV. 8.; VI. 3., 9–12., 14., 16., 26.; X. 60., 91., 97.; XI. 11–2.

I. 32. Tétel

Minden háromszögben az egyik oldal meghosszabbításakor keletkező külső szög egyenlő a két szemközti belső szög összegével, és a háromszög három belső szöge (együtt) két derékszöggel egyenlő.

Legyen *ABC* egy háromszög, és legyen az egyik oldala, *BC*, a *D* pontig meghosszabbítva. Azt állítom, hogy az *ACD* külső szög egyenlő a két szemközti belső szög, *CAB* és *ABC* összegével, és a háromszög három belső szöge, *ABC*, *BCA* és *CAB* (együtt) két derékszöggel egyenlő.



Húzzuk meg ugyanis a *C* ponton át az *AB* egyenessel párhuzamos *CE* egyenest (I. 31.).

Minthogy *AB* párhuzamos *CE*-vel, és metszi őket *AC*, a *CAB* és *ACE* váltószögek egyenlők egymással (I. 29.). Továbbá, minthogy *AB* párhuzamos *CE*-vel, és metszi őket a *BD* egyenes, az *ECD* külső szög egyenlő a szemközti *ABC* belső szöggel (I. 29.). De megmutattuk azt is, hogy az *ACE* szög egyenlő *CAB*-vel. Tehát a teljes *ACD* szög egyenlő a két szemközti belső szög, *CAB* és *ABC* összegével (2. Ax.).*

Adjuk hozzájuk közös (tagnak) *BCA*-t; így *ACD* és *BCA* (együtt) egyenlő e három szöggel, *ABC*-vel, *BCA*-val és *CAB*-vel (2. Ax.). Azonban *ACD* és *BCA* (együtt) két derékszöggel egyenlő (I. 13.); tehát az *ABC*, *BCA* és *CAB* szögek is (együtt) két derékszöggel egyenlők (1. Ax.).

Minden háromszögben tehát az egyik oldal meghosszabbításakor keletkező külső szög egyenlő a két szemközti belső szög összegével, és a háromszög három belső szöge (együtt) két derékszöggel egyenlő. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: II. 9–10.; III. 20., 22., 31–2.; IV. 2–3., 10., 15.; VI. 5–8., 18., 20., 24., 32.; XI. 21.; XIII. 8–11., 18. L.

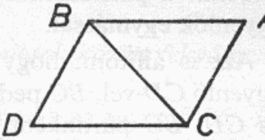
I. 33. Tétel

Az egyenlő és párhuzamos szakaszokat ugyanazon az oldalon összekötő szakaszok maguk is egyenlők és párhuzamosak.

Legyenek *AB* és *CD* egyenlők és párhuzamosak, és kössék össze őket ugyanazon az oldalon* az *AC*, *BD* szakaszok. Azt állítom, hogy *AC* és *BD* is egyenlők és párhuzamosak.

Húzzuk meg *BC*-t.

Minthogy *AB* párhuzamos *CD*-vel, és *BC* metszi őket, az *ABC*, *BCD* váltószögek egyenlők egymással (I. 29.). És minthogy *AB* egyenlő *CD*-vel, *BC* pedig közös (oldal), így e két-két (oldal), *AB*, *BC* és *BC*, *CD* (páronként) egyenlő; és egyenlő az *ABC* szög a *BCD* szöggel; tehát az *AC* alap egyenlő a *BD* alappal, és az *ABC* háromszög egyenlő a *BCD* háromszöggel, és a többi szög is páronként egyenlő, amelyekkel szemben az egyenlő oldalak fekszenek; egyenlő tehát az *ACB* szög *CBD*-vel (I. 4.). És minthogy e két szakaszt, *AC*-t és *BD*-t, a *BC* szakasz úgy metszi, hogy a keletkezett váltószögek egyenlők, *AC* párhuzamos *BD*-vel (I. 27.). De azt is megmutattuk, hogy egyenlő vele.



Az egyenlő és párhuzamos szakaszokat ugyanazon az oldalon összekötő szakaszok tehát maguk is egyenlők és párhuzamosak. Éppen ezt kellett megmutatni.

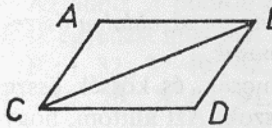
F.: I. 36., 45.; XI. 10., 38.; XII. 17.; XIII. 16.

I. 34. Tétel

A párhuzamos vonalú idomok szemközti oldalai és szögei egyenlők egymással, és az átló felezi őket.*

Legyen *ACDB* egy párhuzamos vonalú idom, *BC* pedig egy átlója. Azt állítom, hogy az *ACDB* paralelogramma szemközti oldalai és szögei egyenlők egymással, és a *BC* átló felezi.

Minthogy ugyanis *AB* párhuzamos *CD*-vel, és a *BC* egyenes metszi őket, az *ABC*, *BCD* váltószögek egyenlők egymással (I..29.). Hasonlóképp, minthogy *AC* párhuzamos *BD*-vel, és *BC* metszi őket, az *ACB*, *CBD* váltószögek egyenlők egymással (I. 29.). Így *ABC* és *BCD* két olyan háromszög, melyeknek két-két szöge, *ABC*, *ACB* és *BCD*, *CBD*



páronként egyenlő, és egy-egy oldaluk is egyenlő, az egyenlő szögek közötti közös *BC*; tehát a többi oldal is páronként egyenlő, és a fönnmaradó egy-egy szög is (I. 26.); egyenlő tehát az *AB* oldal *CD*-vel, az *AC* (oldal) pedig *BD*-vel, és még egyenlő a *BAC* szög is *CDB*-vel. És minthogy az *ABC* szög egyenlő *BCD*-vel, a *CBD* szög pedig *ACB*-vel, így a teljes *ABD* szög egyenlő a teljes *ACD* szöggel (2. Ax.). De megmutattuk azt is, hogy a *BAC* szög egyenlő *CDB*-vel.

Tehát a párhuzamos vonalú idomok szemközti oldalai és szögei egyenlők egymással.

Azt is állítom, hogy az átló felezi őket. Minthogy ugyanis *AB* egyenlő *CD*-vel, *BC* pedig közös (oldal), így e két-két (oldal), *AB*, *BC* és *CD*, *BC* páronként egyenlő; és egyenlő az *ABC* szög *BCD*-vel (I. 29.). Tehát az *AC* alap egyenlő *BD*-vel, és az *ABC* háromszög egyenlő a *BCD* háromszöggel (I. 4.).

A *BC* átló tehát felezi az *ABCD* paralelogrammát. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: I. 35–8., 41., 43., 45–6.; II. 1., 4., 7–10.; IV. 7–8.; VI. 4., 10.; X. 54. L.; XI. 24., 28–9., 39.; XII. 2., 7., 9.

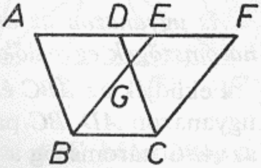
I. 35. Tétel

Az ugyanazon az alapon és ugyanazon párhuzamosok között fekvő paralelogrammák egyenlők egymással.

Feküdjék az *ABCD* és az *EBCF* paralelogramma ugyanazon a *BC* alapon és ugyanazon *AF*, *BC* párhuzamosok között. Azt állítom, hogy az *ABCD* paralelogramma egyenlő *EBCF*-fel.

Minthogy ugyanis *ABCD* paralelogramma, *AD* egyenlő *BC*-vel (I. 34.). Ugyanígy *EF* is egyenlő *BC*-vel, úgyhogy *AD* is egyenlő *EF*-fel

(1. Ax.); és *DE* közös*; a teljes *AE*** tehát egyenlő a teljes *DF*-fel (2. Ax.). De *AB* is egyenlő *DC*-vel (I. 34.), így e két-két (oldal), *AE*, *AB* és *DF*, *DC* páronként egyenlő; és az *FDC* külső szög egyenlő az *EAB* belső szöggel (I. 29.), tehát az *EB* alap egyenlő az *FC* alappal, és az *EAB* háromszög egyenlő az *FDC* háromszöggel (I. 4.). Vonjuk le a közös *DGE* (háromszöget); így a maradék *ABGD* trapéz egyenlő a maradék *EGCF* trapézzal (3. Ax.). Adjuk hozzájuk közös (tagnak) a *GBC* háromszöget; így a teljes *ABCD* paralelogramma egyenlő a teljes *EBCF* paralelogrammával (2. Ax.).



Az ugyanazon az alapon és ugyanazon párhuzamosok között fekvő paralelogrammák tehát egyenlők egymással. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: I. 36–7.; XI. 31.

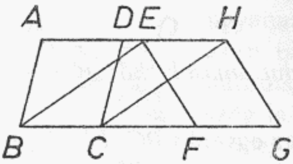
I. 36. Tétel

Az egyenlő alapokon és ugyanazon párhuzamosok között fekvő paralelogrammák egyenlők egymással.

Feküdjenek az *ABCD*, *EFGH* paralelogrammák az egyenlő *BC*, *FG* alapokon és ugyanazon *AH*, *BG* párhuzamosok között. Azt állítom, hogy az *ABCD* paralelogramma egyenlő az *EFGH* paralelogrammával.

Húzzuk meg ugyanis *BE*-t és *CH*-t.

És minthogy *BC* egyenlő *FG*-vel, *FG* pedig *EH*-val egyenlő (I. 34.), így *BC* is egyenlő *EH*-val (1. Ax.). De párhuzamosak is. És *EB* meg *HC* köti össze őket; az egyenlő és párhuzamos szakaszokat ugyanazon az oldalon összekötő szakaszok egyenlők és párhuzamosak (I. 33.) [tehát *BE* és *CH* is egyenlő és párhuzamos]. Tehát *EBCH* paralelogramma. És egyenlő *ABCD*-vel, ugyanis ugyanaz a *BC* egyenes az alapja és ugyanazon *BC*, *AH* párhuzamosok között fekszik, mint ez (I. 35.). Ugyanígy *EFGH* is egyenlő ugyanezzel az *EBCH* paralelogrammával (I. 35.), úgyhogy az *ABCD* paralelogramma is egyenlő *EFGH*-val (1. Ax.).



Az egyenlő alapokon és ugyanazon párhuzamosok között fekvő paralelogrammák tehát egyenlők egymással. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: I. 38.; II. 5–6., 8.; VI. 28–9.; XI. 25., 29.

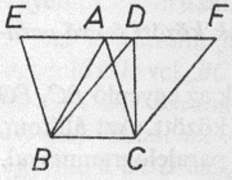
I. 37. Tétel

Az ugyanazon az alapon és ugyanazon párhuzamosok között fekvő háromszögek egyenlők egymással.

Feküdjék az *ABC* és a *DBC* háromszög ugyanazon a *BC* alapon és ugyanazon *AD*, *BC* párhuzamosok között. Azt állítom, hogy egyenlő az *ABC* háromszög a *DBC* háromszöggel.

Hosszabbítsuk meg *AD*-t mind a két oldalon, *E*-ig, illetve *F*-ig, és a *B* ponton át húzzuk meg a *CA*-val párhuzamos *BE* egyenest, *C*-n át pedig a *BD*-vel párhuzamos *CF*-et (I. 31.).

Tehát mind a két idom, *EBCA* és *DBCF* paralelogramma; és egyenlők, ugyanis ugyanazon a *BC* alapon fekszenek és ugyanazon *BC*, *EF* párhuzamosok között (I. 35.); és az *EBCA* paralelogrammának fele az *ABC* háromszög, az *AB* átló ugyanis felezi a paralelogrammát (I. 34.); a *DBCF* paralelogrammának pedig fele része a *DBC* háromszög, ugyanis a *DC* átló felezi ezt (a másik paralelogrammát). De egyenlőknek a fele részei egyenlők egymással (6. Ax.). Egyenlő tehát az *ABC* háromszög a *DBC* háromszöggel.



Az ugyanazon az alapon és ugyanazon párhuzamosok között fekvő háromszögek tehát egyenlők egymással. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: I. 39., 41.

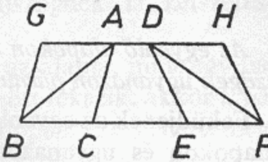
I. 38. Tétel

Az egyenlő alapokon és ugyanazon párhuzamosok között fekvő háromszögek egyenlők egymással.

Feküdjenek az *ABC*, *DEF* háromszögek az egyenlő *BC*, *EF* alapokon és ugyanazon *BF*, *AD* párhuzamosok között. Azt állítom, hogy az *ABC* háromszög egyenlő a *DEF* háromszöggel.

Hosszabbítsuk meg ugyanis *AD*-t mindkétoldalt, *G*-ig, illetve *H*-ig, és a *B* ponton át húzzunk egy *CA*-val párhuzamos *BG* egyenest,az *F*-en át pedig egy *DE*-vel párhuzamos *FH*-t (I. 31.).

Tehát *GBCA* és *DEFH* mind a ketten paralelogrammák; és *GBCA* egyenlő *DEFH*-val, ugyanis az egyenlő *BC*, *EF* alapokon és ugyanazon *BF*, *GH* párhuzamosok között fekszenek (I. 36.). És a *GBCA* paralelogrammának fele része az *ABC* háromszög, az *AB* átló ugyanis felezi (I. 34.); a *DEFH* paralelogrammának pedig fele része a *DEF* háromszög, ugyanis (ezt meg) a *DF* átló felezi (I. 34.); de egyenlőknek a fele részei egyenlők egymással (6. Ax.), egyenlő tehát az *ABC* háromszög a *DEF* háromszöggel.



Az egyenlő alapokon és ugyanazon párhuzamosok között fekvő háromszögek tehát egyenlők egymással. Éppen ezt kellett megmutatni.

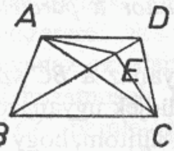
F.: I. 40., 42.; VI. 1–2.

I. 39. Tétel

Az ugyanazon az alapon és ugyanazon az oldalon fekvő egyenlő háromszögek ugyanazon párhuzamosok között is fekszenek.

Feküdjenek az egyenlő *ABC*, *DBC* háromszögek ugyanazon a *BC* alapon, és annak ugyanazon az oldalán. Azt állítom, hogy ugyanazon párhuzamosok között is fekszenek. Húzzuk meg ugyanis *AD*-t. Azt állítom, hogy *AD* párhuzamos *BC*-vel.

Ha ugyanis nem az, akkor húzzunk az *A* ponton át egy, a *BC* egyenessel párhuzamos *AE*-t (I. 31.), és húzzuk meg *EC*-t. Az *ABC* háromszög egyenlő tehát az *EBC* háromszöggel, mert ugyanazon a *BC* alapon fekszik, mint az, és ugyanazon párhuzamosok között (I. 37.). De az *ABC* háromszög egyenlő *DBC*-vel, tehát a *DBC* háromszög is egyenlő *EBC*-vel (1. Ax.), a nagyobb a kisebbel (8. Ax.); ez viszont nem lehetséges, tehát *AE* nem párhuzamos *BC*-vel. Hasonlóképpen mutathatnánk meg, hogy egyetlen másik egyenes sem (párhuzamos *BC*-vel), csak *AD*; *AD* tehát párhuzamos *BC*-vel.



Az ugyanazon az alapon és ugyanazon az oldalon fekvő egyenlő háromszögek tehát ugyanazon párhuzamosok között is fekszenek. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: VI. 2.

I. 40. Tétel

*Az egyenlő alapokon és ugyanazon az oldalon fekvő egyenlő háromszögek ugyanazon párhuzamosok között is fekszenek.**

Feküdjenek az egyenlő *ABC*, *CDE* háromszögek az egyenlő *BC*, *CE* alapokon és ugyanazon az oldalon. Azt állítom, hogy ugyanazon párhuzamosok között is fekszenek.

Húzzuk meg ugyanis *AD*-t. Azt állítom, hogy *AD* párhuzamos *BE*-vel.

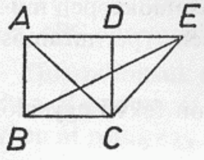
Ha ugyanis nem az, akkor húzzunk az *A*-n át egy *BE*-vel párhuzamos *AF*-et (I. 31.), és húzzuk meg *FE*-t. Az *ABC* háromszög egyenlő tehát az *FCE* háromszöggel, mert az egyenlő *BC*, *CE* alapokon fekszenek és ugyanazon *BE*, *AF* párhuzamosok között (I. 38.). De az *ABC* háromszög egyenlő a *DCE* háromszöggel, tehát a *DCE* háromszög is egyenlő az *FCE* háromszöggel (1. Ax.), a nagyobb a kisebbel (8. Ax.); ez viszont nem lehetséges, tehát *AF* nem párhuzamos *BE*-vel. Hasonlóképpen mutathatnánk meg, hogy egyetlen másik egyenes sem (párhuzamos *BE*-vel), kivéve *AD*-t; *AD* tehát párhuzamos *BE*-vel.

Az egyenlő alapokon és ugyanazon az oldalon fekvő egyenlő háromszögek tehát ugyanazon párhuzamosok között is fekszenek. Éppen ezt kellett megmutatni.

I. 41. Tétel

Ha egy paralelogrammának ugyanaz az alapja, mint egy háromszögnek, és ugyanazon párhuzamosok között fekszik, akkor a paralelogramma kétszerese a háromszögnek.

Legyen ugyanis az *ABCD* paralelogrammának ugyanaz a *BC* szakasz az alapja, mint az *EBC* háromszögnek, és feküdjék ugyanazon *BC*, *AE* párhuzamosok között. Azt állítom, hogy az *ABCD* paralelogramma kétszerese az *EBC* háromszögnek.



Húzzuk meg ugyanis *AC*-t.

Ekkor az *ABC* háromszög egyenlő az *EBC* háromszöggel, mert ugyanazon a *BC* alapon fekszik, mint amaz, és ugyanazon *BC*, *AE* párhuzamosok között (I. 37.). Azonban az *ABCD* paralelogramma kétszerese az *ABC* háromszögnek, ugyanis az *AC* átló felezi (a paralelogrammát) (I. 34.); úgyhogy az *ABCD* paralelogramma az *EBC* háromszögnek is kétszerese (5. és 1. Ax.).

Ha tehát egy paralelogrammának ugyanaz az alapja, mint egy háromszögnek, és ugyanazon párhuzamosok között fekszik, akkor a paralelogramma kétszerese a háromszögnek. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: I. 42., 47.; VI. 1.; X. 20. stb.; XII. 3.

I. 42. Tétel

Szerkesszünk adott háromszöggel egyenlő adott egyenes vonalú szögű paralelogrammát!

Legyen *ABC* az adott háromszög, δ pedig az adott egyenes vonalú szög. Az *ABC* háromszöggel egyenlő δ egyenes vonalú szögű paralelogrammát kell tehát szerkeszteni.

Legyen *E* a *BC* felezőpontja (I. 10.), és húzzuk meg *AE*-t, és szerkesszünk az *EC* egyenesre, a rajta levő *E* ponthoz egy δ-val egyenlő *CEF* szöget (I. 23.), és húzzunk *A*-n át egy *EC*-vel párhuzamos *AG*-t, *C*-n át pedig egy *EF*-fel párhuzamos *CG*-t (I. 31.); *FECG* tehát paralelogramma. És minthogy *BE* egyenlő *EC*-vel, az *ABE* háromszög is egyenlő az *AEC* háromszöggel, ugyanis az egyenlő *BE*, *EC* alapokon fekszenek, és ugyanazon *BC*, *AG* párhuzamosok között (I. 38.); kétszerese tehát az *ABC* háromszög az *AEC* háromszögnek. De az *FECG* paralelogramma is kétszerese az *AEC* háromszögnek, ugyanis ugyanaz az alapja, mint annak, és ugyanazon párhuzamosok között fekszik, mint az (I. 41.); egyenlő tehát az *FECG* paralelogramma az *ABC* háromszöggel (5. Ax.). És a *CEF* szöge egyenlő az adott δ-val.

Tehát az adott *ABC* háromszöggel egyenlő és δ-val egyenlő *CEF* szögű *FECG* paralelogrammát szerkesztettünk. Éppen ezt kellett megtenni.

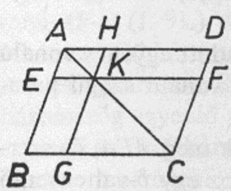
F.: I. 44–5.

I. 43. Tétel

Minden paralelogrammában az átló körülötti paralelogrammák paraplérómái egyenlők egymással.

Legyen *ABCD* egy paralelogramma, *AC* pedig egyik átlója, és *AC* körül feküdjenek az *EH*, *FG** paralelogrammák, és legyenek *BK*, *KD* az úgynevezett „paraplérómák"**. Azt állítom, hogy a *BK* parapléróma egyenlő a *KD* paraplérómával.

Minthogy ugyanis *ABCD* paralelogramma, *AC* pedig átlója, az *ABC* háromszög egyenlő az *ACD* háromszöggel (I. 34.). Hasonlóképp, minthogy *EH* is paralelogramma, *AK* pedig átlója, az *AEK* háromszög egyenlő az *AHK* háromszöggel (I. 34.). Ugyanígy a *KFC* háromszög is egyenlő a *KGC* háromszöggel. Minthogy tehát az *AEK* háromszög az *AHK* háromszöggel egyenlő, *KFC* pedig *KGC*-vel, az *AEK* meg a *KGC* háromszög összege egyenlő az *AHK* meg a *KFC* háromszög összegével (2. Ax.). De a teljes *ABC* háromszög is egyenlő a teljes *ADC* háromszöggel; a maradék *BK* parapléróma tehát egyenlő a maradék *KD* paraplérómával (3. Ax.).



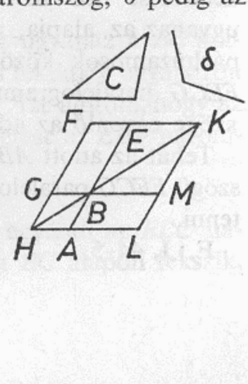
Tehát minden párhuzamos vonalú idomban az átló körülötti paralelogrammák paraplérómái egyenlők egymással. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: I. 44.; II. 4–8.; VI. 27–9.; X. 54., 91.; XIII. 1–5.

I. 44. Tétel

Illesszünk adott szakaszhoz adott háromszöggel egyenlő, adott egyenes vonalú szögű paralelogrammát!*

Legyen *AB* az adott szakasz, *C* az adott háromszög, δ pedig az adott egyenes vonalú szög. Az adott *AB* szakaszhoz kell tehát az adott *C* háromszöggel egyenlő és δ-val egyenlő szögű paralelogrammát hozzáilleszteni.



Szerkesszünk egy, a *C* háromszöggel egyenlő és a δ-val egyenlő *EBG* szögű *BEFG* paralelogrammát (I. 42.), és úgy helyezzük el, hogy *BE* ugyanazon az egyenesen legyen, mint *AB*,** és hosszabbítsuk meg *FG*-t *H*-ig, és *A*-n át a *BG*, *EF* egyenesekkel párhuzamosan húzzuk *AH*-t (I. 31.), és húzzuk meg *HB*-t. És mint hogy a párhuzamos *AH*-t és *EF*-et metszette át *HF*, így az *AHF*, *HFE* szögek összege két derékszöggel egyenlő (I. 29.). Tehát *BHG* és *GFE* ($\equiv$ *HFE*) összege kisebb, mint két derékszög (8. Ax.); de az (együtt) két derékszögnél kisebb szögek irányába végtelenül meghoszabbított egyenesek találkoznak (5. P.), tehát *HB* és *EF* meghosszabbítva találkozni fognak. Legyenek meghosszabbítva, és találkozzanak *K*-ban, és a *K* ponton át az *EA*, *FH* egyenesekkel párhuzamosan húzzuk *KL*-t (I. 30., 31.), és hosszabbítsuk meg *HA*-t és *BG*-t az *L*, illetve *M* pontig.

HLKF tehát paralelogramma, *HK* pedig egy átlója, és *AG*, *ME* a *HK* melletti paralelogrammák, *LB* és *BF* pedig az úgynevezett paraplérómák; *LB* egyenlő tehát *BF*-fel (I. 43.). De *BF* a *C* háromszöggel egyenlő, tehát *LB* is egyenlő *C*-vel (1. Ax.). És minthogy a *GBE* szög egyenlő *ABM*-mel (I. 15.), másrészt a *GBE* szög δ-val egyenlő, az *ABM* szög is egyenlő a δ szöggel (1. Ax.).

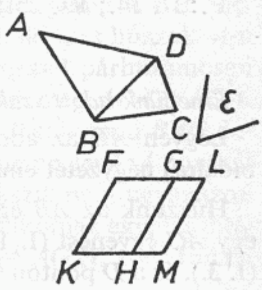
Tehát az adott *AB* szakaszhoz az adott *C* háromszöggel egyenlő és δ szöggel egyenlő *ABM* szögű paralelogrammát illesztettük. Éppen ezt kellett megtenni.

F.: I. 45.; VI. 25.; X. 20., 22–3., 25–6., 38., 41., 44., stb.

I. 45. Tétel

Szerkesszünk adott egyenes vonalú (alakzattal) (I. 19. D.) *egyenlő és adott egyenes vonalú szögű paralelogrammát!*

Legyen *ABCD* az adott egyenes vonalú (alakzat),* ε pedig az adott egyenes vonalú szög. Tehát az *ABCD* egyenes vonalú (alakzattal) egyenlő és adott ε szögű paralelogrammát kell szerkeszteni.



Húzzuk meg *DB*-t, és szerkesszünk egy az *ABD* háromszöggel egyenlő és ε-nal egyenlő *HKF* szögű paralelogrammát (I. 42.), és illesszünk a *GH* egyeneshez egy, a *DBC* háromszöggel egyenlő és ε-nal egyenlő *GHM* szögű *GM* paralelogrammát (I. 44.).

És minthogy az ε szög a *HKF*, *GHM* szögek mindegyikével egyenlő, a *HKF* szög is egyenlő a *GHM* szöggel (1. Ax.). Adjuk hozzájuk közös (tagnak) *KHG*-t, így az *FKH*, *KHG* szögek (együtt) a *KHG*, *GHM* szögek összegével egyenlők (2. Ax.). Azonban *FKH* és *KHG* (együtt) két derékszöggel egyenlő (I. 29.), tehát *KHG* és *GHM* is (együtt) két derékszöggel egyenlő (1. Ax.). Így a *GH* egyenesen levő *H* pontnál két egyenes, *KH* és *HM* fekszik nem ugyanazon az oldalon, és két derékszöggel egyenlő szögeket alkotnak egymás mellett, tehát *KH* ugyanazon az egyenesen van, mint *HM* (I. 14.); és minthogy a párhuzamos *KM*-et és *FG*-t metszi a *GH* egyenes, a *GHM*, *HGF* váltószögek egyenlők egymással (I. 29.). Adjuk hozzájuk közös (tagnak) a *HGL* szöget, így az *MHG*, *HGL* szögek (együtt) a *HGF*, *HGL* szögekkel egyenlők (2. Ax.). Azonban az *MHG*, *HGL* szögek (együtt) két derékszöggel egyenlők (I. 29.), tehát *HGF* meg *HGL* is (együtt) két derékszöggel egyenlő (1. Ax.); *FG* tehát ugyanazon az egyenesen van, mint *GL* (I. 14.). És minthogy *FK* egyenlő és párhuzamos is *GH*-val (I. 34.), *HG* viszont *ML*-lel (egyenlő és párhuzamos is) (I. 34.), így *FK* is *ML*-lel egyenlő és párhuzamos is (1. Ax., I. 30.); s a *KM*, *FL* szakaszok kötik össze őket, *KM* és *FL* is egyenlők és párhuzamosak tehát (I. 33.), *KFLM* tehát paralelogramma. És minthogy az *ABD* háromszög egyenlő az *FH* paralelogrammával, *DBC* pedig *GM*-mel, így a teljes *ABCD* egyenes vonalú (alakzat) egyenlő a teljes *KFLM* paralelogrammával (2. Ax.).

Tehát az adott *ABCD* egyenes vonalú (alakzattal) egyenlő és adott ε-nal egyenlő *FKM* szögű *KFLM* paralelogrammát szerkesztettünk. Éppen ezt kellett megtenni.

F.: II. 14.; VI. 25.; X. 20., 41., 47., 78., 81., 84.

I. 46. Tétel

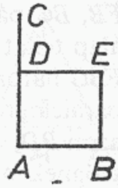
Emeljünk adott szakaszra (mint oldalra) négyzetet!

Legyen *AB* az adott szakasz. Az *AB* szakaszra kell tehát (mint oldalra) négyzetet emelni.

Húzzunk az *AB* egyeneshez derékszögben a rajta levő *A* pontból egy *AC* egyenest (I. 11.), és mérjünk föl rá egy *AB*-vel egyenlő *AD*-t (I. 3.), és a *D* ponton át húzzunk egy *AB*-vel párhuzamos *DE* egyenest

(I. 31.), a *B* ponton át pedig húzzunk egy *AD*-vel párhuzamos *BE* egyenest (I. 31.).

ADEB tehát paralelogramma; *AB* egyenlő tehát *DE*-vel, *AD* pedig *BE*-vel (I. 34.). De *AB* egyenlő *AD*-vel, e négy szakasz tehát, *AB*, *AD*, *DE* és *BE* egyenlő egymással (1. Ax.); az *ADEB* paralelogramma tehát egyenlő oldalú. Azt állítom, hogy derékszögű is. Minthogy ugyanis a párhuzamos *AB*-t és *DE*-t metszi az *AD* egyenes, így a *BAD*, *ADE* szögek (együtt) két derékszöggel egyenlők (I. 29.). De *BAD* derékszög; derékszög tehát *ADE* is (3. Ax.). A párhuzamos vonalú idomok szemközti oldalai és szögei viszont egyenlők egymással (I. 34.); derékszög tehát mind a két szemközti *ABE*, *BED* szög is; *ADEB* tehát derékszögű. De megmutattuk azt is, hogy egyenlő oldalú.



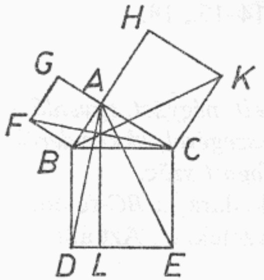
Négyzet tehát (I. 22. D.); és az *AB* szakaszra emeltük (mint oldalra). Éppen ezt kellett megtenni.

F.: I. 47.; II. 2–8., 11., 14.; VI. 30.; X. 19–21., 22. L., stb.

I. 47. Tétel

A derékszögű háromszögekben a derékszöggel szemközti oldalra emelt négyzet egyenlő a derékszöget közrefogó oldalakra emelt négyzetek összegével.

Legyen *ABC* egy derékszögű háromszög, és benne *BAC* a derékszög. Azt állítom, hogy a *BC* oldalú négyzet egyenlő a *BA* meg az *AC* oldalú négyzet összegével.



Legyen ugyanis *BDEC* a *BC* oldallal szerkesztett négyzet, *GB*, *HC* pedig a *BA*, *AC* oldalra emelt négyzet (I. 46.), és húzzuk *A*-n át a *BD* és a *CE* egyenessel párhuzamosan *AL*-t (I. 30., 31.), és húzzuk meg *AD*-t és *FC*-t.

Minthogy pedig mind *BAC*, mind *BAG* derékszög, így a *BA* egyenesen levő *A* pontnál két *AC*, *AG* egyenes fekszik nem ugyanazon az oldalon, és két derékszöggel egyenlő szögeket alkotnak egymás mellett; tehát *AC* ugyanazon az egyenesen van, mint *AG* (I. 14.). Éppen ezért *BA* is ugyanazon az egyenesen van, mint *AH*. Minthogy pedig a *DBC* szög egyenlő *FBA*-val – derékszög ugyanis mind a kettő (4. P.) –, adjuk hozzájuk közös (tagnak) az *ABC* szöget; így a teljes *DBA* szög egyenlő a teljes *FBC*-vel (2. Ax.). És minthogy *DB* egyenlő *BC*-vel, *FB* pedig *BA*-val, (I. 22. D.), e két-két (oldal), *DB*, *BA* és *FB*, *BC* páronként egyenlő; és a *DBA* szög egyenlő *FBC*-vel; az *AD* alap tehát egyenlő az *FC* alappal, és az *ABD* háromszög egyenlő az *FBC* háromszöggel (I. 4.); és az *ABD* háromszögnek kétszerese a *BL* paralelogramma, mert ugyanaz a *BD* szakasz az alapjuk és ugyanazon *BD*, *AL* párhuzamosok között fekszenek (I. 41.); az *FBC* háromszögnek pedig kétszerese a *GB* négyzet, mert ismét ugyanaz az *FB* szakasz az alapjuk és ugyanazon *FB*, *GC* párhuzamosok között fekszenek (I. 41.). Egyenlőknek a kétszeresei pedig egyenlők egymással (5. Ax.); egyenlő tehát a *BL* paralelogramma a *GB* négyzettel. Hasonlóképp mutatható meg *AE*-t és *BK*-t meghúzva az is, hogy a *CL* paralelogramma egyenlő a *HC* négyzettel. A teljes *BDEC* négyzet tehát egyenlő e két négyzettel, *GB*-vel meg *HC*-vel (2. Ax.). És a *BDEC* négyzetet a *BC*, a *GB*, *HC* négyzeteket pedig a *BA*, *AC* oldalra emeltük. A *BC* oldalú négyzet tehát egyenlő a *BA* meg az *AC* oldalú négyzetekkel.

A derékszögű háromszögekben tehát a derékszöggel szemközti oldalra emelt négyzet egyenlő a derékszöget közrefogó oldalakra emelt négyzetek összegével. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: I. 48.; II. 9–14.; III. 14., 35–36.; IV. 12.; X. 14. L., 29., 30., 33–35.; XI. 23., 23. L., 35.; XII. 17.; XIII. 12, 14–15., 18.

I. 48. Tétel

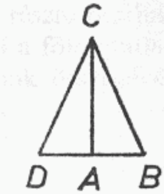
Ha egy háromszögben az egyik oldalra emelt négyzet egyenlő a háromszög másik két oldalára emelt négyzetek összegével, akkor derékszög a háromszög másik két oldala által közrefogott szög.

Legyen ugyanis az *ABC* háromszög egyik oldalára, a *BC*-re emelt négyzet egyenlő a *BA*, *AC* oldalakra emelt négyzetekkel. Azt állítom, hogy *BAC* derékszög.

Húzzuk ugyanis az *A* pontból az *AC* egyenessel derékszögben *AD*-t (I. 11.), és mérjük föl rá a *BA*-val egyenlő *AD*-t (I. 3.), és húzzuk meg *DC*-t.

