Hatodik könyv

Definíciók

1. Sokszögek hasonlók, ha a szögeik egyenként megegyeznek és az egyenlő szögek melletti oldalaik arányosak.

[2. Alakzatok fordítottan arányosak, ha mind a két alakzatban előfordulnak egyenes és fordított arányok is.]*

3. Azt mondjuk egy szakaszról, hogy folytonos arányban van felosztva, ha a nagyobb szelet úgy aránylik a kisebbhez, mint a teljes szakasz a nagyobb szelethez.*

4. Egy alakzat magassága a csúcsáról az alapjára bocsátott merőleges.

[5. Azt mondjuk egy arányról, hogy arányokból tevődik össze, ha ezen arányok nagyságai egymással összeszorozva alkotják.]*
F.: VI. 23.

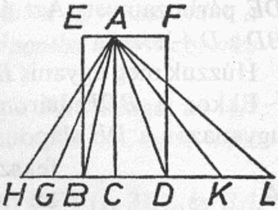
VI. 1. Tétel

Az ugyanazon magasságú háromszögek és paralelogrammák úgy aránylanak egymáshoz, mint az alapjaik.

Legyenek ugyanazon *AC* magasságú háromszögek *ABC* és *ACD* s paralelogrammák *EC* és *CF*. Azt állítom, hogy az *ABC* háromszög az *ACD* háromszöghöz és az *EC* paralelogramma a *CF* paralelogrammához úgy aránylik, mint a *BC* alap a *CD* alaphoz.

Hosszabbítsuk meg *BD*-t mind a két oldalon, a *H*, illetve *L* pontig, és vegyünk föl tetszőleges sok a *BC* alappal egyenlő *BG*, *GH*, s a *CD* alappal egyenlő *DK*, *KL* szakaszt (I. 3.), és húzzuk meg *AG*-t, *AH*-t, *AK*-t, *AL*-t.

Minthogy a *BC*, *BG*, *GH* szakaszok egyenlők egymással, egyenlők az *AHG*, *AGB*, *ABC* háromszögek is egymással (I. 38.). Ahányszorosa tehát a *HC* alap a *BC* alapnak, ugyanannyiszorosa az *AHC* háromszög is az *ABC* háromszögnek. Ugyanígy ahányszorosa az *LC* alap a *CD* alapnak, ugyanannyiszorosa az *ALC* háromszög is az *ACD* háromszögnek; s ha egyenlő a *HC* alap az *LC* alappal, egyenlő az *AHC* háromszög is az *ACL* háromszöggel (I. 38.), s ha nagyobb a *HC* alap az *LC* alapnál, az *AHC* háromszög is nagyobb az *ACL* háromszögnél, s ha kisebb, kisebb. Van hát négy mennyiség, két alap, *BC* és *CD*, s két háromszög, *ABC* és *ACD*, s ugyanannyiszorosát vettük a *BC* alapnak és az *ABC* háromszögnek, a *HC* alapot, illetve az *AHC* háromszöget, s tetszőleges másik ugyanannyiszorosát a *CD* alapnak és az *ADC* háromszögnek, az *LC* alapot és az *ALC* háromszöget. Megmutattuk, hogy ha a *HC* alap nagyobb az *LC* alapnál, az *AHC* háromszög is nagyobb az *ALC* háromszögnél, s ha egyenlő, egyenlő, s ha kisebb, kisebb. Az *ABC* háromszög tehát úgy aránylik az *ACD* háromszöghöz, mint a *BC* alap a *CD* alaphoz.



Minthogy az *EC* paralelogramma kétszerese az *ABC* háromszögnek és az *FC* paralelogramma kétszerese az *ACD* háromszögnek (I. 34. v. 41.), a részek aránya viszont ugyanaz, mint az ugyanannyiszorosaiké (V. 15.), az *EC* paralelogramma úgy aránylik az *FC* paralelogrammához, mint az *ABC* háromszög az *ACD* háromszöghöz. Miként megmutattuk, az *ABC* háromszög úgy aránylik az *ACD* háromszöghöz, mint a *BC* alap *CD*-hez, az *EC* paralelogramma pedig úgy aránylik a *CF* paralelogrammához, mint az *ABC* háromszög az *ACD* háromszöghöz, az *EC* paralelogramma tehát úgy aránylik a *CF* paralelogrammához, mint a *BC* alap a *CD* alaphoz (V.11.).

Az u. m. h. és p. tehát . . . Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: VI. 2., 14–15., 19–20., 23., 25.; X. 19–21., 22. L., 23–25., 33., 35., 38., 41., 44., 47., 54. L., 54–55., 57–63., 65., 71–72., 75., 78–79., 81., 84., 91–94., 97., 99–100., 102., 104., 110., 114.; XI. 33–34.; XIII. 1–2.

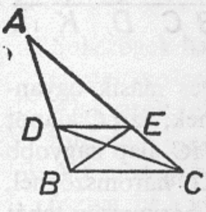
VI. 2. Tétel

*Ha egy háromszög egyik oldalával húzunk egy párhuzamost, az arányosan osztja a háromszög másik két oldalát; s ha egy háromszög két oldalát arányosan osztjuk, az osztáspontokra illesztett egyenes párhuzamos a háromszög harmadik oldalával.**

Húzzunk ugyanis az *ABC* háromszög egyik oldalával, *BC*-vel, egy *DE* párhuzamost. Azt állítom, hogy *CE* úgy aránylik *EA*-hoz, mint *BD* a *DA*-hoz.

Húzzuk meg ugyanis *BE*-t és *CD*-t.

Ekkor a *BDE* háromszög egyenlő a *CDE* háromszöggel, mivel ugyanazon a *DE* alapon és ugyanazon *DE*, *BC* párhuzamosok között fekszenek (I. 37.); s valamely másik mennyiség az *ADE* háromszög. Egyenlő mennyiségeknek ugyanahhoz a mennyiséghez való aránya viszont ugyanaz (V. 7.), a *CDE* háromszög tehát úgy aránylik az *ADE* háromszöghöz, mint a *BDE* háromszög. De *BD* úgy aránylik *DA*-hoz, mint a *BDE* háromszög *ADE*-hez, ugyanis mivel ugyanaz a magasságuk, az *E*-ből *AB*-re bocsátandó merőleges, úgy aránylanak egymáshoz mint az alapjaik (VI. 1.). Ugyanígy *CE* úgy aránylik *EA*-hoz, mint a *CDE* háromszög *ADE*-hez; *CE* úgy aránylik tehát *EA*-hoz, mint *BD* a *DA*-hoz (V. 11.).



Osszuk most arányosan föl az *ABC* háromszög *AB* és *AC* oldalát: *CE* az *EA*-hoz, mint *BD* a *DA*-hoz, és húzzuk meg *DE*-t. Azt állítom, hogy *DE* párhuzamos *BC*-vel.

Készítsük el ugyanis ugyanazt az ábrát, mint az előbb. Ekkor minthogy *CE* úgy aránylik *EA*-hoz, mint *BD* a *DA*-hoz, s a *BDE* háromszög az *ADE* háromszöghöz, mint *BD* a *DA*-hoz, a *CDE* háromszög pedig az *ADE* háromszöghöz, mint *CE* az *EA*-hoz (VI. 1.), a *CDE* háromszög is úgy aránylik az *ADE* háromszöghöz, mint a *BDE* háromszög (V. 11.). Mind a két *BDE*, *CDE* háromszögnek ugyanaz az aránya *ADE*-hez, egyenlő tehát a *BDE* háromszög a *CDE* háromszöggel (V. 9.); s ugyanazon a *DE* alapon fekszenek. Az ugyanazon az alapon fekvő egyenlő háromszögek viszont ugyanazon párhuzamosok között is fekszenek (I. 39.), *DE* tehát párhuzamos *BC*-vel.

Ha tehát egy. . . Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: VI. 3–4., 9–12., 24.; XI. 17., 23.; XII. 13., 17.

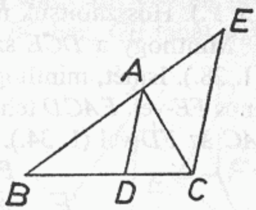
VI. 3. Tétel

Ha egy háromszög egy szögét megfelezzük és a szögfelező szeli az alapot is, az alap szeleteinek aránya ugyanaz, mint a háromszög másik két oldaláé; s ha az alap szeleteinek aránya ugyanaz, mint a háromszög másik két oldaláé, a csúcsból az osztópontba húzott egyenes felezi a szöget.

Legyen *ABC* egy háromszög, és felezzük meg a *BAC* szöget az *AD* egyenessel (I. 9.). Azt állítom, hogy *BA* úgy aránylik *AC*-hez, mint *BD* a *CD*-hez.

Húzzuk ugyanis *C*-n át *DA*-val párhuzamosan *CE*-t (I. 31.), és *BA* meghosszabbítása találkozzék vele az *E* pontban (5. P.).

Minthogy a párhuzamos *DA*, *CE* egyeneseket metszi *AC*, az *ACE* szög egyenlő *CAD*-vel (I. 29.). A *CAD* szög viszont feltevés szerint egyenlő *BAD*-vel, *BAD* is egyenlő tehát az *ACE* szöggel. Továbbá, minthogy a párhuzamos *DA*, *CE* egyeneseket metszi *BAE*, a *BAD* külső szög egyenlő az *AEC* belső szöggel (I. 29.). Megmutattuk, hogy *ACE* is egyenlő a *BAD* szöggel, az *ACE* szög tehát egyenlő *AEC*-vel, úgyhogy az *AE* oldal is egyenlő az *AC* oldallal (I. 6.). Minthogy a *BCE* háromszög egyik oldalával, *CE*-vel, párhuzamosan halad *DA*, *BA* úgy aránylik *AC*-hez, mint *BD* a *CD*-hez (VI. 2.).



Arányuljék most *BA* az *AC*-hez, mint *BD* a *CD*-hez, és húzzuk meg *DA*-t. Azt állítom, hogy a *DA* egyenes felezi a *BAC* szöget.

Készítsük el ugyanis ugyanazt az ábrát, mint az előbb. Minthogy *BA* úgy aránylik *AC*-hez, mint *BD* a *CD*-hez és *BA* úgy aránylik *AE*-hez, mint *BD* a *CD*-hez – a *BCE* háromszög egyik oldalával, *CE*-vel párhuzamosan halad ugyanis *DA* (VI. 2.) –, *BA* úgy aránylik *AE*-hez, mint *AC*-hez (V. 11.). *AC* tehát egyenlő *AE*-vel (V. 9.), úgyhogy az *AEC* szög is egyenlő az *ACE* szöggel (I. 5.). Az *AEC* szög viszont egyenlő a *BAD* külső, *ACE* pedig a *CAD* váltószöggel (I. 29.), *BAD* is egyenlő tehát a *CAD* szöggel. A *DA* egyenes tehát felezi a *BAC* szöget.

Ha tehát egy... Éppen ezt kellett megmutatni.

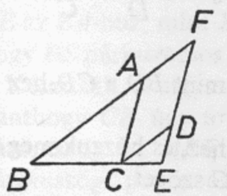
VI. 4. Tétel

Háromszögeknek, melyek szögei egymással egyenlők, arányosak az egyenlő szögek melletti oldalaik, mégpedig az egyenlő szögekkel szemközti oldalak felelnek meg egymásnak.

Legyenek az *ABC*, *DCE* háromszögek szögei egyenlők: az *ABC* szög *DCE*-vel, *BAC* a *CDE*-vel és végül *ACB* a *CED*-vel. Azt állítom, hogy az *ABC*, *DCE* háromszögeknek arányosak az egyenlő szögek melletti oldalaik, mégpedig az egyenlő szögekkel szemközti oldalak felelnek meg egymásnak.

Feküdjék ugyanis *BC* a *CE*-vel egy egyenesen (I. 3.). Minthogy az *ABC*, *ACB* szögek összege kisebb két derékszögnél (I. 17.), s *ACB* egyenlő *DEC*-vel, az *ABC*, *DEC* szögek összege kisebb két derékszögnél; a *BA*, *ED* egyenesek meghosszabításai tehát találkozni fognak (5. P.). Hosszabítsuk meg őket, és találkozzanak az *F* pontban.

Minthogy a *DCE* szög egyenlő *ABC*-vel, *BF* párhuzamos *CD*-vel (I. 28.). Ismét, minthogy az *ACB* szög egyenlő *DEC*-vel, *AC* párhuzamos *FE*-vel. *FACD* tehát egy paralelogramma, így *FA* egyenlő *DC*-vel, *AC* az *FD*-vel (I. 34.). Minthogy az *FBE* háromszög egyik oldalával, *FE*-vel, párhuzamosan halad *AC*, *BC* úgy aránylik *CE*-hez, mint *BA* az *AF*-hez (VI. 2.). *AF* viszont egyenlő *CD*-vel, *BC* tehát úgy aránylik *CE*-hez, mint *BA* a *CD*-hez (V. 7., 11.), s fölcserélve *CD* úgy aránylik *CE*-hez, mint *BA* a *BC*-hez (V. 16.). Ismét, minthogy *CD* párhuzamos *BF*-fel, *FD* úgy aránylik *DE*-hez, mint *BC* a *CE*-hez. *FD* viszont egyenlő *AC*-vel, *AC* tehát úgy aránylik *DE*-hez, mint *BC* a *CE*-hez, s fölcserélve *CE* úgy *ED*-hez, mint *BC* az *AC*-hez. Mint megmutattuk, *DC* úgy aránylik *CE*-hez, mint *AB* a *BC*-hez s *CE* az *ED*-hez, mint *BC* a *CA*-hoz, egyenlő (sok tagon) át tehát *CD* úgy aránylik *DE*-hez, mint *BA* az *AC*-hez (V. 22.).



Háromszögeknek tehát, ... Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: VI. 5–8., 18., 20., 24.; XI. 23.; XII. 1., 3.; XIII. 8., 10–11.

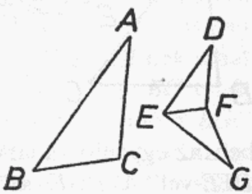
VI. 5. Tétel

Ha két háromszögnek arányosak az oldalaik, egyenlők a háromszögek szögei, mégpedig azok a szögek egyenlők, melyekkel szemben a megfelelő oldalak fekszenek.

Legyen *ABC* és *DEF* két háromszög, melyek oldalai arányosak: *DE* az *EF*-hez, mint *AB* a *BC*-hez, *EF* az *FD*-hez, mint *BC* a *CA*-hoz, s végül *ED* *DF*-hez, mint *BA* az *AC*-hez. Azt állítom, hogy az *ABC* háromszögnek a *DEF* háromszögéivel egyenlők a szögei, mégpedig azok a szögek egyenlők, melyekkel szemben a megfelelő oldalak fekszenek, *ABC* a *DEF*-fel, *BCA* az *EFD*-vel s végül *BAC* az *EDF*-fel.

Szerkesszünk az *EF* egyenesre, a rajta levő *E*, illetve *F* ponthoz, egy *ABC*-vel egyenlő *FEG*, illetve egy *ACB*-vel egyenlő *EFG* szöget (I. 23.). Ekkor a harmadik, *A*-nál levő szög egyenlő a harmadik, *G*-nél levő szöggel (I. 32.).

Egyenlők tehát az *ABC* háromszög szögei *EGF*-éivel. Az *ABC*, *EGF* háromszögeknek arányosak tehát az egyenlő szögek melletti oldalaik, mégpedig az egyenlő szögekkel szemközti oldalak felelnek meg egymásnak (VI. 4.): *GE* az *EF*-hez, mint *AB* a *BC*-hez. *DE* viszont feltevés szerint úgy aránylik *EF*-hez, mint *AB* a *BC*-hez, *GE* tehát úgy aránylik *EF*-hez, mint *DE* (V. 11.). E két szakasznak, DE-nek és *GE*-nek tehát ugyanaz az aránya *EF*-hez: egyenlő tehát *DE* a *GE*-vel (V. 9.). Ugyanígy *DF* is egyenlő *GF*-fel. Minthogy *DE* egyenlő *EG*-vel, *EF* pedig közös oldal, e két-két oldal, *DE*, *EF* és *GE*, *EF* egyenlő; és a *DF* alap egyenlő az *FG* alappal; a *DEF* szög tehát egyenlő a *GEF* szöggel (I. 8.), és a *DEF* háromszög egyenlő a *GEF* háromszöggel, és a többi szög is páronként egyenlő, amelyekkel szemben az egyenlő oldalak fekszenek (I. 4.). Egyenlő tehát a *DFE* szög is *GFE*-vel, *EDF* pedig *EGF*-fel. Minthogy az *FED* szög egyenlő *GEF*-fel, *GEF* viszont *ABC*-vel, az *ABC* szög is egyenlő *DEF*-fel. Ugyanígy *ACB* is egyenlő *DFE*-vel, s végül az *A*-nál levő szög is a *D*-nél levő szöggel. Egyenlők tehát az *ABC* háromszög szögei a *DEF* háromszögéivel.



Ha tehát két... Éppen ezt kellett megmutatni.

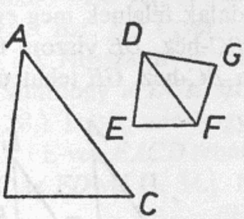
VI. 6. Tétel

Ha két háromszögnek egy-egy szöge egyenlő és az egyenlő szögek melletti oldalak arányosak, egyenlők a háromszögek szögei, mégpedig a megfelelő oldalakkal szemközti szögek egyenlők.

Legyen *ABC* és *DEF* két háromszög, melynek egy-egy szöge, *BAC* és *EDF* egyenlő, és az egyenlő szögek melletti oldalak arányosak: *ED* a *DF*-hez, mint *BA* az *AC*-hez. Azt állítom, hogy az *ABC* háromszög szögei egyenlők a *DEF* háromszögéivel, mégpedig az *ABC* szög egyenlő *DEF*-fel, az *ACB* szög pedig *DFE*-vel.

Szerkesszünk ugyanis a *DF* egyenesre, a rajta levő *D*, illetve *F* ponthoz, egy mind a két, *BAC*, *EDF* szöggel egyenlő *FDG*, illetve egy *ACB*-vel egyenlő *DFG* szöget (I. 23.). Ekkor a harmadik, *B*-nél levő szög egyenlő a harmadik, *G*-nél levő szöggel (I. 32.).

Egyenlők tehát az *ABC* háromszög szögei a *DGF* háromszögéivel. Arányosak tehát: *GD* a *DF*-hez, mint *BA* az *AC*-hez (VI. 4.). *ED* viszont feltevés szerint úgy aránylik *DF*-hez, mint *BA* az *AC*-hez; *GD* tehát úgy aránylik *DF*-hez, mint *ED* (V. 11.). Egyenlő tehát *ED* a *DG*-vel (V. 9.); s *DF* közös oldal; így e két-két oldal, *ED*, *DF* és *GD*, *DF* egyenlő; s az *EDF* szög egyenlő a *GDF* szöggel; az *EF* alap tehát egyenlő a *GF* alappal, és a *DEF* háromszög egyenlő a *GDF* háromszöggel, és a többi szög is páronként egyenlő, amelyekkel szemben az egyenlő oldalak fekszenek (I. 4.). Egyenlő tehát a *DFG* szög *DFE*-vel, a *DGF* szög pedig *DEF*-fel. A *DFG* szög viszont egyenlő *ACB*-vel, *ACB* is egyenlő tehát *DFE*-vel. *BAC* pedig feltétel szerint egyenlő *EDF*-fel, a harmadik, *B*-nél levő szög is egyenlő tehát a harmadik, *E*-nél levő szöggel (I. 32.); egyenlők tehát az *ABC* háromszög szögei a *DEF* háromszögéivel.