Minthogy *AB*-vel *AD* egyenlő, az *AD* oldalú négyzet is egyenlő az

AB oldalú négyzettel. Adjuk hozzájuk közös (tagnak) az *AC* oldalú négyzetet, így az *AD*, *AC* oldalú négyzetek (együtt) egyenlők a *BA*, *AC* oldalú négyzetekkel (2. Ax.). Azonban az *AD* meg az *AC* oldalú négyzettel egyenlő a *DC* oldalú, *DAC* ugyanis derékszög (I. 47.), a *BA* meg az *AC* oldalú négyzettel pedig a feltétel szerint egyenlő a *BC* oldalú; tehát a *DC* oldalú négyzet egyenlő a *BC* oldalúval (1. Ax.), úgyhogy a *DC* oldal is egyenlő *BC*-vel. És minthogy *AD* egyenlő *BA*-val, *AC* pedig közös (oldal), e két-két (oldal), *AD*, *AC* és *BA*, *AC* egyenlő; és a *DC* alap egyenlő a *BC* alappal; a *DAC* szög tehát egyenlő a *BAC* szöggel (I. 8.). *DAC* viszont derékszög, derékszög tehát *BAC* is.



Ha tehát egy háromszögben az egyik oldalra emelt négyzet egyenlő a háromszög másik két oldalára emelt négyzetek összegével, akkor derékszög a háromszög másik két oldala által közrefogott szög. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: XI. 35.

Második könyv

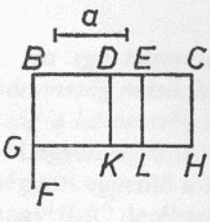
Definíciók

1. A derékszögű paralelogrammákról (azaz a téglalapokról) azt mondjuk, hogy a derékszöget közrefogó két (oldal) szakasz közrefogja őket.
2. Nevezzük gnómónnak minden paralelogrammában az átló körülötti bármelyik paralelogrammát a két paraplérómával együtt.*

II. 1. Tétel

*Ha van két szakasz, és az egyiküket valahány részre osztjuk, akkor a két szakasz által közrefogott téglalap egyenlő a fölosztatlan szakasz és az egyes részek által közrefogott téglalapok összegével.**

Legyen *a* és *BC* két szakasz, és osszuk föl *BC*-t találomra a *D* és *E* pontokban. Azt állítom, hogy az *a* és *BC* által közrefogott téglalap egyenlő az *a* és *BD* meg az *a* és *DE* meg az *a* és *EC* által közrefogott téglalapokkal.



Húzzuk a *B* pontból *BC*-vel derékszögben *BF*-et (I. 11.), és mérjük rá az *a*-val egyenlő *BG*-t (I. 3.), és húzzuk *G*-n át *BC*-vel párhuzamosan a *GH*, *D*-n, *E*-n és *C*-n át pedig *BG*-vel párhuzamosan a *DK*, *EL* és *CH* egyeneseket (I. 31.).

Egyenlő hát *BH* a *BK*-val, *DL*-lel meg *EH*-val. És *BH* az *a* és *BC* közötti téglalap, mert *BG* és *BC* fogja közre, *BG* pedig egyenlő *a*-val; s *BK* az *a* és *BD* közötti téglalap, mert *BG* és *BD* fogja közre, *BG* pedig egyenlő a-val, s DL az a és DE közötti téglalap, mert DK, azaz BG, egyenlő a-val (I. 34.). És végül EH hasonlóképp az a és EC közötti téglalap, az a és BC közötti téglalap tehát egyenlő az a és BD meg az a és DE meg az a és EC közötti téglalapokkal.

Ha tehát van két szakasz és az egyiküket valahány részre osztjuk, akkor a két szakasz által közrefogott téglalap egyenlő a fölosztatlan szakasz és az egyes részek által közrefogott téglalapok összegével. Éppen ezt kellett megmutatni.

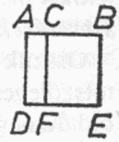
II. 2. Tétel

*Ha egy egyenesszakaszt tetszőlegesen kettéosztunk, akkor a teljes szakasz és az egyes részek által közrefogott téglalapok (együtt) egyenlők a teljes szakaszra emelt négyzettel.**

Osszuk ugyanis ketté az AB szakaszt a tetszőleges C pontban. Azt állítom, hogy az AB és BC által közrefogott téglalap meg az AB és AC által közrefogott téglalap (együtt) egyenlő az AB-re emelt négyzettel.

Legyen ugyanis $ADEB$ az AB oldalú négyzet (I. 46.), és húzzuk a C ponton át az AD és a BE egyenessel párhuzamosan CF-et (I. 31. és 30.).

Egyenlő hát AE az AF-fel meg CE-vel. És AE az AB oldalú négyzet, AF az AB és AC által közrefogott téglalap, mert AD és AC fogja közre, AD pedig egyenlő AB-vel, s CE az AB és BC közötti téglalap, mert BE egyenlő AB-vel. Az AB és AC meg az AB és BC közötti téglalapok tehát (együtt) egyenlők az AB oldalú négyzettel.



Ha tehát egy egyenesszakaszt tetszőlegesen kettéosztunk, akkor a teljes szakasz és az egyes részek által közrefogott téglalapok (együtt) egyenlők a teljes szakaszra emelt négyzettel. Éppen ezt kellett megmutatni.

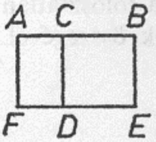
F.: XIII. 8. Függelék, 10.

II. 3. Tétel

*Ha egy egyenesszakaszt tetszőlegesen kettéosztunk, akkor a teljes szakasz meg az egyik rész által közrefogott téglalap egyenlő a két rész által közrefogott téglalap és az említett részre emelt négyzet összegével.**

Osszuk ugyanis az *AB* szakaszt ketté a tetszőleges *C* pontban. Azt állítom, hogy az *AB* és *BC* által közrefogott téglalap egyenlő az *AC* és *BC* által közrefogott téglalap meg a *BC* oldalú négyzet összegével.

Legyen ugyanis *CDEB* a *BC* oldalú négyzet (I. 46.), és hosszabbítsuk meg *ED*-t *F*-ig, és húzzuk *A*-n át *AF*-et a *DC* és a *BE* egyenessel párhuzamosan (I. 31. és 30.).



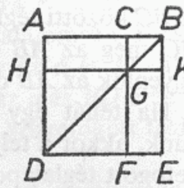
Egyenlő hát *AE* az *AD*-vel és *CE*-vel, és *AE* az *AB* és *BC* által közrefogott téglalap, mert *AB* és *BE* fogja közre, *BE* pedig egyenlő *BC*-vel; s *AD* az *AC* és *BC* közötti téglalap, mert *DC* egyenlő *BC*-vel; *DB* pedig a *BC* oldalú négyzet. Az *AB* és *BC* által közrefogott téglalap tehát egyenlő az *AC* és *BC* által közrefogott téglalap meg a *BC* oldalú négyzet összegével.

Ha tehát egy egyenesszakaszt tetszőlegesen kettéosztunk, akkor a teljes szakasz meg az egyik rész által közrefogott téglalap egyenlő a két rész által közrefogott téglalap és az említett részre emelt négyzet összegével. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: IX. 15.

II. 4. Tétel

*Ha egy egyenesszakaszt tetszőlegesen kettéosztunk, akkor a teljes szakaszra emelt négyzet egyenlő az egyes részekkel szerkesztett négyzeteknek meg a két rész által közrefogott téglalap kétszeresének az összegével.**



Osszuk ugyanis az *AB* egyenesszakaszt ketté a tetszőleges *C* pontban. Azt állítom, hogy az *AB* oldalú négyzet egyenlő az *AC* meg *CB* oldalú négyzetekkel meg az *AC* és *CB* által közrefogott téglalap kétszeresével.

Legyen ugyanis *ADEB* az *AB* oldalra emelt négyzet (I. 46.), és húzzuk meg *BD*-t, és húzzuk *C*-n át az *AD* és az *EB* egyenessel párhuzamosan *CF*-et, *G*-n át pedig az *AB* és a *DE* egyenessel párhuzamosan *HK*-t (I. 31. és 30.).

És minthogy párhuzamos *CF* az *AD*-vel, és *BD* metszi őket, a *CGB* külső szög egyenlő a szemközti *ADB* belső szöggel (I. 29.). Azonban az *ADB* szög *ABD*-vel egyenlő, minthogy az *AB* oldal is egyenlő *AD*-

vel (I. 5.); a *CGB* szög is egyenlő tehát *GBC* (= *ABD*)-vel (1. Ax.), úgyhogy a *CB* oldal is egyenlő a *CG* oldallal (I. 6.). De *CB* *GK*-val egyenlő, *CG* pedig *KB*-vel (I. 34.), *GK* is egyenlő tehát *KB*-vel (1. Ax.); *CGKB* tehát egyenlő oldalú. Azt állítom, hogy derékszögű is. Minthogy ugyanis *CG* párhuzamos *KB*-vel [és a *CB* egyenes metszi őket], a *KBC* és a *GCB* szög (együtt) két derékszöggel egyenlő (I. 29.). *KBC* viszont derékszög, derékszög tehát *BCG* is, úgyhogy a szemközti *CGK*, *GKB* szögek is derékszögek (I. 34.). *CGKB* tehát derékszögű. De megmutattuk azt is, hogy egyenlő oldalú; négyzet tehát, mégpedig a *CB* oldalú. Ugyanezért *HF* is négyzet, és oldala *HG*, azaz *AC* (I. 34.). *HF* és *CK* tehát az *AC* és *CB* oldalú négyzetek. Minthogy pedig *AG* egyenlő *GE*-vel (I. 43.), és *AG* az *AC* és *CB* közötti téglalap – egyenlő ugyanis *GC* a *CB*-vel –, így *GE* egyenlő az *AC* és *CB* közötti téglalappal. *AG* és *GE* tehát (együtt) egyenlők az *AC* és *CB* közötti téglalap kétszeresével. Viszont *HF* és *CK* az *AC*, illetve *CB* oldalú négyzetek, tehát e négy idom, *HF*, *CK*, *AG* és *GE* (együtt) egyenlő az *AC* meg *CB* oldalú négyzetekkel meg az *AC* és *CB* által közrefogott téglalap kétszeresével. Azonban *HF*, *CK*, *AG* és *GE* (együtt) a teljes *ADEB*, s ez az *AB* oldalú négyzet. Az *AB* oldalú négyzet tehát egyenlő az *AC* meg *CB* oldalú négyzetekkel meg az *AC* és *CB* által közrefogott téglalap kétszeresével.

Ha tehát egy egyenesszakaszt tetszőlegesen kettéosztunk, akkor a teljes szakaszra emelt négyzet egyenlő az egyes részekkel szerkesztett négyzeteknek meg a két rész által közrefogott téglalap kétszeresének az összegével. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: II. 12.; IX. 15.; X. 26., 36–39., 41–42., 44., 47., 60.; XIII. 8. Függelék, 2–3.

[*Következmény*

Ebből már nyilvánvaló, hogy a négyzetekben az átló körülötti paralelogrammák négyzetek.]

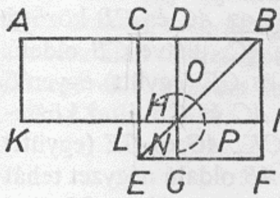
II. 5. Tétel

*Ha egy egyenesszakaszt egyenlő és nem egyenlő részekre osztunk, akkor a teljes szakasz nem egyenlő részei által közrefogott téglalap meg az osztópontok közötti szakaszra emelt négyzet együtt egyenlő a szakasz felére emelt négyzettel.**

Osszunk ugyanis valamely *AB* szakaszt ketté egyenlő részekre a *C* és nem egyenlőkre a *D* pontban. Azt állítom, hogy az *AD* és *DB* által közrefogott téglalap meg a *CD* oldalú négyzet együtt egyenlő a *CB* oldalú négyzettel.

Legyen ugyanis *CEFB* a *CB* oldallal rajzolt négyzet (I. 46.), és húzzuk meg *BE*-t, és húzzuk *D*-n át a *CE* és a *BF* egyenessel párhuzamosan *DG*-t, *H*-n át pedig az *AB* és az *EF* egyenessel ismét párhuzamosan *KM*-et, és végül húzzuk *A*-n át a *CL* és a *BM* egyenessel párhuzamosan *AK*-t (I. 30. és 31.).

Minthogy egyenlő a *CH* parapléróma a *HF* paraplérómával (I. 43.), adjuk hozzájuk közös (tagnak) *DM*-et, így a teljes *CM* egyenlő a teljes *DF*-fel (2. Ax.). *CM* azonban egyenlő *AL*-lel, mert *AC* is egyenlő *CB*-vel (I. 36.), *AL* is egyenlő tehát *DF*-fel (1. Ax.). Adjuk hozzájuk közös (tagnak) *CH*-t, így a teljes *AH* egyenlő az *NOP* gnómónnal (2. Ax.). *AH* azonban az *AD* és *DB* közötti téglalap, mert *DH* egyenlő *DB*-vel; az *NOP* gnómón is egyenlő tehát az *AD* és *DB* közötti téglalappal (1. Ax.). Adjuk hozzájuk közös (tagnak) a *CD* oldalú négyzettel egyenlő *LG*-t, így az *NOP* gnómón és *LG* (együtt) egyenlő az *AD* és *DB* által közrefogott téglalappal meg a *CD* oldalú négyzettel. Azonban az *NOP* gnómón és *LG* (együtt) a teljes *CEFB* négyzet, s ennek oldala *CB*. Az *AD* és *DB* által közrefogott téglalap meg a *CD* oldalú négyzet tehát együtt egyenlő a *CB* oldalú négyzettel.



Ha tehát egy egyenesszakaszt egyenlő és nem egyenlő részekre osztunk, akkor a teljes szakasz nem egyenlő részei által közrefogott téglalap meg az osztópontok közötti szakaszra emelt négyzet együtt egyenlő a vonal felére emelt négyzettel. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: II. 14.; III. 35.; X. 17., 42. L., 60. L.

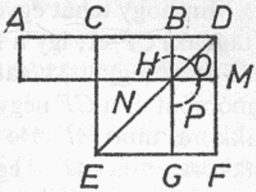
II. 6. Tétel

Ha egy egyenesszakaszt megfelezünk, és egy egyenesben hozzáadunk valamely más szakaszt, akkor a teljes szakasz meg a hozzáadandó összege és a hozzáadandó által közrefogott téglalap meg a szakasz felére *emelt négyzet együtt egyenlő a vonal feléből és a hozzáadandóból összeálló szakaszra emelt négyzettel.**

Felezzünk meg ugyanis valamely *AB* szakaszt a *C* pontban (I. 10.), és adjunk hozzá vele egy egyenesben valamely *BD* szakaszt. Azt állítom, hogy az *AD* és *DB* által közrefogott téglalap meg a *CB* oldalú négyzet együtt egyenlő a *CD* oldalú négyzettel.

Legyen ugyanis *CEFD* a *CD* oldallal szerkesztett négyzet (I. 46.), és húzzuk meg *DE*-t, és húzzuk a *B* ponton át az *EC* és a *DF* egyenessel párhuzamosan *BG*-t, a *H* ponton át pedig az *AB* és az *EF* egyenessel párhuzamosan *KM*-et, és végül húzzuk *A*-n át a *CL* és a *DM* egyenessel párhuzamosan *AK*-t (I. 31. és 30.).

Minthogy tehát *AC* egyenlő *CB*-vel, *AL* is egyenlő *CH*-val (I. 36.). *CH* azonban egyenlő *HF*-fel (I. 43), *AL* is egyenlő tehát *HF*-fel (1. Ax.). Adjuk hozzájuk közös (tagnak) *CM*-et, így a teljes *AM* egyenlő az *NOP* gnómónnal. *AM* azonban az *AD* és *DB* közötti téglalap, mert *DM* egyenlő *DB*-vel; az *NOP* gnómón is egyenlő tehát az *AD* és *DB* által közrefogott téglalappal. Adjuk hozzájuk közös (tagnak) a *CB* oldalú négyzettel egyenlő *LG*-t, így az *AD* és *DB* által közrefogott téglalap meg a *CB* oldalú négyzet együtt egyenlő az *NOP* gnómónnal és *LG*-vel (2. Ax.). Az *NOP* gnómón és *LG* viszont (együtt) a teljes *CEFD* négyzet, s ennek oldala *CD*. Az *AD* és *DB* által közrefogott téglalap meg a *CB* oldalú négyzet együtt egyenlő a *CD* oldalú négyzettel.



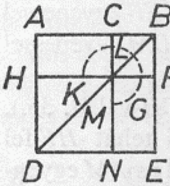
Ha tehát egy egyenesszakaszt megfelezünk, és egy egyenesben hozzáadunk valamely más szakaszt, akkor a teljes szakasz meg a hozzáadandó összege és a hozzáadandó által közrefogott téglalap meg a vonal felére emelt négyzet együtt egyenlő a vonal feléből és a hozzáadandóból összeálló szakaszra emelt négyzettel. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: II. 11.; III. 36.; X. 29. 1–2. L.

II. 7. Tétel

*Ha egy egyenesszakaszt tetszőlegesen kettéosztunk, akkor a teljes szakaszra és az egyik részre emelt két négyzet együttvéve egyenlő a teljes szakasz és az említett része által közrefogott téglalap kétszeresének és a másik részre emelt négyzetnek az összegével.**

Osszunk ugyanis valamely *AB* szakaszt ketté a tetszőleges *C* pontban. Azt állítom, hogy az *AB* és *BC* oldalú négyzet (együtt) egyenlő az *AB* és *BC* által közrefogott téglalap kétszeresének és a *CA* oldalú négyzetnek az összegével.



Legyen ugyanis *ADEB* az *AB* oldallal rajzolt négyzet (I. 46.), és rajzoljuk meg a szokott ábrát (mint II. 4–6.-ban, azaz húzzuk meg a *BD* átlót és *C*-n át az *AD*-vel és *BE*-vel párhuzamos *CN*-et, *H*-n át pedig az *AB*-vel és *DE*-vel párhuzamos *HF*-et (I. 31., 30. és 34.).

Minthogy tehát egyenlő *AG* a *GE*-vel (I. 43.), adjuk hozzájuk közös (tagnak) *CF*-et; így a teljes *AF* egyenlő a teljes *CE*-vel (2. Ax.); *AF* és *CE* tehát (együtt) kétakkora, mint *AF*. *AF* és *CE* viszont kiadja a *KLM* gnómónt és a *CF* négyzetet, a *KLM* gnómón és *CF* tehát (együtt) kétakkora, mint *AF*. De az *AB* és *BC* közötti téglalap kétszerese is kétakkora, mint *AF* – egyenlő ugyanis *BF* a *BC*-vel –, a *KLM* gnómón és a *CF* négyzet tehát egyenlő az *AB* és *BC* közötti téglalap kétszeresével. Adjuk hozzájuk közös (tagnak) *DG*-t – ez az *AC* oldalú négyzet –, így a *KLM* gnómón és a *BG*, *DG* négyzetek (együtt) egyenlők az *AB* és *BC* által közrefogott téglalap kétszeresének és az *AC* oldalú négyzetnek az összegével. A *KLM* gnómón és a *BG*, *DG* négyzetek viszont kiadják a teljes *ADEB*-t és *CF*-et, s ezek az *AB* és *BC* oldalú négyzetek. Az *AB* és *BC* oldalú négyzetek tehát (együtt) egyenlők az *AB* és *BC* által közrefogott téglalap kétszeresének és a *CA* oldalú négyzetnek az összegével.

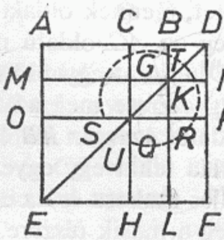
Ha tehát egy egyenesszakaszt tetszőlegesen kettéosztunk, akkor a teljes szakaszra és az egyik részére emelt két négyzet együttvéve egyenlő a teljes szakasz és az említett része által közrefogott téglalap kétszeresének és a másik részre emelt négyzetnek az összegével. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: II. 13.; X. 73–84., 97–102.

II. 8. Tétel

*Ha egy egyenesszakaszt tetszőlegesen kettéosztunk, akkor a teljes szakasz és az egyik rész által közrefogott téglalap négyszerese meg a másik részére emelt négyzet együtt egyenlő a teljes szakasz és az előbb említett rész összegére emelt négyzettel.**

Osszunk ugyanis valamely *AB* szakaszt ketté a tetszőleges *C* pontban. Azt állítom, hogy az *AB* és *BC* által közrefogott téglalap négyszerese meg az *AC* oldalú négyzet együtt egyenlő az *AB* és *BC* összegére emelt négyzettel.



Legyen ugyanis *BD* [az *AB*] egyenes menti meghosszabbítása, és mérjük föl a *BC*-vel egyenlő *BD*-t (I. 3.), és legyen *AEFD* az *AD*-re emelt négyzet (I. 46.), és vázoljuk fel megkettőzve a szokott ábrát (azaz húzzuk meg a *DE* átlót és *C*-n, illetve *B*-n át az *AE*-vel és *DF*-fel párhuzamos *CH*-t, illetve *BL*-t, *K*-n, illetve *Q*-n át pedig az *AD*-vel és *EF*-fel párhuzamos *MN*-et és *OP*-t (I. 31. és 30.).

Minthogy tehát egyenlő *BC* a *BD*-vel, *BC* viszont *GK*-val egyenlő, *BD* pedig *KN*-nel (I. 34.), így *GK* egyenlő *KN*-nel (1. Ax.). Ugyanezért *QR* is egyenlő *RP*-vel. S minthogy egyenlő *BC* a *BD*-vel, *GK* pedig *KN*-nel, így *CK* is egyenlő *KD*-vel, *GR* pedig *RN*-nel (I. 36.). *CK* viszont *RN*-nel egyenlő – paraplérómái ugyanis a *CP* paralelogrammának (I. 43.) –, *KD* is egyenlő tehát *GR*-rel. E négy (idom) tehát, *KD*, *CK*, *GR* és *RN* egyenlő egymással. E négy tehát (együtt) négyakkora, mint *CK*. Ismét, minthogy egyenlő *BC* a *BD*-vel, *BD* viszont *BK*-val, azaz *CG*-vel egyenlő, *BC* pedig *GK*-val, azaz *GQ*-val egyenlő, így *CG* is egyenlő *GQ*-val. S minthogy egyenlő *CG* a *GQ*-val, *QR* pedig *RP*-vel, szintén egyenlő *AG* az *MQ*-val, *QL* pedig *RF*-fel (I. 36.). *MQ* viszont *QL*-lel egyenlő – paraplérómái ugyanis az *ML* paralelogrammának (I. 43.) –, *AG* is egyenlő tehát *RF*-fel. E négy (idom) tehát, *AG*, *MQ*, *QL* és *RF* egyenlő egymással. E négy tehát (együtt) négyakkora, mint *AG*. De megmutattuk azt is, hogy e négy, *CK*, *KD*, *GR* és *RN* négyakkora, mint *CK*. E nyolc (idom) tehát, amely kiadja az *STU* gnómónt, négyakkora, mint *AK*. S minthogy *AK* az *AB* és *BD* közötti téglalap – egyenlő ugyanis *BK* a *BD*-vel –, így az *AB* és *BD* közötti téglalap négyszerese négyakkora, mint *AK*. De megmutattuk azt is, hogy az *STU* gnómón négyakkora, mint *AK*. Az *AB* és *BD* közötti téglalap négyszerese tehát egyenlő az *STU* gnómónnal (1. Ax.). Adjuk hozzájuk közös (tagnak) az *AC* oldalú négyzettel egyenlő *OH*-t, így az *AB* és *BD* által közrefogott téglalap négyszerese meg az *AC* oldalú négyzet együtt egyenlő az *STU* gnómónnal és *OH*-val (2. Ax.). Az *STU* gnómón és *OH* viszont kiadja a teljes *AEFD* négyzetet, s ennek oldala *AD*. Az *AB* és *BD* közötti téglalap négyszerese meg az *AC* oldalú négyzet tehát egyenlő az *AD* oldalú négyzettel. *BD* viszont egyenlő *BC*-vel, az *AB* és *BC* által közrefogott téglalap négyszerese meg az *AC* oldalú négyzet tehát együtt egyenlő az *AD* oldalú, azaz az *AB* és *BC* összegével rajzolt négyzettel.

Ha tehát egy egyenesszakaszt tetszőlegesen kettéosztunk, akkor a teljes szakasz és az egyik része által közrefogott téglalap négyszerese meg a másik részére emelt négyzet együtt egyenlő a teljes szakasz és az előbb említett rész összegére emelt négyzettel. Éppen ezt kellett megmutatni.

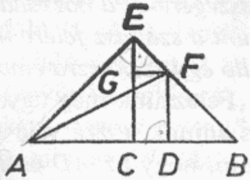
II. 9. Tétel

*Ha egy egyenesszakaszt egyenlő és nem egyenlő részekre osztunk, akkor a teljes szakasz nem egyenlő részeire emelt négyzetek (együtt) kétakkorák, mint a szakasz felére és az osztópontok közötti szakaszra emelt négyzetek.**

Osszunk ugyanis valamely *AB* szakaszt ketté egyenlő részekre a *C* (I. 10.), egyenlőtlenekre pedig a *D* pontban. Azt állítom, hogy az *AD* és *DB* oldalú négyzetek (együtt) kétakkorák, mint az *AC* és *CD* oldalú négyzetek.

Húzzuk meg ugyanis *C*-ből *AB*-hez derékszögben *CE*-t (I. 11.), és legyen *CE* az *AC* és a *CB* szakasszal egyenlő (I. 3. és 1. Ax.), és húzzuk meg *EA*-t, *EB*-t, és húzzuk meg *D*-ből *CE*-vel párhuzamosan *DF*-et, *F*-ből pedig *AB*-vel párhuzamosan *FG*-t (I. 31.), és húzzuk meg *AF*-et. Minthogy egyenlő *AC* a *CE*-vel, egyenlő az *EAC* szög is az *AEC* szöggel (I. 5.). S minthogy derékszög a *C*-nél levő szög, a két másik szög, *EAC* és *AEC* (együtt) egy derékszöggel egyenlő (I. 32. és 3. Ax.) és egyenlők, egy fél derékszög tehát mind a kettő, az *AEC* és az *EAC* szög. Ugyanezért mind a két *CEB*, *EBC* szög is egy fél derékszög. A teljes

AEB szög tehát derékszög. S minthogy *GEF* (= *CEB*) egy fél derékszög, *EGF* pedig derékszög – egyenlő ugyanis a szemközti *ECB* belső szöggel (I. 29.) –, így a harmadik szög, *EFG*, egy fél derékszög (I. 32.); egyenlő tehát a *GEF* szög *EFG*-vel (4. P. és 6. Ax.), úgyhogy az *EG* oldal is egyenlő *GF*-fel (I. 6.). Hasonlóképpen, minthogy a *B*-nél levő szög egy fél derékszög, *EDB* pedig derékszög – ismét egyenlő ugyanis a szemközti *ECB* belső szöggel (I. 29.) –, így a harmadig szög, *BCD*, egy fél derékszög (I. 32.); egyenlő tehát a *B*-nél levő szög *DFB*-vel, úgyhogy az *FD* oldal is egyenlő a *DB* oldallal (I. 6.). S minthogy egyenlő *AC* a *CE*-vel, egyenlő az *AC* oldalú négyzet is a *CE* oldalúval, az *AC* és *CE* oldalú négyzetek tehát (együtt) kétakkorák, mint az *AC* oldalú. Az *AC* és *CE* oldalú négyzetekkel viszont egyenlő az *EA* oldalú – derékszög ugyanis *ACE* (I. 47.) –, így az *EA* oldalú kétakkora, mint az *AC* oldalú. Ismét, minthogy egyenlő *EG* a *GF*-fel, egyenlő az *EG* oldalú négyzet is a *GF* oldalúval, az *EG* és *GF* oldalú négyzetek tehát (együtt) kétakkorák, mint a *GF* oldalú négyzet. Az *EG* és *GF* oldalú négyzetekkel viszont egyenlő az *EF* oldalú négyzet (I. 47.), az *EF* oldalú négyzet tehát kétakkora, mint a *GF* oldalú. De *GF* egyenlő *CD*-vel (I. 34.), az *EF* oldalú négyzet tehát kétakkora, mint a *CD* oldalú. Viszont az *EA* oldalú négyzet is kétakkora, mint az *AC* oldalú, az *EA* és *EF* oldalú négyzetek tehát (együtt) kétakkorák, mint az *AC* és *CD* oldalú négyzetek. Az *EA* és *EF* oldalú négyzetekkel viszont egyenlő az *AF* oldalú – derékszög ugyanis *AEF* (I. 47.) –, az *AF* oldalú négyzet tehát kétakkora, mint az *AC* és *CD* oldalúak. Az *AF* oldalúval viszont egyenlők az *AD* és *DF* oldalúak – derékszög ugyanis a *D*-nél levő szög (I. 47.) –, az *AD* és *DF* oldalú négyzetek tehát (együtt) kétakkorák, mint az *AC* és *CD* oldalúak. De *DF* egyenlő *DB*-vel, az *AD* és *DB* oldalú négyzetek tehát (együtt) kétakkorák, mint az *AC* és *CD* oldalú négyzetek.



Ha tehát egy egyenesszakaszt egyenlő és nem egyenlő részekre osztunk, akkor a teljes szakasz nem egyenlő részeire emelt négyzetek (együtt) kétakkorák, mint a szakasz felére és az osztópontok közötti szakaszra emelt négyzetek. Éppen ezt kellett megmutatni.

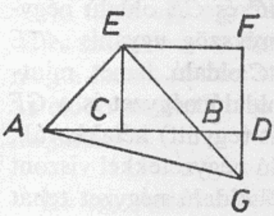
F.: X. 60. L.

II. 10. Tétel

*Ha egy egyenesszakaszt megfelezünk, és egy egyenesben hozzáadunk valamely más szakaszt, akkor a teljes szakasz meg a hozzáadandó összegére és a hozzáadandóra emelt két négyzet együttvéve kétakkora, mint a szakasz felére meg a szakasz feléből és a hozzáadandóból összeálló egy szakaszra emelt négyzetek.**

Felezzünk meg ugyanis valamely *AB* szakaszt a *C* pontban (I. 10.), és adjunk hozzá vele egy egyenesben valamely *BD* szakaszt. Azt állítom, hogy az *AD* és *DB* oldalú négyzetek (együtt) kétakkorák, mint az *AC* és *CD* oldalú négyzetek.

Húzzuk ugyanis *C*-ből *AB*-vel derékszögben *CE*-t (I. 11.), és legyen az *AC* és a *CB* szakasszal egyenlő (I. 3. és 1. Ax.), és húzzuk meg *EA*-t és *EB*-t, és húzzuk *E*-n át *AD*-vel párhuzamosan *EF*-et, *D*-n át pedig *CE*-vel párhuzamosan *FD*-t (I. 31.). S minthogy a párhuzamos *CE*, *FD* egyeneseket metszi valamely *EF* egyenes, a *CEF*, *EFD* szögek (együtt)két derékszöggel egyenlők (I. 29.), az *FEB*, *EFD* szögek tehát (együtt) kisebbek két derékszögnél (8. és 4. Ax.). De a két derékszögnél kisebb szögek felől meghosszabbított egyenesek találkoznak (5. P.), *EB* és *FD* tehát meghosszabbítva találkozni fog a *B* és *D* pontok oldalán. Legyenek meghosszabbítva és találkozzanak *G*-ben, és húzzuk meg *AG*-t.



S minthogy egyenlő *AC* a *CE*-vel, egyenlő az *EAC* szög is *AEC*-vel (I. 5.); és derékszög a *C*-nél levő szög, egy fél derékszög tehát mind a két *EAC*, *AEC* szög (I. 32., 3. és 6. Ax.). Ugyanezért mind a két *CEB*, *EBC* szög is egy-egy fél derékszög, derékszög ugyanis *AEB*. S minthogy *EBC* egy fél derékszög, egy fél derékszög *DBG* is (I. 15.). De *BDG* is derékszög – egyenlő ugyanis *DCE*-vel, mert váltószögek (I. 29.) –, a maradék *DGB* tehát egy fél derékszög (I. 32.). A *DGB* szög tehát egyenlő *DBG*-vel (4. P. és 6. Ax.), úgyhogy a *BD* oldal is egyenlő a *GD* oldallal (I. 6.). Ismét, minthogy *EGF* (=*DGB*) egy fél derékszög, az *F*-nél levő szög pedig derékszög – egyenlő ugyanis a szemközti *C*-nél levő szöggel (I. 34.) –, így a maradék *FEG* egy fél derékszög, egyenlő tehát az *EGF* szög *FEG*-vel, úgyhogy a *GF* oldal is egyenlő az *EF* oldallal (I. 6.). S minthogy [egyenlő *EC* az *AC*-vel], egyenlő az *EC* oldalú négyzet [is] az *AC* oldalúval, így a *CE* és *AC* oldalú négyzetek (együtt) kétakkorák, mint az *AC* oldalú. A *CE* és *AC* oldalú négyzetekkel viszont egyenlő az *EA* oldalú (I. 47.), az *EA* oldalú négyzet tehát kétakkora, mint az *AC* oldalú (1. Ax.). Ismét, minthogy egyenlő *GF* az *EF*-fel, egyenlő a *GF* oldalú négyzet is az *FE* oldalúval, a *GF* és *EF* oldalú négyzetek tehát (együtt) kétakkorák, mint az *EF* oldalú. A *GF* és *EF* oldalú négyzetekkel viszont egyenlő az *EG* oldalú (I. 47.), az *EG* oldalú tehát kétakkora, mint az *EF* oldalú. *EF* viszont egyenlő *CD*-vel (I. 34.), az *EG* oldalú négyzet tehát kétakkora, mint a *CD* oldalú. Megmutattuk azt is, hogy az *EA* oldalú kétakkora, mint az *AC* oldalú, az *AE* és *EG* oldalú négyzetek tehát (együtt) kétakkorák, mint az *AC* és *CD* oldalúak (2. Ax.). Az *AE* és *EG* oldalú négyzetekkel viszont egyenlő az *AG* oldalú négyzet (I. 47.), az *AG* oldalú tehát kétakkora, mint az *AC* és *CD* oldalúak. Az *AG* oldalúval viszont egyenlők az *AD* és *DG* oldalúak (I. 47.), tehát az *AD* és *DH* oldalú négyzetek (együtt) kétakkorák, mint az *AC* és *CD* oldalú négyzetek. *DG* viszont egyenlő *DB*-vel, az *AD* és *DB* oldalú négyzetek tehát (együtt) kétakkorák, mint az *AC* és *CD* oldalúak.