Ha tehát két... Éppen ezt kellett megmutatni.

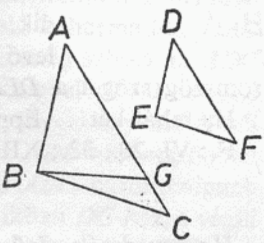
F.: VI. 20., 32.; XII. 1., 4., 12.; XIII. 18.

VI. 7. Tétel

Ha két háromszögnek egy-egy szöge egyenlő, egy-egy másik szög körüli oldalak arányosak, a harmadik szögek pedig mindketten egy-

szerre vagy kisebbek, vagy nem kisebbek egy derékszögnél, egyenlők a háromszögek szögei, mégpedig az arányos oldalak által közrefogott szögek egyenlők.

Legyen *ABC* és *DEF* két háromszög, melynek egy-egy szöge, *BAC* és *EDF* egyenlő, egy-egy másik szög, *ABC* és *DEF* körüli oldalak arányosak: *DE* az *EF*-hez, mint *AB* a *BC*-hez, a harmadik, *C*-nél, illetve *F*-nél levő szögek pedig mindketten egyszerre először kisebbek egy derékszögnél. Azt állítom, hogy az *ABC* háromszög szögei egyenlők a *DEF* háromszögéivel, mégpedig az *ABC* szög egyenlő *DEF*-fel, s a harmadik, *C*-nél levő szög nyilván egyenlő a harmadik, *F*-nél levő szöggel.

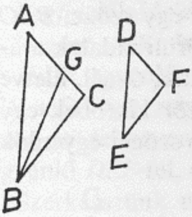


Ha ugyanis az *ABC* szög nem egyenlő *DEF*-fel, egyikük nagyobb. Legyen *ABC* a nagyobb, és szerkesszünk az *AB* egyenesre, a rajta levő *B* ponthoz, egy *DEF*-fel egyenlő *ABG* szöget (I. 23.).

Minthogy az α szög egyenlő δ-val, az *ABG* szög pedig *DEF*-fel, a harmadik *AGB* szög egyenlő a harmadik *DFE* szöggel (I. 32.). Egyenlők tehát az *ABG* háromszög szögei a *DEF* háromszögéivel. *DE* tehát úgy aránylik *EF*-hez, mint *AB* a *BG*-hez (VI. 4.). *AB* viszont feltétel szerint úgy aránylik *BC*-hez, mint *DE* az *EF*-hez; *AB*-nek tehát mind a két, *BC*, *BG* szakaszhoz ugyanaz az aránya (V. 11.); *BC* tehát egyenlő *BG*-vel (V. 9.), úgyhogy a *C*-nél levő szög is egyenlő a *BGC* szöggel (I. 5.). A *C*-nél levő szög feltétel szerint kisebb egy derékszögnél, *BGC* is kisebb tehát egy derékszögnél, úgyhogy az *AGB* mellékszöge nagyobb egy derékszögnél (I. 13.). Erről megmutattuk, hogy egyenlő az *F*-nél levő szöggel; az *F*-nél levő szög is nagyobb tehát egy derékszögnél. Feltétel szerint viszont kisebb egy derékszögnél; ez lehetetlen. Nem igaz tehát, hogy az *ABC* szög nem egyenlő *DEF*-fel; egyenlő hát vele. Az *A*-nál levő szög is egyenlő a *D*-nél levővel; a harmadik, *C*-nél levő szög is egyenlő tehát az *F*-nél levővel (I. 32.). Egyenlők tehát az *ABC* háromszög szögei a *DEF* háromszögéivel.

Másodszorra tegyük föl, hogy mind a két, *C*-nél, illetve *F*-nél levő szög nem kisebb egy derékszögnél. Ismét azt állítom, hogy az *ABC* háromszögnek így is egyenlők a szögei a *DEF* háromszögéivel.

Ugyanazt az ábrát elkészítve hasonlóképp mutathatnánk meg, hogy *BC* egyenlő *BG*-vel, úgyhogy a *C*-nél levő szög is egyenlő a *BGC* szöggel. A *C*-nél levő szög nem kisebb egy derékszögnél, a *BGC* szög sem kisebb tehát egy derékszögnél. Így a *BGC* háromszög két szögének összege nem kisebb két derékszögnél; ez viszont lehetetlen (I. 17.). Ismét csak nem igaz, hogy az *ABC* szög nem egyenlő *DEF*-fel; egyenlő hát vele. Az *A*-nál levő szög is egyenlő a *D*-nél levővel, tehát a harmadik, *C*-nél levő szög egyenlő a harmadik, *F*-nél levő szöggel (I. 32.). Egyenlők tehát az *ABC* háromszög szögei a *DEF* háromszögéivel.



Ha tehát két... Éppen ezt kellett megmutatni,

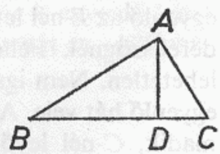
F.: VI. 20., 32.; XII. 1., 4., 12.; XIII. 18.

VI. 8. Tétel

Ha egy derékszögű háromszögben a derékszög csúcsából az alapra egy merőlegest bocsátunk, a merőleges melletti háromszögek mind a teljes háromszöghöz, mind egymáshoz hasonlók.

Legyen *ABC* egy háromszög, melynek *BAC* szöge derékszög, és bocsássuk *A*-ból *BC*-re az *AD* merőlegest. Azt állítom, hogy mind a két, *ABD*, *ADC* háromszög hasonló a teljes *ABC* háromszöghöz és egymáshoz is.

Minthogy a *BAC* szög egyenlő *ADB*-vel – derékszög ugyanis mind a kettő – és e két háromszögnek, *ABC*-nek és *ABD*-nek közös szöge a *B*-nél levő, a harmadik, *ACB* szög egyenlő a harmadik, *BAD* szöggel (I. 32.); egyenlők tehát az *ABC* háromszög szögei az *ABD* háromszögéivel. Amint tehát az *ABC* háromszög derékszögével szemközti *BC* az *ABD* háromszög derékszögével szemközti *BA*-hoz, úgy aránylik az *ABC* háromszög *C*-nél levő szögével szemközti ugyanezen *AB* az *ABD* háromszög egyenlő szögével, *BAD*-vel szemközti *BD*-hez, s végül a két háromszög közös szögével szemközti *AC* az *AD*-hez (VI. 4.). Az *ABC* háromszögnek tehát egyenlők a szögei az *ABD* háromszögéivel, és az egyenlő szögek melletti oldalaik arányo-



sak. Hasonló tehát az *ABC* háromszög az *ABD* háromszöghöz (VI 1. D.). Hasonlóképp mutathatnánk meg, hogy az *ADC* háromszöghöz is hasonló az *ABC* háromszög; mind a két, *ABD*, *ADC* háromszög hasonló tehát a teljes *ABC* háromszöggel.

Az állítom, hogy egymáshoz is hasonlók az *ABD*, *ADC* háromszögek.

Minthogy ugyanis a *BDA* derékszög egyenlő az *ADC* derékszöggel (4. P.) és – mint megmutattuk – a *BAD* szög is egyenlő a *C*-nél levő szöggel, a harmadik, *B*-nél levő szög is egyenlő a harmadik, *DAC* szöggel (I. 32.); egyenlők tehát az *ABD* háromszög szögei az *ADC* háromszögéivel. Amint tehát az *ABD* háromszögbeli *BAD* szöggel szemközti *BD* az *ADC* háromszögbeli, a *BAD* szöggel egyenlő *C*-nél levő szöggel szemközti *DA*-hoz, úgy aránylik az *ABD* háromszögbeli *B*-nél levő szöggel szemközti ugyanezen *AD* az *ADC* háromszögnek a *B*-nél levő szöggel egyenlő *DAC* szögével szemközti *DC*-hez, s végül *BA* az *AC*-hez, melyek a derékszögekkel szemben fekszenek (VI. 4.); hasonló tehát az *ABD* háromszög az *ADC* háromszöghöz.

Ha tehát egy... [Éppen ezt kellett megmutatni.]

F.: VI. 31.; X. 33. L.; XIII. 15–16., 18.

Következmény

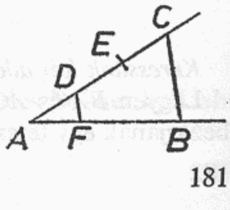
Ebből már nyilvánvaló, hogy ha egy derékszögű háromszögben a derékszög csúcsából az alapra egy merőlegest bocsátunk, a merőleges középarányosa az alap szeleteinek. Éppen ezt kellett megmutatni. [S végül az alapnak és bármely szeletének középarányosa a szelet melletti oldal.]

F.: VI. 13.; X. 33. L.; XII. 17.; XIII. 13–16., 18.

VI. 9. Tétel

Vonjunk le adott szakaszból előírt részt!*

Legyen *AB* az adott szakasz. Az *AB* szakasz előírt részét kell tehát levonni.



Legyen a harmad előírva. Húzzunk az *A* pontból egy *AB*-vel tetszőleges szöget bezáró *AC* egyenest, vegyünk *AC*-n egy tetszőleges *D* pontot, és mérjük föl az *AD*-vel egyenlő *DE*-t, *EC*-t (I. 3.). Húzzuk meg *BC*-t és *D*-n át vele párhuzamosan *DF*-et (I. 31.).

Minthogy az *ABC* háromszög egyik oldalával, *BC*-vel párhuzamosan halad *FD*, *BF* úgy aránylik *FA*-hoz, mint *CD* a *DA*-hoz (VI. 2.). *CD* kétszerese *DA*-nak; *BF* is kétszerese tehát *FA*-nak; háromszorosa tehát *BA* az *AF*-nek.

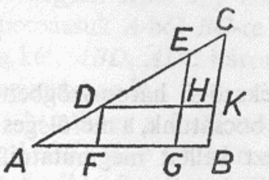
Az adott *AB* szakaszból tehát levontuk az előírt harmadrészt, *AF*-et. Éppen ezt kellett megtenni.

VI. 10. Tétel

Osszunk föl adott fölosztatlan szakaszt adott fölosztott szakaszhoz hasonlóan!

Legyen *AB* az adott felosztatlan szakasz, *AC* pedig a – *D*, *E* pontokban – fölosztott, és feküdjenek úgy, hogy bezárjanak egy tetszőleges szöget (I. 2.), húzzuk meg *CB*-t és *D*-n, *E*-n *BC*-vel párhuzamosan *DF*-et, *EG*-t, *D*-n át *AB*-vel párhuzamosan *DHK*-t (I. 31.).

Paralelogramma tehát mind a két, *FH*, *HB* idom, így *DH* egyenlő *FG*-vel, *HK* pedig *GB*-vel (I. 34). Minthogy a *DKC* háromszög egyik oldalával, *KC*-vel párhuzamosan halad *HE*, *KH* úgy aránylik *HD*-hez, mint *CE* az *ED*-hez (VI. 2.). *KH* viszont egyenlő *BG*-vel, *HD* pedig *GF*-fel, *BG* tehát úgy aránylik *GF*-hez, mint *CE* az *ED*-hez (V. 7., 11.). Ismét, minthogy az *AGE* háromszög egyik oldalával, *GE*-vel párhuzamosan halad *FD*, *GF* úgy aránylik *FA*-hoz, mint *ED* *DA*-hoz. Mint megmutattuk, *BG* úgy aránylik *GF*-hez, mint *CE* az *ED*-hez; tehát: *BG* a *GF*-hez, mint *CE* az *ED*-hez és *GF* az *FA*-hoz, mint *ED* a *DA*-hoz.



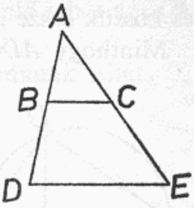
Az adott felosztatlan szakaszt tehát, *AB*-t, az adott fölosztott szakaszhoz, *AC*-hez hasonlóan osztottuk föl. Éppen ezt kellett megtenni.

F.: XIII. 13., 15–16.

VI. 11. Tétel

Keressünk két adott szakaszhoz harmadik arányost!

Legyen *BA* és *AC* az adott [két szakasz], és feküdjenek úgy, hogy bezárjanak egy tetszőleges szöget (I. 2.). A *BA*, *AC* szakaszokhoz kell tehát harmadik arányost keresni. Hosszabítsuk meg őket a *D*, illetve *E* pontig, mérjünk föl egy *AC*-vel egyenlő *BD*-t (I. 3.), húzzuk meg *BC*-t és *D*-n át vele párhuzamosan *DE*-t (I. 31.).



Minthogy az *ADE* háromszög egyik oldalával, *DE*-vel párhuzamosan halad *BC*, *AC* úgy aránylik *CE*-hez, mint *AB* a *BD*-hez (VI. 2.). *BD* viszont egyenlő *AC*-vel, *AC* tehát úgy aránylik *CE*-hez, mint *AB* az *AC*-hez (V. 7., 11.).

Két adott szakaszhoz tehát, *AB*-hez és *AC*-hez, harmadik arányost találtunk, *CE*-t. Éppen ezt kellett megtenni.

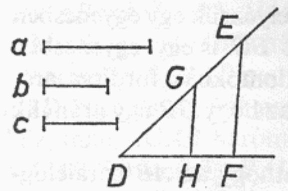
F.: VI. 19., 20. 2. K., 22.; X. 96.

VI. 12. Tétel

Keressünk három adott szakaszhoz negyedik arányost!

Legyen *a*, *b* és *c* a három adott szakasz. Az *a*, *b*, *c* szakaszokhoz kell tehát negyedik arányost keresni.

Vegyünk föl két egyenest, *DE*-t és *DF*-et, melyek egy [tetszőleges] *EDF* szöget zárnak be, mérjünk föl egy *a*-val egyenlő *DG*-t, egy *b*-vel egyenlő *GE*-t s végül egy *c*-vel egyenlő *DH*-t (I. 3.), húzzuk meg *GH*-t és vele párhuzamosan *E*-n át *EF*-et (I. 31.).



Minthogy a *DEF* háromszög egyik oldalával, *EF*-fel párhuzamosan halad *GH*, *DH* úgy aránylik *HF*-hez, mint *DG* a *GE*-hez (VI. 2.). *DG* viszont egyenlő *a*-val, *GE* a *b*-vel, *DH* pedig *c*-vel; *c* tehát úgy aránylik *HF*-hez, mint *a* a *b*-hez (V. 7., 11.).

Adott három szakaszhoz, *a*-hoz, *b*-hez és *c*-hez, negyedik arányost találtunk tehát, *HF*-et. Éppen ezt kellett megtenni.

F.: VI. 22–23.; X. 27–28., 31–32., 104.; XI. 27.

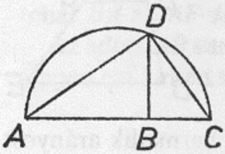
VI. 13. Tétel

Keressünk két adott szakaszhoz középarányost!

Legyen *AB* és *BC* az adott két szakasz. *AB*-hez és *BC*-hez kell tehát középarányost keresni.

Helyezzük őket egy egyenesben el (I. 3.), írjunk *AC* fölé egy *ADC* félkört, húzzuk a *B* pontból az *AC* szakasszal derékszögben *BD*-t (I. 11.) és kössük össze *AD*-t, *DC*-t.

Minthogy *ADC* félkörbeli szög, derékszög (III. 31.). S minthogy az *ADC* derékszögű háromszögben a derékszög csúcsából egy *DB* merőleges halad az alaphoz, *DB* középarányosa az alap szeleteinek, *AB*-nek és *BC*-nek (VI. 8. K.).



Adott két szakaszhoz, *AB*-hez és *BC*-hez középarányost találtunk tehát, *DB*-t. Éppen ezt kellett megtenni.

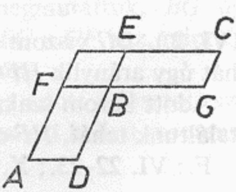
F.: VI. 25.; X. 6. K., 10., 27–28., 31–32.

VI. 14. Tétel

Az egyenlő (területű) és egyenlő szögű paralelogrammáknak fordítva arányosak az egyenlő szögek melletti oldalaik; s amely egyenlő szögű paralelogrammáknak fordítva arányosak az egyenlő szögek melletti oldalaik, azok egyenlő (területű)ek.

Legyenek *AB* és *BC* egyenlő (területű) és egyenlő szögű paralelogrammák, melyek *B*-nél levő szöge egyenlő, és helyezzük egy egyenesben el *DB*-t és *BE*-t (I. 3., 31., 23.); ekkor *FB* és *BG* is egy egyenesben lesz (I. 14.). Azt állítom, hogy az *AB*, *BC* idomoknak fordítva arányosak az egyenlő szögek melletti oldalaik, azaz hogy *GB* úgy aránylik *BF*-hez, mint *DB* a *BE*-hez.*

Egészítsük ki az *FE* paralelogrammát. Minthogy az *AB* paralelogramma egyenlő (területű) a *BC* paralelogrammával, *FE* pedig egy másik mennyiség, *BC* úgy aránylik *FE*-hez, mint *AB* (V. 7.). Viszont amint *AB* az *FE*-hez, úgy aránylik *DB* a *BE*-hez és amint *BC* *FE*-hez, úgy *GB* a *BF*-hez (VI. 1.); amint *DB* a *BE*-hez, úgy aránylik tehát *GB* a *BF*-hez (V. 11.). Az *AB*, *BC* paralelogrammáknak tehát fordítva arányosak az egyenlő szögek melletti oldalaik.



Arányuljék most *GB* a *BF*-hez, mint *DB* a *BE*-hez. Azt állítom, hogy az *AB* paralelogramma egyenlő (területű) a *BC* paralelogrammával.

Minthogy ugyanis *GB* úgy aránylik *BF*-hez, mint *DB* a *BE*-hez, s az

AB paralelogramma az *FE* paralelogrammához, mint *DB* a *BE*-hez, a *BC* paralelogramma pedig az *FE* paralelogrammához, mint *GB* a *BF*-hez, *BC* úgy aránylik *FE*-hez, mint *AB* (V. 11.); egyenlő tehát az *AB* paralelogramma a *BC* paralelogrammával (V. 9.).

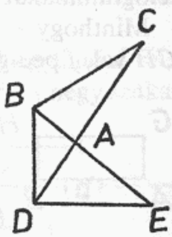
Az egyenlő (területű) és egyenlő szögű paralelogrammák tehát... Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: VI. 16., 30.; X. 22.; XI. 31., 33., 36.