Ha tehát egy egyenesszakaszt megfelezünk, és egy egyenesben hozzáadunk valamely más szakaszt, akkor a teljes szakasz meg a hozzáadandó összegére és a hozzáadandóra emelt két négyzet együttvéve kétakkora, mint a szakasz felére és a szakasz feléből meg a hozzáadandóból összeálló egy szakaszra emelt négyzetek. Éppen ezt kellett megmutatni.

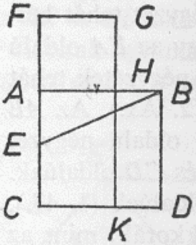
II. 11. Tétel

*Osszunk úgy ketté egy adott szakaszt, hogy a teljes szakasz és az egyik rész által közrefogott téglalap egyenlő legyen a másik részre emelt négyzettel!**

Legyen *AB* az adott szakasz. Az *AB*-t kell tehát úgy kettéosztani, hogy a teljes szakasz és az egyik rész által közrefogott téglalap egyenlő legyen a másik részre emelt négyzettel.

Legyen ugyanis *ABDC* az *AB* oldallal szerkesztett négyzet (I. 46.), és legyen *E* az *AC* felezőpontja (I. 10.), és húzzuk meg *BE*-t, és hoszszabbítsuk meg *AC*-t az *F* pontig; mérjük föl a *BE*-vel egyenlő *EF*-et (I. 3.), és legyen *FH* az *AF* oldallal szerkesztett négyzet (I. 46.), és hosszabbítsuk meg *GH*-t *K*-ig. Azt állítom, hogy *H* úgy osztja ketté *AB*-t, hogy az *AB* és *BH* által közrefogott téglalap egyenlő az *AH* oldalú négyzettel.

Minthogy ugyanis *AC*-t megfeleztük *E*-ben, és hozzáadtuk *AF*-et, így a *CF* és *AF* által közrefogott téglalap meg az *AE* oldalú négyzet együtt egyenlő az *EF* oldalú négyzettel (II. 6.). *EF* viszont egyenlő *EB*-vel, tehát a *CF* és *AF* közötti téglalap meg az *AE* oldalú négyzet együtt egyenlő az *EB* oldalú négyzettel. De az *EB* oldalú négyzettel egyenlő az *AB* és *AE* oldalú négyzetek összege – derékszög ugyanis az *A*-nál levő szög (I. 47.) –, a *CF* és *AF* által közrefogott téglalap meg az *AE* oldalú négyzet tehát együtt egyenlő az *AB* és *AE* oldalú négyzetekkel (1. Ax.). Vonjuk le a közös *AE* oldalú négyzetet, így megmaradó *CF* és *AF* által közrefogott téglalap egyenlő az *AB* oldalú négyzettel (3. Ax.). S a *CF* és *AF* közötti téglalap *FK*, mert egyenlő *AF* az *FG*-vel, az *AB* oldalú négyzet pedig *AD*, tehát *FK* egyenlő *AD*-vel. Vonjuk le a közös *AK*-t, így a maradék *FH* egyenlő *HD*-vel (3. Ax.). S *HD* az *AB* és *BH* közötti téglalap, mert egyenlő *AB* a *BD*-vel, *FH* pedig az *AH* oldalú négyzet, az *AB* és *BH* által közrefogott téglalap tehát egyenlő az *AH* oldalú négyzettel.



Az adott *AB* szakaszt tehát úgy osztottuk ketté a *H* pontban, hogy az *AB* és *BH* által közrefogott téglalap egyenlő az *AH* oldalú négyzettel. Éppen ezt kellett megtenni.

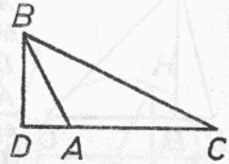
F.: IV. 10.

II. 12. Tétel

*A tompaszögű háromszögekben a tompaszöggel szemközti oldalra emelt négyzet nagyobb a tompaszöget közrefogó oldalakra emelt négyzetek összegénél, mégpedig annak a téglalapnak a kétszeresével, amelyet a tompaszög melletti egyik oldal és a szemközti csúcsból az erre bocsátott merőleges talppontja és a tompaszög csúcsa közötti – külső – szakasz fog közre.**

Legyen *ABC* egy tompaszögű háromszög, melynek *BAC* a tompaszöge, és bocsássunk a B pontból CA meghosszabbítására egy BD merőlegest (I. 12.). Azt állítom, hogy a BC oldalú négyzet nagyobb a BA és CA oldalú négyzeteknél, mégpedig a CA és AD által közrefogott téglalap kétszeresével.

Minthogy ugyanis a CD szakasz ketté van osztva a tetszőleges A pontban, így a CD oldalú négyzet egyenlő a CA és AD oldalú négyzetekkel és a CA és AD által közrefogott téglalap kétszeresével (II. 4.). Adjuk hozzájuk közös (tagnak) a BD oldalú négyzetet, így a CD és BD oldalú négyzetek (együtt) egyenlők a CA, AD, és BD oldalú négyzetekkel és a CA és AD közötti téglalap kétszeresével (2. Ax.). Azonban a CD és BD oldalú négyzetekkel egyenlő a BC oldalú – derékszög ugyanis a D-nél levő szög (I. 47.) –, az AD és BD oldalúakkal pedig egyenlő a BA oldalú (I. 47.), a BC oldalú négyzet tehát egyenlő a CA és BA oldalú négyzetekkel és a CA és AD közötti téglalap kétszeresével, úgyhogy a BC oldalú négyzet a CA és BA oldalú négyzeteknél nagyobb, mégpedig a CA és AD által közrefogott téglalap kétszeresével.



A tompaszögű háromszögekben tehát a tompaszöggel szemközti oldalra emelt négyzet nagyobb a tompaszöget közrefogó oldalakra emelt négyzetek összegénél, mégpedig annak a téglalapnak a kétszeresével, amelyet a tompaszög melletti egyik oldal és az erre bocsátott merőleges talppontja és a tompaszög csúcsa közötti – külső – szakasz fog közre. Éppen ezt kellett megmutatni.

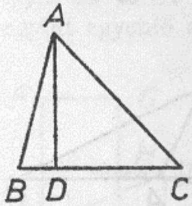
F.: XII. 17.

II. 13. Tétel

*A hegyesszögű háromszögekben az (egyik) hegyesszöggel szemközti oldalra emelt négyzet kisebb a hegyesszöget közrefogó oldalakra emelt négyzetek összegénél, mégpedig (kisebb) annak a téglalapnak a kétszeresével, amelyet a hegyesszög melletti egyik oldal és a (szemközti csúcsból) az erre bocsátott merőleges talppontja és a hegyesszög csúcsa közötti – belső – szakasz fog közre.**

Legyen ABC egy hegyesszögű háromszög, melynek B-nél levő szöge hegyesszög, és bocsássunk az A pontból BC-re egy AD merőlegest (I. 12.). Azt állítom, hogy az AC oldalú négyzet kisebb a BC és BA oldalú négyzetek összegénél, mégpedig a BC és BD által közrefogott téglalap kétszeresével.

Minthogy ugyanis a BC szakasz ketté van osztva a tetszőleges D pontban, így a BC és BD oldalú négyzetek (együtt) egyenlők a BC és BD által közrefogott téglalap kétszeresének és a DC oldalú négyzetnek az összegével (II. 7.). Adjuk hozzájuk közös (tagnak) az AD oldalú négyzetet, így a BC, BD és AD oldalú négyzetek (együtt) egyenlők a BC és BD által közrefogott téglalap kétszeresének és az AD, DC oldalú négyzeteknek az összegével (2. Ax.). Azonban a BD és AD oldalú négyzetek összegével egyenlő a BA oldalú négyzet – derékszög ugyanis a D-nél levő szög (I. 47.) –, az AD és DC oldalú négyzetek összegével pedig egyenlő az AC oldalú (I. 47.), a BC és BA oldalú négyzetek tehát (együtt) egyenlők az AC oldalú négyzetnek és a BC és BD közötti téglalap kétszeresének az összegével, úgyhogy az AC oldalú négyzet önmagában kisebb a BC és BA oldalú négyzeteknél, mégpedig a BC és BD által közrefogott téglalap kétszeresével.



A hegyesszögű háromszögekben tehát a hegyesszöggel szemközti oldalra emelt négyzet kisebb a hegyesszöget közrefogó oldalakra emelt négyzetek összegénél, mégpedig annak a téglalapnak a kétszeresével, amelyet a hegyesszög melletti egyik oldal és az erre bocsátott merőleges talppontja és a hegyesszög csúcsa közötti – belső – szakasz fog közre. Éppen ezt kellett megmutatni.

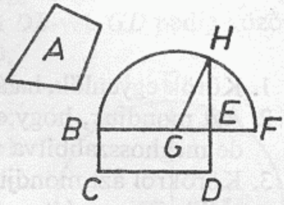
II. 14. Tétel

Szerkesszünk adott egyenes vonalú idommal (I. 19. D.) *egyenlő négyzetet!**

Legyen A az adott egyenes vonalú idom. Az A egyenes vonalú idommal kell tehát egyenlő négyzetet szerkeszteni.

Szerkesszünk ugyanis egy, az A egyenes vonalú idommal egyenlő BD derékszögű paralelogrammát (azaz téglalapot; I. 45.). Ha egyenlő BE az ED-vel, készen vagyunk a feladattal, ugyanis megszerkesztettük az A egyenes vonalú idommal egyenlő BD négyzetet; ha pedig nem, akkor *BE* és *ED* egyike nagyobb. Legyen *BE* a nagyobb, és hosszabbítsuk meg *F*-ig, és mérjük föl az *ED*-vel egyenlő *EF*-et (I. 3.), és legyen *G* a *BF* felezőpontja (I. 10.), *BHF* pedig a *G* középpontú és a *GB*, *GF* távolságok egyikével rajzolt félkör (3. P.), és hosszabbítsuk meg *ED*-t *H*-ig, és húzzuk meg *GH*-t.

Minthogy tehát a *BF* szakasz ketté van osztva egyenlő részekre a *G*, nem egyenlőkre pedig az *E* pontban, így a *BE* és *EF* által közrefogott téglalap meg az *EG* oldalú négyzet együtt egyenlő a *GF* oldalú négyzettel (II. 5.). *GF* viszont egyenlő *GH*-val, a *BE* és *EF* közötti téglalap meg az *EG* oldalú négyzet tehát együtt egyenlő a *GH* oldalú négyzettel. A *GH* oldalú négyzettel viszont egyenlők a *HE* és *EG* oldalú négyzetek (I. 47.), a *BE* és *EF* közötti téglalap meg az *EG* oldalú négyzet tehát együtt egyenlő a *HE* és *EG* oldalú négyzetekkel.



Vonjuk le a közös *EG* oldalú négyzetet, így a megmaradó *BE* és *EF* közötti téglalap egyenlő a *HE* oldalú négyzettel (3. Ax.). Azonban a *BE* és *EF* közötti téglalap *BD*, mert *EF* egyenlő *ED*-vel. A *BD* paralelogramma tehát egyenlő a *HE* oldalú négyzettel. Egyenlő viszont *BD* az *A* egyenes vonalú idommal, az *A* egyenes vonalú idom is egyenlő tehát a *HE* oldallal szerkesztendő négyzettel.

Megadtunk tehát egy, az adott *A* egyenes vonalú idommal egyenlő, *HE* oldallal szerkesztendő négyzetet. Éppen ezt kell megtenni.

F.: X. 54–55., 91., 95–96.

Harmadik könyv

Definíciók

1. Körök egyenlők, ha átmérőik egyenlők vagy a sugaraik egyenlők.*
2. Azt mondjuk, hogy egy egyenes érint egy kört, ha metszi* a kört, de meghosszabbítva sem szeli át.
3. Körökről azt mondjuk, hogy érintik egymást, ha metszik, de nem szelik át egymást.
4. Egy kör húrjairól* akkor mondjuk, hogy egyenlő távol vannak a középponttól, ha a középpontból rájuk bocsátott merőlegesek (I. 12.) egyenlők.
5. Hogy távolabb van (a középponttól), azt arról mondjuk, amelyikhez a nagyobb (azaz hosszabb) merőleges vezet.
6. Az egy egyenes (húr) és (a hozzá tartozó) körív által közrefogott alakzat körszelet.
7. A körszelet szöge az egyenes és a körív által közrefogott szög.*
8. Ha egy körszelethez tartozó íven választunk egy pontot, és belőle a körszelet alapegyenesének végpontjaiba egyeneseket húzunk, akkor a meghúzott egyenesek által közrefogott szög körszeletbeli szög.*
9. Ha egy szög szárai kimetszenek egy körívet, akkor azt mondjuk, hogy a szög ezen (ti. a köríven) nyugszik.*
10. Ha egy körben fölveszünk egy középponti szöget, akkor a szög szárai és az általuk kimetszett körív által közrefogott alakzat körcikk.*
11. Körszeletek hasonlók, ha egyenlő szögeket fogadnak be, vagy (más kifejezéssel) ha a bennük levő szögek (8. D.) egyenlők egymással.*

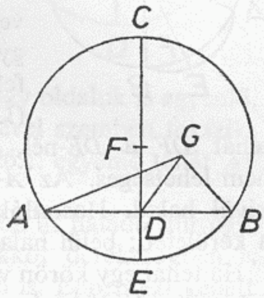
III. 1. Tétel

*Keressük meg adott kör(vonal) középpontját!**

Legyen *ABC* az adott kör. Az *ABC* körnek kell tehát megkeresni a középpontját.

Húzzuk meg egy tetszőleges *AB* szelőjét (azaz húrját), ennek legyen *D* a felezőpontja (I. 10.); emeljük *D*-ből *AB*-re a *DC* merőlegest (I. 11.), és hosszabbítsuk meg *E*-ig, és legyen *CE* felezőpontja *F* (I. 10.). Azt állítom, hogy *F* középpontja az *ABC* körnek.

Ha ugyanis nem az, akkor tegyük föl, hogy *G* az, és húzzuk meg *GA*-t, *GD*-t és *GB*-t. Minthogy egyenlő *AD* a *DB*-vel, *GD* pedig közös (oldal), így e két-két (oldal), *AD*, *GD* és *GD*, *DB* páronként egyenlő; és a *GA* alap egyenlő a *GB* alappal – sugarak ugyanis (I. 15. D.) –; az *ADG* szög tehát egyenlő a *GDB* szöggel (I. 8.). De ha egy egyenesre egy egyenest állítunk úgy, hogy egymással egyenlő mellékszögek keletkeznek, akkor a két egyenlő szög derékszög (I. 10. D.), derékszög tehát a *GDB* szög. Viszont *FDB* is derékszög, egyenlő tehát az *FDB* szög *GDB*-vel (4. P.), a nagyobb a kisebbel (8. Ax.); ez viszont nem lehetséges. *G* tehát nem középpontja az *ABC* körnek. Hasonlóképp mutathatnánk meg, hogy egyetlen más pont sem, kivéve *F*-et.



Az *F* pont tehát középpontja az *ABC* körnek.

F.: III. 2–4., 7–8., 11–14., 17., 21., 28–29., 31., 35–37.; IV. 2., stb.

Következmény

Ebből már nyilvánvaló, hogy ha egy körben valamely húr egy másikat derékszögben felez, akkor a felező húron van a kör középpontja. Éppen ezt kellett megtenni.*

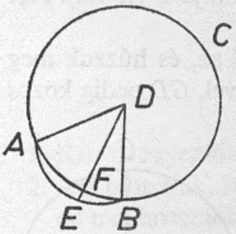
F.: III. 9–10.

III. 2. Tétel

Ha egy körön választunk két tetszőleges pontot, akkor a pontokra illeszkedő szakasz a körön belül halad.

Legyen *ABC* egy kör, és *A*, *B* a kerületén tetszőlegesen választott pontok. Azt állítom, hogy az *A*-ból *B*-be vezető szakasz a körön belül halad.

Tegyük föl ugyanis, hogy ellenkezőleg, a körön kívül halad, mint *AEB*, és vegyük föl az *ABC* kör középpontját (III. 1.) – ez legyen *D* –, s húzzuk meg *DA*-t, *DB*-t és a (kört) metsző *DFE*-t. Minthogy tehát egyenlő *DA* a *DB*-vel (I. 15. D.), egyenlő a *DAE* szög is a *DBE* szöggel (I. 5.); s minthogy a *DAE* háromszögnek meg van hosszabbítva az egyik oldala, *AEB*, így a *DEB* szög nagyobb a *DAE* szögnél (I. 16.). Egyenlő viszont *DAE* a *DBE*-vel; nagyobb tehát a *DEB* szög *DBE*-nél. A nagyobb szöggel szemben viszont nagyobb oldal fekszik, nagyobb tehát a *DB* oldal a *DE* oldalnál (I. 19.). *DB* viszont egyenlő *DF*-fel, nagyobb tehát *DF* a *DE*-nél, a kisebb a nagyobbnál (8. Ax.); ez viszont nem lehetséges. Az *A*-ból *B*-be vezető szakasz tehát nem a körön kívül halad. Hasonlóképp mutathatnánk meg, hogy nem is magán a kerületen; belül halad tehát.



Ha tehát egy körön választunk két tetszőleges pontot, akkor a pontokra illeszkedő szakasz a körön belül halad. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: III. 13., 16. K.

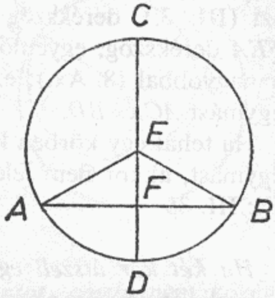
III. 3. Tétel

Ha egy körben valamely, a középponton át haladó húr egy nem a középponton át haladó húrt felez, akkor derékszögben is metszi; és ha derékszögben metszi, akkor felezi is.

Legyen *ABC* egy kör, és benne valamely, a középponton át haladó *CD* húr felezzen az *F* pontban egy, nem a középponton át haladó *AB* húrt. Azt állítom, hogy derékszögben is metszi.

Vegyük föl ugyanis az *ABC* kör középpontját (III. 1.) – ez legyen *E* –, és húzzuk meg *EA*-t, *EB*-t.

Minthogy egyenlő *EA* az *EB*-vel, *FE* pedig közös (oldal), így két-két (oldal) egyenlő. És az *EA* alap egyenlő az *EB* alappal; az *AFE* szög tehát egyenlő *BFE* szöggel (I. 8.). De ha egy egyenesre egy egyenest állítunk úgy, hogy egyenlő mellékszögek keletkeznek, akkor a két egyenlő szög derékszög (I. 10. D.); derékszög tehát mindkét szög, *AFE* és *BFE*. A középponton át haladó *CD* tehát, amely felezi a nem a középponton át haladó *AB*-t, derékszögben is metszi azt.



Másrészt, messe *CD* az *AB*-t derékszögben. Azt állítom, hogy felezi is, azaz hogy egyenlő *AF* az *FB*-vel.

Készítsük el ugyanis ugyanazt az ábrát, mint az előbb. Ekkor, minthogy egyenlő *EA* az *EB*-vel, egyenlő az *EAF* szög is *EBF*-fel (I. 5.). De egyenlő az *AFE* derékszög is a *BFE* derékszöggel (4. P.), *EAF* és *EFB* tehát olyan két háromszög, melynek két-két szöge (páronként) egyenlő, és egy-egy oldaluk is egyenlő, a közös *EF*, amelyik az egyenlő szögek egyikével szemben fekszik; tehát a többi oldal is (páronként) egyenlő (I. 26.); egyenlő tehát *AF* az *FB*-vel.

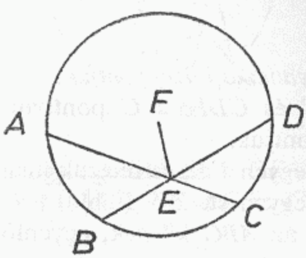
Ha tehát egy körben valamely, a középponton át haladó húr egy, nem a középponton át haladó húrt felez, akkor derékszögben is metszi; és ha derékszögben metszi, akkor felezi is. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: III. 4., 14., 35–36.; XII. 16.

III. 4. Tétel

Ha egy körben két, nem a középponton át haladó húr metszi egymást, akkor nem felezik egymást.

Legyen *ABCD* egy kör, és messe benne egymást két, nem a középponton át haladó húr, *AC* és *BD*, az *E* pontban. Azt állítom, hogy nem felezik egymást.



Tegyük föl ugyanis, hogy felezik egymást, és így egyenlő *AE* az *EC*-vel, *BE* pedig *ED*-vel, és vegyük föl az *ABCD* kör középpontját (III. 1.) – ez legyen *F* –, és húzzuk meg *FE*-t.

Minthogy tehát valamely, a középponton

át haladó *FE* húr egy nem a középponton át haladó *AC* húrt felez, így derékszögben is metszi (III. 3.), derékszög tehát *FEA*. Ismét, minthogy valamely *FE* húr egy *BD* húrt felez, derékszögben is metszi (III. 3.), derékszög tehát *FEB*. De megmutattuk azt is, hogy *FEA* derékszög, egyenlő tehát *FEA* az *FEB* szöggel (4. P.), a kisebb a nagyobbal (8. Ax.); ez viszont nem lehetséges. Nem felezik tehát egymást *AC* és *BD*.

Ha tehát egy körben két, nem a középponton át haladó húr metszi egymást, akkor nem felezik egymást. Éppen ezt kellett megmutatni.

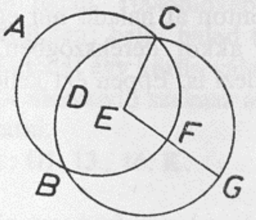
F.: III. 35

III. 5. Tétel

Ha két kör átszeli egymást, akkor nem ugyanaz a középpontjuk.

Szelje át ugyanis egymást két kör, *ABC* és *CDG*, a *B*, *C* pontokban. Azt állítom, hogy nem ugyanaz a középpontjuk.

Tegyük föl ugyanis, hogy ugyanaz – ez legyen *E* –, és húzzuk meg *EC*-t, és a (kört) metsző tetszőleges *EFG* egyenest.



Minthogy az *E* pont középpontja az *ABC* körnek, egyenlő *EC* az *EF*-fel (I. 15. D.). Ismét, minthogy az *E* pont középpontja a *CDG* körnek, egyenlő *EC* az *EG*-vel (ua.). De megmutattuk, hogy *EC* az *EF*-fel is egyenlő; *EF* is egyenlő tehát *EG*-vel (1. Ax.), a kisebb a nagyobbal (8. Ax.); ez viszont nem lehetséges. Az *E* pont tehát nem (közös) középpontja az *ABC*, *CDG* köröknek.

Ha tehát két kör átszeli egymást, akkor nem ugyanaz a középpontjuk. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: III. 10.

III. 6. Tétel

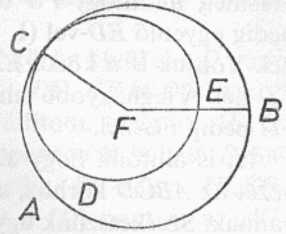
Ha két kör érinti egymást, akkor nem ugyanaz a középpontjuk.

Érintse egymást ugyanis két kör, *ABC* és *CDE*, a *C* pontban. Azt állítom, hogy nem ugyanaz a középpontjuk.

Tegyük föl ugyanis, hogy ugyanaz – ez legyen *F* –, és húzzuk meg *FC*-t és a tetszőleges (a kört) metsző *FEB* egyenest.

Minthogy tehát az *F* pont középpontja az *ABC* körnek, egyenlő

FC az *FB*-vel (I. 15. D.). Ugyanígy minthogy az *F* pont középpontja a *CDE* körnek, egyenlő *FC* az *FE*-vel. De megmutattuk, hogy *FC* az *FB*-vel is egyenlő; *FE* is egyenlő tehát *FB*-vel (1. Ax.), a kisebb a nagyobbal (8. Ax.); ez viszont nem lehetséges. Az *F* pont tehát nem (közös) középpontja az *ABC*, *CDE* köröknek.



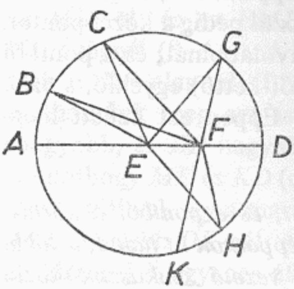
Ha tehát két kör érinti egymást, akkor nem ugyanaz a középpontjuk. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: III. 11., 13.

III. 7. Tétel

Ha egy kör átmérőjén választunk egy pontot, amely nem középpontja a körnek, és e pontból a körhöz szakaszokat húzunk, akkor a legnagyobb az a szakasz lesz, amelyiken a középpont van; a legrövidebb az (átmérő) maradék része, a többi szakasz közül pedig a középponton áthaladóhoz közelebbi mindig nagyobb a távolabbinál; és a pontból a körhöz vezető szakaszok közül csak kettő (-kettő) egyenlő, s ezek a legrövidebb szakasz két oldalán vannak.

Legyen *ABCD* egy kör, *AD* pedig egy átmérője, és válasszunk *AD*-n egy *F* pontot, amely nem középpontja a körnek, a kör középpontja pedig legyen *E* (III. 1.), és húzzunk *F*-ből az *ABCD* körhöz valamely *FB*, *FC*, *FG* szakaszokat. Azt állítom, hogy *FA* a legnagyobb, *FD* a legkisebb, a többiek közül pedig *FB* nagyobb *FC*-nél, *FC* pedig *FG*-nél.



Húzzuk meg ugyanis *BE*-t, *CE*-t és *GE*-t. Minthogy minden háromszögben két oldal (együtt) nagyobb a harmadiknál (I. 20.), így *BE* és *EF* (együtt) nagyobb *FB*-nél. *AE* viszont egyenlő *BE*-vel (I. 15. D.), [*BE* és *EF* tehát (együtt) egyenlő *FA*-val;] nagyobb tehát *FA* az *FB*-nél. Ismét, minthogy egyenlő *BE* a *CE*-vel (ua.), *EF* pedig közös (oldal), így e kétkét (oldal), *BE*, *EF* és *CE*, *EF* (páronként) egyenlő. De még a *BEF* szög is nagyobb a *CEF* szögnél (8. Ax.); az *FB* alap tehát nagyobb az *FC* alapnál (I. 24.). Ugyanezért *FC* is nagyobb *FG*-nél.

Ismét, minthogy *FG* és *EF* (együtt) nagyobb *GE*-nél (I. 20.), *GE* pedig egyenlő *ED*-vel (I. 15. D.), így *FG* és *EF* (együtt) nagyobb *ED*-nél. Vonjuk le a közös *EF*-et; így a maradék *FG* nagyobb a maradék *FD*-nél. A legnagyobb tehát *FA*, a legkisebb *FD*, s *FB* nagyobb *FC*-nél, *FC* pedig *FG*-nél.

Azt is állítom, hogy az *F* pontból csak két(-két) egyenlő szakasz vezet az *ABCD* körhöz, s ezek a legrövidebb szakasz, *FD* két oldalán vannak. Szerkesszünk ugyanis az *EF* egyenesre, a rajta levő *E* ponthoz a *GEF* szöggel egyenlő *FEH* szöget (I. 23.), és húzzuk meg *FH*-t.

Minthogy tehát egyenlő *GE* az *EH*-val (I. 15. D.), *EF* pedig közös (oldal), így e két-két (oldal), *GE*, *EF* és *EH*, *EF* (páronként) egyenlő; és a *GEF* szög egyenlő az *FEH* szöggel; az *FG* alap tehát egyenlő az *FH* alappal (I. 4.). Azt állítom, hogy más *FG*-vel egyenlő szakasz nem vezet a körhöz az *F* pontból. Tegyük föl ugyanis, hogy vezet, *FK*. Minthogy *FK* egyenlő *FG*-vel, *FH* azonban *FG*-vel egyenlő, így *FK* is egyenlő *FH*-val, (azaz) a középponton át haladóhoz közelebbi egyenlő a távolabbival; ez viszont nem lehetséges. Csak egy szakasz (vezet) tehát (mind a két oldalon a körhöz).

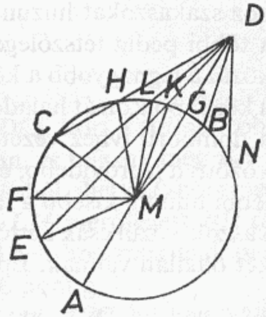
Ha tehát egy kör átmérőjén választunk egy pontot, amely nem középpontja a körnek, és e pontból a körhöz szakaszokat húzunk, akkor legnagyobb az a szakasz lesz, amelyiken a középpont van, a legrövidebb az (átmérő) maradék része, a többi szakasz közül pedig a középponton át haladóhoz közelebbi mindig nagyobb a távolabbinál; és a pontból a körhöz vezető szakaszok közül csak kettő(-kettő) egyenlő, s ezek a legrövidebb szakasz két oldalán vannak. Éppen ezt kellett megmutatni.

III. 8. Tétel

Ha egy körön kívül választunk egy pontot, és e pontból a körhöz szakaszokat húzunk úgy, hogy egyikük a középponton át halad, a többi pedig tetszőlegesen, akkor a homorú ívhez vezető szakaszok közül a legnagyobb a középponton át haladó, és a többi szakasz közül a középponton át haladóhoz közelebbi mindig nagyobb a távolabbinál, a domború ívhez vezető szakaszok közül pedig a pont és az átmérő közötti *a legrövidebb, és a többi szakasz közül a legrövidebbhez közelebbi mindig kisebb a távolabbinál; és a pontból a körhöz vezető szakaszok közül csak kettő(-kettő) egyenlő, s ezek a legrövidebb szakasz két oldalán vannak.*

Legyen *ABC* egy kör, és válasszunk az *ABC* körön kívül egy *D* pontot, és húzzunk belőle (a körhöz) valamely *DA*, *DE*, *DF* és *DC* szakaszokat. *DA* haladjon a középponton át. Azt állítom, hogy az *AEFC* homorú ívhez vezető szakaszok közül a középponton át haladó *DA* a legnagyobb, és *DE* nagyobb *DF*-nél, *DF* pedig *DC*-nél, a *HLKG* domború ívhez vezető szakaszok közül viszont a (*D*) pont és az *AG* átmérő közötti *DG* a legkisebb, és a legkisebb szakaszhoz, *DG*-hez közelebbi mindig kisebb a távolabbinál, *DK* a *DL*-nél, *DL* pedig *DH*-nál.

Vegyük föl ugyanis az *ABC* kör középpontját (III. 1.) – ez legyen *M* –, és húzzuk meg *ME*-t, *MF*-et, *MC*-t, *MK*-t, *ML*-et és *MH*-t.



Minthogy egyenlő *AM* az *EM*-mel, adjuk hozzájuk közös (tagnak) *MD*-t, így *DA* egyenlő *ME*-vel meg *MD*-vel (2. Ax.). De *ME* és *MD* (együtt) nagyobb *DE*-nél (I. 20.), *DA* is nagyobb tehát *DE*-nél. Ismét, minthogy egyenlő *ME* az *MF*-fel, *MD* pedig közös (darab), így *ME* és *MD* (együtt) egyenlő *MF*-fel meg *MD*-vel; és az *EMD* szög nagyobb az *FMD* szögnél (8. Ax.). A *DE* alap tehát nagyobb a *DF* alapnál (I. 24.). Hasonlóképp mutathatnánk meg azt is, hogy *DF* nagyobb *DC*-nél; *DA* tehát a legnagyobb, és *DE* nagyobb *DF*-nél, *DF* pedig *DC*-nél.

S minthogy *MK* és *KD* (együtt) nagyobb *MD*-nél (I. 20.), *MG* pedig egyenlő *MK*-val, így a maradék *KD* nagyobb a maradék *GD*-nél, úgyhogy *GD* kisebb *DK*-nál; s minthogy az *MLD* háromszög egyik oldalán, *MD*-n, két egyenes áll, *MK* és *KD*, (a háromszögön) belül, így *MK* és *DK* (együtt) kisebb, mint *ML* és *LD* (I. 21.); egyenlő viszont *MK* az *ML*-lel, így a maradék *DK* kisebb a maradék *DL*-nél. Hasonlóképp mutathatnánk meg azt is, hogy *DL* kisebb *DH*-nál; *DG* tehát a legkisebb, és *DK* kisebb *DL*-nél, *DL* pedig *DH*-nál.

Azt is állítom, hogy a D pontból csak két (-két) egyenlő szakasz vezet a körhöz, s ezek a legkisebb szakasz, DG, két oldalán vannak. Szerkesszünk az MD egyenesre, a rajta levő M ponthoz, a KMD szöggel egyenlő DMB szöget (I. 23.), és húzzuk meg DB-t. Minthogy egyenlő MK az MB-vel, MD pedig közös (oldal), így e két-két (oldal), KM, MD és BM, MD páronként egyenlő; és a KMD szög egyenlő a BMD szöggel, a DK alap tehát egyenlő a DB alappal (I. 4.). Azt állítom, hogy más DK-val egyenlő szakasz nem vezet a körhöz a D pontból. Tegyük föl ugyanis, hogy vezet, DN. Minthogy tehát DK a DN-nel egyenlő, azonban DK a DB-vel egyenlő, DB is egyenlő DN-nel, (azaz) a legkisebb szakaszhoz, DG-hez közelebbi egyenlő a távolabbival; erről viszont megmutattuk, hogy nem lehetséges. Nem vezet tehát több egyenlő szakasz az ABC körhöz a D pontból, mint kettő, mégpedig a legkisebb szakasz, DG két oldalán.

Ha tehát egy körön kívül választunk egy pontot, és e pontból a körhöz szakaszokat húzunk úgy, hogy egyikük a középponton át halad, a többi pedig tetszőlegesen, akkor a homorú ívhez vezető szakaszok közül a legnagyobb a középponton át haladó, és a többi szakasz közül a középponton át haladóhoz közelebbi mindig nagyobb a távolabbinál, a domború ívhez vezető szakaszok közül pedig a pont és az átmérő közötti a legrövidebb, és a többi szakasz közül a legrövidebbhez közelebbi mindig kisebb a távolabbinál; és a pontból a körhöz vezető szakaszok közül csak kettő (-kettő) egyenlő, s ezek a legrövidebb szakasz két oldalán vannak. Éppen ezt kellett megmutatni.

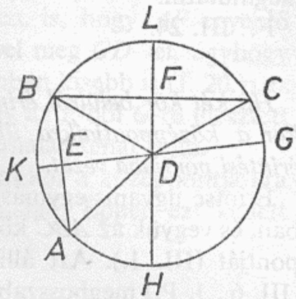
III. 9. Tétel

Ha egy körön belül választunk egy pontot, és e pontból a körhöz több mint két egyenlő szakasz vezet, akkor a választott pont a kör középpontja.

Legyen ABC egy kör, D ezen belül egy pont, és vezessen D-ből több mint két egyenlő szakasz az ABC körhöz, DA, DB és DC. Azt állítom, hogy a D pont az ABC kör középpontja.

Húzzuk meg ugyanis AB-t, BC-t, és legyen E, ill. F a felezőpontjuk (I. 10.), és húzzuk meg ED-t, FD-t, majd hosszabbítsuk meg őket a G, K, H, L pontokig.

Minthogy tehát egyenlő AE az EB-vel, ED pedig közös (oldal), így e két-két (oldal), *AE*, *ED* és *BE*, *ED* (páronként) egyenlő; és a *DA* alap egyenlő a *DB* alappal; így az *AED* szög egyenlő a *BED* szöggel (I. 8.). Derékszög tehát mind a két szög, *AED* és *BED* (I. 10. D.), *GK* tehát derékszögben felezi *AB*-t. Minthogy, ha egy körben valamely húr egy húrt derékszögben felez, akkor a felező húron van a kör középpontja (III. 1. K.), így *GK*-n van a kör középpontja. Ugyanezért *HL*-en is rajta van az *ABC* kör középpontja. És a *GK*, *HL* egyeneseknek nincs más közös pontja, csak *D*, a *D* pont tehát középpontja az *ABC* körnek.



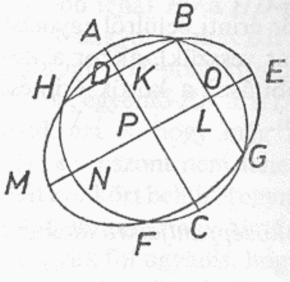
Ha tehát egy körön belül választunk egy pontot, és e pontból a körhöz több mint két egyenlő szakasz vezet, akkor a választott pont a kör középpontja. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: III. 25.

III. 10. Tétel

Kör kört nem szel át több mint két pontban.

Tegyük föl ugyanis, hogy az *ABC* kör a *DEF* kört kettőnél több pontban szeli át, *B*-ben, *G*-ben, *F*-ben és *H*-ban, és húzzuk meg *BH*-t, *BG*-t, s legyen *K*, *L* a felezőpontjuk (I. 10.), és *K*-ból, illetve *L*-ből emeljünk egy-egy *KC*, *LM* merőlegest *BH*-ra, illetve *BG*-re (I. 11), és hosszabbítsuk meg őket az *A*, illetve *E* pontig.



Minthogy tehát az *ABC* körben valamely *AC* húr egy *BH* húrt derékszögben felez, így *AC*-n van az *ABC* kör középpontja (III. 1. K.). Ismét, minthogy ugyanabban az *ABC* körben valamely *NO* húr egy *BG* húrt derékszögben felez, így *NO*-n van az *ABC* kör középpontja (ua.). De megmutattuk, hogy *AC*-n is rajta van, és az *AC*, *NO* egyenesek semmilyen más pontban nem találkoznak, csak *P*-ben; a *P* pont tehát középpontja az *ABC* körnek. Hasonlóképp mutathatnánk meg, hogy *P* a *DEF* körnek is középpontja; az egymást átszelő két körnek tehát, *ABC*-nek és *DEF*-nek ugyanaz a *P* a középpontja; ez viszont nem lehetséges (III. 5.).

Nem szel át tehát kör kört több mint két pontban. Éppen ezt kellett megmutatni.

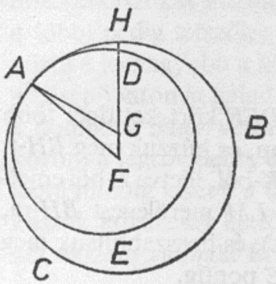
F.: III. 24.

III. 11. Tétel

Ha két kör belülről érinti egymást és középpontjaikat vesszük, akkor a középpontjaikra illesztett szakasz meghosszabbítása a körök érintési pontjába vezet.

Érintse ugyanis egymást belülről két kör, *ABC* és *ADE* az *A* pontban, és vegyük az *ABC* körnek az *F*, az *ADE* körnek pedig a *G* középpontját (III. 1.). Azt állítom, hogy a *G*-ből *F*-re illesztett szakasz (III. 6., 1. P.) meghosszabbítása *A*-ba vezet.

Tegyük föl ugyanis, hogy nem, és haladjon mint *FGH*, és húzzuk meg *AF*-et, *AG*-t. Minthogy tehát *AG* és *GF* (együtt) nagyobb *AF*-nél (I. 20.), azaz *FH*-nál, vonjuk le a közös *GF*-et, így a maradék *AG* nagyobb a maradék *GH*-nál. *AG* viszont egyenlő *GD*-vel, *GD* is nagyobb tehát *GH*-nál, a kisebb a nagyobbnál (8. Ax.); ez viszont nem lehetséges. Az *F*-ből *G*-re illesztett egyenes tehát nem máshol halad; így az *A* érintési ponton át halad.



Ha tehát két kör érinti belülről egymást [és középpontjaikat vesszük], akkor a középpontjaikra illesztett szakasz [meghosszabbítása] a körök érintési pontjába vezet. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: III. 13.

III. 12. Tétel

*Ha két kör kívülről érinti egymást, akkor a középpontjaikra illesztett egyenes az érintési pontjukon át halad.**

Érintse ugyanis egymást kívülről két kör, *ABC* és *ADE* az *A* pontban, és vegyük föl az *ABC* körnek az *F*, az *ADE* körnek pedig a *G* középpontját (III. 1.). Azt állítom, hogy az *F*-ből *G*-re illesztett egyenes az *A* érintési ponton át halad.

Tegyük föl ugyanis, hogy nem, és haladjon mint *FCDG*, és húzzuk meg *AF*-et, *AG*-t.

Minthogy tehát az *F* pont középpontja az *ABC* körnek, egyenlő *AF* az *FC*-vel. Ismét, minthogy a *G* pont középpontja az *ADE* körnek, egyenlő *AG* a *GD*-vel. De megmutattuk azt is, hogy *AF* egyenlő *FC*-vel, így *AF* és *AG* (együtt) egyenlő *FC*-vel meg *GD*-vel, úgyhogy a teljes *FG* nagyobb, mint *FC* meg *GD*. Azonban kisebb is (I. 20.); ez viszont nem lehetséges. Nem igaz tehát, hogy az *F*-ből *G*-re illesztett egyenes nem halad át az *A* érintési ponton; áthalad tehát rajta.

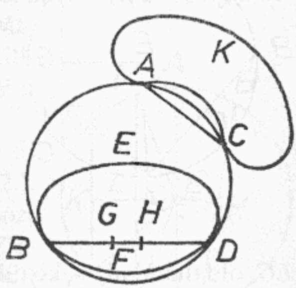
Ha tehát két kör kívülről érinti egymást, akkor a középpontjaikra illesztett egyenes az érintési pontjukon át halad. Éppen ezt kellett megmutatni.

III. 13. Tétel

Kör kört nem érint egynél több pontban, akár belülről, akár kívülről érinti.

Tegyük föl ugyanis először, hogy az *ABCD* kör az *EBFD* kört belülről több mint egy pontban érinti, *D*-ben és *B*-ben.

Vegyük az *ABCD* körnek a *G*, az *EBFD* körnek pedig a *H* középpontját (III. 1.). A *G*-ből *H*-ra illesztett egyenes tehát a *B* és *D* pontokba vezet (III. 11.). Haladjon mint *BGHD* (III. 6.). Minthogy a *G* pont középpontja az *ABCD* körnek, egyenlő *BG* a *GD*-vel, nagyobb tehát *BG* a *HD*-nél (8. Ax.), még inkább nagyobb tehát *BH* a *HD*-nél. Ismét, minthogy a *H* pont középpontja az *EBFD* körnek, egyenlő *BH* a *HD*-vel. De megmutattuk azt is, hogy még inkább nagyobb nála; ez viszont nem lehetséges, nem érint tehát kör kört belülről egynél több pontban.



Azt állítom, hogy kívülről sem.

Tegyük föl ugyanis, hogy az *ACK* kör az *ABCD* kört kívülről egynél több pontban érinti, *A*-ban és *C*-ben, és húzzuk meg *AC*-t.

Minthogy tehát mind a két *ABCD*, *ACK* körvonalon tetszőlegesen választottunk két pontot, *A*-t és *C*-t, így a pontokra illesztett egyenes mind a két körön belül halad (III. 2.). Azonban az *ABCD* körön belül halad, az *ACK* körön viszont kívül; de ez lehetetlen, nem érint tehát kör kört kívülről egynél több pontban. És megmutattuk, hogy belülről sem.

Nem érint tehát kör kört egynél több pontban, akár belülről, akár kívülről érinti. Éppen ezt kellett megmutatni.

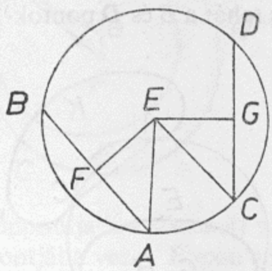
III. 14. Tétel

*Egy körben az egyenlő húrok egyenlő távol vannak a középponttól, és a középponttól egyenlő távol levő húrok egyenlők egymással.**

Legyen *ABCD* valamely kör, és ebben legyenek *AB* és *DC* egyenlő húrok. Azt állítom, hogy *AB* és *CD* egyenlő távol vannak a középponttól.

Vegyük ugyanis az *ABCD* kör középpontját (III. 1.) – ez legyen *E* –, és bocsássuk *E*-ből *AB*-re, illetve *CD*-re az *EF*, *FG* merőlegeseket (I. 12.), és húzzuk meg *AE*-t, *EC*-t.

Minthogy tehát valamely, a középponton átmenő húr, *EF*, egy, nem a középponton át haladó *AB* húrt derékszögben metsz, felezi is azt (III. 3.). Egyenlő tehát *AF* az *FB*-vel, *AB* tehát kétszerese *AF*-nek.



Ugyanezért *CD* is kétszerese *CG*-nek; és *AB* egyenlő *CD*-vel, egyenlő tehát *AF* is *CG*-vel (6. Ax.). És minthogy egyenlő *AE* az *EC*-vel, egyenlő az *AE* oldalú négyzet is az *EL* oldalúval. Azonban az *AE* oldalú négyzettel egyenlő az *AF* és *EF* oldalúak összege – derékszög ugyanis az *F*-nél levő szög (I. 47.) –, az *EC* oldalúval pedig egyenlő az *EG* és *GC* oldalúak összege – derékszög ugyanis a *G*-nél levő szög (ua.) –, az *AF* és *FE* oldalú négyzetek tehát (együtt) egyenlők a *CG* és *EG* oldalúakkal, s közülük az *AF* oldalú egyenlő a *CG* oldalúval – egyenlő ugyanis *AF* a *CG*-vel –, így a maradék *EF* oldalú négyzet egyenlő az *EG* oldalúval (3. Ax.), egyenlő tehát *EF* az *EG*-vel. De azt mondjuk, hogy húrok egy körben egyenlő távol vannak a középponttól, ha a középpontból rájuk bocsátott merőlegesek egyenlők (III. 4. D.), *AB* és *CD* tehát egyenlő távol vannak a középponttól.

Most pedig legyenek az *AB*, *CD* húrok egyenlő távol a középponttól, azaz legyen egyenlő *EF* az *EG*-vel. Azt állítom, hogy *AB* is egyenlő *CD*-vel.

Készítsük el ugyanis ugyanazt az ábrát, mint az előbb. Ekkor hasonlóképp mutathatjuk meg, hogy *AB* az *AF*-nek, *CD* pedig *CG*-nek a kétszerese. S minthogy egyenlő *AE* az *EC*-vel, egyenlő az *AE* oldalú négyzet az *EC* oldalúval. Azonban az *AE* oldalú négyzettel egyenlő az *EF* és *AF* oldalúak összege, az *EC* oldalúval pedig az *EG* és *CG* oldalúak összege (I. 47.). Az *EF* és *AF* oldalú négyzetek tehát (együtt) egyenlők az *EG* meg a *CG* oldalúakkal (1. Ax.), s közülük az *EF* oldalú négyzet egyenlő az *EG* oldalúval – egyenlő ugyanis *EF* az *EG*-vel –, a maradék *AF* oldalú négyzet tehát egyenlő a *CG* oldalúval (3. Ax.); egyenlő tehát *AF* a *CG*-vel; és *AF*-nek kétszerese *AB*, *CG*-nek kétszerese *CD*, egyenlő tehát *AB* a *CD*-vel (5. Ax.).

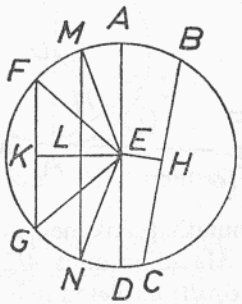
Egy körben tehát az egyenlő húrok egyenlő távol vannak a középponttól, és a középponttól egyenlő távol levő húrok egyenlők egymással. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: III. 15.

III. 15. Tétel

Egy körben a legnagyobb húr az átmérő, a többi húr közül pedig a középponthoz közelebbi mindig nagyobb a távolabbinál.

Legyen *ABCD* valamely kör és *AD* az egyik átmérője, *E* pedig a középpontja, és *BC* legyen közelebb az *AD* átmérőhöz, *FG* pedig távolabb tőle. Azt állítom, hogy *AD* a legnagyobb, és *BC* nagyobb *FG*-nél.



Bocsássuk ugyanis az *E* pontból *BC*-re és *FG*-re az *EH*, illetve *EK* merőlegeseket (I. 12.). És minthogy *BC* közelebb van a középponthoz, *FG* pedig távolabb van tőle, *EK* nagyobb *EH*-nál (III. 5. D.). Mérjük föl (EK-ra) az *EH*-val egyenlő *EL*-t (I. 3.), és *L*-ből emeljünk *EK*-ra egy *LM* merőlegest (I. 11.), hosszabbítsuk meg *N*-ig, és húzzuk meg *ME*-t, *EN*-t, *FE*-t és *EG*-t.

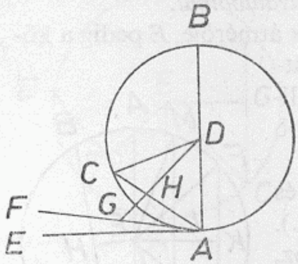
Minthogy egyenlő *EH* az *EL*-lel, *BC* is egyenlő *MN*-nel (III. 14.). Ismét, minthogy egyenlő *AE* az *ME*-vel, *ED* pedig *EN*-nel, így *AD* egyenlő *ME*-vel meg *EN*-nel (2. Ax.). Azonban *ME* és *EN* (együtt) nagyobb *MN*-nél (I. 20.) [*AD* is nagyobb tehát *MN*-nél], *MN* pedig egyenlő *BC*-vel; *AD* tehát nagyobb *BC*-nél. És minthogy e két-két (oldal), *ME*, *EN* és *FE*, *EG* (páronként) egyenlő, és az *MEN* szög nagyobb az *FEG* szögnél, így az *MN* alap nagyobb az *FG* alapnál (I. 24.). Azonban megmutattuk, hogy *MN* egyenlő *BC*-vel [*BC* is nagyobb tehát *FG*-nél]. A legnagyobb tehát az *AD* átmérő, és *BC* nagyobb *FG*-nél.

Valamely körben tehát a legnagyobb húr az átmérő, a többi húr közül pedig mindig a középponthoz közelebbi nagyobb a távolabbinál. Éppen ezt kellett megmutatni.

III. 16. Tétel

Egy kör átmérőjére a végpontjában emelt merőleges a körön kívül halad, és az egyenes és a körív közötti területen nem halad más egyenes, és a félkör szöge minden egyenes vonalú hegyesszögnél nagyobb, a pótszöge pedig kisebb.

Legyen *ABC* a *D* középpont és az *AB* átmérő körülötti kör. Azt állítom, hogy az *AB*-re az *A* végpontjában emelt merőleges (I. 11.) a körön kívül halad. Tegyük föl ugyanis, hogy nem, és haladjon belül, mint *CA*, és húzzuk meg *DC*-t.



Minthogy egyenlő *DA* a *DC*-vel, a *DAC* szög is egyenlő az *ACD* szöggel (I. 5.). *DAC* viszont derékszög, derékszög tehát *ACD* is; így az *ACD* háromszög két szöge, *DAC* és *ACD* (együtt) két derékszöggel egyenlő; ez viszont nem lehetséges (I. 17.). Az *A* pontból *AB*-re emelt merőleges tehát nem a körön belül halad. Hasonlóképp mutathatnánk meg, hogy nem is a körvonalon halad; kívül halad tehát.

Haladjon mint *AE*. Azt állítom, hogy az *AE* egyenes és a *CHA* ív közötti területen más egyenes nem halad.

Tegyük föl ugyanis, hogy halad, *FA*, és bocsássuk a *D* pontból *FA*-ra a *DG* merőlegest (I. 12.). Minthogy *AGD* derékszög, *DAG* pedig kisebb egy derékszögnél, így *DA* nagyobb *DG*-nél (I. 19.). *DA* viszont egyenlő *DH*-val; nagyobb tehát *DH* a *DG*-nél, a kisebb a nagyobbnál (8. Ax.);

ez viszont nem lehetséges. Az egyenes és a körív közötti területen tehát nem halad más egyenes.

Azt is állítom, hogy a félkör szöge, melyet az *AB* egyenes és a *CHA* ív fog közre (III. 7. D.), minden egyenes vonalú hegyesszögnél nagyobb, a pótszöge pedig, melyet a *CHA* ív és az *AE* egyenes fog közre, minden egyenes vonalú hegyesszögnél kisebb.

Ha ugyanis léteznék egy olyan egyenes vonalú szög, amely nagyobb az *AB* egyenes és a *CHA* körív által közrefogott szögnél, de kisebb a *CHA* körív és az *AE* egyenes által közrefogott szögnél, akkor a *CHA* körív és az *AE* egyenes közötti területen egy olyan egyenes haladna, mely egy, az *AB* egyenes és a *CHA* ív által közrefogott szögnél nagyobb, de a *CHA* ív és az *AE* egyenes által közrefogott szögnél kisebb egyenes vonalú szöget alkotna. De ilyen egyenes nem haladhat; nem létezik tehát sem az *AB* egyenes és a *CHA* körív által közrefogott szögnél nagyobb, sem a *CHA* ív és az *AE* egyenes által közrefogott szögnél kisebb egyenes vonalú hegyesszög.

F.: IV. 4., 8., 13.

Következmény

Ebből már nyilvánvaló, hogy a kör átmérőjére a végpontjában emelt merőleges érinti a kört [és hogy egy egyenes egy kört csak egy pontban érint, minthogy megmutattuk azt is, hogy a vele két pontban találkozó egyenes a belsejében halad (III. 2.)].
Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: III. 17., 33., 37.; IV. 2–3., 7., 12.; XII. 16.

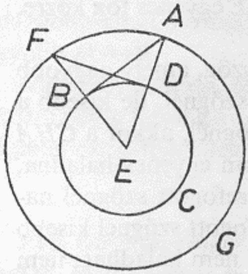
III. 17. Tétel

Húzzunk adott pontból adott körhöz érintő egyenest!

Legyen *A* az adott pont, *BCD* pedig az adott kör. Az *A* pontból kell tehát a *BCD* körhöz érintő egyenest húzni.

Vegyük föl a kör *E* középpontját (III. 1.), és húzzuk meg *AE*-t, és legyen *AFG* az *E* középpontú, *AE* távolsággal rajzolt kör, és *D*-ből emeljük *AE*-re a *DF* merőlegest (I. 11.), és húzzuk meg *EF*-et, *AB*-t. Azt állítom, hogy az *A* pontból húzott *AB* egyenes érintője a *BCD* körnek.*

Minthogy ugyanis *E* középpontja a *BCD* és az *AFG* körnek, egyenlő *AE* az *EF*-fel, *ED* pedig *EB*-vel; így e két-két (oldal), *AE*, *EB* és *EF*, *ED* (páronként) egyenlő; és ugyanazt az *E*-nél levő (*AEF*) szöget fogják közre; a *DF* alap tehát egyenlő az *AB* alappal, és a *DEF* háromszög egyenlő az *EBA* háromszöggel, és a többi szög is páronként egyenlő (I. 4.); egyenlő tehát az *EDF* szög *EBA*-val. *EDF* viszont derékszög, derékszög tehát *EBA* is. És *EB* egy sugár; de a kör átmérőjére a végpontjában emelt merőleges érinti a kört (III. 16. K.), *AB* tehát érinti a *BCD* kört.



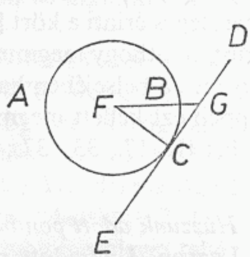
Az adott *A* pontból tehát az adott *BCD* körhöz egy *AB* érintő egyenest húztunk. Éppen ezt kellett megtenni.

F.: III. 37.

III. 18. Tétel

Ha egy kört érint valamely egyenes, és a középpontból az érintési pontra egy egyenest illesztünk, akkor ez az egyenes merőleges lesz az érintőre.

Érintse ugyanis valamely *DE* egyenes az *ABC* kört a *C* pontban, vegyük föl az *ABC* kör *F* középpontját (III. 1.), és illesszük *F*-ből *C*-re *FC*-t. Azt állítom, hogy *FC* merőleges *DE*-re.



Tegyük föl ugyanis, hogy nem az, és bocsássuk az *F* pontból *DE*-re az *FG* merőlegest (I. 12.).

Minthogy tehát *FGC* derékszög, így *FCG* hegyesszög. A nagyobb szöggel szemben viszont nagyobb oldal fekszik (I. 19.), nagyobb tehát *FC* az *FG*-nél. De *FC* egyenlő *FB*-vel, nagyobb tehát *FB* is *FG*-nél, a kisebb a nagyobbnál (8. Ax.); ez viszont nem lehetséges. *FG* tehát nem merőleges *DE*-re. Hasonlóképp mutathatnánk meg, hogy egyetlen más egyenes sem, kivéve *FC*-t; *FC* merőleges tehát *DE*-re.

Ha tehát egy kört érint valamely egyenes, és a középpontból az érintési pontra egy egyenest illesztünk, akkor az az egyenes merőleges lesz az érintőre. Éppen ezt kellett megmutatni.

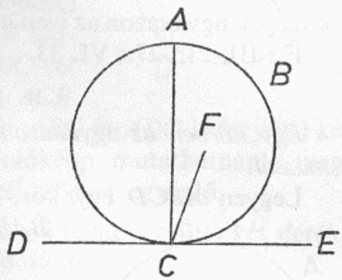
F.: III. 19., 36–37.; IV. 7.

III. 19. Tétel

Ha valamely egyenes érint egy kört, és az érintési pontban egy merőlegest emelünk az érintőre, akkor ezen a merőlegesen lesz a kör középpontja.

Érintse ugyanis valamely *DE* egyenes az *ABC* kört a *C* pontban, és emeljünk *C*-ben *DE*-re egy *CA* merőlegest (I. 11.). Azt állítom, hogy a kör középpontja *CA*-n van.

Tegyük föl ugyanis, hogy nincs rajta a középpont; legyen ez (a középpont) *F*, és húzzuk meg *CF*-et. Minthogy valamely *DE* egyenes érint egy *ABC* kört, és *FC* összeköti a középpontot és az érintési pontot, így *FC* merőleges *DE*-re (III. 18.), *FCE* tehát derékszög. Viszont *ACE* is derékszög, egyenlő tehát az *FCE* szög *ACE*-vel (4. P.), a kisebb a nagyobbal (8. Ax.); ez viszont nem lehetséges. *F* tehát nem középpontja az *ABC* körnek. Hasonlóképpen mutathatnánk meg, hogy egyetlen másik *AC*-n kívül levő pont sem.

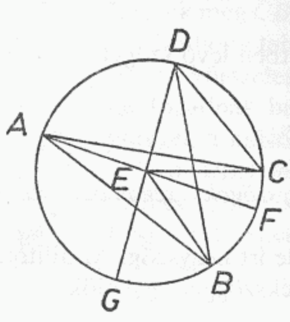


Ha tehát valamely egyenes érint egy kört, és az érintési pontban egy merőlegest emelünk az érintőre, akkor ezen a merőlegesen lesz a kör középpontja. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: III. 32.

III. 20. Tétel

*Egy körben a középponti szög kétakkora, mint a kerületi, ha e szögek ugyanazon az íven nyugszanak.**



Legyen *ABC* valamely kör, s ennek *BEC* egy középponti, *BAC* pedig egy kerületi szöge, s nyugodjanak e szögek ugyanazon a *BC* íven. Azt állítom, hogy a *BEC* szög kétakkora, mint *BAC*.

Húzzuk meg ugyanis *AE*-t, és hosszabbítsuk meg *F*-ig.

Minthogy tehát *AE* egyenlő *EB*-vel, egyenlő az *EAB* szög is *EBA*-val (I. 5.); az

EAB és *EBA* szögek tehát (együtt) kétakkorák, mint *EAB*. A *BEF* szög viszont egyenlő *EAB*-vel meg *EBA*-val (I. 32.); *BEF* is kétakkora tehát, mint *EAB*. Ugyanezért az *FEC* szög is kétakkora, mint *EAC*. A teljes *BEC* szög tehát kétakkora, mint a teljes *BAC* szög.

Legyen ismét egy töröttvonalunk,** és legyen *BDC* egy másik szög. Húzzuk meg *DE*-t, és hosszabbítsuk meg *G*-ig. Hasonlóképp mutathatnánk meg, hogy a *GEC* szög kétakkora, mint *EDC*, s ezekből a *GEB* szög kétakkora, mint *EDB*; a maradék *BEC* szög tehát kétakkora, mint *BDC*.

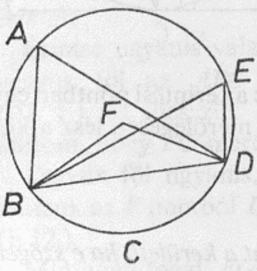
Egy körben tehát a középponti szög kétakkora, mint a kerületi, ha e szögek ugyanazon az íven nyugszanak. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: III. 21., 27.; VI. 33.

III. 21. Tétel

Egy körben az ugyanazon körszeletben levő szögek egyenlők egymással.*

Legyen *ABCD* egy kör, és legyenek ugyanabban a szeletében a *BAD*, *BED* szögek. Azt állítom, hogy a *BAD* és *BED* szögek egyenlők egymással.



Vegyük ugyanis az *ABCD* kör középpontját (III. 1.), legyen ez *F*, és húzzuk meg *BF*-et, *FD*-t.

Minthogy *BFD* középponti szög, *BAD* pedig kerületi szög, és ugyanazon a *BCD* íven nyugszanak, így a *BFD* szög kétakkora, mint *BAD* (III. 20.). Ugyanezért *BED*-nek is kétszerese a *BFD* szög, egyenlő tehát a *BAD* szög *BED*-vel (6. Ax.).

Egy körben tehát az ugyanazon körszeletben levő szögek egyenlők egymással. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: III. 22.

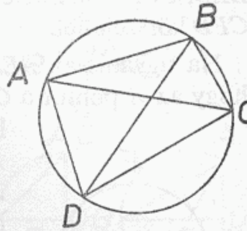
III. 22. Tétel

A körbe írt négyszögek (azaz a húrnégyszögek) szemközti szögei (együtt) két derékszöggel egyenlők.

Legyen *ABCD* egy kör, és *ABCD* egy bele írt négyszög. Az állítom, hogy a szemközti szögei (együtt) két derékszöggel egyenlők.

Húzzuk meg *AC*-t és *BD*-t.

Minthogy minden háromszög három szöge (együtt) két derékszöggel egyenlő (I. 32.), így az *ABC* háromszög három szöge, *CAB*, *ABC* és *BCA* (együtt) két derékszöggel egyenlő. Viszont a *CAB* szög egyenlő *BDC*-vel – ugyanis ugyanabban a *BADC* körszeletben vannak (III. 21.) –, az *ACB* szög pedig *ADB*-vel – ugyanis ugyanabban az *ADCB* körszeletben vannak (ua.) –; a teljes *ADC* szög tehát egyenlő *BAC*-vel meg *ACB*-vel (2. Ax.). Adjuk hozzájuk közös (tagnak) az *ABC* szöget, így az *ABC*, *BAC*, *ACB* szögek (együtt) egyenlők *ABC*-vel meg *ADC*-vel (2. Ax.). Azonban *ABC*, *BAC* és *ACB* (együtt) két derékszöggel egyenlő, tehát *ABC* és *ADC* is (együtt) két derékszöggel egyenlő (1. Ax.). Hasonlóképp mutathatnánk meg, hogy *BAD* és *DCA* is (együtt) két derékszöggel egyenlő.



A körbe írt négyszögek szemközti szögei tehát (együtt) két derékszöggel egyenlők. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: III. 31–32.

III. 23. Tétel

Ugyanarra a szakaszra nem lehet két hasonló, de nem egyenlő körszeletet szerkeszteni ugyanazon az oldalon.

Tegyük föl ugyanis, hogy lehetséges, és legyen ugyanarra az *AB* egyenesre két hasonló, de nem egyenlő körszelet, *ACB* és *ADB* szerkesztve ugyanazon az oldalon, és húzzuk meg rajtuk át *ACD*-t, és húzzuk meg *CB*-t, *DB*-t.

Minthogy tehát az *ACB* körszelet hasonló az *ADB* körszelethez, körszeletek viszont akkor hasonlók, ha egyenlő szögeket fogadnak be (III. 11. D.), így az *ACB* szög egyenlő az *ADB* szöggel, a külső a belsővel; ez viszont nem lehetséges (I. 16.).

Nem lehet tehát ugyanarra a szakaszra két hasonló, de nem egyenlő körszeletet szerkeszteni ugyanazon az oldalon. Éppen ezt kellett megmutatni.

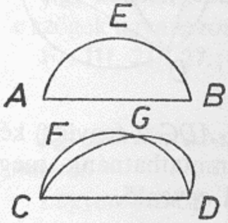
F.: III. 24.

III. 24. Tétel

Az egyenlő szakaszokon nyugvó hasonló körszeletek egyenlők egymással.

Nyugodjanak ugyanis az egyenlő *AB*, *CD* egyeneseken a hasonló *AEB*, *CFD* körszeletek. Azt állítom, hogy egyenlő az *AEB* körszelet a *CFD* körszelettel.

Ha ugyanis az *AEB* körszeletet a *CFD* körszeletre illesztjük úgy, hogy az *A* pontot a *C* pontra, az *AB* egyenest pedig a *CD* egyenesre helyezzük, akkor a *B* pont is illeszkedni fog *D*-re, minthogy *AB* egyenlő *CD*-vel. De ha *AB* illeszkedik *CD*-re, akkor az *AEB* körszelet is illeszkedik *CFD*-re. Ha ugyanis az *AB* egyenes illeszkedik *CD*-re, az *AEB* körszelet viszont nem illeszkedik *CFD*-re, akkor vagy azon belül halad, vagy kívül, vagy eltér tőle, mint *CGD*, és egy kör egy másikat kettőnél több pontban szel át; ez viszont nem lehetséges (III. 23. és 10.). Tehát nem igaz, hogy – noha az *AB* egyenes illeszkedik *CD*-re – az *AEB* körszelet nem illeszkedik *CFD*-re. Illeszkedik tehát rá, és egyenlő vele.



Az egyenlő szakaszokon nyugvó hasonló körszeletek tehát egyenlők egymással. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: III. 26.

III. 25. Tétel

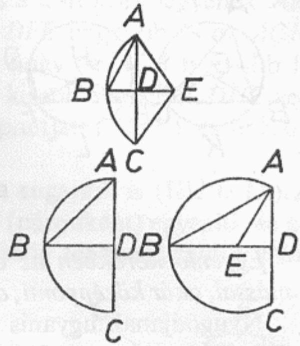
Adott körszelethez rajzoljuk meg a kört, amelynek szelete!

Legyen *ABC* az adott körszelet. Az *ABC* körszelethez kell tehát megrajzolni azt a kört, amelynek szelete.

Legyen *D* az *AC* felezőpontja (I. 10.), és a *D* pontban emeljük *AC*-re a *DB* merőlegest (I. 11.), és húzzuk meg *AB*-t. Az *ABD* szög tehát vagy nagyobb *BAD*-nél, vagy egyenlő vele, vagy kisebb nála.

Legyen először nagyobb nála, és szerkesszünk az *AB* egyenesre, a rajta levő *A* ponthoz, egy *ABD*-vel egyenlő *BAE* szöget (I. 23.), és hosszabbítsuk meg *DB*-t *E*-ig, és húzzuk meg *EC*-t. Minthogy tehát az *ABE* szög egyenlő a *BAE* szöggel, egyenlő az *EB* szakasz is *EA*-val (I. 6.). És minthogy egyenlő *AD* *DC*-vel, *DE* pedig közös (oldal), így e két-két (oldal), *AD*, *DE* és *DC*, *DE* páronként egyenlő.

És az ADE szög egyenlő a CDE szöggel – derékszög ugyanis mind a kettő (I. 15. és 1. Ax.) –, az EA alap tehát egyenlő az EC alappal (I. 4.). De megmutattuk, hogy EA az EB-vel egyenlő, tehát EB is egyenlő EC-vel. Tehát e három (szakasz), EA, EB és EC egyenlő egymással (1. Ax.), így az E középpontú, és az EA, EB, EC távolságok egyikével rajzolt kör a többi ponton is át fog menni, és (az adott körszelethez) lesz hozzárajzolva (III. 9.). Az adott körszelethez tehát megrajzoltuk a kört. És az ABC körszelet nyilván kisebb a félkörnél, minthogy az E középpont rajta kívül található.



Hasonlóképp, ha az ABD szög egyenlő BAD-vel, akkor, minthogy AD egyenlő lesz mind a két BD és DC (szakasszal), így e három (szakasz), AD, BD és DC egyenlő (I. 6.) egymással, és D középpontja a kiegészített körnek, és ABC nyilván félkör.