VI. 15. Tétel

Egyenlő (területű) háromszögeknek, melyeknek egy-egy szögük egyenlő, fordítva arányosak az egyenlő szögek melletti oldalaik; s azok a háromszögek, melyeknek egy-egy szöge egyenlő és az egyenlő szögek melletti oldalaik fordítva arányosak, azok egyenlő (területű)ek.

Legyenek *ABC* és *ADE* egyenlő (területű) háromszögek, melyeknek egy-egy szöge, *BAC* és *DAE* egyenlő. Azt állítom, hogy az *ABC*, *ADE* háromszögeknek fordítva arányosak az egyenlő szögek melletti oldalaik, azaz hogy *EA* úgy aránylik *AB*-hez, mint *CA* az *AD*-hez.



Helyezzük őket úgy el, hogy *CA* egy egyenesen legyen *AD*-vel (I. 3., 23.). Ekkor *EA* is egy egyenesen lesz *AB*-vel (I. 14.). Húzzuk meg *BD*-t.

Minthogy az *ABC* háromszög egyenlő az *ADE* háromszöggel, *BAD* pedig egy másik mennyiség, az *EAD* háromszög úgy aránylik a *BAD* háromszöghöz, mint a *CAB* háromszög (V. 7.). Viszont amint a *CAB* háromszög *BAD*-hez, úgy aránylik *CA* az *AD*-hez és amint *EAD* a *BAD*-hez, úgy *EA* az *AB*-hez (VI. 1.); amint tehát *CA* az *AD*-hez, úgy aránylik *EA* *AB*-hez (V. 11.). Az *ABC*, *ADE* háromszögeknek tehát fordítva arányosak az egyenlő szögek melletti oldalaik.

Legyenek most fordítva arányosak az *ABC*, *ADE* háromszögek oldalai, mégpedig *EA* az *AB*-hez, mint *CA* az *AD*-hez. Azt állítom, hogy az *ABC* háromszög egyenlő az *ADE* háromszöggel.

Ismét meghúzva *BD*-t, minthogy *EA* úgy aránylik *AB*-hez, mint *CA* az *AD*-hez, viszont amint *CA* az *AD*-hez, úgy az *ABC* háromszög a *BAD* háromszöghöz, s amint *EA* az *AB*-hez, úgy az *EAD* háromszög a *BAD* háromszöghöz (VI. 1.), amint tehát az *ABC* háromszög, úgy aránylik az EAD háromszög a BAD háromszöghöz (V. 11.). Mind a két, ABC, EAD háromszögnek tehát ugyanaz az aránya BAD-hez; egyenlő tehát az ABC [háromszög] az EAD háromszöggel (V. 9.).

Egyenlő háromszögeknek tehát, ... Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: VI. 19.

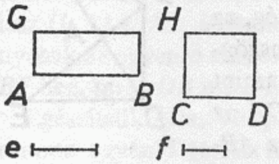
VI. 16. Tétel

Ha négy szakasz arányos, akkor a kültagok által közrefogott téglalap egyenlő a beltagok által közrefogott téglalappal; s ha a kültagok által közrefogott téglalap egyenlő a beltagok által közrefogott téglalappal, akkor a négy szakasz arányos.

Legyen négy szakasz, AB, CD, e és f arányos: e az f-hez, mint AB a CD-hez. Azt állítom, hogy az AB és f által közrefogott téglalap egyenlő a CD és e által közrefogott téglalappal.

Emeljünk [ugyanis] az A, C pontokban AB-re, illetve CD-re egy AG, illetve CH merőlegest (I. 11.), és mérjünk föl egy f-fel egyenlő AG-t és egy e-vel egyenlő CH-t (I. 3.). Egészítsük ki a BG, DH paralelogrammákat (I. 31.).

Minthogy e úgy aránylik f-hez, mint AB a CD-hez, s e egyenlő CH-val, f pedig AG-vel, CH úgy aránylik AG-hez, mint AB a CD-hez (V. 7., 11.). A BC, DH paralelogrammáknak tehát fordítva arányosak az egyenlő szögek melletti oldalaik. Amely egyenlő szögű paralelogrammáknak viszont fordítva arányosak az egyenlő szögek melletti oldalaik, azok egyenlők (VI. 14.); egyenlő tehát a BG paralelogramma a DH paralelogrammával. S BG az AB és f közötti téglalap – egyenlő ugyanis AG az f-fel –, DH pedig a CD és e közötti téglalap – egyenlő ugyanis e a CH-val –; az AB és f által közrefogott téglalap tehát egyenlő a CD és e által közrefogott téglalappal.



Legyen most az AB és f által közrefogott téglalap egyenlő a CD és e által közrefogott téglalappal. Azt állítom, hogy a négy szakasz arányos: e az f-hez, mint AB a CD-hez.

Elkészítve ugyanis ugyanazt az ábrát, mint az előbb, minthogy az AB és f közötti téglalap egyenlő a CD és e közöttivel, s az AB és f

közötti téglalap BG – egyenlő ugyanis AG az f-fel –, a CD és e közötti pedig DH – egyenlő ugyanis CH az e-vel –, BG egyenlő DH-val. S egyenlő szögűek. Az egyenlő és egyenlő szögű paralelogrammáknak viszont fordítva arányosak az egyenlő szögek melletti oldalaik (VI. 14.), CH tehát úgy aránylik AG-hez, mint AB a CD-hez. CH viszont egyenlő e-vel, AG pedig f-fel; e tehát úgy aránylik f-hez, mint AB a CD-hez (V. 7., 11.).

Ha tehát négy... Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: VI. 17.; X. 28., 32., 33. L., 112–113.

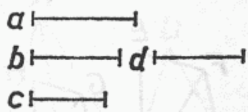
VI. 17. Tétel

Ha három szakasz arányos, akkor a kültagok által közrefogott téglalap egyenlő a beltagra emelt négyzettel; s ha a kültagok által közrefogott téglalap egyenlő a beltagra emelt négyzettel, akkor a három szakasz arányos.

Legyen három szakasz, a, b és c arányos: b a c-hez, mint a a b-hez. Azt állítom, hogy az a és c által közrefogott téglalap egyenlő a b-re emelt négyzettel.

Vegyünk föl egy b-vel egyenlő d-t.

Minthogy b úgy aránylik c-hez, mint a a b-hez, s b egyenlő d-vel, d úgy aránylik c-hez, mint a a b-hez (V. 7., 11.). Ha viszont négy szakasz arányos, akkor a kültagok által közrefogott [téglalap] egyenlő a beltagok által közrefogott téglalappal (VI. 16.). Az a és c közötti téglalap tehát egyenlő a b és d közöttivel. A b és d közötti téglalap viszont a b-re emelt négyzet – egyenlő ugyanis b a d-vel –, az a és c által közrefogott téglalap tehát egyenlő a b-re emelt négyzettel.



Legyen most az a és c közötti téglalap egyenlő a b-re emelt négyzettel. Azt állítom, hogy b úgy aránylik c-hez, mint a a b-hez.

Elkészítve ugyanis ugyanazt az ábrát, mint az előbb, minthogy az a és c közötti téglalap egyenlő a b-re emelt négyzettel, a b-re emelt négyzet viszont a b és d közötti téglalap – egyenlő ugyanis b a d-vel –, az a és c közötti téglalap egyenlő a b és d közöttivel. Ha viszont a kültagok közötti téglalap egyenlő a beltagok közöttivel, akkor a négy szakasz arányos (VI. 16.). d tehát úgy aránylik c-hez, mint a a b-hez. b viszont egyenlő d-vel; b tehát úgy aránylik c-hez, mint a a b-hez (V. 7., 11.).

Ha tehát három... Éppen ezt kellett megmutatni.

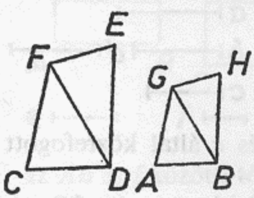
F.: X. 25., 27–28., 31–32., 33. L., 54., 60., 91., 97–98., 100.; XIII. 1–6., 10., 13.

VI. 18. Tétel

Emeljünk adott szakaszra adott sokszöghöz hasonló és hasonlóan fekvő sokszöget!

Legyen AB az adott szakasz, CE pedig az adott sokszög. Az AB szakaszra kell tehát a CE sokszöghöz hasonló és hasonlóan fekvő sokszöget emelni.

Húzzuk meg DF-et, és szerkesszünk az AB egyenesre, a rajta levő A, illetve B ponthoz egy, a C-nél levő szöggel egyenlő GAB, illetve CDF-fel egyenlő ABG szöget (I. 23.). Ekkor a harmadik, CFD szög egyenlő az AGB szöggel (I. 32.); egyenlők tehát az FCD háromszög szögei a GAB háromszögéivel. Amint tehát FD a GB-hez, úgy aránylik FC a GA-hoz és CD az AB-hez (VI. 4., V. 16.). Ismét, szerkesszünk a BG egyenesre, a rajta levő B, illetve G ponthoz egy DFE-vel egyenlő BGH, illetve FDE-vel egyenlő GBH szöget. Ekkor a harmadik, E-nél levő szög egyenlő a harmadik, H-nál levő szöggel; egyenlők tehát az FDE háromszög szögei a GHB háromszögéivel; amint tehát FD a GB-hez, úgy aránylik FE a GH-hoz és ED HB-hez. Mint megmutattuk, úgy aránylik FC a GA-hoz és CD az AB-hez, mint FD a GB-hez; amint tehát FC az AG-hez, úgy aránylik CD az AB-hez, FE a GH-hoz s végül ED a HB-hez (V. 11.). Minthogy a CFD szög egyenlő AGB-vel, DFE pedig BGH-val, a teljes CFE szög egyenlő a teljes AGH-val. Ugyanígy CDE is egyenlő az ABH szöggel. A C-nél levő szög is egyenlő az A-nál levővel, az E-nél levő pedig a H-nál levővel; egyenlők tehát AH szögei CE-éivel; s az egyenlő szögek melletti oldalaik arányosak; hasonló tehát az AH sokszög a CE sokszöghöz.



Az adott AB szakaszra tehát az adott CE sokszöghöz hasonló és hasonlóan fekvő sokszöget emeltünk, *AH*-t. Éppen ezt kellett megtenni.

F.: VI. 22., 25., 28–29.; XII. 11–12.

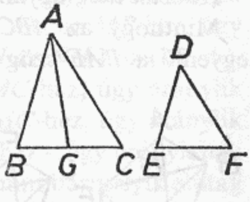
VI. 19. Tétel

Hasonló háromszögek egymással a megfelelő oldalaikhoz viszonyítva kétszeres arányban állnak.

Legyenek *ABC* és *DEF* hasonló háromszögek, melyek *B*-nél, illetve *E*-nél levő szöge egyenlő, és amint *AB* a *BC*-hez, úgy aránylik *DE* *EF*-hez, úgyhogy *BC* megfelel *EF*-nek. Azt állítom, hogy az *ABC* háromszögnek a *DEF* háromszöghöz való aránya kétszerese *BC*-nek *EF*-hez való arányának.*

Vegyünk ugyanis *BC*-hez és *EF*-hez egy *BG* harmadik arányost, úgyhogy amint *BC* az *EF*-hez, úgy arányuljon *EF* a *BG*-hez (VI. 11.), és húzzuk meg *AG*-t.

Minthogy *DE* úgy aránylik *EF*-hez, mint *AB* a *BC*-hez, felcserélve *BC* úgy aránylik *EF*-hez, mint *AB* a *DE*-hez (V. 16.). Viszont amint *BC* az *EF*-hez, úgy aránylik *EF* a *BG*-hez. Amint tehát *AB* a *DE*-hez, úgy aránylik *EF* a *BG*-hez (V. 11.); az *ABG*, *DEF* háromszögeknek tehát fordítva arányosak az egyenlő szögek melletti oldalaik. Azok a háromszögek viszont, melyeknek egy-egy szöge egyenlő és az egyenlő szögek melletti oldalaik fordítva arányosak, egyenlő (területű)ek (VI. 15.). Egyenlő (területű) tehát az *ABG* háromszög a *DEF* háromszöggel. S minthogy amint *BC* az *EF*-hez, úgy aránylik *EF* a *BG*-hez, ha viszont három mennyiség arányos, az első a harmadikkal a másodikhoz viszonyítva kétszeres arányban áll, *BC* tehát *BG*-vel *EF*-hez viszonyítva kétszeres arányban áll. Amint viszont *BC* a *BG*-hez, úgy aránylik az *ABC* háromszög az *ABG* háromszöghöz (VI. 1.); az *ABC* háromszög is kétszeres arányban áll tehát *ABG*-vel *BC*-nek *EF*-hez való arányához képest. Az *ABG* háromszög egyenlő (területű) a *DEF* háromszöggel; az *ABC* háromszög is kétszeres arányban áll tehát *DEF*-fel *BC*-nek *EF*-fel való arányához képest (V. 7., 11.).



Hasonló háromszögek tehát... [Éppen ezt kellett megmutatni.]
F.: VI. 20.

*Következmény**

Ebből már nyilvánvaló, hogy ha három szakasz arányos, akkor amint az első a harmadikhoz, úgy aránylik az elsőre emelt alakzat a másodikra emelt hasonló és hasonlóan elhelyezett alakzathoz [minthogy megmutattuk, hogy amint *BC* a *BG*-hez, úgy aránylik az *ABC* háromszög az *ABG* háromszöghöz, azaz *DEF*-hez]. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: VI. 22., 25., 31.; X. 6. K., 10., 112.; XIII. 14–16., 18.

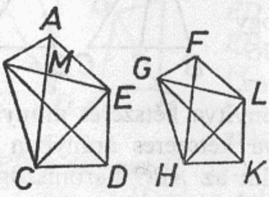
VI. 20. Tétel

A hasonló sokszögek hasonló, ugyanolyan sok és a teljes sokszögekével megegyező arányú háromszögekre esnek szét, s a sokszögek egymással a megfelelő oldalakhoz képest kétszeres arányban állnak.

Legyenek *ABCDE* és *FGHKL* hasonló sokszögek, *AB* és *FG* pedig megfelelő oldalak. Azt állítom, hogy az *ABCDE*, *FGHKL* sokszögek hasonló, ugyanolyan sok és a teljes sokszögekével megegyező arányú háromszögekre esnek szét, s az *ABCDE* sokszög az *FGHKL* sokszöggel kétszeres arányban áll *AB*-nek *FG*-hez való arányához képest.

Húzzuk meg ugyanis *BE*-t, *EC*-t, *GL*-t és *LH*-t.

Minthogy az *ABCDE* sokszög hasonló az *FGHKL* sokszöghöz, egyenlő a *BAE* szög *GFL*-lel, s amint *BA* az *AE*-hez, úgy aránylik *GF* az *FL*-hez. Minthogy *ABE* és *FGL* két háromszög, melyben egy-egy szög egyenlő, és az egyenlő szögek melletti oldalak arányosak, egyenlők az *ABE* háromszög szögei az *FGL* háromszögéivel (VI. 6.), úgyhogy hasonló is hozzá (VI. 4., 1. D.), az *ABE* szög tehát egyenlő *FGL*-lel. A teljes *ABC* szög is egyenlő a teljes *FGH* szöggel a sokszögek hasonlósága miatt, a maradék *EBC* szög tehát egyenlő *LGH*-val. S minthogy az *ABE*, *FGL* háromszögek hasonlósága miatt amint *EB* a *BA*-hoz, úgy aránylik *LG* a *GF*-hez, valamint a sokszögek hasonlósága miatt amint *AB*



a *BC*-hez, úgy *FG* a *GH*-hoz, így egyenlő (sok tagon) át amint *EB* a *BC*-hez, úgy aránylik *LG GH*-hoz (V. 22.), és az egyenlő *EBC*, *LHG* szögek melletti oldalak arányosak, egyenlők tehát az *EBC* háromszög szögei az *LGH* háromszögéivel (VI. 6.), úgyhogy hasonló is az *EBC* háromszög az *LGH* háromszöghöz (VI. 4.). Ugyanígy az *ECD* háromszög is hasonló az *LHK* háromszöghöz. Az *ABCDE*, *FGHKL* hasonló sokszögeket tehát hasonló és ugyanolyan sok háromszögre bontottuk.

Azt állítom, hogy megegyező arányúak a teljes sokszögekkel, azaz ennélfogva arányosak a háromszögek, mégpedig *ABE*, *EBC*, *ECD* az előtagok, *FGL*, *LGH* és *LHK* pedig az utótagjaik, s hogy az *ABCDE* sokszög az *FGHKL* sokszöggel a megfelelő oldalakhoz, azaz *AB*-hez és *FG*-hez képest kétszeres arányban áll.

Húzzuk meg ugyanis *AC*-t, *FH*-t.

Minthogy a sokszögek hasonlósága miatt egyenlő az *ABC* szög *FGH*-val, s amint *AB* a *BC*-hez, úgy aránylik *FG* a *GH*-hoz, egyenlőek az *ABC* háromszög szögei az *FGH* háromszögéivel (VI. 6.); a *BAC* szög tehát egyenlő *GFH*-val, *BCA* pedig *GHF*-fel. Minthogy a *BAM* szög egyenlő *GFN*-nel és az *ABM* szög egyenlő *FGN*-nel, a harmadik, *AMB* szög is egyenlő a harmadik *FNG* szöggel (I. 32.); egyenlők tehát az *ABM* háromszög szögei az *FGN* háromszögéivel. Hasonlóképp mutathatnánk meg, hogy a *BMC* háromszögnek is egyenlők a szögei a *GNH* háromszögéivel. Arányosak tehát, amint *AM* az *MB*-hez, úgy *FN* az *NG*-hez és amint *BM* az *MC*-hez, úgy *GN* az *NH*-hoz (VI. 4.), úgyhogy egyenlő (sok tagon) át amint *AM* az *MC*-hez, úgy aránylik *FN* az *NH*-hoz (V. 22.). Másrészt amint *AM* az *MC*-hez, úgy aránylik az *ABM* háromszög *MBC*-hez és *AME* az *EMC*-hez – úgy aránylanak ugyanis egymáshoz, mint az alapjaik (VI. 1.). S amint bármelyik előtag az utótagjához, úgy aránylik az előtagok összege az utótagok összegéhez (V. 12.); amint tehát az *AMB* háromszög *BMC*-hez, úgy aránylik *ABE* a *CBE*-hez. Viszont amint *AMB* a *BMC*-hez, úgy aránylik *AM* az *MC*-hez, amint tehát *AM* az *MC*-hez, úgy aránylik az *ABE* háromszög az *EBC* háromszöghöz (V. 11.). Ugyanígy amint *FN* az *NH*-hoz, úgy aránylik az *FGL* háromszög a *GLH* háromszöghöz. *FN* úgy aránylik *NH*-hoz, mint *AM* az *MC*-hez, amint tehát az *ABE* háromszög a *BEC* háromszöghöz, úgy aránylik az *FGL* háromszög a *GLH* háromszöghöz (V. 11.) és fölcserélve, amint az *ABE* háromszög az *FGL* háromszöghöz, úgy a *BEC* háromszög a *GLH* háromszöghöz (V. 16.). Hasonlóképp mutathatnánk meg *BD*-t és *GK*-t meghuzva azt is, hogy amint a *BEC* háromszög az *LGH* háromszöghöz, úgy aránylik az *ECD* háromszög az *LHK* háromszöghöz. S minthogy amint az *ABE* háromszög az *FGL* háromszöghöz, úgy aránylik *EBC* az *LGH*-hoz és *ECD* az *LHK*-hoz, amint bármelyik előtag az utótagjához, úgy aránylik az előtagok összege az utótagok összegéhez (V. 12.); amint tehát az *ABE* háromszög az *FGL* háromszöghöz, úgy aránylik az *ABCDE* sokszög az *FGHKL* sokszöghöz. Az *ABE* háromszög az *FGL* háromszöggel viszont kétszeres arányban áll a megfelelő oldalakhoz, *AB*-hez és *FG*-hez képest – hasonló háromszögek ugyanis a megfelelő oldalaikhoz képest kétszeres arányban állnak (VI. 19.). Az *ABCDE* és *FGHKL* sokszögek is kétszeres arányban állnak tehát a megfelelő *AB*, *FG* oldalaikéhoz képest (V. 11.).

A hasonló sokszögek tehát... [Éppen ezt kellett megmutatni.]

F.: XII. 1., 8. K.

Következmény

Ugyanígy mutatható meg a [hasonló] négyszögekről is, hogy a megfelelő oldalakhoz képest kétszeres arányban állnak. Ezt megmutattuk a háromszögekről is; úgyhogy általánosságban is a hasonló egyenes vonalú alakzatok egymással a megfelelő oldalakhoz képest kétszeres arányban állnak. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: X. 9.

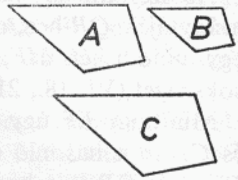
(2. Következmény)

[S ha veszünk *AB*-hez és *FG*-hez egy harmadik arányos *o*-t (VI. 11.), akkor *AB* az *o*-val *FG*-hez képest kétszeres arányban áll. Viszont a sokszögek, illetve négyszögek is kétszeres arányban állnak egymással a megfelelő oldalakhoz, azaz *AB*-hez és *FG*-hez képest. Ezt megmutattuk a háromszögekről is (VI. 19.), úgyhogy általánosságban is nyilvánvaló, hogy ha három szakasz arányos, akkor amint az első a harmadikhoz úgy aránylik az elsőre emelt alakzat a másodikra emelt hasonló és hasonlóan elhelyezett alakzathoz.]

VI. 21. Tétel

Az ugyanazon sokszöghöz hasonló alakzatok egymáshoz is hasonlóak.

Legyen ugyanis mind a két, *A*, *B* sokszög hasonló *C*-hez. Azt állítom, hogy *A* és *B* is hasonló.

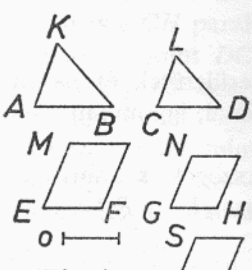


Minthogy ugyanis *A* hasonló *C*-hez, egyenlők a szögei az övéivel és az egyenlő szögek melletti oldalaik arányosak. Ismét, minthogy *B* hasonló *C*-hez, egyenlők a szögei az övéivel és az egyenlő szögek melletti oldalaik arányosak. Mind a két, *A*, *B* alakzat szögei tehát egyenlők és az egyenlő szögek melletti oldalaik arányosak az övéivel [úgyhogy *A*-nak és *B*-nek is egyenlők a szögei és az egyenlő szögek melletti oldalaik arányosak (V. 11.)]. Hasonló tehát *A* a *B*-hez. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: VI. 22., 24., 28–29.

VI. 22. Tétel

Ha négy szakasz arányos, akkor a rájuk emelt (kettőnként) hasonló és hasonlóan elhelyezett sokszögek is arányosak; s ha a négy szakaszra emelt (kettőnként) hasonló és hasonlóan elhelyezett sokszögek arányosak, akkor maguk a szakaszok is arányosak.



Legyen *AB*, *CD*, *EF* és *GH* négy arányos szakasz: amint *AB* a *CD*-hez, úgy *EF* a *GH*-hoz, s emeljük az *AB*, *CD* szakaszokra a hasonló és hasonlóan fekvő *KAB*, *LCD* sokszögeket, *EF*-re és *GH*-ra pedig a hasonló és hasonlóan fekvő *MF*, *NH* sokszögeket. Azt állítom, hogy amint *KAB* az *LCD*-hez, úgy aránylik *MF* az *NH*-hoz.

Vegyünk ugyanis *AB*-hez és *CD*-hez egy harmadik arányos *o*-t, *EF*-hez és *GH*-hoz pedig egy harmadik arányos *p*-t (VI. 11.). Minthogy amint *AB* a *CD*-hez, úgy aránylik *EF* a *GH*-hoz, s amint *CD* az *o*-hoz, úgy *GH* a *p*-hez (V. 11.), egyenlő (sok tagon) át amint

AB az *o*-hoz, úgy aránylik *EF* a *p*-hez (V. 22.). Viszont amint *AB* az *o*-hoz, úgy aránylik *KAB* az *LCD*-hez, s amint *EF* a *p*-hez, úgy *MF* az *NH*-hoz (VI. 19. K.), amint tehát *KAB* az *LCD*-hez, úgy aránylik *MF* is *NH*-hoz (V. 11.).

Arányuljék most amint *KAB* az *LCD*-hez, úgy *MF* az *NH*-hoz. Azt állítom, hogy amint *AB* a *CD*-hez, úgy aránylik *EF* a *GH*-hoz.

Ha ugyanis *EF* nem aránylik úgy *GH*-hoz, mint *AB* a *CD*-hez, arányuljék *QR*-hez, mint *AB* a *CD*-hez (VI. 12.), és emeljünk *QR*-re egy mind a két, *MF*, *NH* alakzathoz hasonló és hasonlóan fekvő *SR* sokszöget (VI. 18., 21.).

Minthogy *EF* úgy aránylik *QR*-hez, mint *AB* a *CD*-hez, és *AB*-re és *CD*-re a hasonló és hasonlóan fekvő *KAB*-t és *LCD*-t emeltük s *EF*-re és *QR*-re a hasonló és hasonlóan fekvő *MF*-et és *SR*-t, amint *KAB* az *LCD*-hez, úgy aránylik *MF* az *SR*-hez. Feltevés szerint *MF* az *NH*-hoz is úgy aránylik, mint *KAB* az *LCD*-hez, amint tehát *MF* az *SR*-hez, úgy aránylik *MF* az *NH*-hoz (V. 11.). *MF*-nek tehát mind a két *NH*, *SR* mennyiséghez ugyanaz az aránya, egyenlő (területű) tehát *NH* az *SR*-rel (V. 9.). De hasonló és hasonlóan fekvő is hozzá, egyenlő tehát a *GH* szakasz *QR*-rel (Lemma). S minthogy *EF* úgy aránylik *QR*-hez, mint *AB* a *CD*-hez, *QR* viszont egyenlő *GH*-val, amint *AB* a *CD*-hez, úgy aránylik *EF* a *GH*-hoz (V. 7.).

Ha tehát négy szakasz... Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: X. 14., 22., 27., 66., 68.; XIII. 15.

Lemma

Azt pedig, hogy ha sokszögek egyenlő (területű)ek és hasonlók, akkor a megfelelő oldalaik egyenlők egymással, így mutathatjuk meg:

Legyenek *NH* és *SR* egyenlő és hasonló sokszögek, s arányuljék amint *HG* a *GN*-hez, úgy *RQ* a *QS*-hez. Azt állítom, hogy *RQ* egyenlő *HG*-vel.

Ha ugyanis nem az, egyikük nagyobb. Legyen *RQ* nagyobb *HG*-nél. Minthogy *HG* úgy aránylik *GN*-hez, mint *RQ* a *QS*-hez, fölcserélve is, amint *RQ* a *HG*-hez, úgy *QS* a *GN*-hez (V. 16.). *QR* nagyobb *HG*-nél, *QS* is nagyobb tehát *GN*-nél (V. 14.), úgyhogy *RS* is nagyobb *HN*-nél (8. Ax.). Azonban egyenlő is vele; ez viszont nem lehetséges. Nem igaz tehát, hogy *QR* nem egyenlő *GH*-val; egyenlő tehát vele. Éppen ezt kellett megmutatni.

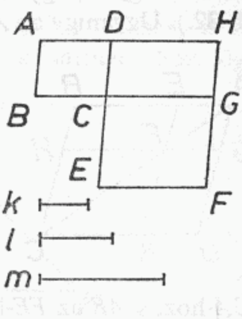
VI. 23. Tétel

Paralelogrammák, melyeknek szögeik egyenlők, az oldalakéiből összetevődő arányban állnak egymással.

Legyenek *AC*, *CF* paralelogrammák, melyeknek egyenlők a szögeik, mégpedig legyen a *BCD* szög egyenlő *ECG*-vel. Azt állítom, hogy az *AC* paralelogramma a *CF* paralelogrammával az oldalakéiből összetevődő arányban áll.

Helyezzük őket úgy el, hogy *BC* egy egyenesen legyen *CG*-vel. Ekkor *DC* is egy egyenesen lesz *CE*-vel (I. 14.). Egészítsük ki a *DG* paralelogrammát, vegyünk föl egy *k* szakaszt, és arányuljék *k* az *l*-hez, mint *BC* a *CG*-hez és *l* az *m*-hez, mint *DC* a *CE*-hez (VI. 12.).

k-nak *l*-hez és *l*-nek *m*-hez való aránya tehát azonos az oldalak arányaival: *BC*-nek a *CG*-hez és *DC*-nek a *CE*-hez való arányával. *k*-nak *m*-hez való aránya viszont *k*-nak *l*-hez és *l*-nek *m*-hez való arányából tevődik össze, úgyhogy *k* az *m*-mel az oldalakéiből összetevődő arányban áll. Minthogy az *AC* paralelogramma úgy aránylik *CH*-hoz, mint *BC* a *CG*-hez (VI. 1.), amint viszont *BC* a *CG*-hez, úgy *k* az *l*-hez, *AC* úgy aránylik *CH*-hoz, mint *k* az *l*-hez (V. 11.). Ismét, minthogy a *CH* paralelogramma úgy aránylik *CF*-hez, mint *DC* a *CE*-hez, amint viszont *DC* a *CE*-hez, úgy *l* az *m*-hez, a *CH* paralelogramma úgy aránylik a *CF* paralelogrammához, mint *l* az *m*-hez. Miután megmutattuk, hogy amint *k* az *l*-hez, úgy aránylik az *AC* paralelogramma a *CH* paralelogrammához s amint *l* az *m*-hez, úgy a *CH* paralelogramma a *CF* paralelogrammához, egyenlő (sok tagon) át amint *k* az *m*-hez, úgy aránylik *AC* a *CF* paralelogrammához (V. 22.). *k* az *m*-mel az oldalakéiből összetevődő arányban áll, *AC* és *CF* is az oldalakéiből összetevődő arányban áll tehát (V. 11.).



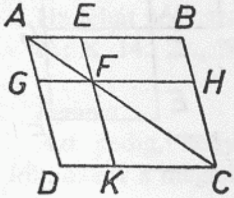
Paralelogrammák tehát, . . . Éppen ezt kellett megmutatni.

VI. 24. Tétel

Minden paralelogrammában az átló melletti paralelogrammák hasonlók mind a teljes paralelogrammához, mind egymáshoz.

Legyen *ABCD* egy paralelogramma, *AC* pedig egy átlója, s legyenek az *AC* melletti paralelogrammák *EG* és *HK*. Azt állítom, hogy mind a két, *EG*, *HK* paralelogramma hasonló a teljes *ABCD*-hez és egymáshoz is.

Minthogy ugyanis az *ABC* háromszög egyik oldalával, *BC*-vel párhuzamosan húztuk *EF*-et, arányosak: amint *BE* az *EA*-hoz, úgy *CF* az *FA*-hoz (VI. 2.). Ismét, minthogy az *ACD* háromszög egyik oldalával, *CD*-vel párhuzamosan húztuk *FG*-t, arányosak: amint *CF* az *FA*-hoz, úgy *DG* a *GA*-hoz. De megmutattuk, hogy *BE* úgy aránylik *EA*-hoz, mint *CF* az *FA*-hoz, amint tehát *BE* az *EA*-hoz, úgy *DG* a *GA*-hoz (V. 11.), és összetéve, amint *BA* az *AE*-hez, úgy *DA* az *AH*-hoz (V. 18.), és fölcserélve, amint *BA* az *AD*-hez, úgy *EA* az *AG*-hez (V. 16.) Az *ABCD*, *EG* paralelogrammáknak tehát arányosak a közös *BAD* szög melletti oldalaik. Minthogy *GF* párhuzamos *DC*-vel, az *AFG* szög egyenlő *DCA*-val (I. 29.); s *DAC* közös szöge a két, *ADC*, *AGF* háromszögnek; egyenlők tehát az *ADC* háromszög szögei *AGF*-éivel (I. 32.). Ugyanígy az *ACB* háromszögnek is egyenlők a szögei az *AFE* háromszögéivel, s a teljes *ABCD* paralelogrammának is egyenlők a szögei az *EG* paralelogrammáéival. Arányosak tehát: amint *AD* *DC*-hez, úgy *AG* a *GF*-hez, amint *DC* a *CA*-hoz, úgy *GF* az *FA*-hoz, amint *AC* a *CB*-hez, úgy *AF* az *FE*-hez, s végül amint *CB* a *BA*-hoz, úgy *FE* az *EA*-hoz (VI. 4.). Miután megmutattuk, hogy *GF* úgy aránylik *FA*-hoz, mint *DC* a *CA*-hoz, s *AF* az *FE*-hez, mint *AC* a *CB*-hez, egyenlő (sok tagon) át *GF* úgy aránylik *FE*-hez, mint *DC* a *CB*-hez (V. 22.). Az *ABCD*, *EG* paralelogrammáknak tehát arányosak az egyenlő szögek melletti oldalaik; hasonló tehát az *ABCD* paralelogramma az *EG* paralelogrammához. Ugyanígy az *ABCD* paralelogramma a *KH* paralelogrammához is hasonló; mind a két, *EG*, *HK* paralelogrammához is hasonló; mind a két, *EG*, *HK* paralelogramma hasonló tehát *ABCD*-hez. Az ugyanazon sokszöghöz hasonlók viszont egymáshoz is



hasonlók (VI. 21.); az *EG* paralelogramma is hasonló tehát a *HK* paralelogrammához.

Tehát minden... Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: VI. 26., 29.

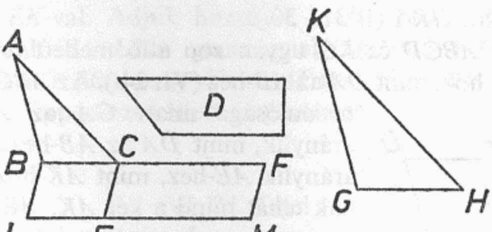
VI. 25. Tétel

Szerkesszünk adott sokszöghöz hasonló és egyúttal egy másik adott sokszöggel egyenlő (területű) alakzatot!

Legyen az adott sokszög, amelyhez hasonlót kell szerkeszteni, *ABC*, amellyel pedig egyenlőt, *D*. *ABC*-hez hasonló s egyúttal *D*-vel egyenlő alakzatot kell tehát szerkeszteni.

Illesszünk hozzá ugyanis a *BC* szakaszhoz egy az *ABC* háromszöggel egyenlő *BE* paralelogrammát (I. 44.), *CE*-hez pedig egy *D*-vel egyenlő és a *CBL* szöggel egyenlő *FCE* szögű *CM* paralelogrammát (I. 45.). Ekkor egy egyenesen lesz *BC* a *CF*-fel és *LE* az *EM*-mel (I. 29., 14.). Vegyünk *BC*-hez és *CF*-hez egy *GH* középarányost (VI. 13.), és emeljünk *GH*-ra egy *ABC*-hez hasonló és hasonlóan fekvő *KGH* alakzatot (VI. 18.).

Miután amint *BC* a *GH*-hoz, úgy aránylik *GH* a *CF*-hez, és ha három szakasz arányos, akkor amint az első a harmadikhoz, úgy



aránylik az elsőre emelt alakzat a másodikra emelt hasonló és hasonlóan elhelyezett alakzathoz (VI. 19. K.), amint *BC* a *CF*-hez, úgy aránylik az *ABC* háromszög a *KGH* háromszöghöz. Viszont amint *BC* a *CF*-hez, úgy aránylik a *BE* paralelogramma az *EF* paralelogrammához (VI. 1.). Amint tehát az *ABC* háromszög a *KGH* háromszöghöz, úgy aránylik a *BE* paralelogramma az *EF* paralelogrammához

(V. 11.); fölcserélve tehát amint az *ABC* háromszög a *BE* paralelogrammához, úgy a *KGH* háromszög az *EF* paralelogrammához (V. 16.). Az *ABC* háromszög egyenlő a *BE* paralelogrammával, tehát a *KGH* háromszög is egyenlő az *EF* paralelogrammával (V. 14.). Az *EF* paralelogramma viszont egyenlő *D*-vel; *KGH* is egyenlő tehát *D*-vel. S *KGH* egyúttal *ABC*-hez is hasonló.

Tehát egy, az adott *ABC* sokszöghöz hasonló és egyúttal a másik adott *D* sokszöggel egyenlő *KGH* alakzatot szerkesztettünk. Éppen ezt kellett megtenni.

F.: VI. 28–29.

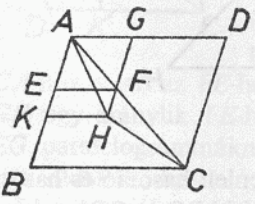
VI. 26. Tétel

Ha egy paralelogrammából elveszünk egy ahhoz hasonló és hasonlóan fekvő paralelogrammát, melynek van vele közös szöge, akkor a paralelogrammák ugyanazon átló mellett fekszenek.

Vegyük el ugyanis az *ABCD* paralelogrammából az *ABCD*-hez hasonló és hasonlóan fekvő *AF* paralelogrammát, melynek *DAB* szöge közös vele. Azt állítom, hogy *ABCD* és *AF* ugyanazon átló mellett fekszik.

Ellenkező esetben legyen ugyanis *AHC* az átló, és *GF* meghosszabbítása messe *H*-ban, és húzzuk *H*-n át mind a két, *AD*, *BC* oldallal párhuzamosan *HK*-t (I. 31., 30.).

Minthogy *ABCD* és *KG* ugyanazon átló mellett fekszik, *GA* úgy aránylik *AK*-hoz, mint *DA* az *AB*-hez (VI. 24.). Az *ABCD*, *EG* idomok hasonlósága miatt *GA* az *AE*-hez is úgy aránylik, mint *DA* az *AB*-hez; *GA* tehát úgy aránylik *AE*-hez, mint *AK*-hoz (V. 11.). *GA*-nak tehát mind a két *AK*, *AE* mennyiséghez ugyanaz az aránya. Egyenlő tehát *AE* az *AK*-val (V. 9.), a kisebb a nagyobbal; ez viszont nem lehetséges. Nem igaz tehát, hogy *ABCD* és *AF* nem fekszik ugyanazon átló mellett: az *ABCD* és az *AF* paralelogramma tehát ugyanazon átló mellett fekszik.