Ha pedig az ABD szög kisebb BAD-nél, és az AB egyenesre, a rajta levő A ponthoz, egy ABD-vel egyenlő szöget szerkesztünk (I. 23.), akkor a DB egyenesen az ABC körszeletben belülre fog esni a középpont, és az ABC körszelet nyilván nagyobb lesz a félkörnél.

Adott körszelethez megrajzoltuk tehát a kört. Éppen ezt kellett megtenni.

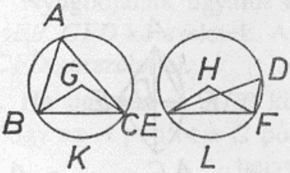
III. 26. Tétel

Egyenlő körökben az egyenlő szögek egyenlő íveken nyugszanak, akár középponti, akár kerületi szögek.

Legyenek ABC, DEF egyenlő körök, és legyenek bennük BGC, EHF egyenlő középponti, BAC és EDF pedig egyenlő kerületi szögek. Azt állítom, hogy a BKC ív egyenlő az ELF ívvel.

Húzzuk meg ugyanis BC-t és EF-et.

Minthogy az ABC, DEF körök egyenlők, egyenlők a sugaraik; így e két-két (oldal), BG, GC és EH, HF (páronként) egyenlő; és a G-nél levő szög egyenlő a H-nál levővel, a BC alap tehát egyenlő az EF alappal (I. 4.). És minthogy egyenlő az A-nál levő szög a D-nél levővel, a BAC körszelet hasonló az EDF körszelethez; és egyenlő szakaszokon nyugszanak; az egyenlő szakaszokon nyugvó hasonló körszeletek viszont egyenlők egymással (III. 24.), egyenlő tehát a *BAC* körszelet *EDF*-fel. De a teljes *ABC* kör is egyenlő a teljes *DEF* körrel, így a maradék *BKC* ív egyenlő az *ELF* ívvel (3. Ax.).



Egyenlő körökben tehát az egyenlő szögek egyenlő íveken nyugszanak, akár középponti, akár kerületi szögek. Éppen ezt kellett megmutatni.

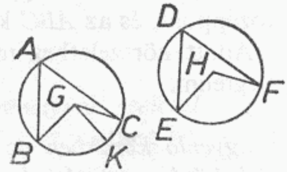
F.: III. 27–28.; IV. 11., 15.; XIII. 10.

III. 27. Tétel

Egyenlő körökben az egyenlő íveken nyugvó szögek egyenlők egymással, akár középponti, akár kerületi szögek.

Nyugodjanak ugyanis az egyenlő *ABC*, *DEF* körökben az egyenlő *BC*, *EF* íveken a *G*, *H* középpontoknál a *BGC*, *EHF* középponti és a *BAC*, *EDF* kerületi szögek. Azt állítom, hogy a *BGC* szög egyenlő az *EHF*, a *BAC* szög pedig az *EDF* szöggel.

Ha ugyanis a *BGC* szög nem egyenlő *EHF*-fel, akkor egyikük nagyobb. Legyen *BGC* a nagyobb szög, és szerkesszünk a *BG* egyenesre, a rajta levő *G* ponthoz, egy *EHF*-fel egyenlő *BGK* szöget (I. 23.). Az egyenlő szögek viszont egyenlő íveken nyugszanak, ha (mindketten) középponti szögek (III. 26.), egyenlő tehát a *BK* ív az *EF* ívvel. Azonban *EF* egyenlő *BC*-vel, tehát *BK* is egyenlő *BC*-vel (1. Ax.), a kisebb a nagyobbal (8. Ax.); ez viszont nem lehetséges. Nem igaz tehát, hogy a *BGC* szög nem egyenlő *EHF*-fel; egyenlő hát. És *BGC*-nek fele része az *A*-nál levő szög, *EHF*-nek pedig fele része a *D*-nél levő szög (III. 20.); egyenlő hát az *A*-nál levő szög is a *D*-nél levővel (6. Ax.).



Egyenlő körökben az egyenlő íveken nyugvó szögek tehát egyenlők egymással, akár középponti, akár kerületi szögek. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: III. 29.; IV. 11–12., 15.; VI. 33.; XII. 1., 17.; XIII. 11.

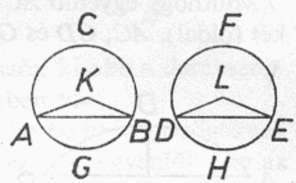
III. 28. Tétel

Egyenlő körökben az egyenlő húrokhoz egyenlő ívek tartoznak, mégpedig a nagyobb ív egyenlő a (másik kör) nagyobb ívével, a kisebb ív pedig a (másik kör) kisebb ívével.

Legyenek *ABC*, *DEF* egyenlő körök, és a köröknek legyenek *AB*, *DE* egyenlő húrjaik, melyekhez az *ACB*, *DFE* nagyobb és az *AGB*, *DHE* kisebb ívek tartoznak. Azt állítom, hogy az *ACB* nagyobb ív egyenlő a *DFE* nagyobb ívvel, az *AGB* kisebb ív pedig *DHE*-vel.

Vegyük föl ugyanis a körök *K*, *L* középpontjait (III. 1.), és húzzuk meg *AK*-t, *KB*-t, *DL*-t és *LE*-t.

Minthogy a körök egyenlők, egyenlők a sugaraik is (III. 1. D.), e két-két (szakasz) tehát, *AK*, *KB* és *DL*, *LE* (páronként) egyenlő; és az *AB* alap egyenlő a *DE* alappal; az *AKB* szög tehát egyenlő a *DLE* szöggel (I. 8.). Az egyenlő szögek viszont egyenlő íveken nyugszanak, ha (mindketten) középponti szögek (III. 26.), egyenlő hát az *AGB* ív a *DHE* ívvel. De a teljes *ABC* kör is egyenlő a teljes *DEF* körrel, a maradék *ACB* ív is egyenlő tehát a maradék *DFE* ívvel (3. Ax.).



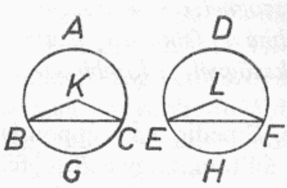
Egyenlő körökben tehát az egyenlő húrokhoz egyenlő ívek tartoznak, mégpedig a nagyobb ív a nagyobb ívvel, a kisebb ív pedig a kisebb ívvel egyenlő. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: III. 30.; IV. 12.; XII. 17.; XIII. 8.

III. 29. Tétel

Egyenlő körökben az egyenlő ívekhez egyenlő húrok tartoznak.

Legyenek *ABC*, *DEF* egyenlő körök, és messük ki belőlük az egyenlő *BGC*, *EHF* íveket, és húzzuk meg a *BC*, *EF* egyeneseket. Azt állítom, hogy *BC* egyenlő *EF*-fel.



Vegyük föl ugyanis a körök középpontját (III. 1.) – ez legyen *K* ill. *L* –, és húzzuk meg *BK*-t, *KC*-t, *EL*-t és *LF*-et.

Minthogy egyenlő a *BGC* ív az *EHF*

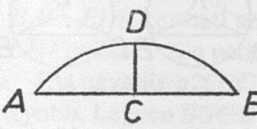
ívvel, egyenlő a *BKC* szög is az *ELF* szöggel (III. 27.). S minthogy egyenlők az *ABC*, *DEF* körök, egyenlők a sugaraik is (III. 1. D.); e két-két (szakasz) tehát, *BK*, *KC* és *EL*, *LF* egyenlő; és egyenlő szögeket fognak közre; a *BC* alap tehát egyenlő az *EF* alappal (I. 4.). Egyenlő körökben tehát az egyenlő ívekhez egyenlő húrok tartoznak. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: IV. 11., 15.; XIII. 10.

III. 30. Tétel

Felezzünk meg adott körívet!

Legyen *ADB* az adott körív. Az *ADB* ívet kell tehát megfelezni. Húzzuk meg *AB*-t, legyen *C* a felezőpontja (I. 10.), emeljünk a *C* pontból *AB*-re egy *CD* merőlegest, és húzzuk meg *AD*-t, *DB*-t. Minthogy egyenlő *AC* a *CB*-vel, *CD* pedig közös (oldal), így e két-két (oldal), *AC*, *CD* és *CB*, *CD* (páronként) egyenlő; és az *ACD* szög egyenlő a *BCD* szöggel – derékszög ugyanis mind a kettő (4. P.)* –, az *AD* alap tehát egyenlő a *DB* alappal (I. 4.). Az egyenlő húrokhoz viszont egyenlő ívek tartoznak, mégpedig a nagyobb ív egyenlő a nagyobb ívvel, a kisebb ív pedig a kisebb ívvel (III. 28.); és mind a két *AD*, *DB* ív kisebb a félkörnél, egyenlő tehát az *AD* ív a *DB* ívvel.



Megfeleztük tehát az adott ívet a *D* pontban. Éppen ezt kellett megtenni.

F.: IV. 16.

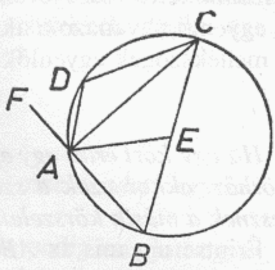
III. 31. Tétel

Egy körben a félkörbeli szög (III. 8. D.) *derékszög, az (ennél) nagyobb körszeletben levő szög kisebb a derékszögnél, a kisebb szeletben levő szög pedig nagyobb a derékszögnél; továbbá a (félkörnél) nagyobb körszelet szöge* (III. 7. D.) *nagyobb a derékszögnél, a kisebb szeleté pedig kisebb a derékszögnél.*

Legyen *ABCD* egy kör, *BC* egy átmérője, *E* pedig a középpontja, és húzzuk meg *BA*-t, *AC*-t, *AD*-t, *DC*-t. Azt állítom, hogy a *BAC* félkörbeli *BAC* szög derékszög, a félkörnél nagyobb *ABC* körszeletben levő *ABC* szög kisebb a derékszögnél, a félkörnél kisebb *ADC* körszeletben levő *ADC* szög pedig nagyobb a derékszögnél.

Húzzuk meg *AE*-t, és hosszabbítsuk meg *BA*-t *F*-ig.

Minthogy *BE* egyenlő *AE*-vel, egyenlő az *ABE* szög is *BAE*-vel (I. 5.). Ismét, minthogy *CE* egyenlő *AE*-vel, egyenlő az *ACE* szög is *CAE*-vel (ua.); a teljes *BAC* szög tehát egyenlő e két szöggel, *ABC*-vel meg *ACB*-vel (2. Ax.). De az *ABC* háromszög *FAC* külső szöge is egyenlő e két szöggel, *ABC*-vel meg *ACB*-vel (I. 32.), egyenlő tehát a *BAC* szög is az *FAC* szöggel (1. Ax.); derékszög tehát mind a kettő (I. 10. D.); a *BAC* félkörbeli *BAC* szög tehát derékszög.



Minthogy az *ABC* háromszög két szöge, *ABC* és *BAC* (együtt) két derékszögnél kisebb (I. 17.), *BAC* pedig derékszög, így az *ABC* szög kisebb a derékszögnél – és a félkörnél nagyobb *ABC* körszeletben van.

Minthogy *ABCD* egy körbe írt négyszög, a körbe írt négyszögeknek viszont a szemközti szögei (együtt) két derékszöggel egyenlők [így az *ABC*, *ADC* szögek (együtt) két derékszöggel egyenlők (III. 22.)]; és az *ABC* szög derékszögnél kisebb; a maradék *ADC* szög tehát derékszögnél nagyobb – és a félkörnél kisebb *ADC* körszeletben van.

Azt is állítom, hogy a (félkörnél) nagyobb körszelet szöge, amelyet az *ABC* ív és az *AC* egyenes fog közre, derékszögnél nagyobb, a kisebb körszelet szöge pedig, amelyet az *ADC* ív és az *AC* egyenes fog közre, derékszögnél kisebb. Ez minden további nélkül nyilvánvaló. Minthogy ugyanis a *BA* és *AC* egyenesek szöge derékszög, így az *ABC* ív és az *AC* egyenes által közrefogott szög derékszögnél nagyobb (8. Ax.). Ismét, minthogy az *AC* és *AF* egyenesek szöge derékszög, így a *CA* egyenes és az *ADC* ív által közrefogott szög derékszögnél kisebb.

Egy körben tehát a félkörbeli szög derékszög, a nagyobb körszeletben levő szög derékszögnél kisebb, a kisebben levő szög pedig derékszögnél nagyobb; továbbá a nagyobb körszelet szöge derékszögnél nagyobb, a kisebb körszeleté pedig derékszögnél kisebb. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: III. 32–33.; IV. 6.; VI. 13.; X. 13. L., 29., 30., 33–35.; XI. 23. L.; XII. 1., 17.; XIII. 12., 14., 16.

[*Következmény*

Ebből már nyilvánvaló, hogy ha egy háromszög egyik szöge egyenlő a másik kettő összegével, akkor e szög derékszög, mivel a külső szöge is egyenlő ugyanazoknak a szögeknek az összegével (I. 32.); ha pedig a mellékszögek egyenlők, akkor derékszögek (I. 10. D.).]

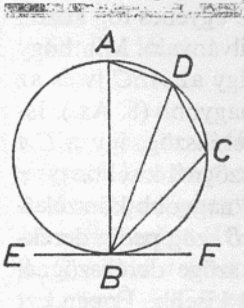
III. 32. Tétel

Ha egy kört érint egy egyenes, és az érintési pontból szelőt húzunk a körhöz, akkor azok a szögek, amelyeket az érintővel alkot, egyenlők lesznek a másik körszeletben levő szögekkel.

Érintse ugyanis az *ABCD* kört valamely *EF* egyenes a *B* pontban, és húzzunk a *B* pontból egy *BD* szelőt az *ABCD* körhöz. Azt állítom, hogy azok a szögek, amelyeket *BD* alkot az *EF* érintővel, egyenlők a másik körszeletben levő szögekkel, azaz hogy az *FBD* szög egyenlő a *BAD* körszeletben szerkesztendő szöggel, az *EBD* szög pedig egyenlő a *DCB* körszeletben szerkesztendő szöggel.

Emeljük ugyanis a *B* pontból *EF*-re a *BA* merőlegest (I. 11.), és legyen *C* a *BD* íven tetszőlegesen választott pont, és húzzuk meg *AD*-t, *DC*-t, *CB*-t.

Minthogy valamely *EF* egyenes érinti a *B* pontban az *ABCD* kört, és az érintési pontból *BA*-t az érintőre merőlegesen emeltük, így *BA*-n van az *ABCD* kör középpontja (III. 19.). *BA* tehát átmérője az *ABCD* körnek; az *ADB* szög tehát, minthogy félkörbeli, derékszög (III. 31.). A többi két szög tehát, *BAD* és *ABD* (együtt) egy derékszöggel egyenlő (I. 32.). De *ABF* is derékszög, az *ABF* szög tehát egyenlő *BAD*-vel meg *ABD*-vel (4. P. és 1. Ax.). Vonjuk le a közös *ABD* szöget; így a maradék *DBF* szög egyenlő a másik körszeletben levő *BAD* szöggel (3. Ax.). S minthogy *ABCD* körbe írt négyszög, a szemközti szögei (együtt) két derékszöggel egyenlők (III. 22.). De a *DBF*, *DBE* szögek is (együtt) két derékszöggel egyenlők (I. 13.),



DBF meg *DBE* tehát egyenlő a *BAD* meg a *BCD* szöggel (1. Ax.). Megmutattuk, hogy ezek közül a *BAD* szög egyenlő *DBF*-fel, így a maradék *DBE* szög egyenlő a másik körszeletben, *DCB*-ben levő *DCB* szöggel (2. Ax.).

Ha tehát egy kört érint egy egyenes, és az érintési pontból szelőt húzunk a körhöz, akkor azok a szögek, amelyeket az érintővel alkot, egyenlők lesznek a másik körszeletben levő szögekkel. Éppen ezt kellett megmutatni.

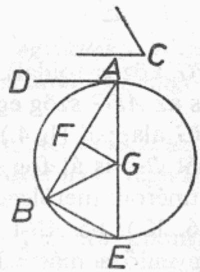
F.: III. 33–34.; IV. 2., 10.

III. 33. Tétel

Írjunk adott szakasz fölé olyan körszeletet, amely adott egyenes vonalú szöggel egyenlő szöget fogad be!

Legyen *AB* az adott szakasz, a *C*-nél levő szög pedig az adott egyenes vonalú szög. Az adott *AB* egyenes fölé kell tehát olyan körszeletet írni, amely a *C*-nél levővel egyenlő szöget fogad be.

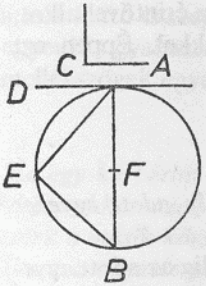
Mármost a *C*-nél levő szög vagy hegyesszög, vagy derékszög, vagy tompaszög. Legyen először hegyesszög, és – mint az első ábrán – szerkesszünk az *AB* egyenesre, az *A* ponthoz egy, a *C*-nél levő szöggel egyenlő *BAD* szöget (I. 23.). Hegyesszög tehát *BAD* is. Emeljük *DA*-ra az *AE* merőlegest (I. 11.), legyen *F* az *AB* felezőpontja (I. 10.), emeljük az *F* pontban *AB*-re az *FG* merőlegest (I. 11.), és húzzuk meg *GB*-t.



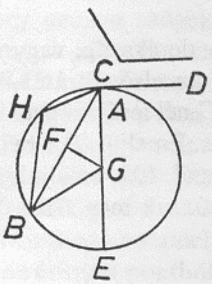
Minthogy egyenlő *AF* az *FB*-vel, *FG* pedig közös (oldal), így e két-két (oldal), *AF*, *FG* és *FB*, *FG* (páronként) egyenlő; és az *AFG* szög egyenlő a *BFG* szöggel; az *AG* alap tehát egyenlő a *BG* alappal (I. 4.). A *G* középpontú, *AG* távolsággal rajzolt kör tehát *B*-n is át fog haladni. Rajzoljuk meg, legyen *ABE*, és húzzuk meg *EB*-t. Minthogy tehát az *AE* átmérő *A* végpontjában *AD* az *AE*-re merőleges, így *AD* érinti az *ABE* kört (III. 16. K.). Minthogy tehát az *ABE* kört érinti valamely *AD* egyenes, és az *A* érintési pontból egy *AB* szelő halad az *ABE* körhöz, így a *DAB* szög egyenlő a másik körszeletben levő *AEB* szöggel (III. 32.). Azonban *DAB* egyenlő a *C*-nél levő szöggel, a *C*-nél levő szög is egyenlő tehát *AEB*-vel (1. Ax.).

Az adott *AB* egyenes fölé tehát olyan *AEB* körszeletet írtunk, mely az adott *C*-nél levő szöggel egyenlő *AEB* szöget fogad be.

Legyen most derékszög a *C*-nél levő szög, és kelljen ismét az *AB* egyenes fölé olyan körszeletet írni, mely a *C*-nél levő derékszöggel egyenlő szöget fogad be. Szerkesszünk – amint a második ábrán történt – egy, a *C*-nél levő derékszöggel egyenlő *BAD* szöget (I. 23. v. 11.), és legyen *F* az *AB* felezőpontja (I. 10.), *AEB* pedig az *F* középpontú, az *AF*, *FB* távolságok egyikével rajzolt kör.



Érinti tehát az *AD* egyenes az *ABE* kört, mivel az *A*-nál levő szög derékszög (III. 16. K.). És egyenlő a *BAD* szög az *AEB* körszeletben levő szöggel – derékszög ugyanis ez is, mivel félkörbeli (III. 31.). Azonban a *BAD* szög egyenlő a *C*-nél levő szöggel is. Az *AEB* körszeletbeli szög is egyenlő tehát a *C*-nél levővel (1. Ax.).



Legyen végül a *C*-nél levő szög tompaszög, és – amint a harmadik ábrán történt – szerkesszünk az *AB* egyenesre, az *A* ponthoz egy vele egyenlő *BAD* szöget (I. 23.), és emeljük *AD*-re az *AE* merőlegest (I. 11.), és ismét legyen *F* az *AB* felezőpontja (I. 10.), és emeljük *AB*-re az *FG* merőlegest (I. 11.), és húzzuk meg *GB*-t.

Minthogy ismét egyenlő *AF* az *FB*-vel, és *FG* közös (oldal), így e két-két (oldal), *AF*, *FG* és *FB*, *FG* egyenlő; és az *AFG* szög egyenlő a *BFG* szöggel; az *AG* alap tehát egyenlő a *BG* alappal (I. 4.). A *G* középpontú, *AG* távolsággal rajzolt kör tehát *B*-n is át fog haladni. Haladjon mint *AEB*. Minthogy *AD* az *AE* átmérőre merőleges a végpontjában, így *AD* érinti az *AEB* kört (III. 16. K.). És *AB*-t az *A* érintési pontból húztuk; a *BAD* szög tehát egyenlő a másik körszeletben, *AHB*-ben szerkesztendő szöggel (III. 32.). De a *BAD* szög egyenlő a *C*-nél levő szöggel. Az *AHB* körszeletben levő szög is egyenlő tehát a *C*-nél levővel (1. Ax.).

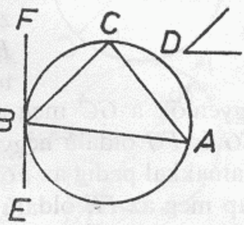
Az adott *AB* egyenes fölé tehát olyan körszeletet írtunk, *AHB*-t, amely a *C*-nél levő szöggel egyenlő szöget fogad be. Éppen ezt kellett megtenni.

III. 34. Tétel

Vegyünk el adott körből adott egyenes vonalú szöget befogadó körszeletet!

Legyen *ABC* az adott kör, a *D*-nél levő szög pedig az adott egyenes vonalú szög. Az *ABC* körből kell tehát az adott *D*-nél levő szöggel egyenlő egyenes vonalú szöget befogadó körszeletet elvenni.

Húzzuk meg a *B* ponton át az *ABC* kör *EF* érintőjét (III. 1., I. 11. és III. 16. K.), és szerkesszük az *FB* egyenesre, a rajta levő *B* ponthoz a *D*-nél levő szöggel egyenlő *FBC* szöget (I. 23.).



Minthogy tehát valamely *EF* egyenes érinti az *ABC* kört, és *BC*-t a *B* érintési pontból húztuk, így az *FBC* szög egyenlő a másik körszeletben, *BAC*-ben szerkesztendő szöggel (III. 32.). De *FBC* egyenlő a *D*-nél levő szöggel; a *BAC* körszeletben levő szög is egyenlő tehát a *D*-nél levővel (1. Ax.).

Az adott *ABC* körből tehát elvettünk egy olyan *BAC* körszeletet, mely az adott *D*-nél levő egyenes vonalú szöggel egyenlő szöget fogad be. Éppen ezt kellett megtenni.

III. 35. Tétel

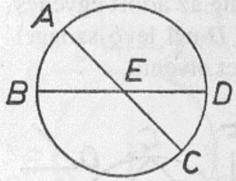
Ha egy körben két húr metszi egymást, akkor az egyiknek a részei által közrefogott téglalap egyenlő a másiknak a részei által közrefogott téglalappal.

Messe ugyanis egymást az *ABCD* körben két húr, *AC* és *BD*, az *E* pontban. Azt állítom, hogy az *AE* és *EC* által közrefogott téglalap egyenlő a *DE* és *EB* által közrefogott téglalappal.

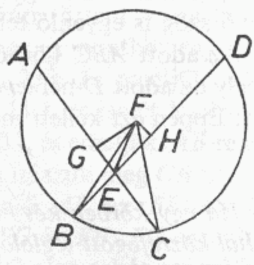
Ha *AC* és *BD* a középponton át halad, úgy hogy *E* középpontja az *ABCD* körnek, akkor nyilvánvaló, hogy – mivel *AE*, *EC*, *DE* és *EB* egyenlők – az *AE* és *EC* közötti téglalap is egyenlő a *DE* és *EB* közötti téglalappal.

Ne haladjon most *AC* és *BD* a középponton át, és vegyük föl az *ABCD* kör középpontját (III. 1.) – ez legyen *F* –, és bocsássuk *AC*-re, illetve BD-re az FG, FH merőlegeseket (I. 12.), és húzzuk meg FB-t, FC-t és FE-t.

Minthogy valamely a középponton át haladó FG egyenes egy nem a középponton át haladó AC húrt derékszögben metsz, felezi is



(III. 3.); egyenlő tehát AG a GC-vel. Minthogy az AC húr ketté van osztva egyenlő részekre a G, és nem egyenlőkre (III. 4.) az E pontban, így az AE és EC által közrefogott téglalap meg az EG oldalú négyzet együtt egyenlő a GC oldalú négyzettel (II. 5.). Adjuk hozzájuk közös (tagnak) az FG oldalú négyzetet; így az AE és EC közötti téglalap meg az EG, FG oldalú négyzetek együtt egyenlők a GC meg az FG oldalú négyzetekkel (2. Ax.). Viszont az EG és FG oldalú négyzetekkel egyenlő az FE oldalú, a GC és FG oldalúakkal pedig az FC oldalú (I. 47.); így az AE és EC közötti téglalap meg az FE oldalú négyzet együtt egyenlő az FC oldalú négyzettel. De FC egyenlő FB-vel; az AE és EC közötti téglalap meg az FE oldalú négyzet együtt egyenlő az FB oldalú négyzettel. Ugyanezért a DE és EB közötti téglalap meg az FE oldalú négyzet is egyenlő együtt az FB oldalú négyzettel.* Megmutattuk, hogy az AE és EC közötti téglalap meg az FE oldalú négyzet is együtt egyenlő az FB oldalú négyzettel; így az AE és EC közötti téglalap meg az FE oldalú négyzet együtt egyenlő a DE és EB közötti téglalap és az FE oldalú négyzet összegével (1. Ax.). Vonjuk le a közös FE oldalú négyzetet; így a maradék AE és EC által közrefogott téglalap egyenlő a DE és EB által közrefogott téglalappal (3. Ax.).



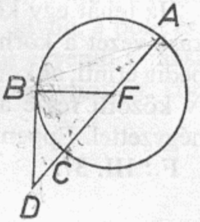
Ha tehát egy körben két húr metszi egymást, akkor az egyiknek a részei által közrefogott téglalap egyenlő a másiknak a részei által közrefogott téglalappal. Éppen ezt kellett megmutatni.

III. 36. Tétel

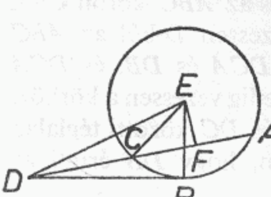
Ha egy körön kívül fölveszünk egy pontot, és abból két szakasz vezet a körhöz, amelyek közül az egyik átszeli a kört, a másik pedig érinti, *akkor a teljes szelő és a körön kívüli, a pont és a domború ív közötti része által közrefogott téglalap egyenlő az érintővel szerkesztett négyzettel.*

Vegyünk föl ugyanis az *ABC* körön kívül egy *D* pontot, és vezessen *D*-ből a körhöz két szakasz, *DCA* és *DB*, és *DCA* szelje át a kört, *BD* pedig érintse. Azt állítom, hogy a *DA* és *DC* által közrefogott téglalap egyenlő a *BD* oldalú négyzettel.

CA vagy a középponton át halad, vagy nem. Haladjon először a középponton át, és legyen *F* az *ABC* kör középpontja, és húzzuk meg *FB*-t; derékszög tehát az *FBD* szög (III. 18.). Minthogy *F* felezi a *CA* egyenest, és ehhez hozzáadódik *DC*, így a *DA* és *DC* közötti téglalap meg az *FC* oldalú négyzet együtt egyenlő az *FD* oldalú négyzettel (II. 6.). Az *FD* oldalú négyzettel viszont egyenlő az *FB* és *BD* oldalú négyzetek összege (I. 47.), így a *DA* és *DC* közötti téglalap meg az *FB* oldalú négyzet együtt egyenlő az *FB* és *BD* oldalú négyzetek összegével (1. Ax.). Vonjuk le a közös *FB* oldalú négyzetet; így a maradék *DA* és *DC* közötti téglalap egyenlő a *BD* érintővel szerkesztett négyzettel (3. Ax.).



Most ne az *ABC* kör középpontján át haladjon *DCA*, és vegyük föl a középpontot, *E*-t (III. 1.), és bocsássuk *E*-ből *CA*-ra az *EF* merőlegest (I. 12.), és húzzuk meg *EB*-t, *EC*-t, *ED*-t. Derékszög tehát az *EBD* szög (III. 18.). És minthogy valamely, a középponton át haladó *EF* szakasz egy, nem a középponton át haladó *CA* szakaszt derékszögben metsz, felezi is azt (III. 3.); *AF* tehát egyenlő *FC*-vel. Minthogy az *F* pont felezi a *CA* szakaszt, és ehhez hozzáadódik *DC*, így a *DA* és *DC* közötti téglalap meg az *FC* oldalú négyzet együtt egyenlő az *FD* oldalú négyzettel (II. 6.). Adjuk hozzájuk közös tagnak az *EF* oldalú négyzetet; így a *DA* és *DC* közötti téglalap meg az *FC* és *EF* oldalú négyzetek együtt egyenlők az *FD* és *EF* oldalú négyzetek összegével (2. Ax.). Az *FC* és *EF* oldalú négyzetek összegével viszont egyenlő az *EC* oldalú négyzet – derékszög ugyanis *EFC* (I. 47.) –; az *FD* és *EF*



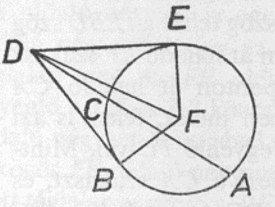
oldalúak összegével pedig egyenlő az *ED* oldalú (ua.), így a *DA* és *DC* közötti téglalap meg az *EC* oldalú négyzet együtt egyenlő az *ED* oldalú négyzettel. *EC* viszont egyenlő *EB*-vel, tehát a *DA* és *DC* közötti téglalap meg az *EB* oldalú négyzet együtt egyenlő az *ED* oldalú négyzettel. Az *ED* oldalú négyzettel viszont egyenlő az *EB* és *BD* oldalú négyzetek összege – derékszög ugyanis az *EBD* szög (I. 47.) –, tehát a *DA* és *DC* közötti téglalap meg az *EB* oldalú négyzet együtt egyenlő az *EB* és *BD* oldalú négyzetek összegével (1. Ax.). Vonjuk le a közös *EB* oldalú négyzetet; így a maradék *DA* és *DC* közötti téglalap egyenlő a *BD* oldalú négyzettel (3. Ax.).

Ha tehát egy körön kívül fölveszünk egy pontot, és abból két szakasz vezet a körhöz, amelyek közül az egyik átszeli a kört, a másik pedig érinti, akkor a teljes szelő és a körön kívüli, a pont és a domború ív közötti része által közrefogott téglalap egyenlő az érintőre emelt négyzettel. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: III. 37.

III. 37. Tétel

Ha egy körön kívül fölveszünk egy pontot, és a pontból két szakasz vezet a körhöz, amelyek közül az egyik átszeli a kört, a másik pedig a körhöz vezet, és a teljes szelő és a körön kívüli, a pont és a domború ív közötti része által közrefogott téglalap egyenlő a másik szakaszra emelt négyzettel, akkor a másik szakasz érinti a kört.



Vegyünk föl ugyanis az *ABC* körön kívül egy *D* pontot, és vezessen *D*-ből az *ABC* körhöz két szakasz, *DCA* és *DB*, és *DCA* szelje át a kört, *DB* pedig vezessen a körhöz. Legyen pedig az *AD* és *DC* közötti téglalap egyenlő a *DB* oldalú négyzettel. Azt állítom, hogy *DB* érinti az *ABC* kört.

Húzzuk meg ugyanis az *ABC* kör *DE* érintőjét (III. 17.), vegyük föl a kör középpontját – ez legyen *F* (III. 1.) –, és húzzuk meg *FE*-t, *FB*-t és *FD*-t.

FED tehát derékszög (III. 18.). Minthogy *DE* érinti az *ABC* kört, *DCA* pedig átszeli, így az *AD* és *DC* közötti téglalap egyenlő a *DE* oldalú négyzettel (III. 36.). Viszont az *AD* és *DC* közötti téglalap a *DB* oldalú négyzettel is egyenlő volt, a *DE* oldalú négyzet tehát egyenlő a *DB* oldalú négyzettel (1. Ax.); egyenlő hát *DE* a *DB*-vel. De *FE* is egyenlő *FB*-vel, így e két-két oldal, *DE*, *FE* és *DB*, *FB* egyenlő; és közös az *FD* alapjuk, a *DEF* szög tehát egyenlő a *DBF* szöggel (I. 8.). *DEF* viszont derékszög, derékszög tehát *DBF* is. És *FB* meghosszabbítása egy átmérő, a kör átmérőjére a végpontjában emelt merőleges pedig érinti a kört (III. 16. K.), *DB* tehát érinti az *ABC* kört. Hasonló a bizonyítás akkor is, ha a középpont az *AC* egyenesen fekszik.

Ha tehát egy körön kívül fölveszünk egy pontot, és a pontból két szakasz vezet a körhöz, amelyek közül az egyik átszeli a kört, a másik pedig a körhöz vezet, és a teljes szelő és a körön kívüli, a pont és a domború ív közötti része által közrefogott téglalap egyenlő a másik szakaszra emelt négyzettel, akkor a másik egyenes érinti a kört. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: IV. 10.

Negyedik könyv

Definíciók

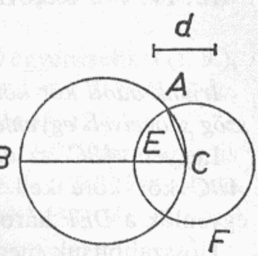
1. Azt mondjuk, hogy valamely egyenes vonalú alakzat be van írva egy másik egyenes vonalú alakzatba, ha a beírt alakzat minden szöge annak az alakzatnak egy-egy oldalát érinti, melybe beírtuk.
2. Hasonlóképp azt mondjuk, hogy valamely alakzatot egy másik alakzat köré írtunk, ha a köréírt alakzat minden oldalán rajta van annak az alakzatnak egy-egy szöge, amely köré írtuk.
3. Azt mondjuk, hogy egy egyenes vonalú alakzatot beírtunk egy körbe, ha a beírt alakzat minden szöge a körvonalon van.
4. Azt mondjuk, hogy egy egyenes vonalú alakzatot kör köré írtunk, ha a köréírt alakzat minden oldala érinti a körvonalat.
5. Hasonlóképp azt mondjuk, hogy egy kört beírtunk egy alakzatba, ha a körvonal ennek minden egyes oldalát érinti.
6. Azt mondjuk, hogy egy kört egy alakzat köré írtunk, ha ennek minden egyes szöge a körvonalon van.
7. Azt mondjuk, hogy egy szakaszt ráillesztettünk egy körre, ha a végpontjai a körvonalon vannak.