Ha tehát egy... Éppen ezt kellett megmutatni.

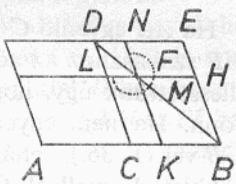
F.: VI. 27–29.; X. 91., 95–96.

VI. 27. Tétel

Egy szakaszhoz úgy illesztett összes paralelogramma közül, hogy egy, a szakasz felére emelt paralelogrammához hasonló és hasonlóan fekvő paralelogramma marad fönn, a szakasz felére illesztett – s a fönnmaradóhoz hasonló – a legnagyobb (területű).

Legyen *AB* egy szakasz s *C* a felezőpontja (I. 10.), és illesszünk úgy az *AB* szakaszhoz egy *AD* paralelogrammát, hogy az *AB* szakasz felére, azaz *CB*-re emelt *DB* paralelogramma maradjon fönn. Azt állítom, az *AB*-hez úgy illesztett összes paralelogramma közül, hogy egy *DB*-hez hasonló és hasonlóan fekvő paralelogramma marad fönn, *AD* a legnagyobb. Illesszük ugyanis úgy az *AB* szakaszhoz az *AF* paralelogrammát, hogy a *DB*-hez hasonló és hasonlóan fekvő *FB* maradjon fönn. Azt állítom, hogy *AD* nagyobb *AF*-nél.

Minthogy ugyanis a *DB* paralelogramma hasonló az *FB* paralelogrammához, ugyanazon átló körül fekszenek (VI. 26.). Húzzuk meg a *DB* átlójukat, és rajzoljuk meg az ábrát.



Minthogy *CF* egyenlő *FE*-vel (I. 43.), *FB* pedig közös rész, a teljes *CH* egyenlő a teljes *KE*-vel. *CH* viszont egyenlő *CG*-vel, minthogy *AC* is egyenlő *CB*-vel (I. 36.). *GC* is egyenlő tehát *EK*-val. Adjuk hozzájuk közös résznek *CF*-et: így a teljes *AF* egyenlő az *LMN* gnómónnal, úgyhogy a *DB* paralelogramma, azaz *AD* (I. 36.), nagyobb az *AF* paralelogrammánál.

Tehát egy... Éppen ezt kellett megmutatni.

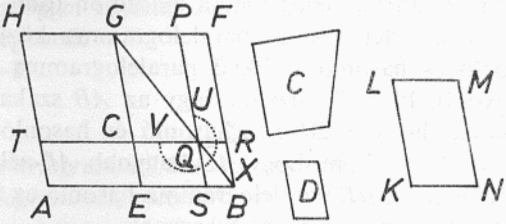
F.: VI. 28.

VI. 28. Tétel

*Illesszünk úgy adott szakaszhoz egy adott sokszöggel egyenlő paralelogrammát, hogy egy adotthoz hasonló paralelogramma maradjon fönn. Szükséges, hogy az adott sokszög [mellyel egyenlőt kell odailleszteni] ne legyen nagyobb a szakasz felére emelt – s a fönnmaradóhoz hasonló – paralelogrammánál (VI. 27) [vagyis a felére emelt paralelogrammánál, melyhez hasonlónak kell fönnmaradnia].**

Legyen *AB* az adott szakasz, s az adott sokszög, amellyel egyenlőt kell *AB*-hez illeszteni, *C* – mely nem nagyobb az *AB* felére emelt, a fönnmaradóhoz hasonló paralelogrammánál –, amelyhez pedig hasonlónak kell fönnmaradnia, *D*. Az adott *AB* szakaszhoz tehát az adott *C* sokszöggel egyenlő paralelogrammát kell illeszteni úgy, hogy egy *D*-hez hasonló paralelogramma maradjon fönn.

Legyen *E* az *AB* felezőpontja (I. 10.), emeljünk *EB*-re egy *D*-hez hasonló és hasonlóan fekvő *EBFG* sokszöget (VI. 18.), és egészítsük ki az *AG* paralelogrammát.



Ha *AG* egyenlő *C*-vel, készen vagyunk a feladattal, hiszen az adott *AB* szakaszhoz az adott *C* sokszöggel egyenlő *AG* paralelogrammát illesztettünk úgy, hogy a *D*-hez hasonló *GB* paralelogramma marad fönn. Ha nem egyenlő, legyen nagyobb *HE* a *C*-nél. *HE* egyenlő *GB*-vel (I. 36.), tehát *GB* is nagyobb *C*-nél. Szerkesszünk egy azon többlettel, mellyel *GB* nagyobb *C*-nél, egyenlő és egyúttal *D*-hez hasonló és hasonlóan fekvő *KLMN* alakzatot (VI. 25.). *D* viszont hasonló *GB*-hez: *KM* is hasonló tehát *GB*-hez (VI. 21.). Feleljen meg *KL* a *GE*-nek és *LM* a *GF*-nek. Minthogy *GB* egyenlő *C* meg *KM*-mel, *GB* nagyobb *KM*-nél, így *GE* nagyobb *KL*-nél és *GF* *LM*-nél. Mérjük föl a *KL*-lel egyenlő *GO*-t és az *LM*-mel egyenlő *GP*-t (I. 3.), és egészítsük ki az *OGPQ* paralelogrammát. Egyenlő tehát és hasonló [*GQ*] *KM*-hez [*KM* viszont *GB*-hez hasonló]. *GQ* is hasonló tehát *GB*-hez (VI. 21.), ugyanazon átló mellett fekszik tehát *GQ* és *GB* (VI. 26.). Legyen *GQB* az átlójuk, és rajzoljuk meg az ábrát.

Minthogy *BG* egyenlő *C* meg *KM*-mel, s ezek közül *KM*-mel egyenlő *GQ*, a maradék *UXV* gnómón egyenlő a maradék *C*-vel. Miután *PR* egyenlő *OS*-sel (I. 43.), adjuk hozzájuk közös tagnak *QB*-t, így a teljes *PB* egyenlő a teljes *OB*-vel. *OB* viszont egyenlő *TE*-vel, minthogy az *AE* oldal is egyenlő *EB*-vel (I. 36.), *TE* is egyenlő tehát *PB*-vel. Adjuk hozzájuk közös tagnak *OS*-t, így a teljes *TS* egyenlő a teljes

VXU gnómónnal. Viszont mint megmutattuk a *VXU* gnómón egyenlő *C*-vel, *TS* is egyenlő tehát *C*-vel.

Az adott *AB* szakaszhoz tehát az adott *C* sokszöggel egyenlő *ST* paralelogrammát illesztettünk úgy, hogy a *D*-hez hasonló *QB* paralelogramma marad fönn [mivel *QB* hasonló *GQ*-hoz (VI. 24.)] (VI.21.). Éppen ezt kellett megtenni.

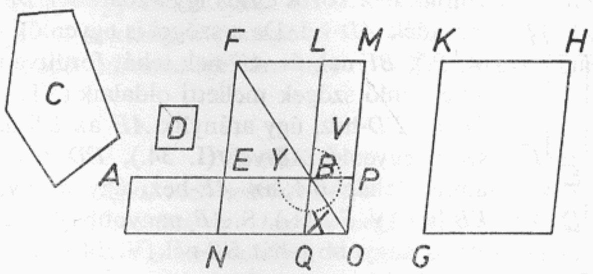
F.: X. 17–18., 33–35., 54–55., 57., 91–96., 98.

VI. 29. Tétel

*Illesszünk adott szakaszhoz adott sokszöggel egyenlő paralelogrammát úgy, hogy egy adotthoz hasonló paralelogramma lógjon ki.**

Legyen *AB* az adott szakasz, s az adott sokszög, amellyel egyenlőt kell *AB*-hez illeszteni, *C*, amelyhez pedig hasonlónak kell kilógnia, *D*. Az *AB* szakaszhoz tehát a *C* sokszöggel egyenlő sokszöget kell illeszteni úgy, hogy egy *D*-hez hasonló paralelogramma lógjon ki.

Legyen *E* az *AB* felezőpontja (I. 10.), emeljünk *EB*-re egy *D*-hez hasonló és hasonlóan fekvő *BF* paralelogrammát (VI. 18.), és szerkesszünk egy *BF* és *C* összegével egyenlő és egyúttal *D*-hez hasonló és hasonlóan fekvő *GH* alakzatot (VI. 25.). Feleljen meg *KH* az *FL*-nek és *KH* az *FE*-nek. Minthogy *GH* nagyobb *FB*-nél, *KH* nagyobb



FL-nél és *KG* az *FE*-nél. Hosszabbítsuk meg *FL*-t, *FE*-t, *KH*-val legyen egyenlő *FLM*, *KG*-vel pedig *FEN* (I. 3.), és egészítsük ki *MN*-t. *MN* tehát mind egyenlő, mind hasonló *GH*-val. *GH* viszont *EL*-hez hasonló (VI. 21.), *MN* is hasonló tehát *EL*-hez, s *EL* és *MN* ugyanazon átló mellett fekszik (VI. 26.). Húzzuk meg *FO* átlójukat, és rajzoljuk meg az ábrát.

Minthogy *GH* egyenlő *EL* meg *C*-vel, *GH* viszont egyenlő *MN*-nel, *MN* is egyenlő *EL* meg *C*-vel. Vonjuk le a közös *EL*-t: így a maradék *YXV* gnómón egyenlő *C*-vel. Minthogy *AE* egyenlő *EB*-vel, *AN* is egyenlő *NB*-vel (I. 36.), azaz *LP*-vel (I. 43.). Adjuk hozzájuk közös tagnak *EO*-t: így a teljes *AO* egyenlő a *VXY* gnómónnal. A *VXY* gnómón viszont egyenlő *C*-vel, *AO* is egyenlő tehát *C*-vel.

Az adott *AB* szakaszhoz tehát az adott *C* sokszöggel egyenlő *AO* paralelogrammát illesztettünk úgy, hogy a *D*-hez hasonló *PQ* paralelogramma lóg ki (VI. 21.), mivel *EL* is hasonló *PQ*-hoz (VI. 24.). Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: VI. 30.

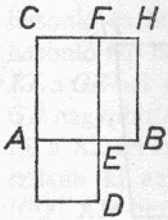
VI. 30. Tétel

Osszunk föl adott egyenesszakaszt folytonos arányban!

Legyen *AB* az adott egyenesszakasz. Az *AB* szakaszt kell tehát folytonos arányban fölosztani.

Emeljünk ugyanis *AB*-re egy *BC* négyzetet (I. 46.), és illesszünk *AC*-hez egy *BC*-vel egyenlő *CD* paralelogrammát úgy, hogy egy *BC*-hez hasonló *AD* alakzat lógjon ki (VI. 29.).

BC négyzet, tehát *AD* is az (V. 14.). Miután *BC* egyenlő *CD*-vel, vonjuk le a közös *CE*-t: így a maradék *BF* egyenlő a maradék *AD*-vel. De a szögei is egyenlők az övéivel (4. P.), *BF*-nek és *AD*-nek tehát fordítva arányosak az egyenlő szögek melletti oldalaik (VI. 14.): amint *FE* az *ED*-hez, úgy aránylik *AE* az *EB*-hez. *FE* viszont egyenlő *AB*-vel (I. 34.), *ED* pedig *AE*-vel, amint tehát *BA* az *AE*-hez, úgy aránylik *AE* az *EB*-hez (V. 7., 11.). S *AB* nagyobb *AE*-nél (8. Ax.), *AE* is nagyobb tehát *EB*-nél (V. 14.).



Az *AB* szakaszt tehát folytonos arányban osztottuk föl az *E* pontban, és *AE* a nagyobb szelete. Éppen ezt kellett megtenni.

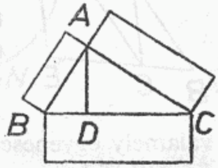
VI. 31. Tétel

*A derékszögű háromszögekben a derékszöggel szemközti oldalra emelt alakzat egyenlő a derékszöget közrefogó oldalakra emelt hasonló és hasonlóan elhelyezett alakzatok összegével.**

Legyen *ABC* egy derékszögű háromszög, és benne *BAC* a derékszög. Azt állítom, hogy a *BC*-re emelt alakzat egyenlő a *BA*-ra és *AC*-re emelt hasonló és hasonlóan elhelyezett alakzatok összegével.

Húzzuk meg az *AD* merőlegest (I. 11.).

Minthogy az *ABC* derékszögű háromszögben az *A*-nál levő derékszög csúcsából a *BC* alapra merőlegesen bocsátottuk *AD*-t, a merőleges melletti *ABD*, *ADC* háromszögek hasonlók mind a teljes *ABC* háromszöghöz, mind egymáshoz (VI. 8.). Minthogy *ABC* hasonló *ABD*-hez, amint *CB* a *BA*-hoz, úgy aránylik *AB* a *BD*-hez. Minthogy három szakasz arányos, amint az első a harmadikhoz, úgy aránylik az elsőre emelt alakzat a másodikra emelt hasonló és hasonlóan elhelyezett alakzathoz (VI. 20. 2. K.). Amint tehát *CB* a *BD*-hez, úgy aránylik a *CB*-re emelt sokszög a *BA*-ra emelt hasonló és hasonlóan elhelyezett sokszöghöz. Ugyanígy amint *BC* a *CD*-hez, úgy aránylik a *BC*-re emelt sokszög a *CA*-ra emelthez, úgyhogy amint *BC* a *BD* meg *DC*-hez, úgy aránylik a *BC*-re emelt sokszög a *BA*-ra és *AC*-re emelt hasonló és hasonlóan elhelyezett sokszögek összegéhez (V. 24.). *BC* egyenlő *BD* meg *DC*-vel, tehát a *BC*-re emelt sokszög is egyenlő a *BA*-ra és *AC*-re emelt hasonló és hasonlóan elhelyezett sokszögek összegével (V. 14.).



A derékszögű háromszögekben tehát... Éppen ezt kellett megmutatni.

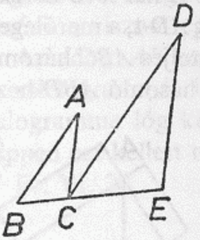
VI. 32. Tétel

Ha két háromszöget, melynek két-két oldala arányos, egy-egy csúcsánál fogva összeillesztünk úgy, hogy a megfelelő oldalaik párhuzamosak is legyenek, akkor a háromszögek harmadik oldala egy egyenesen lesz.

Legyen *ABC* és *DCE* két háromszög, melynek két-két oldala, *BA*, *AC* és *DC*, *DE* arányos: amint *AB* az *AC*-hez, úgy *DC* a *DE*-hez, és *AB* párhuzamos *DC*-vel, *AC* pedig *DE*-vel. Azt állítom, hogy *BC* és *CE* egy egyenesen van.

Minthogy ugyanis *AB* párhuzamos *DC*-vel, és az *AC* egyenes metszi őket, a *BAC*, *ACD* váltószögek egyenlők egymással (I. 29.).

Ugyanígy a *CDE* szög is egyenlő *ACD*-vel, úgyhogy *BAC* is egyenlő *CDE*-vel. Minthogy *ABC* és *DCE* két háromszög, melynek egy-egy szöge, az *A*-nál, illetve *D*-nél levő, egyenlő, és az egyenlő szögek melletti oldalak arányosak: amint *BA* az *AC*-hez, úgy *CD* a *DE*-hez, az *ABC* háromszög szögei egyenlők a *DCE* háromszögéivel (VI. 6.), egyenlő tehát az *ABC* szög *DCE*-vel. Mint megmutattuk, az *ACD* szög egyenlő *BAC*-vel, így a teljes *ACE* szög egyenlő e két szög, *ABC* és *BAC* összegével. Adjuk hozzájuk közös tagnak *ACB*-t, így *ACE* meg *ACB* egyenlő *BAC* meg *ACB* meg *CBA*-val. *BAC* meg *ABC* meg *ACB* viszont két derékszöggel egyenlő (I. 32.), tehát *ACE* meg *ACB* is két derékszöggel egyenlő. A valamely egyenesen, *AC*-n fekvő *C* pontnál ekkor két egyenes, *BC* és *CE* fekszik nem ugyanazon az oldalon, és két derékszöggel egyenlő *ACE*, *ACB* szögeket alkotnak egymás mellett, *BC* és *CE* tehát egy egyenesen van (I. 14.).



Ha tehát két... Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: XIII. 17.

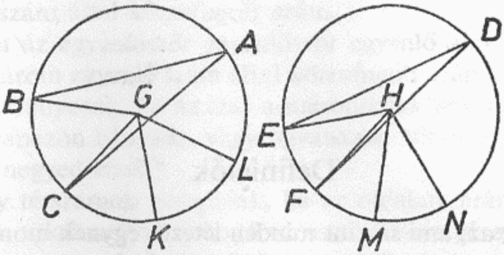
VI. 33. Tétel

*Egyenlő körökben az ívek és a rajtuk nyugvó szögek aránya ugyanaz, akár középpontiak, akár kerületiek a szögek.**

Legyenek *ABC* és *DEF* egyenlő körök, és legyenek bennük középponti szögek – *G*-nél, illetve *H*-nál – *BGC* és *EHF*, kerületiek pedig *BAC*, *EDF*. Azt állítom, hogy amint a *BC* ív az *EF* ívhez, úgy aránylik mind a *BGC* szög *EHF*-hez, mind *BAC* az *EDF*-hez.

Vegyünk föl ugyanis egymás mellett tetszőleges sok, a *BC* ívvel egyenlő *CK*, *KL*, s az *EF* ívvel egyenlő *FM*, *MN* ívet, és húzzuk meg *GK*-t, *GL*-t, *HM*-et, *HN*-t.

Minthogy a *BC*, *CK*, *KL* ívek egyenlők egymással, a *BGC*, *CGK*, *KGL* szögek is egyenlők egymással (III. 27.), ahányszorosa tehát a *BL* ív *BC*-nek, ugyanannyiszorosa a *BGL* szög is *BGC*-nek. Ugyanígy ahányszorosa az *NE* ív *EF*-nek, ugyanannyiszorosa az *NHE* szög is *EHF*-nek. Ha tehát a *BL* ív egyenlő az *EN* ívvel, egyenlő a *BGL* szög is *EHN*-nel (III. 27.), s ha nagyobb a *BL* ív az *EN* ívnél, a *BGL* szög is nagyobb *EHN*-nél, s ha kisebb, kisebb. Van hát négy mennyiség, két ív, *BC* és *EF*, s két szög, *BGC* és *EHF*, s ugyanannyiszorosát vettük a *BC* ívnek és a *BGC* szögnek, a *BL* ívet, illetve a *BGL* szöget, meg az *EF* ívnek és az *EHF* szögnek, az *EN* ívet, illetve az *EHN* szö-



get. Megmutattuk, hogy ha a *BL* ív nagyobb az *EN* ívnél, a *BGL* szög is nagyobb az *EHN* szögnél, s ha egyenlő, egyenlő, s ha kisebb, kisebb. A *BGC* szög tehát úgy aránylik az *EHF* szöghöz, mint a *BC* ív az *EF* ívhez. Viszont amint a *BGC* szög *EHF*-hez, úgy aránylik a *BAC* szög *EDF*-hez, mert mind a kettő kétszerese a megfelelő másiknak (III. 20., V. 15.). Amint tehát a *BC* ív az *EF* ívhez, úgy aránylik mind a *BGC* szög *EHF*-hez, mind *BAC* az *EDF*-hez (V. 11.).

Egyenlő körökben tehát... Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: XIII. 8–9.

Hetedik könyv

Definíciók

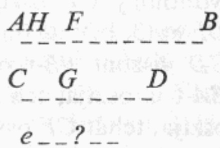
1. Az egység az, ami szerint minden létezőt egynek mondunk.
2. Szám az egységekből összetevődő sokaság.*
3. Egy kisebb szám egy nagyobbnak hányada*, ha osztja a nagyobbat.
4. Törtrésze* pedig, ha nem osztja.
5. Egy nagyobb szám egy kisebbnek többszöröse, ha a kisebb osztja.
6. Páros a kettébontható szám.
7. Páratlan pedig a ketté nem bontható, vagy másképp amelyik egységben különbözik egy páros számtól.
8. Párosszor páros az a szám, amelyik egy páros szám által páros számúan osztható.
9. Párosszor páratlan pedig, amelyik egy páros szám által páratlan számúan osztható.
10. Páratlanszor páros az a szám, amelyik egy páratlan szám által páros számúan osztható.*
11. Páratlanszor páratlan szám pedig az, amelyik egy páratlan szám által páratlan számúan osztható.
12. Prímszám, amelyik csak az egységgel osztható.
13. Számok egymáshoz relatív prímek, ha csak az egység közös osztójuk.
14. Összetett az a szám, amelyiket valamely szám oszt.
15. Számok relatív összetettek, ha valamely szám közös osztójuk.
16. Azt mondjuk, hogy egy számmal megszorzunk egy másikat, ha úgy képezünk egy számot, hogy annyiszor adjuk össze a szorzottat, ahány egység van a szorzóban.

17. A két szám összeszorzásakor keletkező számot síkszámnak nevezzük, az összeszorzott számokat pedig az oldalainak.
18. A három szám összeszorzásakor keletkező szám térszám, az összeszorzott számok pedig az oldalai.
19. Négyzetszám az egyenlőször egyenlő alakú vagy másképp a két egyenlő szám által közrefogott szám.
20. Köbszám az egyenlőször egyenlőször egyenlő alakú, vagy másképp a három egyenlő szám által közrefogott szám.
21. Számok arányosak, ha az első a másodiknak ugyanannyiszorosa vagy ugyanazon hányada, vagy ugyanazon törtrésze, mint a harmadik a negyediknek.*
22. Sík- vagy térszámok hasonlóak, ha az oldalaik arányosak.
23. Egy szám tökéletes, ha egyenlő az osztói* összegével.

VII. 1. Tétel

*Ha van két nem egyenlő számunk, a kisebbet váltakozva mindig kivonjuk a nagyobból, és a maradék sosem osztja a megelőző számot, míg csak nem az egység a maradék, akkor az eredeti számok relatív prímek.**

Legyen *AB* és *CD* két [nem egyenlő] szám, és a kisebbet váltakozva mindig kivonván a nagyobból a maradék sose ossza a megelőző számot. Azt állítom, hogy *AB* és *CD* relatív prímek, azaz hogy *AB*-t és *CD*-t csak az egység osztja.



Ha ugyanis *AB* és *CD* nem relatív prím, osztja őket valamely szám. Ossza őket egy *e* szám. *CD* ossza *BF*-et, és legyen a nála kisebb maradék *FA*, *AF* ossza *DG*-t, és legyen a nála kisebb maradék *GC*, s *GC* ossza *FH*-t, és legyen a maradék a *HA* egység.

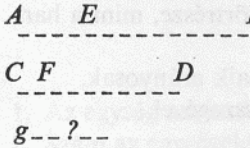
Minthogy *e* osztja *CD*-t, *CD* pedig osztja *BF*-et, *e* is osztja *BF*-et (3. E.); de a teljes *BA*-t is osztja, tehát a maradék *AF*-et is osztja (2. E.). *AF* viszont *DG*-t osztja, tehát *e* is osztja *DG*-t (3. E.); de a teljes *DC*-t is osztja, tehát a maradék *CG*-t is osztja. *CG* viszont *FH*-t osztja, tehát *e* is osztja *FH*-t (3. E.); de a teljes *FA*-t is osztja, tehát a maradék *AH* egységet is osztja (2. E.), noha szám: ez pedig lehetetlen. Nem osztja tehát semelyik szám az *AB* és *CD* számokat, *AB* és *CD* tehát relatív prímek. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: VII. 2.

VII. 2. Tétel

*Keressük meg két adott nem relatív prímszám legnagyobb közös osztóját!**

Legyen két adott nem relatív prím szám *AB* és *CD*. Az *AB*, *CD* számoknak kell tehát megkeresni a legnagyobb közös osztóját.



Ha *CD* osztja *AB*-t – önmagát szintén osztja –, akkor *CD* közös osztója *CD*-nek és *AB*-nek. És nyilván a legnagyobb, egyetlen *CD*-nél nagyobb szám sem osztja ugyanis *CD*-t.

Ha pedig *CD* nem osztja *AB*-t, *AB* és *CD* közül a kisebbet váltakozva mindig kivonván a nagyobból egy olyan szám lesz a maradék, mely osztja a megelőzőt. Nem az egység lesz ugyanis a maradék, mert ellenkező esetben *AB* és *CD* relatív prímek lennének (VII. 1.) feltevésünk ellenére. Szám lesz tehát a maradék, mely osztja a megelőzőt. *CD* ossza *BE*-t, és legyen a nála kisebb maradék *EA*, *EA* ossza *DF*-et, és legyen a nála kisebb maradék *FC*, s *CF* ossza *AE*-t. Minthogy *CF* osztja *AE*-t, *AE* pedig osztja *DF*-et, *CF* is osztja *DF*-et (3. E.); de önmagát is osztja, tehát a teljes *CD*-t is osztja (1. E.). *CD* viszont *BE*-t osztja, tehát *CF* is osztja *BE*-t (3. E.); másrészt *EA*-t is osztja, tehát a teljes *BA*-t is osztja (1. E.). Viszont *CD*-t is osztja, tehát *CF* osztja *AB*-t *és CD*-t. *CF* tehát közös osztója *AB*-nek és *CD*-nek. Azt állítom, hogy a legnagyobb. Ha ugyanis *CF* nem a legnagyobb közös osztója *AB*-nek és *CD*-nek, valamely *CF*-nél nagyobb szám osztja az *AB* és *CD* számokat. Ossza őket egy *g* szám. Minthogy *g* osztja *CD*-t, *CD* pedig osztja *BE*-t, *g* is osztja *BE*-t (3. E.); másrészt a teljes *BA*-t is osztja, tehát a maradék *AE*-t is osztja (2. E.). *AE* viszont *DF*-et osztja, tehát *g* is osztja *DF*-et (3. E.); másrészt a teljes *DC*-t is osztja, tehát a maradék *CF*-et is osztja (2. E.), a nagyobb a kisebbet, ami lehetetlen. Nem osztja tehát semelyik *CF*-nél nagyobb szám az *AB*, *CD* számokat, *CF* tehát *AB*-nek és CD-nek a legnagyobb közös osztója. [Éppen ezt kellett megmutatni.]

F.: VII. 3–4.

Következmény

Ebből már nyilvánvaló, hogy ha egy szám oszt két számot, akkor a legnagyobb közös osztójukat is osztja. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: VII. 3.

VII. 3. Tétel

Keressük meg három adott nem relatív prímszám legnagyobb közös osztóját!

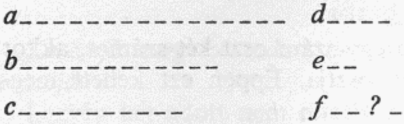
Legyen az adott három nem relatív prímszám a, b és c. a-nak, b-nek és c-nek kell tehát megkeresni a legnagyobb közös osztóját.

Vegyük ugyanis kettőnek, a-nak és b-nek a d legnagyobb közös osztóját (VII. 2.). d vagy osztja c-t, vagy nem osztja. Ossza először. a-t és b-t is osztja, d tehát osztja a-t, b-t és c-t, d közös osztója a-nak, b-nek és c-nek. Azt állítom, hogy a legnagyobb. Ha ugyanis d nem a legnagyobb közös osztója a-nak, b-nek és c-nek, valamely d-nél nagyobb szám osztja a-t, b-t és c-t. Ossza őket egy e szám. Minthogy e osztja a-t, b-t és c-t, a-t és b-t is osztja, tehát a és b legnagyobb közös osztóját is osztja (VII. 2. K.). a és b legnagyobb közös osztója d, e tehát osztja d-t, a nagyobb a kisebbet, ami lehetetlen. Nem osztja tehát semelyik d-nél nagyobb szám az a, b, c számokat, d tehát a-nak, b-nek és c-nek a legnagyobb közös osztója.

a - - - - - - - - -
d - -
b - - - - - -
e - - ? - -
c - - - -

Ne ossza most d a c-t. Először is azt állítom, hogy c és d nem relatív prímek. Minthogy ugyanis a, b, és c nem relatív prímek, valamely szám osztja őket. Az a-t, b-t és c-t osztó szám az a, b számokat is osztja, és a-nak és b-nek legnagyobb közös osztóját, d-t is osztja (VII. 2. K.), másrészt c-t is osztja, tehát a d, c számokat osztja valamely szám, d és c nem relatív prímek. Vegyük hát a legnagyobb közös osztójukat, e-t (VII. 2.). Minthogy e osztja d-t, d

pedig osztja a-t és b-t, e is osztja a-t és b-t (3. E.); másrészt c-t is osztja, e tehát osztja az a, b, c számokat, e közös osztója a-nak, b-nek és c-nek. Azt állítom, hogy a legnagyobb. Ha ugyanis e nem a legnagyobb közös osztója a-nak, b-nek és c-nek, valamely e-nél nagyobb szám osztja a-t, b-t és c-t. Ossza őket, és nevezzük f-nek. Minthogy f osztja a-t, b-t és c-t, az a, b számokat is osztja, és a-nak és b-nek a legnagyobb közös osztóját is osztja (VII. 2. K.). a-nak és b-nek a legnagyobb közös osztója d, f tehát osztja d-t; másrészt c-t is osztja, f tehát osztja a d, c számokat, és d-nek és c-nek a legnagyobb közös osztóját is osztja (VII. 2. K.). d-nek és c-nek a legnagyobb közös osztója e, f tehát osztja e-t, a nagyobb a kisebbet, ami lehetetlen. Nem osztja tehát semelyik e-nél nagyobb szám az a, b, c számokat, e tehát a-nak, b-nek és c-nek a legnagyobb közös osztója. Éppen ezt kellett megmutatni.



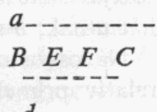
F.: VII. 33.

VII. 4. Tétel

Bármely két szám közül a kisebb a nagyobbnak vagy hányada, vagy törtrésze.

Legyen a és BC két szám, és BC a kisebb. Azt állítom, hogy BC az a-nak vagy hányada, vagy törtrésze.

a és BC ugyanis vagy relatív prímek, vagy nem. Legyenek először a és BC relatív prímek. Ha BC-t földbontjuk a benne levő egységekre, akkor minden BC-ben levő egység egy bizonyos hányada lesz a-nak, úgyhogy BC törtrésze a-nak.



Ne legyenek most a és BC relatív prímek. Ekkor BC vagy osztja a-t, vagy nem osztja. Ha BC osztja a-t, BC hányada a-nak. Ha nem, vegyük a-nak és BC-nek a d legnagyobb közös osztóját (VII. 2.), és bontsuk föl BC-t a d-vel egyenlő BE, EF, FC számokra. Minthogy d osztja a-t, d hányada a-nak. Másrészt d egyenlő BE, EF, FC mindegyikével, tehát BE, EF és FC mindegyike hányada a-nak, úgyhogy BC törtrésze a-nak.

Bármely két szám közül tehát... Éppen ezt kellett megmutatni.

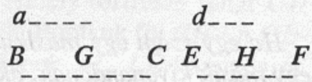
F.: VII. 20.

VII. 5. Tétel

*Ha egy szám hányada egy másiknak, és egy harmadik ugyanaz a hányada egy negyediknek, akkor az első és a harmadik összege is ugyanaz a hányada a második és a negyedik összegének, mint az első a másodiknak.**

Legyen ugyanis az *a* szám hányada *BC*-nek, és a harmadik szám, *d*, ugyanaz a hányada a negyedik *EF*-nek, mint *a* a *BC*-nek. Azt állítom, hogy *a* és *d* összege is ugyanaz a hányada *BC* és *EF* összegének mint *a* a *BC*-nek.

Minthogy ugyanis amely hányada *a* a *BC*-nek, ugyanaz a hányada *d* az *EF*-nek, ahány *a*-val egyenlő szám van *BC*-ben, annyi *d*-vel egyenlő szám van *EF*-ben. Bontsuk föl *BC*-t az *a*-val egyenlő *BG*, *GC*, *EF*-et pedig a *d*-vel egyenlő *EH*, *HF* számokra. Ekkor a *BG*, *GC* számok száma egyenlő lesz az *EH*, *HF* számok számával. Minthogy *BG* egyenlő *a*-val, *EH* pedig *d*-vel, *BG* meg *EH* egyenlő *a* meg *d*-vel. Ugyanígy *GC* meg *HF* is egyenlő *a* meg *d*-vel. Ahány *a*-val egyenlő szám van tehát *BC*-ben, annyi *a* meg *d*-vel egyenlő van *BC* meg *EF*-ben. Ahányszorosa tehát *BC* az *a*-nak, annyiszorosa *BC* és *EF* összege *a* és *d* összegének. Amely hányada tehát *a* a *BC*-nek, ugyanaz a hányada *a* és *d* összege *BC* és *EF* összegének. Éppen ezt kellett megmutatni.



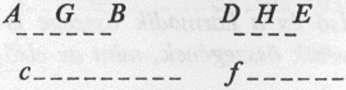
F.: VII. 6–7., 9–10., 12.

VII. 6. Tétel

Ha egy szám törtrésze egy másiknak, és egy harmadik ugyanaz a törtrésze egy negyediknek, akkor az első és a harmadik összege is ugyanaz a törtrésze a második és a negyedik összegének, mint az első a másodiknak.

Legyen ugyanis az *AB* szám törtrésze a *c* számnak, és egy harmadik szám, *DE*, ugyanaz a törtrésze a negyedik *f*-nek, mint *AB* *c*-nek. Azt állítom, hogy *AB* és *DE* összege is ugyanaz a törtrésze *c* és *f* összegének, mint *AB* a *c*-nek.

Minthogy ugyanis amely törtrésze *AB* a *c*-nek, ugyanaz a törtrésze *DE* az *f*-nek, ahány hányada van *c*-nek *AB*-ben, annyi hányada van *f*-nek *DE*-ben. Bontsuk föl *AB*-t a *c*-nek *AG*, *GB* hányadaira, *DE*-t pedig az *f*-nek *DH*, *HE* hányadaira. Ekkor az *AG*, *GB* számok száma egyenlő lesz a *DH*, *HE* számok számával. Minthogy amely hányada *AG* a *c*-nek, ugyanaz a hányada *DH* az *f*-nek, amely hányada *AG* a *c*-nek, ugyanaz a hányada *AG* és *DH* összege *c* és *f* összegének (VII. 5.). Ugyanígy amely hányada *GB* a *c*-nek, ugyanaz a hányada *GB* és *HE* összege *c* és *f* összegének. Amely törtrésze tehát *AB* a *c*-nek, ugyanaz a törtrésze *AB* és *DE* összege *c* és *f* összegének. Éppen ezt kellett megmutatni.



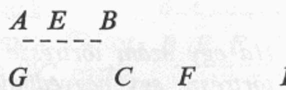
F.: VII. 9–10., 12.

VII. 7. Tétel

*Ha egy szám egy másiknak ugyanaz a hányada, mint egy kivonandó egy másik kivonandónak, akkor az egyik maradék is ugyanaz a hányada a másik maradéknak, mint az egyik kisebbítendő a másik kisebbítendőnek.**

Legyen ugyanis az *AB* szám a *CD* számnak ugyanaz a hányada, mint az *AE* kivonandó a *CF* kivonandónak. Azt állítom, hogy az *EB* maradék is ugyanaz a hányada az *FD* maradéknak, mint az *AB* kisebbítendő a *CD* kisebbítendőnek.

Amely hányada *AE* a *CF*-nek, ugyanaz a hányada legyen *EB* a *CG*-nek. Minthogy amely hányada *AE* a *CF*-nek, ugyanaz a hányada *EB* a *CG*-nek, amely hányada *AE* a *CF*-nek, ugyanaz a hányada *AB* a *GF*-nek (VII. 5.). Feltétel szerint viszont amely hányada *AE* a *CF*-nek, ugyanaz a hányada *AB* a *CD*-nek, amely hányada tehát *AB* a *GF*-nek, ugyanaz a hányada *CD*-nek is; egyenlő tehát *GF* a *CD*-vel. Vonjuk le a közös *CF*-et: így a maradék *GC* egyenlő a maradék *FD*-vel. S minthogy amely hányada *AE* a *CF*-nek, ugyanaz a hányada *EB* a *GC*-nek, *GC* pedig egyenlő *FD*-vel, amely hányada *AE* a *CF*-nek, ugyanaz a hányada *EB* az *FD*-nek. Viszont amely hányada *AE* a *CD*-



nek, ugyanaz a hányada *AB* is *CD*-nek, tehát az *EB* maradék is ugyanaz a hányada az *FD* maradéknak, mint az *AB* kisebbítendő a *CD* kisebbítendőnek. Éppen ezt kellett megmutatni.

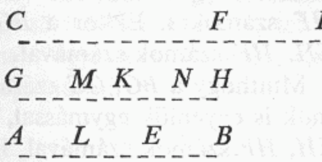
F.: VII. 8., 11.

VII. 8. Tétel

Ha egy szám egy másiknak ugyanaz a törtrésze, mint egy kivonandó egy másik kivonandónak, akkor az egyik maradék is ugyanaz a törtrésze a másik maradéknak, mint az egyik kisebbítendő a másik kisebbítendőnek.

Legyen ugyanis az *AB* szám a *CD* számnak ugyanaz a törtrésze, mint az *AE* kivonandó a *CF* kivonandónak. Azt állítom, hogy az *EB* maradék is ugyanaz a törtrésze az *FD* maradéknak, mint az *AB* kisebbítendő a *CD* kisebbítendőnek.