IV. 1. Tétel

Illesszünk adott körre egy adott, a kör átmérőjénél nem nagyobb szakasszal egyenlő szakaszt!

Legyen ABC az adott kör, d pedig az adott, a kör átmérőjénél nem nagyobb szakasz. Az ABC körre kell tehát a d szakasszal egyenlő szakaszt illeszteni.

Húzzuk meg az *ABC* kör egy *BC* átmérőjét (III. 1.). Ha *BC* egyenlő *d*-vel, kész vagyunk a feladattal, mert ráillesztettük az *ABC* körre a *d*-vel egyenlő *BC* szakaszt. Ha pedig *BC* nagyobb *d*-nél, mérjük föl rá a *d*-vel egyenlő *CE*-t (I. 3.), és legyen *EAF* a *C* középpontú, *CE* távolsággal rajzolt kör; húzzuk meg *CA*-t. Minthogy a *C* pont középpontja az *EAF* körnek, *CA* egyenlő *CE*-vel. Azonban *CE* egyenlő *d*-vel; *d* is egyenlő tehát *CA*-val.



Az adott *ABC* körre tehát ráillesztettük az adott *d* szakasszal egyenlő *CA*-t. Éppen ezt kellett megtenni.

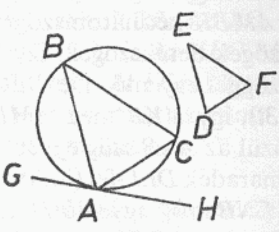
F.: IV. 10., 16.; X. 14. L.; XI. 23. L.: XII. 16.

IV. 2. Tétel

Írjunk adott körbe háromszöget, melynek szögei egyenlők egy adott háromszög szögeivel!

Legyen *ABC* az adott kör, *DEF* pedig az adott háromszög. Az *ABC* körbe tehát olyan háromszöget kell írni, melynek szögei egyenlők a *DEF* háromszög szögeivel.

Húzzuk meg az *ABC* kör *A*-n átmenő *GH* érintőjét (III. 1., I. 11., III. 16. K.), és szerkesszünk az *AH* egyenesre, a rajta levő *A* ponthoz egy *DEF*-fel egyenlő *HAC* szöget (I. 23.), az *AG* egyenesre pedig a rajta levő *A* ponthoz egy *DFE*-vel egyenlő *GAB* szöget, és húzzuk meg *BC*-t.



Minthogy az *AH* egyenes érinti az *ABC* kört, és az *A* érintési pontból húztunk a körhöz egy *AC* szelőt, így a *HAC* szög egyenlő a másik körszeletben levő *ABC* szöggel (III. 32.). Azonban *HAC* egyenlő a *DEF* szöggel; az *ABC* szög is egyenlő tehát *DEF*-fel (1. Ax.). Ugyanígy *ACB* is egyenlő a *DFE* szöggel, és a maradék *BAC* szög is egyenlő *EDF*-fel (I. 32.). [A *DEF* háromszög szögeivel egyenlő szögei vannak tehát az *ABC* háromszögnek, és az *ABC* körbe írtuk bele.]

Az adott körbe tehát háromszöget írtunk, melynek szögei egyenlők egy adott háromszög szögeivel. Éppen ezt kellett megtenni.

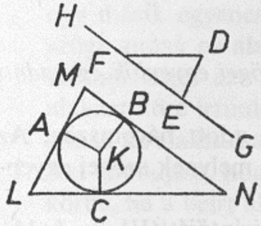
F.: IV. 11., 16.; XIII. 12., 13.

IV. 3. Tétel

Írjunk adott kör köré háromszöget, melynek szögei egy adott háromszög szögeivel egyenlők!

Legyen *ABC* az adott kör, *DEF* pedig az adott háromszög. Az *ABC* kör köré kell tehát olyan háromszöget írni, melynek szögei egyenlők a *DEF* háromszög szögeivel.

Hosszabbítsuk meg *EF*-et mind a két oldalon, a *G*, illetve *H* pontig, és vegyük föl az *ABC* kör *K* középpontját (III. 1.), húzzunk meg egy tetszőleges *KB* szelőt, és szerkesszünk a *KB* egyenesre, a rajta levő *K* ponthoz, egy *DEG*-vel egyenlő *BKA* szöget és egy *DFH*-val egyenlő *BKC* szöget (I. 23.), és húzzuk meg az *A*, *B*, *C* pontokon átmenő *LAM*, *MBN*, *NCL* érintőket (I. 11., III. 16. K.).



Minthogy az *LM*, *MN*, *NL* egyenesek érintik az *A*, *B*, *C* pontokban az *ABC* kört, és a *KA*, *KB*, *KC* egyeneseket a *K* középpontból húztuk az *A*, *B*, *C* pontokba, így az *A*, *B* és *C* pontoknál levő szögek derékszögek (III. 18.). És minthogy az *AMBK* négyszög négy szöge együtt négy derékszöggel egyenlő – ti. mivel *AMBK* két háromszögre vágható szét (I. 32.) –, és a *KAM*, *KBM* szögek derékszögek, így a többi szög, *AKB* és *AMB* együtt két derékszöggel egyenlő. De *DEG* meg *DEF* is két derékszöggel egyenlő (I. 13.), így *AKB* meg *AMB* egyenlő *DEG* meg *DEF*-fel (1. Ax.). Ezek közül az *AKB* szög egyenlő *DEG*-vel, így a maradék *AMB* szög egyenlő a maradék *DEF*-fel (3. Ax.). Hasonlóképp mutatható meg az is, hogy az *LNB* szög egyenlő *DFE*-vel; a maradék *MLN* szög is egyenlő tehát a [maradék] *EDF* szöggel. A *DEF* háromszögéivel egyenlő szögei vannak tehát az *LMN* háromszögnek, és az *ABC* háromszög köré írtuk.

Az adott kör köré tehát háromszöget írtunk, melynek szögei egyenlők egy adott háromszög szögeivel. Éppen ezt kellett megtenni.

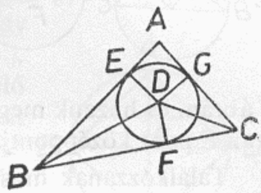
IV. 4. Tétel

Írjunk adott háromszögbe kört!

Legyen *ABC* az adott háromszög. Az *ABC* háromszögbe kell tehát kört írni.

Felezzük meg az *ABC*, *ACB* szögeket a *BD*, *CD* egyenesekkel (I. 9.), legyen ezek metszéspontja *D* (I. 32., 5. P.),* és bocsássuk *D*-ből *AB*-re, *BC*-re, illetve *CA*-ra a *DE*, *DF*, *DG* merőlegeseket (I. 12.).

Minthogy az *ABD* szög egyenlő *CBD*-vel, és a *BED* derékszög is egyenlő a *BFD* derékszöggel (4. P.), így *EBD* és *FBD* két olyan háromszög, melyben páronként egyenlő két-két szög és egy-egy oldal, a közös *BD*, amelyik az egyenlő szögek egyikével szemben fekszik; tehát a többi oldal is páronként egyenlő (I. 26.); egyenlő tehát *DE* a *DF*-fel. Ugyanígy *DG* is egyenlő *DF*-fel. E három szakasz tehát, *DE*, *DF* és *DG*, egymással egyenlő (1. Ax.). A *D* középpontú és a *DE*, *DF*, *DG* távolságok egyikével rajzolt kör tehát a többi ponton is át fog menni, és érinti az *AB*, *BC*, *CA* egyeneseket, mivel az *E*, *F*, *G* pontoknál levő szögek derékszögek. Ha ugyanis átszelné őket, akkor a kör átmérőjére a végpontjában emelt merőleges a körön belül haladna; erről viszont megmutattuk, hogy lehetetlen (III. 16.); nem szeli tehát át a *D* középpontú és a *DE*, *DF*, *DG* távolságok egyikével rajzolt kör az *AB*, *BC*, *CA* egyeneseket; érinti tehát őket (vö. III. 2. D.), és az *ABC* háromszögbe beírt kör lesz (IV. 5. D.). Írjuk is be mint az *FGE* kört.



Beírtuk tehát az adott *ABC* háromszögbe az *FGE* kört. Éppen ezt kellett megtenni.

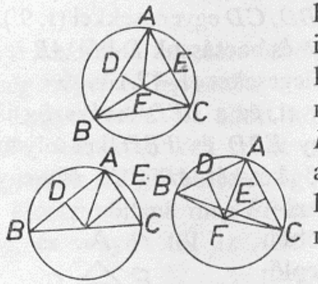
IV. 5. Tétel

Írjunk adott háromszög köré kört!

Legyen *ABC* az adott háromszög. Az adott *ABC* háromszög köré kell ⟨tehát⟩ kört írni.

Legyenek *D*, *E* az *AB*, *AC* szakaszok felezőpontjai (I. 10.), és emeljük a *D*, *E* pontokból *AB*-re, illetve *AC*-re a *DF*, *EF* merőlegeseket (I. 11.). Ezek vagy az *ABC* háromszögön belül, vagy a *BC* szakaszon, vagy *BC*-n kívül találkozni fognak (5. P.).*

Találkozzanak először belül, az *F* pontban, és húzzuk meg *FB*-t, *FC*-t, *FA*-t. Minthogy *AD* egyenlő *DB*-vel, *DF* pedig közös (oldal) és merőleges (az előbbiekre), így az *AF* alap egyenlő az *FB* alappal (I. 4.). Hasonlóképp mutathatnánk meg, hogy *FC* is egyenlő *FA*-val; úgyhogy *FB* is egyenlő *FC*-vel (1. Ax.). E három szakasz tehát, *FA*, *FB* és *FC* egyenlő egymással. Az *F* középpontú és az *FA*, *FB*, *FC* távolságok egyikével rajzolt kör tehát a többi ponton is át fog menni, és az *ABC* háromszög köré írt kör lesz. Írjuk is köré mint az *ABC* kört.



Találkozzanak most *DF* és *EF* a *BC* szakaszon az *F* pontban, mint a második ábrán, és húzzuk meg *AF*-et. Hasonlóképp mutathatnánk meg, hogy az *F* pont középpontja az *ABC* háromszög köré írt körnek.

Találkozzanak most *DF* és *EF* az *ABC* háromszögön kívül az *F* pontban, mint a harmadik ábrán, és húzzuk meg *AF*-et, *BF*-et, *CF*-et. Minthogy ismét egyenlő *AD* a *DB*-vel, *DF* pedig közös (oldal) és merőleges (az előbbiekre), így az *AF* alap egyenlő a *BF* alappal (I. 4.). Hasonlóképp mutathatnánk meg, hogy *CF* is egyenlő *AF*-fel; úgyhogy *BF* is egyenlő *CF*-fel (1. Ax.). Az *F* középpontú és az *FA*, *FB*, *FC* távolságok egyikével rajzolt kör tehát a többi ponton is át fog menni, és az *ABC* háromszög köré írt kör lesz.

Az adott háromszög köré tehát kört írtunk. Éppen ezt kellett megtenni.

F.: IV. 10.; XI. 23.

[Következmény]

Nyilvánvaló az is, hogy ha a kör középpontja a háromszög belsejébe esik, akkor a *BAC* szög félkörnél nagyobb szeletben lévén kisebb egy derékszögnél; és ha a *BC* szakaszra esik a középpont, akkor a *BAC* szög félkörben lévén derékszög; ha pedig a kör középpontja a háromszögön kívülre esik, akkor a *BAC* szög félkörnél kisebb szeletben lévén nagyobb egy derékszögnél (III. 31.). [Úgyhogy ha az adott szög derékszögnél kisebb, akkor *DF* és *EF* a háromszög belsejében találkoznak, ha derékszög, akkor *BC*-n, ha pedig derékszögnél nagyobb, akkor *BC*-n kívül. Éppen ezt kellett megmutatni.]

F.: IV. 10.

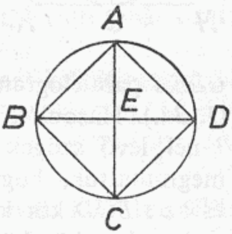
IV. 6. Tétel

Írjunk adott körbe négyzetet!

Legyen *ABCD* az adott kör. Az *ABCD* körbe kell tehát négyzetet írni.

Húzzuk meg az *ABCD* kör két egymásra merőleges átmérőjét, *AC*-t és *BD*-t (III. 1., I. 11.), és húzzuk meg *AB*-t, *BC*-t, *CD*-t, *DA*-t.

Minthogy *BE* egyenlő *ED*-vel – *E* ugyanis középpont –, *EA* pedig közös (oldal) és merőleges (az előbbiekre), így az *AB* alap egyenlő az *AD* alappal (I. 4.). Ugyanígy mind a két *BC*, *CD* oldal egyenlő *AB* és *AD* bármelyikével; egyenlő oldalú tehát az *ABCD* négyszög. Azt állítom, hogy derékszögű is. Minthogy ugyanis a *BD* szakasz átmérője az *ABCD* körnek, *BAD* félkör; derékszög tehát a *BAD* szög (III. 31.). Ugyanígy az *ABC*, *BCD*, *CDA* szögek mindegyike is derékszög; derékszögű tehát az *ABCD* négyszög. Viszont megmutattuk azt is, hogy egyenlő oldalú; négyzet tehát. És az *ABCD* körbe írtuk bele.



Az adott körbe tehát beírtuk az *ABCD* négyzetet. Éppen ezt kellett megtenni.

F.: XII. 2., 10–12.

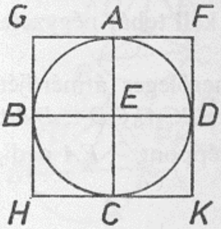
IV. 7. Tétel

Írjunk adott kör köré négyzetet!

Legyen *ABCD* az adott kör. Az *ABCD* kör köré kell tehát négyzetet írni.

Húzzuk meg az *ABCD* kör két egymásra merőleges átmérőjét, *AC*-t és *BD*-t (III. 1., I. 11.), és az *A*, *B*, *C* és *D* pontokon át húzzuk meg az *ABCD* kör *FG*, *GH*, *HK* és *KF* érintőit (I. 11., III. 16. K.).

Minthogy tehát *FG* érinti az *ABCD* kört, és az *EA* egyenest az *E* középpontból az *A* érintési pontra illesztettük, így az *A*-nál levő szögek derékszögek (III. 18.). Ugyanígy a *B*-nél, *C*-nél és *D*-nél levő szögek is derékszögek. Minthogy az *AEB* szög derékszög, és *EBG* is derékszög, így *GH* párhuzamos *AC*-vel (I. 28.). Ugyanígy *FK*-val is párhuzamos *AC*, úgyhogy *GH* is párhuzamos *FK*-val (I. 30.). Hasonlóképp mutathatnánk meg azt is, hogy mind a két *GF*, *HK* egyenes párhuzamos *BED*-vel. Paralelogrammák tehát a *GK*, *GC*, *AK*, *FB* és *BK* alakzatok, így egyenlő *GF* a *HK*-val, *GH* pedig *FK*-val (I. 34.). Minthogy *AC* egyenlő *BD*-vel, valamint *AC* egyenlő mind a két *GH*, *FK*, *BD* pedig mind a két *GF*, *HK* szakasszal, [és így *GH* és *FK* mindketten egyenlők mind a két *GF*, *HK* szakasszal,] így egyenlő oldalú az *FGHK* négyszög. Azt állítom, hogy derékszögű is. Minthogy ugyanis *GBEA* paralelogramma, és *AEB* derékszög, így *AGB* is derékszög (I. 34.). Hasonlóképp mutathatnánk meg, hogy a *H*-nál, *K*-nál és *F*-nél levő szögek is derékszögek. Derékszögű tehát *FGHK*. De megmutattuk, hogy egyenlő oldalú is; négyzet tehát (I. 22. D.), és az *ABCD* kör köré írtuk.



Az adott kör köré tehát négyzetet írtunk. Éppen ezt kellett megtenni.

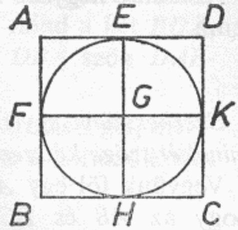
F.: XII. 10–11.

IV. 8. Tétel

Írjunk adott négyzetbe kört!

Legyen *ABCD* az adott négyzet. Az *ABCD* négyzetbe kell tehát kört írni.

Legyen *E* és *F* az *AD*, illetve *AB* felezőpontja (I. 10.), és húzzuk *E*-n át mind a két *AB*, *CD* egyenessel párhuzamosan *EH*-t (I. 31., 30.), *F*-en át pedig húzzuk mind a két *AD*, *BC* egyenessel párhuzamosan *FK*-t. Paralelogramma tehát az *AK*, *KB*, *AH*, *HD*, *AG*, *GC*, *BG* és *GD* alakzatok mindegyike, és a szemközti oldalaik nyilván egyenlők (I. 34.). Minthogy *AD* egyenlő *AB*-vel, és *AD*-nek fele része *AE*, *AB*-nek pedig fele része *AF*, így *AE* is egyenlő *AF*-fel (6. Ax.), úgyhogy a szemközti oldalak is egyenlők, egyenlő tehát *FG* is *GE*-vel. Hasonlóképp mutathatnánk meg, hogy *GH* és *GK* is mindketten egyenlők mind a két *FG*, *GE* szakasszal; e négy szakasz tehát, *GE*, *FG*, *GH* és *GK* egymással egyenlő. A *G* középpontú és a *GE*. *GF*, *GH* és *GK* távolságok egyikével rajzolt kör tehát a többi ponton is át fog menni, és érinteni fogja az *AB*, *BC*, *CD* és *AD* egyeneseket, mivel az *E*-nél, *F*-nél, *H*-nál és *K*-nál levő szögek derékszögek. Ha ugyanis a kör átszelné az *AB*, *BC*, *CD*, *AD* egyeneseket, akkor a kör átmérőjére a végpontjában emelt merőleges a körön belül haladna; erről viszont megmutattuk, hogy nem lehetséges (III. 16.). A *G* középpontú és a *GE*, *GF*, *GH*, *GK* távolságok egyikével rajzolt kör tehát nem szeli át az *AB*, *BC*, *CD*, *AD* egyeneseket. Érinti tehát őket, és az *ABCD* körbe lesz beírva.



Az adott négyzetbe tehát kört írtunk. Éppen ezt kellett megtenni.

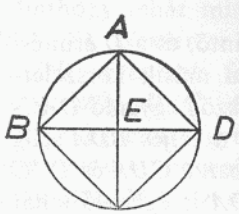
IV. 9. Tétel

Írjunk adott négyzet köré kört!

Legyen *ABCD* az adott négyzet. Az *ABCD* négyzet köré kell tehát kört írni.

Húzzuk meg *AC*-t, *BD*-t, és messék egymást *E*-ben.

Minthogy *DA* egyenlő *AB*-vel, *AC* pedig közös (oldal), e két-két oldal, *DA*, *AC* és *AB*, *AC* páronként egyenlő; és a *DC* alap egyenlő a *BC* alappal; a *DAC* szög tehát egyenlő a *BAC* szöggel (I. 8.); *AC* tehát felezi a *DAB* szöget. Hasonlóképp mutathatnánk meg, hogy az *ABC*, *BCD*, *CDA* szögek mindegyikét is felezik az *AC*, *BD* egyenesek. Minthogy a *DAB* szög egyenlő *ABC*-vel, és *DAB*- nek fele része az *EAB* szög, *ABC*-nek pedig fele része az *EBA* szög, így az *EAB* szög is egyenlő *EBA*-val (6. Ax.), úgyhogy az *EA* oldal is egyenlő az *EB* oldallal (I. 6.). Hasonlóképp mutathatnánk meg, hogy az *EA*, *EB* szakaszok mindketten egyenlők *EC* és *ED* mindegyikével. E négy szakasz tehát, *EA*, *EB*, *EC* és *ED* egyenlő egymással. Az *E* középpontú és az *EA*, *EB*, *EC*, *ED* távolságok egyiké-



vel rajzolt kör tehát a többi ponton is át fog menni, és az *ABCD* négyzet köré lesz írva. Írjuk is köré mint az *ABCD* kört.

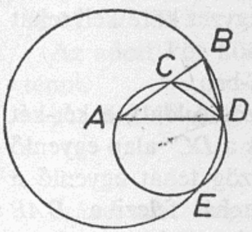
Az adott négyzet köré tehát kört írtunk. Éppen ezt kellett megtenni.

IV. 10. Tétel

Szerkesszünk egyenlő szárú háromszöget, melynek az alapon fekvő mindkét szöge kétszerese a harmadiknak!

Vegyünk föl egy *AB* szakaszt, és osszuk úgy ketté a *C* pontban, hogy az *AB* és *BC* által közrefogott téglalap egyenlő legyen a *CA* oldalú négyzettel (II. 11.); és legyen *BDE* az *A* középpontú, *AB* távolsággal rajzolt kör, és illesszünk a *BDE* körre egy, a *BDE* kör átmérőjénél nem nagyobb *AC* szakasszal egyenlő *BD* szakaszt (IV. 1.); húzzuk meg *AD*-t, *DC*-t, és írjuk az *ACD* háromszög köré az *ACD* kört (IV. 5.).

Minthogy az *AB* és *BC* közötti téglalap egyenlő az *AC* oldalú négyzettel, *AC* viszont egyenlő *BD*-vel, így az *AB* és *BC* közötti téglalap egyenlő a *BD* oldalú négyzettel. Minthogy az *ACD* körön kívül fölvettünk egy *B* pontot, és *B*-ből két szakasz vezet az *ACD* körhöz, *BA* és *BD*, amelyek közül az egyik átszeli, a másik pedig a körhöz vezet, és az *AB* és *BC* közötti téglalap egyenlő a *BD* oldalú négyzettel, így *BD* érinti az *ACD* kört (III. 37.).



Minthogy tehát *BD* érintő, és a *D* érintési pontból húztuk *DC*-t, így a *BDC* szög egyenlő a másik körszeletben levő *DAC* szöggel (III. 32.). Miután a *BDC* szög egyenlő *DAC*-vel, adjuk hozzájuk közös (tagnak) *CDA*-t; így a teljes *BDA* szög egyenlő e kettő, *CDA* és *DAC* összegével. Azonban a *CDA* és *DAC* összegével egyenlő a *BCD* külső szög (I. 32.); *BDA* is egyenlő tehát a *BCD* szöggel. Viszont a *BDA* szög egyenlő *CBD*-vel, mivel az *AD* oldal is egyenlő *AB*-vel (I. 5.); úgyhogy a *DBA*(=*CBD*) szög is egyenlő *BCD*-vel. E három szög tehát, *BDA*, *DBA*, *BCD* egyenlő egymással. És minthogy a *DBC* szög egyenlő *BCD*-vel, a *BD* oldal is egyenlő a *DC* oldallal (I. 6.). *BD* viszont feltétel szerint egyenlő

AC-vel, *AC* is egyenlő tehát *DC*-vel; úgyhogy a *CDA* szög is egyenlő *DAC*-vel (I. 5.); *CDA* és *DAC* együtt tehát kétszerese a *DAC* szögnek. A *BCD* szög viszont egyenlő *CDA* meg *DAC* összegével; *BCD* is kétszerese tehát a *CAD* szögnek. *BCD* egyenlő mind a két *BDA*, *DBA* szöggel; kétszerese tehát mind a két *BDA*, *DBA* szög *DAB*-nek.

Megszerkesztettük tehát az *ABD* egyenlő szárú háromszöget, melynek mind a két a *DB* alapon fekvő szöge kétszerese a harmadiknak. Éppen ezt kellett megtenni.

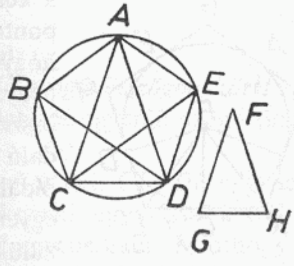
F.: IV. 11.

IV. 11. Tétel

Írjunk adott körbe egyenlő oldalú és egyenlő szögű ötszöget!

Legyen *ABCDE* az adott kör. Az *ABCDE* körbe kell tehát egyenlő oldalú és egyenlő szögű ötszöget írni.

Vegyünk föl egy *FGH* egyenlő szárú háromszöget, melynek mind a két, *G*-nél és *H*-nál fekvő szöge kétszerese az *F*-nél fekvőnek (IV. 10.), és írjunk az *ABCDE* körbe egy *ACD* háromszöget, melynek szögei egyenlők az *FGH* háromszög szögeivel úgy, hogy az *F*-nél levő szög egyenlő legyen a *CAD*, a két *G*-nél és *H*-nál fekvő szög pedig egyenlő legyen a két, *ACD*, *CDA* szöggel (IV. 2.). Kétszerese tehát mind a két, *ACD*, *CDA* szög *CAD*-nek. Felezzük meg a két *ACD*, *CDA* szöget a két, *CE*, *DB* egyenessel (I. 9.), és húzzuk meg *AB*-t, *BC*-t, [*CD*-t,] *DE*-t és *EA*-t.



Minthogy tehát mind a két, *ACD*, *CDA* szög kétszerese *CAD*-nek, és a *CE*, *DB* egyenesek felezik őket, így ezen öt szög, *DAC*, *ACE*, *ECD*, *CDB* és *BDA* egyenlő egymással. Egyenlő szögek viszont egyenlő íveken nyugszanak (III. 26.), ezen öt körív tehát, *AB*, *BC*, *CD*, *DE* és *EA* egyenlő egymással. Egyenlő ívekhez viszont egyenlő húrok tartoznak (III. 29.), ezen öt szakasz tehát, *AB*, *BC*, *CD*, *DE* és *EA* egyenlő egymással; egyenlő oldalú tehát az *ABCDE* ötszög. Azt állítom, hogy egyenlő szögű is. Minthogy ugyanis az *AB* ív egyenlő a *DE* ívvel, adjuk hozzájuk közös tagnak a *BCD* ívet; így a teljes *ABCD* ív egyenlő a teljes *EDCB* ívvel. És az *AED* szög az *ABCD* íven nyugszik, a *BAE* szög pedig az *EDCB* íven; a *BAE* szög is egyenlő tehát *AED*-vel (III. 27.). Ugyanígy az *ABC*, *BCD*, *CDE* szögek mindegyike is egyenlő mind a két, *BAE*, *AED* szöggel; egyenlő szögű tehát az *ABCDE* ötszög. De megmutattuk azt is, hogy egyenlő oldalú.

Beírtunk tehát egy adott körbe egy egyenlő oldalú és egyenlő szögű ötszöget. Éppen ezt kellett megtenni.

F.: IV. 12., 16.; XIII. 16.

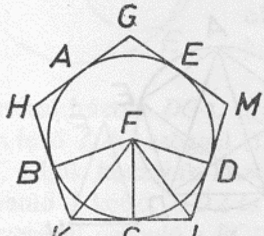
IV. 12. Tétel

Írjunk adott kör köré egyenlő oldalú és egyenlő szögű ötszöget!

Legyen *ABCDE* az adott kör. Az *ABCDE* kör köré kell ⟨tehát⟩ egyenlő oldalú és egyenlő szögű ötszöget írni.

Tekintsük az *A*, *B*, *C*, *D* és *E* pontokat a beírt ötszög szögpontjainak (IV. 11.), úgyhogy legyenek egyenlők az *AB*, *BC*, *CD*, *DE* és *EA* körívek. Húzzuk meg a kör *A*-n, *B*-n, *C*-n, *D*-n és *E*-n átmenő *GH*, *HK*, *KL*, *LM* és *MG* érintőit (III. 1., I. 11., III. 16. K.), és vegyük föl az *ABCDE* kör *F* középpontját (III. 1.), és húzzuk meg *FB*-t, *FK*-t, *FC*-t, *FL*-t, *FD*-t.

Minthogy a *KL* egyenes érinti az *ABCDE* kört a *C* pontban, és *FC*-t az *F* középpontból illesztettük a *C* érintési pontra, így *FC* merőleges *KL*-re (III. 18.); derékszög tehát mind a két *C*-nél levő szög. Ugyanígy a *B* és *D* pontoknál levő szögek is derékszögek. Minthogy az *FCK* szög derékszög, az *FK* oldalú négyzet egyenlő az *FC*, *CK* oldalú négyzetek összegével (I. 47.). Ugyanígy az *FB* és *BK* oldalú négyzetek összegével is egyenlő az *FK* oldalú, úgyhogy az *FC*, *CK* oldalú négyzetek egyenlők az *FB*, *BK* oldalúak összegével. Közülük az *FC* oldalú egyenlő az *FB* oldalúval, a maradék *CK* oldalú tehát egyenlő a *BK* oldalúval. Egyenlő tehát *BK* a *CK*-val.* Minthogy *FB* egyenlő *FC*-vel, és *FK* közös (oldal), így e két-két oldal, *FB*, *FK* és *FC*, *FK* (páronként) egyenlő, a *BFK* szög tehát egyenlő *KFC*-vel, a *BKF* szög pedig *FKC*-vel (I. 8.);



kétszerese tehát a *BFC* szög *KFC*-nek, a *BKC* szög pedig *FKC*-nek. Ugyanígy a *CFD* szög is kétszerese *CFL*-nek, a *DLC* szög pedig *FLC*-nek. S minthogy a *BC* ív egyenlő a *CD* ívvel, egyenlő a *BFC* szög is a *CFD* szöggel (III. 27.). S a *BFC* szög kétszerese a *KFC*, a *DFC* szög pedig az *LFC* szögnek; egyenlő tehát a *KFC* és az *LFC* szög is (6. Ax.). Egyenlő még az *FCK* szög is *FCL*-lel, így *FKC* és *FLC* két olyan háromszög, melyben páronként egyenlő két-két szög és egy-egy oldal, a közös *FC*; tehát a többi oldal is páronként egyenlő és a harmadik szög is (I. 26.); egyenlő tehát a *KC* szakasz *CL*-lel, az *FKC* szög pedig *FLC*-vel. Minthogy *KC* egyenlő *CL*-lel, kétszerese *KL* a *KC*-nek. Ugyanígy mutathatnánk meg, hogy *HK* is kétszerese *BK*-nak. S *BK* egyenlő *KC*-vel, *HK* is egyenlő tehát *KL*-lel (5. Ax.). Hasonlóképp mutathatnánk meg azt is, hogy a *HG*, *GM*, *ML* szakaszok mindegyike egyenlő mind a két, *HK*, *KL* szakasszal; egyenlő oldalú tehát a *GHKLM* ötszög. Azt állítom, hogy egyenlő szögű is. Minthogy ugyanis az *FKC* szög egyenlő *FLC*-vel, és megmutattuk, hogy *FKC*-nek kétszerese a *HKL*, *FLC*-nek pedig a *KLM* szög, így a *HKL* szög is egyenlő *KLM*-mel (5. Ax.). Hasonlóképp mutathatnánk meg azt is, hogy a *KHG*, *HGM*, *GML* szögek mindegyike egyenlő mind a két, *HKL*, *KLM* szöggel; ezen öt szög tehát, *GHK*, *HKL*, *KLM*, *LMG* és *MGH* egyenlő egymással. Egyenlő szögű tehát a *GHKLM* ötszög. De megmutattuk, hogy egyenlő oldalú is, és az *ABCDE* kör köré írtuk.

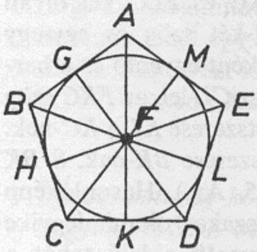
⟨Az adott kör köré tehát egyenlő oldalú és egyenlő szögű ötszöget írtunk.⟩ Éppen ezt kellett megtenni.

IV. 13. Tétel

Írjunk adott egyenlő oldalú és egyenlő szögű ötszögbe kört!

Legyen *ABCDE* az adott egyenlő oldalú és egyenlő szögű ötszög. Az *ABCDE* ötszögbe kell tehát kört írni.

Felezzük meg a két, *BCD*, *CDE* szöget a két, *CF*, *DF* egyenessel (I. 9.), és az *F* pontból, amelyben találkoznak egymással a *CF*, *DF* egyenesek, húzzuk meg az *FB*, *FA*, *FE* egyeneseket. Minthogy *BC* egyenlő *CD*-vel, *CF* pedig közös oldal, így e két-két oldal, *BC*, *CF* és *CD*, *CF* (páronként) egyenlő; és a *BCF* szög egyenlő a *DCF* szöggel; így a *BF* alap egyenlő a *DF* alappal, és a *BCF* háromszög egyenlő a *DCF* háromszöggel, és a többi szög is páronként egyenlő, amelyekkel szemben az egyenlő oldalak fekszenek (I. 4.); egyenlő tehát a *CBF* szög *CDF*-fel. Minthogy a *CDE* szög kétszerese *CDF*-nek, és a *CDE* szög egyenlő *ABC*-vel, a *CDF* szög pedig *CBF*-fel, az *ABC* szög is kétszerese *CBF*-nek; egyenlő tehát az *ABC* szög *CBF*-fel. Az *ABC* szöget tehát felezi a *BF* egyenes. Hasonlóképp mutathatnánk meg azt is, hogy a két *BAE*, *AED* szöget felezi a két *FA*, *FE* egyenes. Bocsássuk az *F* pontból az *AB*, *BC*, *CD*, *DE*, illetve *EA* egyenesekre az *FG*, *FH*, *FK*, *FL*, *FM* merőlegeseket (I. 12.). Minthogy a *HCF* szög egyenlő a *KCF* szöggel, és az *FHC* derékszög egyenlő az *FKC* [derék]szöggel, így *FHC* és *FKC* két olyan háromszög, melyben páronként egyenlő két-két szög és egy-egy oldal, a közös *FC*, mely az egyenlő szögek egyikével szemben fekszik; tehát a többi oldal is páronként egyenlő (I. 26.); egyenlő tehát az *FH* merőleges az *FK* merőlegessel. Hasonlóképp mutathatnánk meg azt is, hogy az *FL*, *FM*, *FG* szakaszok mindegyike egyenlő mind a két, *FH*, *FK* szakasszal; ezen öt szakasz tehát, *FG*, *FH*, *FK*, *FL* és *FM* egyenlő egymással. Az *F* középpontú és az *FG*, *FH*, *FK*, *FL*, *FM* távolságok egyikével rajzolt kör tehát a többi ponton is át fog menni, és érinti az *AB*, *BC*, *CD*, *DE*, *EA* egyeneseket, mivel a *G*, *H*, *K*, *L* és *M* pontoknál levő szögek derékszögek. Ha ugyanis nem érintené, hanem átszelné őket, akkor az adódnék, hogy a kör átmérőjére a végpontjában emelt merőleges a körön belül halad; erről viszont megmutattuk, hogy képtelenség (III. 16.). Nem szeli át tehát az *F* középpontú és az *FG*, *FH*, *FK*, *FL* és *FM* távolságok egyikével rajzolt kör az *AB*, *BC*, *CD*, *DE*, *AE* egyeneseket; érinti tehát őket. Rajzoljuk is meg mint a *GHKLM* kört.



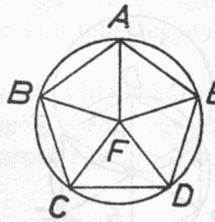
Az adott egyenlő oldalú és egyenlő szögű ötszögbe tehát kört írtunk bele. Éppen ezt kellett megtenni.

IV. 14. Tétel

Írjunk adott egyenlő oldalú és egyenlő szögű ötszög köré kört!

Legyen *ABCDE* az adott egyenlő oldalú és egyenlő szögű ötszög. Az *ABCDE* ötszög köré kell tehát kört írni.

Felezzük meg a két, *BCD*, *CDE* szöget a két *CF*, *DF* egyenessel (I. 9.), és az *F* pontból, melyben találkoznak az egyenesek, illesszük a *B*, *A*, *E* pontokra az *FB*, *FA*, *FE* egyeneseket. Az előző tételhez hasonlóan mutathatnánk meg, hogy a *CBA*, *BAE*, *AED* szögeket szintén felezik az *FB*, *FA*, *FE* egyenesek. S minthogy a *BCD* szög egyenlő *CDE*-vel és *BCD*-nek fele az *FCD* szög, *CDE*-nek pedig fele a *CDF* szög, az *FCD* szög is egyenlő *CDF*-fel; úgyhogy az *FC* oldal is egyenlő az *FD* oldallal (I. 6.). Hasonlóképp mutathatnánk meg azt is, hogy az *FB*, *FA*, *FE* szakaszok mindegyike egyenlő mind a két, *FC*, *FD* szakasszal. Ezen öt szakasz tehát, *FA*, *FB*, *FC*, *FD* és *FE* egymással egyenlő. Az *F* középpontú és az *FA*, *FB*, *FC*, *FD*, *FE* távolságok egyikével rajzolt kör tehát a többi ponton is át fog menni és köréírt kör lesz. Írjuk is köré, és ez legyen az *ABCDE* kör.



Az adott egyenlő oldalú és egyenlő szögű ötszög köré tehát kört írtunk. Éppen ezt kellett megtenni.

F.: XIII. 8., 18. L.

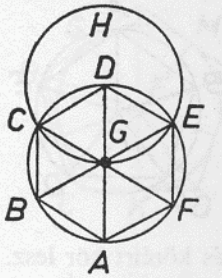
IV. 15. Tétel

Írjunk adott körbe egyenlő oldalú és egyenlő szögű hatszöget!

Legyen *ABCDEF* az adott kör. Az *ABCDEF* körbe kell tehát egyenlő oldalú és egyenlő szögű hatszöget írni.

Húzzuk meg az *ABCDEF* kör *AD* átmérőjét, és vegyük föl a kör *G* középpontját (III. 1.), és legyen *EGCH* a *D* középpontú, *DG* távolsággal rajzolt kör, s húzzuk meg az *EG*, *CG* egyeneseket, és hosszabbítsuk meg őket a *B*, *F* pontokig, és húzzuk meg az *AB*, *BC*, *CD*, *DE*, *EF*, *FA* egyeneseket. Azt állítom, hogy az *ABCDEF* hatszög egyenlő oldalú és egyenlő szögű.

Minthogy a *G* pont középpontja a *ABCDEF* körnek, egyenlő *GE* *GD*-vel. Ismét, minthogy a *D* pont középpontja a *GCH* körnek, egyenlő *DE* a *DG*-vel. De megmutattuk, hogy *GE* egyenlő *GD*-vel: *GE* is egyenlő tehát *DE*-vel. Egyenlő oldalú tehát az *EGD* háromszög, és a három szöge, *EGD*, *GDE* és *DEG* egyenlő egymással, minthogy az egyenlő szárú háromszögeknek az alapon fekvő szögei egyenlők egymással (I. 5.). A háromszög három szöge együtt két derékszöggel egyenlő (I. 32.), az *EGD* szög tehát harmadrésze két derékszögnek. Hasonlóképp mutathatnánk meg, hogy *DGC* is harmadrésze két derékszögnek. Minthogy a *CG* egyenes az *EB* egyenesen állván egymás mellett együtt két derékszöggel egyenlő szögeket alkot, *EGC*-t és *CGB*-t (I. 13.), így a maradék *CGB* szög is harmadrésze két derékszögnek. Az *EGD*, *DGC*, *CGB* szögek tehát egyenlők egymással, úgyhogy a csúcsszögeik, *BGA*, *AGF* és *FGE* is egyenlők [az *EGD*, *DGC*, *CGB* szögekkel]. E hat szög tehát, *EGD*, *DGC*, *CGB*, *BGA*, *AGF* és *FGE* egyenlő egymással. Egyenlő szögek viszont egyenlő íveken nyugszanak (III. 26.), e hat körív tehát, *AB*, *BC*, *CD*, *DE*, *EF* és *FA* egyenlő egymással. Egyenlő ívekhez viszont egyenlő húrok tartoznak (III. 29.), a hat húr tehát egyenlő egymással és az *ABCDEF* hatszög egyenlő oldalú. Azt állítom, hogy egyenlő szögű is. Valóban, az *FA* körív egyenlő az *ED* körívvel. Adjuk hozzájuk közös (tagnak) az *ABCD* ívet, így a teljes *FABCD* ív egyenlő a teljes *EDCBA* ívvel. Az *FABCD* íven az *FED* szög nyugszik, az *EDCBA* íven pedig az *AF* szög, egyenlő tehát az *AFE* szög *DEF*-fel (III. 27.). Hasonlóképp mutathatnánk meg, hogy az *ABCDEF* hatszög többi szöge is egyenként egyenlő mind a két, *AFE*, *FED* szöggel; egyenlő szögű tehát az *ABCDEF* hatszög. De megmutattuk, hogy egyenlő oldalú is, és az *ABCDEF* körbe írtuk bele.



Az adott körbe tehát egyenlő oldalú és egyenlő szögű hatszöget írtunk. Éppen ezt kellett megtenni.

Következmény

Ebből már nyilvánvaló, hogy a hatszög oldala egyenlő a kör sugarával.

Az ötszög esetéhez hasonlóan, ha a körön levő osztáspontokon át érintőket húzunk a körhöz, akkor – az ötszögnél mondottak mintájára (IV. 12.) – a kör köré írt egyenlő oldalú és egyenlő szögű hatszög keletkezik. Végül hasonlóképp, mint az ötszög esetében, adott hatszögbe, illetve köréje kört írhatunk (IV. 13–14.). Éppen ezt kellett megtenni.

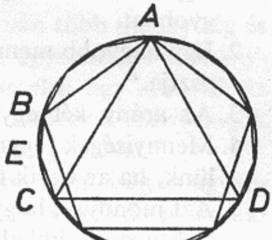
F.: XIII. 9., 10., 12., 16., 18.

IV. 16. Tétel

Írjunk adott körbe egyenlő oldalú és egyenlő szögű tizenötszöget!

Legyen *ABCD* az adott kör. Az *ABCD* körbe kell tehát egyenlő oldalú és egyenlő szögű tizenötszöget írni.

Rajzoljuk meg az *ABCD* körben a beleírt egyenlő oldalú háromszögnek egy *AC*, a beleírt egyenlő oldalú ötszögnek pedig egy *AB* oldalát (IV. 2., 11.). Ha az *ABCD* körvonalat tizenöt egyenlő részre osztjuk, ezek közül az *ABC* ív harmadrésze lévén a körvonalnak, öt részt tesz ki, az *AB* ív pedig, ötödrésze lévén a körvonalnak, három részt; a maradék *BC* ív tehát két egyenlő részt tesz ki. Legyen *E* a *BC* ív felezőpontja (III. 30.): így mind a két, *BE*, *EC* ív tizenötödrésze az *ABCD* körvonalnak.



Ha tehát meghúzzuk a *BE*, *EC* szakaszokat, és az *ABCD* körben folytatólagosan fölmérünk ezekkel egyenlő húrokat (IV. 1.), megkapjuk a körbe írt egyenlő oldalú és egyenlő szögű tizenötszöget. Éppen ezt kellett megtenni.

Az ötszög esetéhez hasonlóan, ha a körön levő osztáspontokon át érintőket húzunk a körhöz, akkor a kör köré írt egyenlő oldalú és egyenlő szögű tizenötszög keletkezik (IV. 12.). Végül hasonló megfontolások alapján, mint az ötszögnél, adott tizenötszögbe, illetve köréje kört írhatunk (IV. 12., 13.). Éppen ezt kellett megtenni.

Ötödik könyv

Definíciók

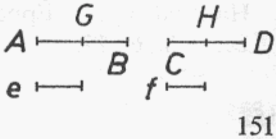
1. Egy kisebb mennyiség egy nagyobbnak része, ha osztja* a nagyobbat.
2. Egy nagyobb mennyiség egy kisebbnek többszöröse, ha a kisebb osztja.*
3. Az arány két egynemű* mennyiség nagyságbeli viszonya.
4. Mennyiségek egymáshoz viszonyított arányáról akkor beszélünk, ha az egyik többszöröse meghaladhatja a másikat (V. 10.).*
5. Azt mondjuk, hogy mennyiségek ugyanazon arányban állnak, az első a másodikkal és a harmadik a negyedikkel, ha az elsőnek és a harmadiknak ugyanannyiszorosai a második és a negyedik ugyanannyiszorosainál, bárhányszoros is a többszörözés, páronként vagy egyszerre nagyobbak, vagy egyszerre egyenlők, vagy egyszerre kisebbek megfelelően párosítva őket.*
6. Az ugyanazon arányú mennyiségeket arányosaknak nevezzük.
7. Ha az ugyanannyiszorosok közül az első mennyiség egy többszöröse nagyobb a második egy többszörösénél, a harmadiké viszont nem nagyobb a negyedikénél, akkor azt mondjuk, hogy az első és a második mennyiség aránya nagyobb, mint a harmadiké és a negyediké.*
8. Arányosság legkevesebb három tag esetén állhat fönn.*
9. Ha három mennyiség arányos, azt mondjuk, hogy az első a harmadikkal a másodikhoz viszonyítva kétszeres arányban áll.*
10. Ha négy mennyiség arányos, azt mondjuk, hogy az első a negyedikkel a másodikhoz viszonyítva háromszoros arányban (XI. 33.) áll, és így tovább mindig aszerint, hogy milyen az arányosság.*

11. Megfelelő mennyiségeknek mondjuk külön-külön az előtagokat és az utótagokat.
12. Felcserélt arány az előtagnak előtaghoz és utótagnak utótaghoz való viszonyítása.*
13. Fordított arány az utótagnak előtagként az előtaghoz mint utótaghoz való viszonyítása.*
14. Az arány összetétele az elő- és utótag összegének ugyanazon utótaghoz való viszonyítása.*
15. Az arány szétbontása a többletnek, mellyel az előtag több az utótagnál, ugyanazon utótaghoz való viszonyítása.*
16. Az arány fölforgatása az előtagnak a többlethez való viszonyítása, mellyel az előtag több az utótagnál.*
17. Egyenlőség révén való arány áll fönn, ha van több mennyiség és ugyanannyi másik, hogy kettesével mindig ugyanabban az arányban állnak, s ekkor az első csoportban az első úgy aránylik az utolsóhoz, mint a másodikban; másképp szólva: a szélső tagok egymáshoz való viszonyítása a középsők kihagyásával.*
18. Kereszteződő az arányosság, ha van három mennyiség és ugyanannyi másik, és történetesen az első csoportban az első a másodikhoz úgy aránylik, mint a második csoportban, és az első csoportban a második a harmadikhoz úgy aránylik, mint a másodikban a harmadik az elsőhöz.*

V. 1. Tétel

*Ha valahány mennyiség ugyanannyi másiknak páronként ugyanannyiszorosa, akkor annyiszorosa lesz az első mennyiségek összege a másikak összegének, ahányszorosa az egyik első mennyiség egy (megfelelő) másiknak.**

Legyenek AB és CD a valahány mennyiség, mely ugyanannyi másik mennyiségnek, e-nek és f-nek páronként ugyanannyiszorosa. Azt állítom, hogy ahányszorosa AB az e-nek, annyiszorosa AB meg CD az e meg f-nek. Minthogy ugyanis ugyanannyiszorosa AB az e-nek, mint CD az f-nek, ahány e-vel egyenlő mennyiség van AB-ben, annyi f-fel egyenlő van CD-ben. Osszuk föl AB-t az e-vel egyenlő AG, GB, CD-t pedig az f-fel



egyenlő CH, HD mennyiségekre; ekkor az AG, GB mennyiségek száma** egyenlő lesz a CH, HD mennyiségek számával. S minthogy AG egyenlő e-vel, CH pedig f-fel, egyenlő AG az e-vel és AG meg CH az e meg f-fel. Ugyanígy egyenlő GB az e-vel és GB meg HD az e meg f-fel. Ahány e-vel egyenlő mennyiség van tehát AB-ben, annyi e meg f-fel egyenlő van AB meg CD-ben; ahányszorosa tehát AB az e-nek, annyiszorosa lesz AB meg CD is az e meg f-nek.

Ha tehát valahány... Éppen ezt kellett megmutatni.

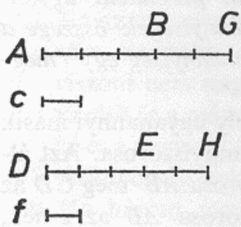
F.: V. 5., 8., 12.

V. 2. Tétel

*Ha egy első mennyiség egy másodiknak ugyanannyiszorosa, mint egy harmadik egy negyediknek, és egy ötödik a másodiknak ugyanannyiszorosa, mint egy hatodik a negyediknek, akkor az első és az ötödik összege ugyanannyiszorosa lesz a másodiknak, mint a harmadik meg a hatodik a negyediknek.**

Legyen ugyanis az első mennyiség, AB a másodiknak, c-nek ugyanannyiszorosa, mint a harmadik, DE, a negyediknek, f-nek, és legyen az ötödik BG a második c-nek ugyanannyiszorosa, mint a hatodik EH a negyedik f-nek. Azt állítom, hogy az első és az ötödik összege, AG, a második c-nek ugyanannyiszorosa, mint a harmadik meg a hatodik, DH, a negyedik f-nek.

Minthogy ugyanis ugyanannyiszorosa AB a c-nek, mint DE az f-nek, ahány c-vel egyenlő mennyiség van AB-ben, annyi f-fel egyenlő van DE-ben. S ugyanígy ahány c-vel egyenlő mennyiség van BG-ben, annyi f-fel egyenlő van EH-ban. Ahány c-vel egyenlő mennyiség van tehát a teljes AG-ben, annyi f-fel egyenlő van a teljes DH-ban; ahányszorosa tehát AG a c-nek, annyiszorosa lesz DH is f-nek. Az első és az ötödik összege, AG, ugyanannyiszorosa lesz tehát a második c-nek, mint a harmadik meg a hatodik, DH, a negyedik f-nek.



Ha tehát egy... Éppen ezt kellett megmutatni.

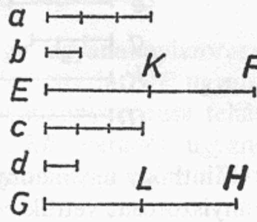
F.: V. 3., 6., 17.

V. 3. Tétel

*Ha egy első mennyiség egy másodiknak ugyanannyiszorosa, mint egy harmadik egy negyediknek, és vesszük ugyanannyiszorosát az elsőnek és a harmadiknak, akkor a fölvett mennyiségek is egyenlőség révén (V. 17. D.) külön-külön ugyanannyiszorosai az egyik a másodiknak a másik pedig a negyediknek.**

Legyen ugyanis az *a* első mennyiség a második *b*-nek ugyanannyiszorosa, mint a harmadik *c* a negyedik *d*-nek, és vegyük *a*-nak és *c*-nek ugyanannyiszorosát, *EF*-et és *GH*-t. Azt állítom, hogy *EF* ugyanannyiszorosa *b*-nek, mint *GH* a *d*-nek.

Minthogy ugyanis ugyanannyiszorosa *EF* az *a*-nak, mint *GH* a *c*-nek, ahány *a*-val egyenlő mennyiség van *EF*-ben, annyi *c*-vel egyenlő van *GH*-ban. Osszuk föl *EF*-et az *a*-val egyenlő *EK*, *KF*, *GH*-t pedig a *c*-vel egyenlő *GL*, *LH* mennyiségekre. Ekkor az *EK*, *KF* mennyiségek száma* egyenlő lesz a *GL*, *LH* mennyiségek számával. S minthogy ugyanannyiszorosa *a* a *b*-nek, mint *c* a *d*-nek, s *EK* egyenlő *a*-val, *GL* pedig *c*-vel, így ugyanannyiszorosa *EK* a *b*-nek, mint *GL* a *d*-nek. Ugyanígy ugyanannyiszorosa *KF* a *b*-nek, mint *LH* a *d*-nek. Minthogy tehát az *EK* első mennyiség a második *b*-nek ugyanannyiszorosa, mint a harmadik *GL* a negyedik *d*-nek, és az ötödik *KF* a második *b*-nek ugyanannyiszorosa, mint a hatodik *LH* a negyedik *d*-nek, így az első és az ötödik összege, *EF*, a második *b*-nek ugyanannyiszorosa, mint a harmadik meg a hatodik, *GH*, a negyedik *f*-nek (V. 2.).



Ha tehát egy első mennyiség egy másodiknak ugyanannyiszorosa, mint egy harmadik egy negyediknek, és vesszük az elsőnek és a harmadiknak ugyanannyiszorosát, akkor... Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: V. 4.

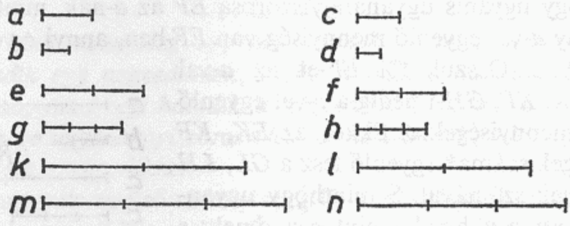
V. 4. Tétel

Ha egy első mennyiség egy másodikhoz ugyanúgy aránylik, mint egy harmadik egy negyedikhez, akkor – bárhányszoros is a többszörözés –

*az első és a harmadik ugyanannyiszorosa is ugyanúgy aránylik a második és a negyedik ugyanannyiszorosához, megfelelően párosítva őket.**

Legyen ugyanis az *a* első mennyiségnek a második *b*-hez való aránya ugyanaz, mint a harmadik *c*-é a negyedik *d*-hez, és vegyük *a*-nak és *c*-nek ugyanannyiszorosát, *e*-t és *f*-et, *b*-nek és *d*-nek pedig egy tetszőleges másik ugyanannyiszorosát, *g*-t és *h*-t. Azt állítom, hogy *f* úgy aránylik *h*-hoz, mint *e* a *g*-hez.

Vegyük ugyanis *e* és *f* egy *k* és *l* ugyanannyiszorosát, *g*-nek és *h*-nak pedig egy tetszőleges másik *m*, illetve *n* ugyanannyiszorosát.



Minthogy ugyanannyiszorosa *e* az *a*-nak, mint *f* a *c*-nek, és ugyanannyiszorosát vettük *e*-nek és *f*-nek, *k*-t, illetve *l*-et, így ugyanannyiszorosa *k* az *a*-nak, mint *l* a *c*-nek (V. 3.). Ugyanígy *m* ugyanannyiszorosa *b*-nek, mint *n* a *d*-nek. Minthogy *c* úgy aránylik *d*-hez, mint *a* a *b*-hez, és vettük *a*-nak és *c*-nek *k*, illetve *l*, *b*-nek és *d*-nek pedig egy tetszőleges másik *m*, illetve *n* ugyanannyiszorosát, így ha *k* nagyobb *m*-nél, akkor *l* is nagyobb *n*-nél, ha egyenlő vele, ez is egyenlő, ha kisebb, ez is kisebb. S *k*, illetve *l* az *e*-nek és *f*-nek ugyanannyiszorosa, *m* illetve *n* pedig *g*-nek és *h*-nak egy tetszőleges másik ugyanannyiszorosa; *f* tehát úgy aránylik *h*-hoz, mint *e* a *g*-hez (V. 5. D.).

Ha tehát egy... Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: V. 22.

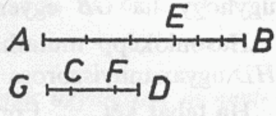
V. 5. Tétel

*Ha egy mennyiség ugyanannyiszorosa egy másiknak, mint az egyik kivonandó a másik kivonandónak, akkor az egyik maradék is ugyanannyiszorosa lesz a másik maradéknak, ahányszorosa az egész mennyiség az egész másiknak.**

Legyen ugyanis az AB mennyiség ugyanannyiszorosa a CD mennyiségnek, mint az AE kivonandó a CF kivonandónak. Azt állítom, hogy az EB maradék is ugyanannyiszorosa lesz az FD maradéknak, ahányszorosa az egész AB az egész CD-nek.

Legyen ugyanis EB annyiszorosa GC-nek, ahányszorosa AE a CF-nek.

Minthogy ugyanannyiszorosa AE a CF-nek, mint EB a GC-nek, így AB ugyanannyiszorosa GF-nek, mint AE a CF-nek (V. 1.). A feltétel szerint AE ugyanannyiszorosa CF-nek, mint AB a CD-nek. Ugyanannyiszorosa tehát AB a GF-nek és CD-nek; így egyenlő GF a CD-vel.** Vonjuk le a közös CF részt, ekkor a maradék GC egyenlő a maradék FD-vel. Minthogy ugyanannyiszorosa AE a CF-nek, mint EB a GC-nek, GC pedig egyenlő FD-vel, így ugyanannyiszorosa AE a CF-nek, mint EB az FD-nek. A feltétel szerint AE ugyanannyiszorosa CF-nek, mint AB a CD-nek; ugyanannyiszorosa tehát EB az FD-nek, mint AB a CD-nek, azaz az EB maradék ugyanannyiszorosa lesz az FD maradéknak, ahányszorosa az egész AB az egész CD-nek.



Ha tehát egy ... Éppen ezt kellett megmutatni.

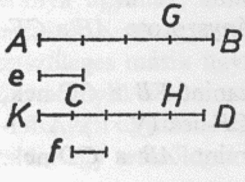
V. 6. Tétel

*Ha két mennyiség két másiknak ugyanannyiszorosa, és valamely kivonandók e másik mennyiségeknek ugyanannyiszorosai, akkor a maradékok is vagy egyenlők e másik mennyiségekkel, vagy ugyanannyiszorosai.**

Legyen ugyanis két mennyiség, AB és CD, két másiknak e-nek és f-nek ugyanannyiszorosa, és legyenek az AG, CH kivonandók ezen e, illetve f mennyiségeknek ugyanannyiszorosai. Azt állítom, hogy a GB, HD maradékok is vagy egyenlők e-vel, illetve f-fel, vagy ugyanannyiszorosaik.

Legyen ugyanis először GB egyenlő e-vel. Azt állítom, hogy HD is egyenlő f-fel.

Vegyük föl az f-fel egyenlő CK-t. Minthogy ugyanannyiszorosa AG az e-nek, mint CH az f-nek, és GB egyenlő e-vel, KC pedig f-fel, így AB ugyanannyiszorosa e-nek, mint KH az f-nek (V. 2.). AB viszont feltétel szerint ugyanannyiszorosa e-nek, mint CD az f-nek; ugyanannyiszorosa tehát KH az f-nek, mint CD az f-nek. Minthogy KH és CD ugyanannyiszorosa f-nek, így KH egyenlő CD-vel.** Vonjuk le a közös CH-t; így a maradék KC egyenlő a maradék HD-vel. De f egyenlő KC-vel, HD is egyenlő tehát f-fel. Vonjuk le a közös CH-t; így a maradék KC egyenlő a maradék HD-vel. De f egyenlő KC-vel, tehát HD is egyenlő f-fel, úgyhogy ha GB egyenlő e-vel, akkor HD is egyenlő f-fel.



Hasonlóképp mutathatjuk meg, hogy ha GB többszöröse e-nek, HD ugyanannyiszorosa lesz f-nek.

Ha tehát két ... Éppen ezt kellett megmutatni.

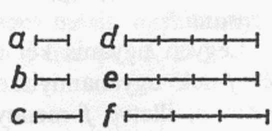
V. 7. Tétel

Egyenlő mennyiségeknek ugyanahhoz a mennyiséghez és ugyanazon mennyiségeknek egyenlőkhöz való aránya ugyanaz.

Legyenek a és b egyenlő mennyiségek és c egy tetszőleges harmadik mennyiség. Azt állítom, hogy a-nak és b-nek c-hez való aránya ugyanaz, szintúgy c-é a-hoz és b-hez.

Vegyük ugyanis a-nak és b-nek d, illetve e ugyanannyiszorosát, s c-nek egy tetszőleges másik f többszörösét.

Minthogy d ugyanannyiszorosa a-nak, mint e a b-nek, a pedig egyenlő b-vel, így d is egyenlő e-vel. f egy tetszőleges másik mennyiség, ha tehát d nagyobb f-nél, e is nagyobb f-nél, ha egyenlő vele, ez is egyenlő, s ha kisebb nála, ez is kisebb. S d és e az a-nak és b-nek ugyanannyiszorosai, f pedig c-nek egy tetszőleges másik többszöröse; úgy aránylik tehát b a c-hez, ahogyan a (V. 5. D.).



Azt állítom, hogy c-nek a-hoz és b-hez való aránya is ugyanaz.

Az előbbivel azonos konstrukció által hasonlóképp mutathatjuk meg, hogy d egyenlő e-vel. f egy másik mennyiség, ha tehát f nagyobb d-nél, akkor e-nél is, ha egyenlő vele, akkor e-vel is egyenlő, és ha kisebb nála, akkor *e*-nél is kisebb. S *f* a *c*-nek egy többszöröse, *d* és *e* pedig *a*-nak és *b*-nek egy tetszőleges másik ugyanannyiszorosa; úgy aránylik tehát *c* a *b*-hez, ahogyan *a*-hoz (V. 5. D.).

Egyenlő mennyiségeknek tehát ugyanahhoz ...

F.: V. 10., 15., 20–21., 25.; VI. 2., 4., 10–12., 14–17., 19., 30., 54. L.; XI. 31., 34.; XII. 15.

*Következmény**

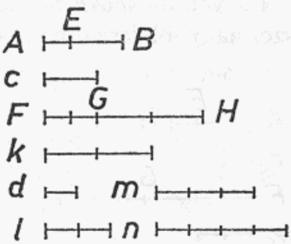
Ebből már nyilvánvaló, hogy ha mennyiségek arányosak, akkor fordítva is arányosak. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: V. 20–21., 24.; VI. 31.; X. 5–6., 14., 28., 43., 52., 68.; XI. 32.; XII. 2., 5., 12., 18.

V. 8. Tétel

Nem egyenlő mennyiségek közül a nagyobbnak ugyanazon mennyiséghez való aránya nagyobb, mint a kisebbé. Ugyanannak a mennyiségnek a kisebbhez való aránya nagyobb, mint a nagyobbhoz való aránya.

Legyenek *AB* és *c* nem egyenlő mennyiségek, és legyen *AB* a nagyobb, s *d* egy tetszőleges másik mennyiség. Azt állítom, hogy *AB*-nek *d*-hez való aránya nagyobb, mint *c*-é, és *d*-nek *c*-hez való aránya nagyobb, mint *AB*-hez való aránya.



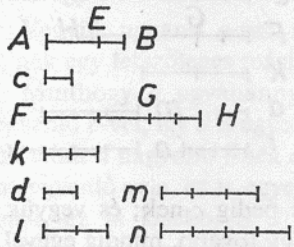
Minthogy *AB* nagyobb *c*-nél, vegyünk egy *c*-vel egyenlő *BE*-t. Az *AE*, *EB* mennyiségek kisebbike többszörözve egyszer nagyobb lesz *d*-nél (V. 4. D.). Legyen először *AE* kisebb *EB*-nél, többszörözzük *AE*-t, és legyen *FG* egy *d*-nél nagyobb többszöröse, és ahányszorosa *FG* az *AE*-nek, annyiszorosa legyen *GH* is *EB*-nek, *k* pedig *c*-nek; és vegyük a *d*-nek *l* kétszeresét, *m* háromszorosát és így tovább, mindig eggyel többet, amíg egy olyan többszöröséhez nem jutunk *d*-nek, mely elsőként nagyobb *k*-nál. Vegyük föl ezt az *n*-et, mely legyen négyszerese *d*-nek és elsőként nagyobb *k*-nál.

Minthogy *k* először *n*-nél kisebb, így *k* az *m*-nél nem kisebb. S minthogy *FG* ugyanannyiszorosa *AE*-nek, mint *GH* az *EB*-nek, ugyanannyiszorosa *FG* az *AE*-nek, mint *FH* az *AB*-nek (V. 1.). *FG* viszont ugyanannyiszorosa *AE*-nek, mint *k* a *c*-nek; ugyanannyiszorosa tehát *FH* az *AB*-nek, mint *k* a *c*-nek. *FH* és *k* tehát *AB*-nek, illetve *c*-nek ugyanannyiszorosa. Továbbá, minthogy *GH* ugyanannyiszorosa *EB*-nek, mint *k* a *c*-nek, s *EB* egyenlő *c*-vel, *GH* is egyenlő *k*-val. *k* viszont nem kisebb *m*-nél, *GH* sem kisebb tehát *m*-nél. *FG* nagyobb *d*-nél, a teljes *FH* tehát nagyobb *d* és *m* összegénél. *d* és *m* összege viszont egyenlő *n*-nel, minthogy *m* háromszorosa *d*-nek, *m* és *d* összege pedig négyszerese, s *n* is négyszerese *d*-nek; *m* és *d* összege tehát egyenlő *n*-nel. *FH* viszont nagyobb *m* meg *d*-nél, *FH* tehát nagyobb *n*-nél; de *k* nem nagyobb *n*-nél. S *FH* és *k* az *AB*-nek, illetve *c*-nek ugyanannyiszorosa, *n* pedig *d* egy másik tetszőleges többszöröse; *AB*-nek *d*-hez való aránya tehát nagyobb, mint *c*-é (V. 7. D.).

Azt is állítom, hogy *d*-nek *c*-hez való aránya nagyobb, mint *AB*-hez való aránya.

Az előbbivel azonos konstrukció által hasonlóképp mutathatjuk meg, hogy *n* nagyobb *k*-nál, de nem nagyobb *FH*-nál. S *n* a *d*-nek egy többszöröse, *FH* és *k* pedig *AB*-nek, illetve *c*-nek tetszőleges másik ugyanannyiszorosai. *d*-nek *c*-hez való aránya tehát nagyobb, mint *AB*-hez való aránya.

Legyen most *AE* nagyobb *EB*-nél. A kisebb *EB* többszörözve egyszer nagyobb lesz *d*-nél. Többszörözzük, és legyen *GH* a *d*-nél nagyobb többszöröse *EB*-nek; s ahányszorosa *GH* az *EB*-nek, annyiszorosa legyen *FG* is *AE*-nek, *k* pedig *c*-nek. Hasonlóképp mutathatjuk meg, hogy *FH* és *k* ugyanannyiszorosa *AB*-nek, illetve *c*-nek. Vegyük hasonlóképp *d*-nek azt az *n* többszörösét, mely elsőként nagyobb *FG*-nél; úgyhogy *FG* ismét nem kisebb *m*-nél. *GH* nagyobb *d*-nél, a teljes *FH* tehát nagyobb *d* meg *m*-nél, azaz *n*-nél. *k* viszont nem nagyobb *n*-nél, minthogy a *GH*-nál, azaz *k*-nál nagyobb *FG* sem nagyobb *n*-nél. A föntiek mintájára, ugyanúgy fejezzük be a bizonyítást.



Nem egyenlő mennyiségek közül tehát... Éppen ezt kellett megmutatni.

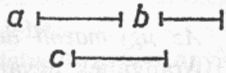
F.: V. 9–10., 14., 20–21.

V. 9. Tétel

Mennyiségek, melyeknek ugyanahhoz a mennyiséghez való arányuk ugyanaz, egyenlők; s azok a mennyiségek, melyekhez ugyanannak a mennyiségnek ugyanaz az aránya, egyenlők.

Legyen ugyanis *a*-nak és *b*-nek *c*-hez való aránya ugyanaz. Azt állítom, hogy *a* egyenlő *b*-vel.

Ha ugyanis nem egyenlő, akkor *a*-nak és *b*-nek *c*-hez való aránya nem volna ugyanaz (V. 8.); de ugyanaz, egyenlő tehát *a* a *b*-vel.



Legyen most *c*-nek *a*-hoz és *b*-hez való aránya ugyanaz. Azt állítom, hogy *a* egyenlő *b*-vel.

Ha ugyanis nem egyenlő, akkor *c*-nek *a*-hoz és *b*-hez való aránya nem volna ugyanaz (V. 8.); de ugyanaz, egyenlő tehát *a* a *b*-vel.

Mennyiségek tehát, ... Éppen ezt kellett megmutatni.

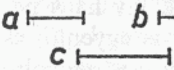
F.: VI. 2–3., 5–7., 14–15., 20–22., 26.; X. 6., 31., 34.; XII. 15.

V. 10. Tétel

Ha mennyiségeknek egy adott mennyiséghez való aránya létezik, akkor közülük nagyobb az, amelyiknek ehhez való aránya nagyobb; amelyikhez való aránya pedig az adott mennyiségnek nagyobb, az kisebb.

Legyen ugyanis *a*-nak *c*-hez való aránya nagyobb, mint *b*-é. Azt állítom, hogy *a* nagyobb *b*-nél.