Vegyünk föl egy *AB*-val egyenlő *GH*-t. Amely törtrésze tehát *GH* a *CD*-nek, ugyanaz a törtrésze *AE* a *CF*-nek. Bontsuk föl *GH*-t a *CD*-nek *GK*, *KH* hányadaira, *AE*-t pedig a *CF*-nek *AL*, *LE* hányadaira. Ekkor a *GK*, *KH* számok száma egyenlő lesz az *AL*, *LE* számok számával. Minthogy amely hányada *GK* a *CD*-nek, ugyanaz a hányada *AL* a *CF*-nek, s *CD* nagyobb *CF*-nél, *GK* nagyobb *AL*-nél. Vegyünk föl egy *AL*-lel egyenlő *GM*-et. Amely hányada tehát *GK* a *CD*-nek, ugyanaz a hányada *GM* a *CF*-nek, tehát a maradék *MK* is ugyanaz a hányada a maradék *FD*-nek, mint a *GK* kisebbítendő a *CD* kisebbítendőnek (VII. 7.). Ismét, minthogy amely hányada *KH* a *CD*-nek, ugyanaz a hányada *EL* a *CF*-nek, s *CD* nagyobb *CF*-nél, *HK* nagyobb *EL*-nél. Vegyünk föl egy *EL*-lel egyenlő *KN*-et. Amely hányada tehát *KH* a *CD*-nek, ugyanaz a hányada *KN* a *CF*-nek, tehát a maradék *NH* is ugyanaz a hányada a maradék *FD*-nek, mint a *KH* kisebbítendő a *CD* kisebbítendőnek (VII. 7.). Mint megmutattuk, az *MK* maradék is ugyanaz a hányada az *FD* maradéknak, mint a *GK* kisebbítendő a *CD* kisebbítendőnek, tehát *MK* és *NH* összege ugyanaz a törtrésze *DF*-nek, mint a *HG* kisebbítendő a *CD* kisebbítendőnek. *MK* és *NH* összege viszont egyenlő *EB*-vel, *HG* pedig *BA*-val, tehát az *EB* mara-



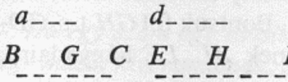
dék ugyanaz a törtrésze az *FD* maradéknak, mint az *AB* kisebbítendő a *CD* kisebbítendőnek. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: VII. 11.

VII. 9. Tétel

*Ha egy szám hányada egy másiknak, és egy harmadik ugyanaz a hányada egy negyediknek, akkor fölcserélve is, amely hányada vagy törtrésze az első a harmadiknak, ugyanaz a hányada vagy törtrésze a második is a negyediknek.**

Legyen ugyanis az *a* szám hányada *BC*-nek, és a harmadik szám, *d*, ugyanaz a hányada a negyedik *EF*-nek, mint *a* a *BC*-nek. Azt állítom, hogy fölcserélve is, amely hányada vagy törtrésze *a* a *d*-nek, ugyanaz a hányada vagy törtrésze *BC* is *EF*-nek.



Minthogy ugyanis amely hányada *a* a *BC*-nek, ugyanaz a hányada *d* az *EF*-nek, ahány *a*-val egyenlő szám van *BC*-ben, annyi *d*-vel egyenlő van *EF*-ben. Bontsuk föl *BC*-t az *a*-val egyenlő *BG*, *GC*, *EF*-et pedig a *d*-vel egyenlő *EH*, *HF* számokra. Ekkor a *BG*, *GC* számok száma egyenlő lesz az *EH*, *HF* számok számával.

Minthogy a *BG*, *GC* számok egyenlők egymással, az *EH*, *HF* számok is egyenlők egymással, és a *BG*, *GC* számok száma egyenlő az *EH*, *HF* számok számával, így amely hányada vagy törtrésze *BG* az *EH*-nak, ugyanaz a hányada vagy törtrésze a *BC* összeg az *EF* összegnek (VII. 5–6.). *BG* viszont egyenlő *a*-val, *EH* pedig *d*-vel, amely hányada tehát vagy törtrésze *a* a *d*-nek, ugyanaz a hányada vagy törtrésze *BC* az *EF*-nek. Éppen ezt kellett megmutatni.

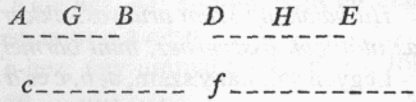
F.: VII. 10.; VIII. 8.

VII. 10. Tétel

Ha egy szám törtrésze egy másiknak, és egy harmadik ugyanaz a törtrésze egy negyediknek, akkor fölcserélve is, amely törtrésze vagy hányada az első a harmadiknak, ugyanaz a törtrésze vagy hányada a második is a negyediknek.

Legyen ugyanis az *AB* szám törtrésze a *c* számnak, és egy harmadik szám, *DE*, ugyanaz a törtrésze a negyedik *f*-nek. Azt állítom, hogy fölcserélve is, amely törtrésze vagy hányada *AB* a *DE*-nek, ugyanaz a törtrésze vagy hányada *c* is *f*-nek.

Minthogy ugyanis amely törtrésze *AB* a *c*-nek, ugyanaz a törtrésze *DE* az *f*-nek, ahány hányada van *c*-nek *AB*-ben, annyi hányada van *f*-nek *DE*-ben. Bontsuk föl *AB*-t *c*-nek *AG*, *GB* hányadaira, *DE*-t pedig *f*-nek *DH*, *HE* hányadaira. Ekkor az *AG*, *GB* számok száma egyenlő lesz a *DH*, *HE* számok számával. Minthogy amely hányada *AG* a *c*-nek, ugyanaz a hányada *DH* az *f*-nek, fölcserélve is, amely hányada vagy törtrésze *AG* a *DG*-nek, ugyanaz a hányada vagy törtrésze *c* is *f*-nek (VII. 9.). Ugyanígy amely hányada vagy törtrésze *GB* *HE*-nek, ugyanaz a hányada vagy törtrésze *c* is *f*-nek, úgyhogy amely hányada vagy törtrésze *AG* a *DH*-nak, ugyanaz a hányada vagy törtrésze *GB* a *HE*-nek, tehát amely hányada vagy törtrésze *AG* a *DH*-nak, ugyanaz a hányada vagy törtrésze *AB* is *DE*-nek (VII. 5–6.). Viszont, mint megmutattuk, amely hányada vagy törtrésze *AG* a *DH*-nak, ugyanaz a hányada vagy törtrésze *c* is *f*-nek, tehát amely törtrésze vagy hányada *AB* a *DE*-nek, ugyanaz a törtrésze vagy hányada *c* is *f*-nek. Éppen ezt kellett megmutatni.

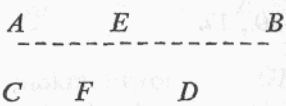


F.: VII. 13.

VII. 11. Tétel

Ha egy kisebbítendő (szám) úgy aránylik egy másik kisebbítendőhöz, mint egy kivonandó egy másik kivonandóhoz akkor az egyik maradék is úgy aránylik a másik maradékhoz, mint az egyik kisebbítendő a másik kisebbítendőhöz.

Arányuljék az *AE* kivonandó a *CF* kivonandóhoz, mint az *AB* kisebbítendő a *CD* kisebbítendőhöz. Azt állítom, hogy az *EB* maradék is úgy aránylik az *FD* maradékhoz, mint az *AB* kisebbítendő a *CD* kisebbítendőhöz.



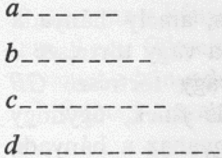
Minthogy *AE* úgy aránylik *CF*-hez, mint *AB* a *CD*-hez, amely hányada vagy törtrésze *AB* a *CD*-nek, ugyanaz a hányada vagy törtrésze *AE* a *CF*-nek. Az *EB* maradék is ugyanaz a hányada vagy törtrésze tehát az *FD* maradéknak, mint *AB* a *CD*-nek (VII. 7–8.). Amint tehát *EB* az *FD*-hez, úgy aránylik *AB* a *CD*-hez. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: IX. 35.

VII. 12. Tétel

Ha valahány szám arányos, akkor az előtagok összege úgy aránylik az utótagok összegéhez, mint bármelyik előtag az utótagjához.

Legyen valahány szám, *a*, *b*, *c* és *d* arányos: *c* a *d*-hez, mint *a* a *b*-hez.



Azt állítom, hogy *a* meg *c* úgy aránylik *b* meg *d*-hez, mint *a* a *b*-hez.

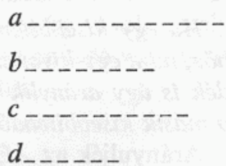
Minthogy ugyanis *c* úgy aránylik *d*-hez, mint *a* a *b*-hez, amely hányada vagy törtrésze *a* a *b*-nek, ugyanaz a hányada vagy törtrésze *c* a *d*-nek. Tehát *a* és *c* összege is ugyanaz a hányada vagy törtrésze *b* és *d* összegének, mint *a* a *b*-nek (VII. 5–6.). Amint tehát *a* a *b*-hez, úgy aránylik *a* meg *c* a *b* meg *d*-hez. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: VII. 15., 20.; IX. 35.

VII. 13. Tétel

Ha négy szám arányos, akkor fölcserélve is arányos lesz.

Legyen négy szám, *a*, *b*, *c* és *d* arányos: amint *a* a *b*-hez, úgy *c* a *d*-hez. Azt állítom, hogy fölcserélve is arányosak lesznek: amint *a* a *c*-hez, úgy *b* a *d*-hez.



Minthogy ugyanis *c* úgy aránylik *d*-hez, mint *a* a *b*-hez, amely hányada vagy törtrésze *a* a *b*-nek, ugyanaz a hányada vagy törtrésze *c* a *d*-nek. Fölcserélve tehát: amely hányada vagy törtrésze *a* a *c*-nek, ugyanaz a hányada vagy törtrésze *b* a *d*-nek (VII. 9–10.). Amint tehát *a* a *c*-hez, úgy aránylik *b* a *d*-hez. Éppen ezt kellett megmutatni.

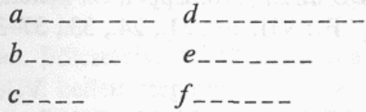
F.: VII. 14., 17., 20.; VIII. 4., 18–20.; IX. 10., 17.

VII. 14. Tétel

*Ha van valahány szám és ugyanannyi másik, hogy kettesével mindig ugyanabban az arányban állnak, akkor egyenlő (sok tagon) át is ugyanabban az arányban állnak.**

Legyen *a*, *b* és *c* valahány szám, s *d*, *e*, *f* ugyanannyi másik, hogy kettesével mindig ugyanabban az arányban álljanak: *d* az *e*-hez, mint *a* a *b*-hez és *e* az *f*-hez, mint *b* a *c*-hez. Azt állítom, hogy egyenlő (sok tagon) át *d* úgy aránylik *f*-hez, mint *a* a *c*-hez.

Minthogy ugyanis amint *a* a *b*-hez, úgy aránylik *d* az *e*-hez, fölcserélve, amint *a* a *d*-hez, úgy *b* az *e*-hez (VII. 13.). Ismét, minthogy amint *b* a *c*-hez, úgy aránylik *e* az *f*-hez, fölcserélve, amint *b* az *e*-hez, úgy *c* az *f*-hez. Amint viszont *b* az *e*-hez, úgy *a* a *d*-hez, amint tehát *a* a *d*-hez, úgy *c* az *f*-hez, s fölcserélve amint *a* a *c*-hez, úgy *d* az *f*-hez (VII. 13.). Éppen ezt kellett megmutatni.



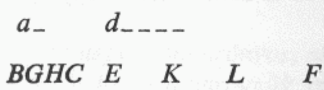
F.: VIII. 1., 5–6., 8., 13., 21.; IX. 19., 36.

VII. 15. Tétel

Ha az egység ugyanannyiszor van meg egy számban, mint egy másik szám egy további számban, akkor fölcserélve az egység ugyanannyiszor van meg a harmadik tagban – mely szám –, mint a második tag a negyedikben.

Legyen ugyanis az *a* egység ugyanannyiszor meg a *BC* számban, mint egy másik szám, *d*, egy további számban, *EF*-ben. Azt állítom, hogy fölcserélve az *a* egység ugyanannyiszor van meg a *d* számban, mint *BC* az *EF*-ben.

Minthogy ugyanis az *a* egység ugyanannyiszor van meg a *BC* számban, mint *d* az *EF*-ben, ahány egység van *BC*-ben, annyi *d*-vel egyenlő szám van *EF*-ben. Bontsuk föl *BC*-t a benne levő *BG*, *GH*, *HC* egységekre, *EF*-et pedig a *d*-vel egyenlő *EK*, *KL*, *LF* számokra. Ekkor a *BG*, *GH*, *HC* egységek száma egyenlő lesz az *EK*, *KL*, *LF* számok számával. Minthogy a *BG*, *GH*, *HC* egységek egyenlők



egymással, az *EK*, *KL*, *LF* számok is egyenlők egymással, és a *BG*, *GH*, *HC* egységek száma egyenlő az *EK*, *KL*, *LC* számok számával, amint a *BG* egység az *EK* számhoz, úgy aránylik a *GH* egység a *KL* számhoz és a *HC* egység az *LF* számhoz, és amint bármely előtag az utótagjához, úgy az előtagok összege az utótagok összegéhez (VII. 12.): amint tehát a *BG* egység az *EK* számhoz, úgy *BC* az *EF*-hez. Viszont a *BG* egység egyenlő az *a* egységgel, az *EK* szám pedig a *d* számmal, *BC* tehát úgy aránylik *EF*-hez, mint az *a* egység a *d* számhoz. Az *a* egység tehát ugyanannyiszor van meg a *d* számban, mint *BC* az *EF*-ben. Éppen ezt kellett megmutatni.

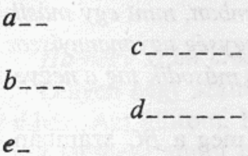
F.: VII. 16., 21., 24., 33., 37–38.; IX. 11.

VII. 16. Tétel

A két szám összeszorzásakor keletkező számok egyenlők egymással (függetlenül a sorrendtől).

Legyen *a* és *b* két szám, és *a*-val *b*-t megszorozva keletkezzék *c*, *b*-vel *a*-t megszorozva pedig *d*. Azt állítom, hogy *c* egyenlő *d*-vel.

Minthogy ugyanis *a*-val *b*-t szorozva keletkezett *c*, *b* annyiszor van meg *c*-ben, ahány egység van *a*-ban. Egy *e* egység szintén annyiszor



van meg az *a* számban, ahány egység abban van; az *e* egység tehát ugyanannyiszor van meg *a*-ban, mint *b* a *c*-ben. Fölcserélve tehát az *e* egység ugyanannyiszor van meg *b*-ben, mint *a* a *c*-ben (VII. 15.). Ismét, minthogy *b*-vel *a*-t szorozva keletkezett *d*, *a* annyiszor van meg *d*-ben, ahány egység van *b*-ben. Az *e* egység szintén annyiszor van meg *b*-ben ahány egység abban van; az *e* egység tehát ugyanannyiszor van meg a *b* számban, mint a *d*-ben. Viszont az *e* egység ugyanannyiszor volt meg *b*-ben, mint a *c*-ben; *a* ugyanannyiszor van meg tehát *c*-ben és *d*-ben. *c* tehát egyenlő *d*-vel. Éppen ezt kellett megmutatni.

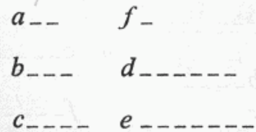
F.: VII. 18., 34.; VIII. 18.

VII. 17. Tétel

*Ha két számot megszorozunk egy számmal, akkor a keletkező számok aránya ugyanaz, mint a megszorzottaké.**

Keletkezzenek ugyanis a *b*, *c* számokat az *a* számmal megszorozva a *d*, *e* számok. Azt állítom, hogy amint *b* a *c*-hez, úgy aránylik *d* az *e*-hez.

Minthogy ugyanis *b*-t *a*-val szorozva keletkezett *d*, *b* annyiszor van meg *d*-ben, ahány egység van *a*-ban. Egy *f* egység az *a* számban szintén annyiszor van meg, ahány egység abban van; az *f* egység tehát ugyanannyiszor van meg az *a* számban, mint *b* a *d*-ben. Amint tehát az *f* egység az *a* számhoz, úgy aránylik *b* a *d*-hez. Ugyanígy amint az *f* egység az *a* számhoz, úgy aránylik *c* az *e*-hez is; amint tehát *b* a *d*-hez, úgy *c* az *e*-hez. Fölcserélve tehát amint *b* a *c*-hez, úgy *d* az *e*-hez (VII. 13.). Éppen ezt kellett megmutatni.



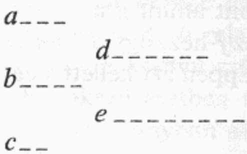
F.: VII. 18–19., 22., 34.; VIII. 2., 5., 10–12., 14–15., 18–21.; IX. 1–2., 4–5.

VII. 18. Tétel

*Ha egy számot megszorzunk két számmal, akkor a keletkezett számok aránya ugyanaz, mint a szorzóké.**

Keletkezzenek ugyanis a *c* számot az *a*, *b* számokkal megszorozva a *d*, *e* számok. Azt állítom, hogy amint *a* a *b*-hez, úgy aránylik *d* az *e*-hez.

Minthogy *c*-t *a*-val szorozva keletkezett *d*, *a*-t *c*-vel szorozva is *d* keletkezik (VII. 16.). Ugyanígy *b*-t *c*-vel szorozva *e* keletkezik. Így az *a*, *b* számokat megszorozva a *c* számmal a *d*, *e* számok keletkeznek, amint tehát *a* a *b*-hez, úgy aránylik *d* az *e*-hez (VII. 17.). Éppen ezt kellett megmutatni.



F.: VII. 19.; VIII. 2., 5., 10–12., 14–15., 19–21.; IX. 1–2.

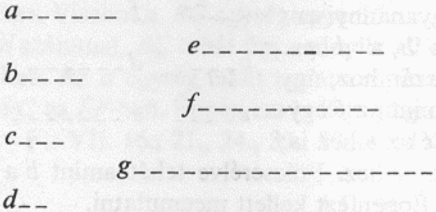
VII. 19. Tétel

*Ha négy szám arányos, akkor az első és a negyedik szorzata egyenlő a második és a harmadik szorzatával; s ha az első és a negyedik szorzata egyenlő a második és a harmadik szorzatával, akkor a négy szám arányos.**

Legyen négy szám, *a*, *b*, *c* és *d* arányos: amint *a* a *b*-hez, úgy *c* a

d-hez, és a-val d-t szorozva keletkezzék e, b-vel c-t szorozva pedig f. Azt állítom, hogy e egyenlő f-fel.

Keletkezzék ugyanis a-val c-t szorozva g. Minthogy a-val c-t szorozva keletkezett g, d-t szorozva pedig e, az a számmal a két, c, d számot megszorozva keletkezett g és e. Amint tehát c a d-hez, úgy aránylik g az e-hez (VII. 17.). Amint viszont c a d-hez, úgy aránylik a a b-hez, amint tehát a a b-hez, úgy g az e-hez. Ismét, minthogy a-val c-t szorozva keletkezett g, b-vel c-t szorozva pedig f, a két, a, b számmal valamely c számot szorozva keletkezett g és f. Amint tehát a a b-hez, úgy aránylik g az f-hez (VII. 18.). Amint viszont a a b-hez, úgy aránylik g az e-hez, amint tehát g az e-hez, úgy g az f-hez. g-nek tehát e-hez és f-hez való aránya ugyanaz, e tehát egyenlő f-fel.