Ellenkező esetben ugyanis vagy egyenlő *a* a *b*-vel, vagy kisebb nála. Egyenlőnek nem egyenlő *a* a *b*-vel, mert akkor *a*-nak és *b*-nek *c*-hez való aránya ugyanaz volna (V. 7.). De nem az, nem egyenlő tehát *a* a *b*-vel. Nem is kisebb *a* a *b*-nél, mert akkor *a*-nak *c*-hez való aránya kisebb volna, mint *b*-é (V. 8.). De nem az, nem kisebb tehát *a* a *b*-nél. Megmutattuk, hogy nem is egyenlő vele; nagyobb tehát *a* a *b*-nél.



Legyen most *c*-nek *b*-hez való aránya nagyobb, mint *a*-hoz való aránya. Azt állítom, hogy *b* kisebb *a*-nál.

Ellenkező esetben ugyanis vagy egyenlő vele, vagy nagyobb nála. Egyenlőnek nem egyenlő *b* az *a*-val, mert akkor *c*-nek *a*-hoz és *b*-hez való aránya ugyanaz volna (V. 7.). De nem az, nem egyenlő tehát a a b-vel. Nem is nagyobb b az a-nál, mert akkor c-nek b-hez való aránya kisebb volna, mint a-hoz való aránya (V. 8.). De nem az, nem nagyobb tehát b az a-nál. Megmutattuk, hogy nem is egyenlő vele; kisebb tehát b az a-nál.

Ha tehát ... Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: V. 14., 20–21.

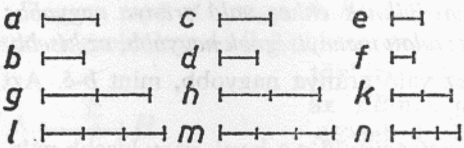
V. 11. Tétel

Az ugyanazon aránnyal azonos arányok egymással is azonosak.

Arányuljék ugyanis úgy c a d-hez, mint a a b-hez, és e az f-hez, mint c a d-hez. Azt állítom, hogy e úgy aránylik f-hez, mint a a b-hez.

Vegyük ugyanis a, c és e valamely g, h, illetve k ugyanannyiszorosát, és b-nek, d-nek és f-nek egy tetszőleges másik l, m, illetve n ugyanannyiszorosát.

Minthogy c úgy aránylik d-hez, mint a a b-hez, és ugyanannyiszorosát vettük a-nak és c-nek, g-t, illetve h-t, b-nek és d-nek pedig egy tetszőleges másik ugyanannyiszorosát, l-et, illetve m-et, így ha g nagyobb l-nél, akkor h is nagyobb m-nél, és ha egyenlő vele, h is egyenlő, és ha kisebb, akkor h is kisebb. Ismét, minthogy e úgy aránylik f-hez, mint c a d-hez, és ugyanannyiszorosát vettük c-nek és e-nek, h-t, illetve k-t, d-nek és f-nek pedig egy tetszőleges másik ugyanannyiszorosát, m-et, illetve n-et, így ha h nagyobb m-nél, akkor k is nagyobb n-nél, ha egyenlő, k is egyenlő, és ha kisebb, k is kisebb. De ha h nagyobb m-nél, akkor g is nagyobb l-nél, és ha egyenlő, g is egyenlő, és ha kisebb, g is kisebb; úgyhogy ha g nagyobb l-nél, akkor k is nagyobb n-nél, és ha egyenlő, k is egyenlő, és ha kisebb, k is kisebb. S g és h az a-nak és e-nek ugyanannyiszorosa, l és n pedig b-nek, illetve f-nek tetszőleges másik ugyanannyiszorosa; e tehát úgy aránylik f-hez, mint a a b-hez.



Az ugyanazon aránnyal azonos arányok tehát... Éppen ezt kellett megmutatni.

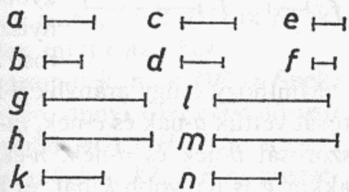
F.: V. 16., 18–21., 23., 25.; VI. 1–7., 10–12., 14–20., 22–26., 30., 33.; X. 6., 12., 25., 27–28., 32., 54. L., 66–68., 91–92., 98., 100., 102–103.; XI. 17., 31.; XII. 11., 15.

V. 12. Tétel

*Ha valahány mennyiség arányos, akkor az előtagok összege úgy aránylik az utótagok összegéhez, mint bármelyik előtag az utótagjához.**

Legyen valahány mennyiség, a, b, c, d, e és f arányos: c a d-hez és e az f-hez úgy arányuljék, mint a a b-hez. Azt állítom, hogy a meg c meg e úgy aránylik b meg d meg f-hez, mint a a b-hez.

Vegyük ugyanis a-nak, c-nek és e-nek g, h, illetve k ugyanannyiszorosát, b-nek, d-nek és f-nek pedig tetszőleges másik l, m, illetve n ugyanannyiszorosát.



Minthogy c a d-hez és e az f-hez úgy aránylik, mint a a b-hez, és ugyanannyiszorosát vettük a-nak, c-nek és e-nek, g-t, h-t, illetve k-t, s tetszőleges másik ugyanannyiszorosát b-nek, d-nek és f-nek, l-et, m-et, illetve n-et, így ha g nagyobb l-nél, akkor h is nagyobb m-nél és k az n-nél, és ha egyenlő, ezek is egyenlők, és ha kisebb, ezek is kisebbek, úgyhogy ha g nagyobb l-nél, akkor g meg h meg k is nagyobb l meg m meg n-nél, és ha egyenlő, ez is egyenlő, és ha kisebb, ez is kisebb. S g, és g meg h meg k az a-nak, illetve a meg c meg e-nek ugyanannyiszorosa, minthogy ha valahány mennyiség ugyanannyi másiknak páronként ugyanannyiszorosa, akkor annyiszorosa lesz az első mennyiségek összege a másikak összegének, ahányszorosa az egyik első mennyiség egy (megfelelő) másiknak (V. 1.). Ugyanígy l, és l meg m meg n is ugyanannyiszorosa b-nek, illetve b meg d meg f-nek; a meg c meg e tehát úgy aránylik b meg d meg f-hez, mint a a b-hez.

Ha tehát valahány... Éppen ezt kellett megmutatni.

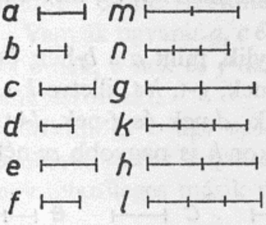
F.: V. 15.; VI. 20.; X. 103–105., 112.; XII. 4., 8. K., 12., 17. K.

V. 13. Tétel

Ha egy első mennyiségnek egy másodikhoz való aránya ugyanaz, mint *egy harmadiké egy negyedikhez, a harmadiknak a negyedikhez való aránya viszont nagyobb, mint egy ötödiké egy hatodikhoz, akkor az elsőnek a másodikhoz való aránya is nagyobb, mint az ötödiké a hatodikhoz.*

Legyen ugyanis az első mennyiségnek, *a*-nak, a második *b*-hez való aránya ugyanaz, mint a harmadik *c*-é a negyedik *d*-hez, a harmadik *c*-nek a negyedik *d*-hez való aránya viszont legyen nagyobb, mint az ötödik *e*-é a hatodik *f*-hez. Azt állítom, hogy az első *a*-nak a második *b*-hez való aránya is nagyobb, mint az ötödik *e*-é a hatodik *f*-hez.

Miután létezik *c*-nek és *e*-nek olyan ugyanannyiszorosa, és *d*-nek és *f*-nek olyan tetszőleges másik ugyanannyiszorosa, hogy *c* többszöröse *d* többszörösénél nagyobb, *e* többszöröse viszont nem nagyobb *f* többszörösénél (V. 7. D.), vegyünk ilyeneket: legyen *c*-nek és *f*-nek ugyanannyiszorosa *g*, illetve *h*, *d*-nek és *f*-nek pedig tetszőleges másik ugyanannyiszorosa *k*, illetve *l* úgy, hogy *g* legyen nagyobb *k*-nál, de *h* ne legyen nagyobb *l*-nél. Ahányszorosa *g* a *c*-nek, annyiszorosa legyen *m* is *a*-nak, s ahányszorosa *k* a *d*-nek, annyiszorosa *n* is *b*-nek.



Minthogy *c* úgy aránylik *d*-hez, mint *a* a *b*-hez, és ugyanannyiszorosát vettük *a*-nak és *c*-nek, *m*-et és *g*-t, s valamely másik ugyanannyiszorosát *b*-nek és *d*-nek, *n*-et, illetve *k*-t, így ha *m* nagyobb *n*-nél, akkor *g* is nagyobb *k*-nál, és ha egyenlő, ez is egyenlő, és ha kisebb, ez is kisebb. *g* nagyobb *k*-nál, *m* is nagyobb tehát *n*-nél. *h* viszont nem nagyobb *l*-nél. *m* és *h* ugyanannyiszorosa *a*-nak, illetve *e*-nek, *n* és *l* valamely másik ugyanannyiszorosa *b*-nek, illetve *d*-nek; *a*-nak *b*-hez való aránya tehát nagyobb, mint *e*-é *f*-hez.

Ha tehát egy... Éppen ezt kellett megmutatni.

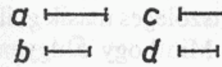
F.: V. 14., 20–21.

V. 14. Tétel

Ha egy első mennyiségnek egy másodikhoz való aránya ugyanaz, mint egy harmadiké egy negyedikhez, s az első mennyiség nagyobb a harmadiknál, akkor a második is nagyobb a negyediknél, s ha egyenlő, ez is egyenlő, s ha kisebb, ez is kisebb.

Legyen ugyanis az első mennyiségnek, a-nak a második b-hez való aránya ugyanaz, mint a harmadik c-é a negyedik d-hez, s legyen a nagyobb c-nél. Azt állítom, hogy b is nagyobb d-nél.

Minthogy ugyanis a nagyobb c-nél, b pedig valamely másik mennyiség, így a-nak b-hez való aránya nagyobb mint c-é (V. 8.). c úgy aránylik d-hez, mint a a b-hez, c-nek d-hez való aránya is nagyobb tehát, mint c-é b-hez (V. 13.). Az viszont, amelyikhez való aránya ugyanannak a mennyiségnek nagyobb, az kisebb (V. 10.); kisebb tehát d a b-nél, úgyhogy b nagyobb d-nél.



Hasonlóképp mutathatnánk meg azt is, hogy ha a egyenlő c-vel, akkor b is egyenlő d-vel, s ha a kisebb c-nél, akkor b is kisebb d-nél.

Ha tehát egy... Éppen ezt kellett megmutatni.

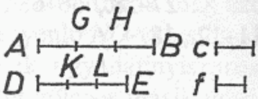
F.: V. 16., 18.; VI. 22. L., 25., 30–31.; XII. 2. K., 5., 11., 18.; XIII. 2., 5., 9., 17.

V. 15. Tétel

*A részek aránya páronként ugyanaz, mint az ugyanannyiszorosaiké.**

Legyen ugyanis AB ugyanannyiszorosa c-nek, mint DE az f-nek. Azt állítom, hogy AB úgy aránylik DE-hez, mint c az f-hez.

Minthogy ugyanis AB ugyanannyiszorosa c-nek, mint DE az f-nek, ahány c-vel egyenlő mennyiség van AB-ben, annyi f-fel egyenlő van DE-ben is. Osszuk föl AB-t a c-vel egyenlő AG, GH, HB, a DE-t pedig az f-fel egyenlő DK, KL, LE mennyiségekre. Ekkor az AG, GH, HB mennyiségek száma egyenlő lesz a DK, KL, LE mennyiségek számával. Minthogy AG, GH és HB egyenlők egymással, s DK, KL és LE is egyenlő egymással, így GH úgy aránylik KL-hez és HB az LE-hez, mint AG a DK-hoz (V. 7., 11.). Az előtagok összege tehát úgy aránylik az utótagok összegéhez, mint az egyik előtag az utótagjához (V. 12.); AB tehát úgy aránylik DE-hez, mint AG DK-hoz. AG viszont egyenlő c-vel, s DK az f-fel; AB tehát úgy aránylik DE-hez, mint c az f-hez (V. 7., 11.).



A részek aránya tehát... Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: V. 16., 23.; VI. 1., 33.; XIII. 17.

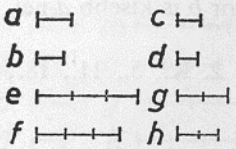
V. 16. Tétel

Ha négy mennyiség arányos, akkor fölcserélve is arányos lesz.

Legyen négy mennyiség, a, b, c és d arányos: amint a a b-hez, úgy c a d-hez. Azt állítom, hogy fölcserélve is arányosak lesznek: amint a a c-hez, úgy b a d-hez.

Vegyük ugyanis a-nak és b-nek e, illetve f, c-nek és d-nek pedig tetszőleges másik g, illetve h ugyanannyiszorosát.

Minthogy e ugyanannyiszorosa a-nak, mint f a b-nek, s a részek aránya ugyanaz, mint az ugyanannyiszorosaiké (V. 15.), e úgy aránylik f-hez, mint a a b-hez. c úgy aránylik d-hez, mint a a b-hez, e tehát úgy aránylik f-hez, mint c a d-hez (V. 11.). Továbbá, minthogy g és h ugyanannyiszorosai c-nek, illetve d-nek, g úgy aránylik h-hoz, mint c a d-hez (V. 15.). e úgy aránylik f-hez, mint c a d-hez, g tehát úgy aránylik h-hoz, mint e az f-hez (V. 11.). Ha viszont négy mennyiség arányos, s az első mennyiség nagyobb a harmadiknál, akkor a második is nagyobb a negyediknél, s ha egyenlő, ez is egyenlő, s ha kisebb, ez is kisebb (V. 14.). Ha tehát e nagyobb g-nél, f is nagyobb h-nál, s ha egyenlő, ez is egyenlő, s ha kisebb, ez is kisebb. S e és f az a-nak, illetve b-nek ugyanannyiszorosa és g, h a c-nek, illetve d-nek tetszőleges másik ugyanannyiszorosa; b tehát úgy aránylik d-hez, mint a a c-hez.



Ha tehát négy... Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: V. 19., 23.; VI. 4., 19–20., 22. L. 24–25.; X. 27–28., 66–68., 103–105., 113–114.; XI. 23.; XII. 2., 2. K., 4–5., 11–12., 18.

V. 17. Tétel

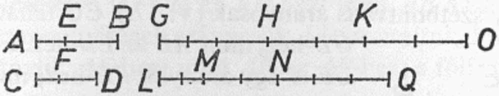
*Ha összetett mennyiségek arányosak, akkor szétbontva is arányosak.**

Legyenek az AB, BE, CD, DF összetett mennyiségek arányosak, CD a DF-hez, mint AB a BE-hez. Azt állítom, hogy szétbontva is arányosak, CF a DF-hez, mint AE az EB-hez.

Vegyük ugyanis AE-nek, BE-nek, CF-nek és DF-nek GH, HK, LM, illetve MN, BE-nek és DF-nek pedig tetszőleges másik KO, NQ ugyanannyiszorosát.

Minthogy GH ugyanannyiszorosa AE-nek, mint HK a BE-nek, GH

ugyanannyiszorosa *AE*-nek, mint *GK* az *AB*-nek (V. 1.). *GH* ugyanannyiszorosa *AE*-nek, mint *LM* a *CF*-nek, *GK* tehát ugyanannyiszorosa *AB*-nek, mint *LM* a *CF*-nek. Ismét, minthogy *LM* ugyanannyiszorosa *CF*-nek, mint *MN* a *DF*-nek, *LM* ugyanannyiszorosa *CF*-nek, mint



LN a *CD*-nek (V. 1.). *LM* ugyanannyiszorosa volt *CF*-nek, mint *GK* az *AB*-nek, *GK* tehát ugyanannyiszorosa *AB*-nek, mint *LN* a *CD*-nek. *GK*, *LN* tehát ugyanannyiszorosa *AB*-nek, illetve *CD*-nek. Továbbá, minthogy *HK* ugyanannyiszorosa *BE*-nek, mint *MN* a *DF*-nek, s *KO* is ugyanannyiszorosa *BE*-nek, mint *NQ* a *DF*-nek, a *HO* összeg is ugyanannyiszorosa *BE*-nek, mint *MQ* a *DF*-nek (V. 2.). Minthogy *CD* úgy aránylik *DF*-hez, mint *AB* a *BE*-hez, és vettük *AB*-nek és *CD*-nek *GK*, illetve *LN*, *BE*-nek és *DF*-nek pedig *HO*, illetve *MQ* ugyanannyiszorosát, ha *GK* nagyobb *HO*-nál, akkor *LN* is nagyobb *MQ*-nál, és ha egyenlő, egyenlő, s ha kisebb, kisebb. Legyen most *GK* nagyobb *HO*-nál. Levonva a közös *HK*-t, *GH* is nagyobb *KO*-nál. De ha *GK* nagyobb *HO*-nál, akkor *LN* is nagyobb *MQ*-nál; nagyobb tehát *LN* az *MQ*-nál. Levonva a közös *MN*-et, *LM* is nagyobb *NQ*-nál, úgyhogy ha *GH* nagyobb *KO*-nál, akkor *LM* is nagyobb *NQ*-nál. Hasonlóképp mutathatnánk meg azt is, hogy ha *GH* egyenlő *KO*-val, akkor *LM* is egyenlő *NQ*-val, s ha kisebb, kisebb. S *GH*, *LM* az *AE*-nek, illetve *CF*-nek ugyanannyiszorosa, *KO* és *NQ* pedig *BE*-nek, illetve *DF*-nek tetszőleges másik ugyanannyiszorosa; *CF* tehát úgy aránylik *DF*-hez, mint *AE* a *BE*-hez.

Ha tehát... Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: V. 18–19.; X. 14., 112.

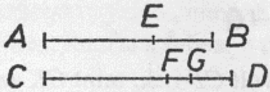
V. 18. Tétel

*Ha szétbontott mennyiségek arányosak, akkor összetéve is arányosak.**

Legyenek az *AE*, *EB*, *CF*, *FD* szétbontott mennyiségek arányosak, *CF* az *FD*-hez, mint *AE* az *EB*-hez. Azt állítom, hogy összetéve is arányosak, *CD* az *FD*-hez, mint *AB* az *EB*-hez.

Ha ugyanis *CD* nem úgy aránylik *FD*-hez, mint *AB* az *EB*-hez, akkor *CD* egy *FD*-nél kisebb vagy nagyobb mennyiséghez aránylik úgy, mint *AB* az *EB*-hez.

Legyen ez a mennyiség először egy kisebb *GD*. Minthogy *CD* úgy aránylik *GD*-hez, mint *AB* az *EB*-hez, összetett mennyiségek arányosak, úgyhogy szétbontva is arányosak (V. 17.). *CG* tehát úgy aránylik *GD*-hez, mint *AE* az *EB*-hez. Feltevés szerint *CF* is úgy aránylik *FD*-hez, mint *AE* az *EB*-hez, *CF* tehát úgy aránylik *FD*-hez, mint *CG* a *GD*-hez (V. 11.). De a *CG* első mennyiség nagyobb a harmadik *CF*-nél, a második *GD* is nagyobb tehát a negyedik *FD*-nél (V. 14.). Azonban kisebb is nála, s ez lehetetlen, *CD* tehát nem aránylik úgy egy *FD*-nél kisebb mennyiséghez, mint *AB* *EB*-hez. Hasonlóképp mutathatnánk meg, hogy egy nagyobbhoz sem; magához *FD*-hez aránylik tehát így.



Ha tehát... Éppen ezt kellett megmutatni.

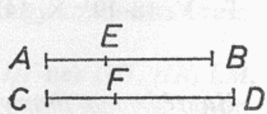
F.: V. 24.; VI. 24.; X. 54. L., 68., 105.; XII. 6.; XIII. 11.

V. 19. Tétel

*Ha egy kisebbítendő úgy aránylik egy másik kisebbítendőhöz, mint egy kivonandó egy másik kivonandóhoz, akkor az egyik maradék is úgy aránylik a másik maradékhoz, mint az egyik kisebbítendő a másik kisebbítendőhöz.**

Arányuljék ugyanis az *AE* kivonandó a *CF* kivonandóhoz, mint az *AB* kisebbítendő a *CD* kisebbítendőhöz. Azt állítom, hogy az *EB* maradék is úgy aránylik az *FD* maradékhoz, mint az *AB* kisebbítendő a *CD* kisebbítendőhöz.

Minthogy ugyanis *AE* úgy aránylik *CF*-hez, mint *AB* a *CD*-hez, fölcserélve is *CD* úgy aránylik *CF*-hez, mint *AB* az *AE*-hez (V. 16.). S minthogy így összetett mennyiségek arányosak, szétbontva is arányosak (V. 17.): *FD* a *CF*-hez, mint *EB* az *AE*-hez; s fölcserélve is: *AE* a *CF*-hez, mint *EB* az *ED*-hez (V. 16.). Az *AB* kisebbítendő viszont feltevés szerint úgy aránylik a *CD* kisebbítendőhöz, mint *AE* a *CF*-hez.



Az EB maradék is úgy aránylik tehát az FD maradékhoz, mint az AB kisebbítendő a CD kisebbítendőhöz (V. 11.).

Ha tehát... [Éppen ezt kellett megmutatni.]

F.: V. 25.; X. 66–67., 113–114.

[Minthogy megmutattuk, hogy EB úgy aránylik FD-hez, mint AB CD-hez, fölcserélve is: CD az FD-hez, mint AB az EB-hez (V. 16.). Így összetett mennyiségek arányosak. Megmutattuk, hogy ugyanakkor AB úgy aránylik AE-hez, mint AB az AE-hez; s fölforgatva vannak.]

Következmény

Ebből már nyilvánvaló, hogy ha összetett mennyiségek arányosak, akkor fölforgatva is arányosak.* Éppen ezt kellett megmutatni.

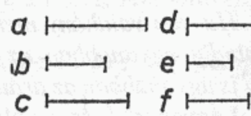
F.: X. 29–30., 48–52., 85–90., 113.

V. 20. Tétel

*Ha van három mennyiség és ugyanannyi másik, melyek kettesével mindig ugyanabban az arányban állnak, s egyenlő (sok tagon) át az első nagyobb a harmadiknál, akkor a negyedik is nagyobb a hatodiknál, s ha egyenlő, egyenlő, s ha kisebb, kisebb.**

Legyen a, b és c három mennyiség, s d, e, f ugyanannyi másik, melyek kettesével mindig ugyanabban az arányban állnak, d az e-hez, mint a a b-hez és e az f-hez, mint b a c-hez, s egyenlő (sok tagon) át legyen a nagyobb c-nél. Azt állítom, hogy d is nagyobb f-nél, s ha egyenlő, egyenlő, s ha kisebb, kisebb.

Minthogy a nagyobb c-nél, b pedig valamely másik mennyiség, s a nagyobbnak ugyanazon mennyiséghez való aránya nagyobb, mint a kisebbé (V. 8.), a-nak b-hez való aránya nagyobb, mint c-é. Viszont d úgy aránylik e-hez, mint a a b-hez, f pedig – invertálva (V. 7. K.) – e-hez, mint c a b-hez, d-nek e-hez való aránya is nagyobb tehát, mint f-é (V. 13.) e-hez.



Ha viszont mennyiségeknek egy adott mennyiséghez való aránya létezik, akkor közülük nagyobb az, amelyiknek ehhez való aránya nagyobb (V. 10.); d tehát nagyobb f-nél. Hasonlóképp mutathatnánk meg azt is, hogy ha a egyenlő c-vel, d is egyenlő f-fel (V. 7., 7. K., 11., 9.), s ha kisebb, kisebb.

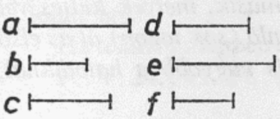
Ha tehát van... Éppen ezt kellett megmutatni.
F.: V. 22.

V. 21. Tétel

*Ha van három mennyiség és ugyanannyi másik, melyek kettesével – kereszteződően – mindig ugyanabban az arányban állnak, s egyenlő (sok tagon) át az első nagyobb a harmadiknál, akkor a negyedik is nagyobb a hatodiknál, s ha egyenlő, egyenlő, s ha kisebb, kisebb.**

Legyen *a*, *b* és *c* három mennyiség, s *d*, *e*, *f* ugyanannyi másik, melyek kettesével – kereszteződően – mindig ugyanabban az arányban állnak, *e* az *f*-hez, mint *a* a *b*-hez, *d* pedig *e*-hez, mint *b* *c*-hez, s egyenlő (sok tagon) át legyen *a* nagyobb *c*-nél. Azt állítom, hogy *d* is nagyobb *f*-nél, s ha egyenlő, egyenlő, s ha kisebb, kisebb.

Minthogy *a* nagyobb *c*-nél, *b* pedig valamely másik mennyiség, *a*-nak *b*-hez való aránya nagyobb, mint *c*-é (V. 8.). Viszont *e* úgy aránylik *f*-hez, mint *a* a *b*-hez, invertálva (V. 7. K.) pedig *d*-hez, mint *c* a *b*-hez, *e*-nek *f*-hez való aránya is nagyobb tehát, mint *e*-é *d*-hez (V. 13.). Az viszont, amelyikhez való aránya ugyanannak a mennyiségnek nagyobb, kisebb (V. 10.); kisebb tehát *f* a *d*-nél, s nagyobb *d* az *f*-nél. Hasonlóképp mutathatnánk meg azt is, hogy ha *a* egyenlő *c*-vel, *d* is egyenlő *f*-fel (V. 7., 11., 9.), s ha kisebb, kisebb.



Ha tehát van... Éppen ezt kellett megmutatni.
F.: V. 23.

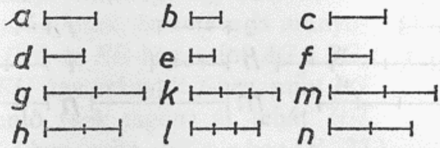
V. 22. Tétel

*Ha van valahány mennyiség és ugyanannyi másik, melyek kettesével mindig ugyanabban az arányban állnak, akkor egyenlő (sok tagon) át is ugyanabban az arányban állnak.**

Legyen *a*, *b* és *c* valahány mennyiség, s *d*, *e*, *f* ugyanannyi másik, melyek kettesével mindig ugyanabban az arányban állnak, *d* az *e*-hez, mint *a* a *b*-hez és *e* az *f*-hez, mint *b* a *c*-hez. Azt állítom, hogy egyenlő (sok tagon) át is ugyanabban az arányban állnak.

Vegyük ugyanis *a*-nak és *d*-nek *g*, *h*, *b*-nek és *e*-nek tetszőleges másik *k*, *l*, végül *c*-nek és *f*-nek tetszőleges másik *m*, *n* ugyanannyiszorosát.

Minthogy d úgy aránylik e-hez, mint a a b-hez, és ugyanannyiszorosát vettük a-nak és d-nek, g-t, illetve h-t, s tetszőleges másik ugyanannyiszorosát b-nek és e-nek, k-t, illetve l-et, h úgy aránylik l-hez, mint g a k-hoz (V. 4.). Ugyanígy l úgy aránylik n-hez, mint k az m-hez. Minthogy g, k és m három mennyiség és h, l, n ugyanannyi másik,



melyek kettesével mindig ugyanabban az arányban állnak, ha egyenlő (sok tagon) át g nagyobb m-nél, h is nagyobb n-nél, s ha egyenlő, egyenlő, s ha kisebb, kisebb (V. 20). S g és h az a-nak és d-nek, m és n pedig c-nek és f-nek tetszőleges másik ugyanannyiszorosa, d tehát úgy aránylik f-hez, mint a a c-hez.

Ha tehát van... Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: V. 24.; VI. 4., 20., 22–24.; X. 5–6., 12., 14., 50., 53., 87., 90.; XI. 27.; XII. 6., 12.

V. 23. Tétel

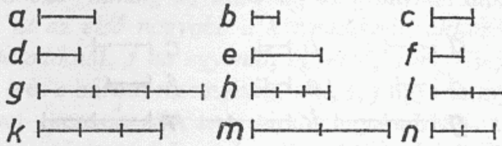
*Ha van három mennyiség és ugyanannyi másik, melyek kettesével – kereszteződően – mindig ugyanabban az arányban állnak, akkor egyenlő (sok tagon) át is ugyanabban az arányban állnak.**

Legyen a, b és c három mennyiség, s d, e, f ugyanannyi másik, melyek kettesével – kereszteződően – mindig ugyanabban az arányban állnak, e az f-hez, mint a a b-hez, d az e-hez, mint b a c-hez. Azt állítom, hogy d úgy aránylik f-hez, mint a a c-hez.

Vegyük a-nak, b-nek és d-nek g, h, k, c-nek, e-nek és f-nek pedig tetszőleges másik l, m, n ugyanannyiszorosát.

Minthogy g és h az a-nak, illetve b-nek ugyanannyiszorosa, a részek aránya viszont ugyanaz, mint az ugyanannyiszorosaiké (V. 15.), g úgy aránylik h-hoz, mint a a b-hez. Ugyanígy m úgy aránylik n-hez, mint e az f-hez. e úgy aránylik f-hez, mint a a b-hez, m tehát úgy aránylik n-hez, mint g a h-hoz (V. 11.). Minthogy d úgy aránylik e-hez, mint b a c-hez, felcserélve c úgy aránylik e-hez, mint b a d-hez (V. 16.).

Minthogy h és k a b-nek, illetve d-nek ugyanannyiszorosa, a részek aránya viszont ugyanaz, mint az ugyanannyiszorosaiké (V. 15.), h úgy aránylik k-hoz, mint b a d-hez. De c úgy aránylik e-hez, mint b a d-hez, c tehát úgy aránylik e-hez, mint h a k-hoz (V. 11.). Ismét, mint-



hogy l és m a c-nek, illetve e-nek ugyanannyiszorosa, l úgy aránylik m-hez, mint c az e-hez (V.15.). De h úgy aránylik k-hoz, mint c az e-hez, l tehát úgy aránylik m-hez, mint h a k-hoz (V.11.), és fölcserélve k úgy aránylik m-hez, mint h az l-hez (V. 16.). Megmutattuk azt is, hogy m úgy aránylik n-hez, mint g a h-hoz. Minthogy így van három mennyiség, g, h, l, s ugyanannyi másik, k, m, n, melyek kettesével – kereszteződően – mindig ugyanabban az arányban állnak egyenlő (sok tagon) át, ha g nagyobb l-nél, k is nagyobb n-nél, s ha egyenlő, egyenlő, s ha kisebb, kisebb (V. 21.). S g és k az a-nak, illetve d-nek, l és n pedig c-nek, illetve f-nek ugyanannyiszorosa, d tehát úgy aránylik f-hez, mint a a c-hez.

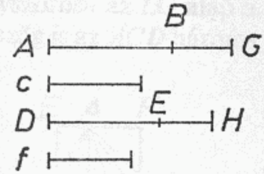
Ha tehát van... Éppen ezt kellett megmutatni.

V. 24. Tétel

*Ha egy első mennyiségnek egy másodikhoz ugyanaz az aránya, mint egy harmadiknak egy negyedikhez, és egy ötödiknek is ugyanaz az aránya a másodikhoz, mint egy hatodiknak a negyedikhez, akkor az első és ötödik összege is ugyanúgy aránylik a másodikhoz, mint a harmadik és hatodik összege a negyedikhez.**

Legyen ugyanis az első mennyiségnek, AB-nek, a másodikhoz, c-hez való aránya ugyanaz, mint a harmadiké, DE-é, a negyedikhez, f-hez, s az ötödiknek, BG-nek, a második c-hez való aránya is legyen ugyanaz, mint a hatodiké, EH-é, a negyedik f-hez. Azt állítom, hogy az első és az ötödik AG összege is ugyanúgy aránylik a második c-hez, mint a harmadik és a hatodik DH összege a negyedik f-hez.

Minthogy ugyanis EH úgy aránylik f-hez, mint BG a c-hez, invertálva f úgy aránylik EH-hoz, mint c a BG-hez (V. 7. K.). Minthogy DE úgy aránylik f-hez, mint AB a c-hez és f az EH-hoz, mint c a BG-hez, egyenlő (sok tagon) át DE úgy aránylik EH-hoz, mint AB a BG-hez (V. 22.). Minthogy így szétbontott mennyiségek arányosak, összetéve is arányosak (V. 18.): DH az EH-hoz, mint AG a BG-hez. Viszont EH úgy aránylik f-hez, mint BG a c-hez, egyenlő (sok tagon) át tehát DH úgy aránylik f-hez, mint AG a c-hez (V. 22.).



Ha tehát egy... Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: VI. 31.; X. 68.

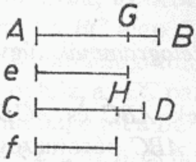
V. 25. Tétel

*Ha négy mennyiség arányos, akkor a legnagyobb és a legkisebb összege nagyobb, mint a maradék kettőé.**

Legyen négy mennyiség, AB, CD, e és f arányos, e az f-hez, mint AB a CD-hez, és legyen AB közülük a legnagyobb, f pedig a legkisebb. Azt állítom, hogy AB meg f nagyobb, mint CD meg e.

Vegyünk föl egy e-vel egyenlő AG-t és egy f-fel egyenlő CH-t (V.14. $\Rightarrow$ $CD > f$, ha $AB > e$)

Minthogy e úgy aránylik f-hez, mint AB a CD-hez, és e egyenlő AG-vel, f pedig CH-val, AG úgy aránylik CH-hoz, mint AB a CD-hez (V. 7., 11.).* Minthogy az AG kivonandó úgy aránylik a CH kivonandóhoz, mint az AB kisebbítendő a CD kisebbítendőhöz, a GB maradék is úgy aránylik a HD maradékhoz, mint az AB kisebbítendő a CD kisebbítendőhöz (V. 19.). AB nagyobb CD-nél, GB is nagyobb tehát HD-nál (V. 16., 14.). Minthogy AG egyenlő e-vel, f pedig CH-val, AG meg f egyenlő CH meg f-fel. Minthogy ha nem egyenlőkhöz egyenlőket adunk hozzá, az összegek nem egyenlők (4. Ax.), ha GB-hez hozzáadjuk AG meg f-et, HD-hez pedig CH meg e-t, lévén GB és HD nem egyenlő, s GB a nagyobb, következik, hogy AB meg f nagyobb, mint CD meg e.



Ha tehát négy... Éppen ezt kellett megmutatni.