Legyen most e egyenlő f-fel. Azt állítom, hogy amint a a b-hez, úgy aránylik c a d-hez.

Az előbbivel azonos konstrukció révén, minthogy e egyenlő f-fel, amint g az e-hez, úgy aránylik g az f-hez. Viszont amint g az e-hez, úgy aránylik c a d-hez (VII. 17.), amint pedig g az f-hez, úgy a a b-hez (VII. 18.). Amint tehát a a b-hez, úgy c a d-hez. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: VII. 24., 30., 33–34.; IX. 12–13., 18., 36.

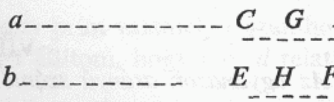
VII. 20. Tétel

Az ugyanazon arányú számok közül a legkisebbek osztják az ugyanebben az arányban álló számokat, mégpedig a nagyobb ugyanannyiszor van meg a nagyobban, mint a kisebb a kisebben.

Legyenek ugyanis azon számok közül, melyeknek ugyanaz az aránya, mint a-nak és b-nek, CD, EF a legkisebbek. Azt állítom, hogy CD ugyanannyiszor van meg a-ban, mint EF a b-ben.

CD ugyanis nem törtrésze a-nak. Tegyük fel ugyanis, hogy az. Ekkor EF ugyanaz a törtrésze b-nek, mint CD az a-nak (VII. 13.).

Ahány hányada van tehát a-nak CD-ben, annyi hányada van b-nek EF-ben. Bontsuk föl CD-t a-nak CG, GD, EF-et pedig b-nek EH, HF hányadaira. Ekkor a CG, GD számok száma egyenlő lesz az EH, HF számok számával. Minthogy a CG, GD számok egyenlők egymással, az EH, HF számok egyenlők egymással, és a CG, GD számok száma egyenlő az EH, HF számok számával, GD úgy aránylik HF-hez, mint CG az EH-hoz. Amint tehát bármely előtag az utótagjához, úgy aránylik az előtagok összege az utótagok összegéhez (VII. 12.): amint CG az EH-hoz, úgy CD az EF-hez. CG és EH aránya tehát ugyanaz, mint CD-é és EF-é, ám kisebbek náluk. Ez lehetetlen, mert föltevés szerint CD és EF a legkisebbek azon számok között, melyek aránya ugyanaz, mint az övéké. CD tehát nem törtrésze a-nak; hányada tehát. EF is ugyanaz a hányada tehát b-nek, mint CD az a-nak; CD tehát ugyanannyiszor van meg a-ban, mint EF a b-ben. Éppen ezt kellett megmutatni.*



F.: VII. 21., 24., 30., 33–34.; VIII. 1., 4., 8., 20–21.; IX. 12., 16–17., 19., 36.

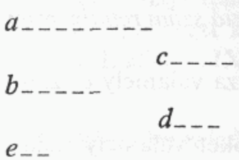
VII. 21. Tétel

A relatív prímek az ugyanazon arányú számok között legkisebbek.

Legyenek a, b relatív prímszámok. Azt állítom, hogy a és b az ugyanezen arányú számok között legkisebbek.

Ellenkező esetben ugyanis léteznek a-nál és b-nél kisebb, ugyanabban az arányban álló számok mint a és b. Legyenek ezek c és d.

Minthogy az ugyanazon arányú számok közül a legkisebbek osztják az ugyanebben az arányban álló számokat, mégpedig a nagyobb ugyanannyiszor van meg a nagyobban, mint a kisebb a kisebben (VII. 20.), azaz az előtag az előtagban ugyanannyiszor, mint az utótag az utótagban, c ugyanannyiszor van meg a-ban, mint d a b-ben. Legyen e-ben annyi egység, ahányszor megvan c az a-ban. d tehát annyiszor van meg b-ben, ahány egység van e-ben. Minthogy c annyiszor van meg a-ban, ahány egység van e-ben, e annyiszor



van meg *a*-ban, ahány egység van *c*-ben (VII. 15.). Ugyanígy *e* anynyiszor van meg *b*-ben, ahány egység van *d*-ben. *e* tehát osztja a relatív prím *a*-t és *b*-t; ami lehetetlen. Nincsenek tehát *a*-nál és *b*-nél kisebb, ugyanabban az arányban mint *a* és *b* álló számok, *a* és *b* az ugyanezen arányú számok között legkisebbek. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: VII. 24., 30., 33–34.; VIII. 1., 8., 21.; IX. 12., 16–17., 19., 36.

VII. 22. Tétel

*Az ugyanazon arányú számok közül a legkisebbek relatív prímek.**

Legyenek azon számok közül, melyeknek ugyanaz az arányuk, mint nekik, *a* és *b* a legkisebbek. Azt állítom, hogy *a* és *b* relatív prímek.

Ha ugyanis nem relatív prímek, osztja őket valamely szám. Ossza őket egy *e* szám. Legyen annyi egység *d*-ben, ahányszor megvan *c* az *a*-ban, *e*-ben pedig, ahányszor megvan *c* a *b*-ben.

Minthogy *c* annyiszor van meg *a*-ban, ahány egység van *d*-ben, *c*-vel *d*-t szorozva *a* keletkezik. Ugyanígy *c*-vel *e*-t szorozva *b* keletkezik. A *c* számmal tehát a két, *d*, *e* számot megszorozva *a* és *b* keletkezik; *a* tehát úgy aránylik *b*-hez, mint *d* az *e*-hez (VII. 17.). *d*-nek és *e*-nek tehát ugyanaz az aránya, mint *a*-nak és *b*-nek, ám kisebbek azoknál; ami lehetetlen. Nem osztja tehát semelyik szám az *a*, *b* számokat; *a* és *b* relatív prímek. Éppen ezt kellett megmutatni.

*a*________

*d*____

*b*_____

*e*___

*c*__

F.: VIII. 2–3.; IX. 15.

VII. 23. Tétel

Ha két szám relatív prím, akkor az egyiküket osztó szám relatív prím a másikhoz.

Legyenek *a* és *b* relatív prímszámok, és *a*-t ossza valamely *c* szám. Azt állítom, hogy *c* és *b* is relatív prímek.

Ha ugyanis *c*, *b* nem relatív prímek, osztja őket valamely szám. Ossza egy *d* szám. Minthogy *d* osztja *c*-t, *c* pedig osztja *a*-t, *d* is osztja *a*-t (3. E.). *b*-t is osztja; *d* tehát osztja a relatív prím *a*-t és *b*-t,

*a*________ *c*____

*b*_____ *d*__

ami lehetetlen. Nem osztja tehát semelyik szám c-t és b-t; c és b relatív prímek. Éppen ezt kellett megmutatni.

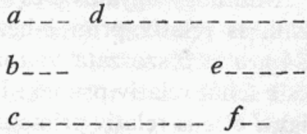
F.: VII. 24.

VII. 24. Tétel

Ha két szám relatív prím egy harmadikhoz, akkor a szorzatuk is relatív prím hozzá.

Legyen ugyanis két szám, a és b, relatív prím valamely c számhoz, és a-val b-t szorozva keletkezzék d. Azt állítom, hogy c és d relatív prímek.

Ha ugyanis c és d nem relatív prímek, osztja a c, d számokat valamely szám. Ossza egy e szám. Minthogy c és a relatív prímek, és c-t osztja valamely e szám, a és e relatív prímek (VII. 23.). Legyen annyi egység f-ben, ahányszor megvan e a d-ben; f tehát annyiszor van meg d-ben, ahány egység van e-ben (VII. 15.).



e-vel f-et szorozva tehát d keletkezik. Azonban a-val b-t szorozva is d keletkezik; egyenlő tehát e és f szorzata a és b szorzatával. Ha viszont a kültagok szorzata egyenlő a beltagok szorzatával, akkor a négy szám arányos (VII. 19.): b tehát úgy aránylik f-hez, mint e az a-hoz. a és e viszont relatív prímek, a relatív prímek pedig legkisebbek (VII. 21.), az ugyanazon arányú számok közül a legkisebbek pedig osztják az ugyanebben az arányban álló számokat, mégpedig a nagyobb ugyanannyiszor van meg a nagyobban, mint a kisebb a kisebben (VII. 20.), azaz az előtag az előtagban ugyanannyiszor, mint az utótag a másik utótagban; e tehát osztja b-t. Viszont c-t is osztja; e tehát osztja a relatív prím b-t és c-t, ami lehetetlen. Nem osztja tehát semelyik szám a c, d számokat, c és d relatív prímek. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: VII. 25–26.; IX. 15.

VII. 25. Tétel

Ha két szám relatív prím, akkor az egyik négyzete is relatív prím a másikhoz.

Legyen a és b két relatív prímszám, és a-t önmagával szorozva keletkezzék c. Azt állítom, hogy b és c relatív prímek.

Vegyünk ugyanis egy *a*-val egyenlő *d*-t. Minthogy *a* és *b* relatív prímek s *a* egyenlő *d*-vel, *d* és *b* is relatív prímek. Mind a két, *d*, *a* szám relatív prím tehát *b*-hez, *d* és *a* szorzata is relatív prím lesz tehát *b*-hez (VII. 24.). *d* és *a* szorzata viszont *c*; *c* és *b* tehát relatív prímek. Éppen ezt kellett megmutatni.

a - - - *c* - - - - - - - - -

b - - - - *d* - - -

F.: VII. 27.; IX. 15.

VII. 26. Tétel

Ha két szám egyszerre relatív prím két másik szám bármelyikéhez, akkor a két-két szám szorzata is relatív prím.

Legyen ugyanis két szám, *a* és *b*, egyszerre relatív prím két másik szám, *c* és *d* bármelyikéhez, és *a*-val *b*-t szorozva keletkezzék *e*, *c*-vel *d*-t szorozva pedig *f*. Azt állítom, hogy *e* és *f* relatív prímek.

Minthogy ugyanis *a* és *b* bármelyike relatív prím *c*-hez, *a* és *b* szorzata is relatív prím *c*-hez (VII. 24.). *a* és *b* szorzata viszont *e*; *e* és *c* tehát relatív prímek. Ugyanígy *d* és *e* is relatív prímek. *c* és *d* mindegyike relatív prím tehát *e*-hez. Tehát *c* és *d* szorzata is relatív prím *e*-hez (VII. 24.). *c* és *d* szorzata viszont *f*. *e* és *f* tehát relatív prímek. Éppen ezt kellett megmutatni.

a - - *e* - - - - - - - - - - - - - -

b - - - - - - - *c* - - -

f - - - - - - - - - - - - - - - *d* - - - - -

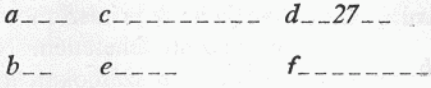
F.: VII. 27.

VII. 27. Tétel

Ha két szám relatív prím, és mindkettőt megszorozzuk önmagával, akkor a szorzatok relatív prímek lesznek, és ha a szorzatokat megszorozzuk az eredeti számokkal, akkor ismét relatív prímek keletkeznek [és ez mindig (azaz bárhányadik hatvány esetében) így van az utóbbiakkal].

Legyen *a* és *b* két relatív prímszám, és *a*-val önmagát szorozva keletkezzék *c*, *c*-t szorozva pedig *d*, s *b*-vel önmagát szorozva *e*, *e*-t szorozva pedig *f*. Azt állítom, hogy mind *c* és *e*, mind *d* és *f* relatív prímek.

Minthogy ugyanis *a* és *b* relatív prímek, és *a*-t önmagával szorozva keletkezett *c*, *c* és *b* relatív prímek (VII. 25.). Minthogy *c* és *b* relatív prímek, és *b*-t önmagával szorozva keletkezett *e*, *c* és *e* relatív prímek (VII. 25.). Ismét, minthogy *a* és *b* relatív prímek, és *b*-t önmagával szorozva keletkezett *e*, *a* és *e* relatív prímek. Minthogy két szám, *a* és *c*, egyszerre relatív prím két másik szám, *b* és *e* bármelyikéhez, *a* és *c* szorzata is relatív prím *b* és *e* szorzatához (VII. 26.). S *a* és *c* szorzata *d*, *b* és *e* szorzata pedig *f*. *d* és *f* tehát relatív prímek. Éppen ezt kellett megmutatni.



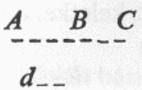
F.: VIII. 2–3.

VII. 28. Tétel

Ha két szám relatív prím, akkor az összegük relatív prím bármelyik taghoz; s ha az összeg relatív prím az egyik taghoz, akkor az eredeti számok relatív prímek.

Adjunk össze ugyanis két relatív prímszámot, *AB*-t és *BC*-t. Azt állítom, hogy az *AC* összeg relatív prím *AB*, *BC* bármelyikéhez.

Ha ugyanis *CA*, *AB* nem relatív prímek, osztja valamely szám a *CA*, *AB* számokat. Ossza egy *d* szám. Minthogy *d* osztja *CA*-t és *AB*-t, a maradék *BC*-t is osztja (2. E.). Viszont *BA*-t is osztja; *d* tehát osztja a relatív prím *AB*-t és *BC*-t, ami lehetetlen. Nem osztja tehát semelyik szám a *CA*, *AB* számokat, *CA* és *AB* relatív prímek. Ugyanígy *AC* és *CB* is relatív prímek, *CA* tehát *AB*, *BC* mindegyikéhez relatív prím.



Legyenek most *CA* és *AB* relatív prímek. Azt állítom, hogy *AB* és *BC* relatív prímek.

Ha ugyanis *AB* és *BC* nem relatív prímek, osztja valamely szám *AB*-t és *BC*-t. Ossza egy *d* szám. Minthogy *d* az *AB*, *BC* mindegyikét osztja, a teljes *CA*-t is osztja (1. E.). Viszont *AB*-t is osztja; *d* tehát osztja a relatív prím *CA*-t és *AB*-t, ami lehetetlen. Nem osztja tehát semelyik szám *AB*-t és *BC*-t, *AB* és *BC* relatív prímek. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: IX. 15.

VII. 29. Tétel

Bármely prímszám bármely számhoz, melyet nem oszt, relatív prím.

Legyen *a* prímszám és ne ossza *b*-t. Azt állítom, hogy *b* és *a* relatív prímek.

Ha ugyanis *b* és *a* nem relatív prímek, osztja őket valamely szám. Ossza őket *c*. Minthogy *c* osztja *b*-t, *a* viszont nem osztja *b*-t, *c* nem ugyanaz a szám, mint *a*. Minthogy *c* osztja *b*-t és *a*-t, osztja az *a* prímszámot is, noha nem ugyanaz, mint az; ez viszont lehetetlen. Nem osztja tehát semelyik szám sem a *b*, *a* számokat, *a* és *b* relatív prímek. Éppen ezt kellett megmutatni.

a - - - *c* - -

b - - - -

F.: VII. 30.; IX. 12., 36.

VII. 30. Tétel

Ha két számot megszorzunk egymással, és a szorzatukat osztja valamely prímszám, akkor a tényezők egyikét is osztja.

Keletkezzék ugyanis két számot, *a*-t és *b*-t összeszorozva *c*, és ossza *c*-t valamely *d* prímszám. Azt állítom, hogy *d* osztja *a* és *b* egyikét.

Ne ossza ugyanis *a*-t. *d* prímszám, tehát *a* és *d* relatív prímek (VII. 29.). Legyen annyi egység *e*-ben, ahányszor megvan *d* *c*-ben. Minthogy *d* annyiszor van meg *c*-ben, ahány egység van *e*-ben, *d*-vel *e*-t szorozva *c* keletkezik. Viszont *a*-val *b*-t szorozva is *c* keletkezik; egyenlő tehát *c* és *d* szorzata *a* és *b* szorzatával, amint tehát *d* az *a*-hoz, úgy aránylik *b* az *e*-hez (VII. 19.). *d* és *a* viszont relatív prímek, a relatív prímek pedig legkisebbek (VII. 21.), a legkisebbek pedig osztják az ugyanebben az arányban álló számokat, mégpedig a nagyobb ugyanannyiszor van meg a nagyobban, mint a kisebb a kisebben (VII. 20.), azaz az egyik előtag a másik előtagban ugyanannyiszor, mint az egyik utótag a másik utótagban; *d* tehát osztja *b*-t. Hasonlóképp mutathatnánk meg azt is, hogy ha *b*-t nem osztja, akkor *a*-t osztja. *d* tehát osztja *a* és *b* egyikét. Éppen ezt kellett megmutatni.

a - - - *b* - - - -

c - - - - - - - - - - - -

d - - *e* - - - - - -

F.: IX. 14.

VII. 31. Tétel

Bármely összetett számot oszt valamely prímszám.

Legyen *a* egy összetett szám. Azt állítom, hogy *a*-t osztja valamely prímszám.

Minthogy *a* összetett szám, osztja valamely szám. Ossza egy *b* szám. Ha *b* prím, készen vagyunk a tétellel. Ha összetett, osztja valamely szám. Ossza egy *c* szám. Minthogy *c* osztja *b*-t, *b* pedig *a*-t, *c* is osztja *a*-t (3. E.). Ha *c* prím, kész vagyunk a tétellel. Ha összetett, osztja valamely szám. Folytatva ezt a vizsgálatot találni fogunk egy prímszámot, mely osztja [a megelőző számot, így *a*-t is osztja (3.E.)]. Ha ugyanis nem találnánk, akkor végtelen sok szám osztaná az *a* számot, melyek közül a következő mindig kisebb az előzőnél, ami a számok körében lehetetlen. Találni fogunk tehát egy prímszámot, mely osztja a megelőző számot, így *a*-t is osztja.

a- - - - - - - -

b- - - - *c*- -

Tehát bármely... Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: VII. 32.; IX. 13., 20.

VII. 32. Tétel

Bármely szám vagy prím, vagy osztja egy prímszám.

Legyen *a* egy szám. Azt állítom, hogy *a* vagy prím, vagy osztja valamely prímszám.

a- - - - - -

Ha *a* prím, készen vagyunk a tétellel. Ha összetett, osztja valamely prímszám (VII. 31.).

Tehát bármely szám... Éppen ezt kellett megmutatni.

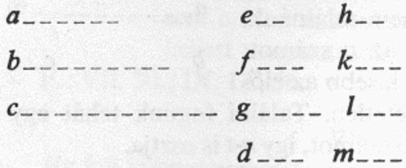
VII. 33. Tétel

Keressük meg valahány adott számhoz a legkisebbeket, melyek ugyanabban az arányban állnak, mint ők!

Legyen a valahány adott szám *a*, *b* és *c*. A legkisebb számokat kell tehát megkeresni, melyek ugyanabban az arányban állnak, mint *a*, *b*, és *c*.

a, *b* és *c* ugyanis vagy relatív prímek, vagy nem. Ha *a*, *b* és *c* relatív prímek, akkor a legkisebbek az ugyanezen arányú számok között (VII. 21.). Ha nem, vegyük *a*-nak, *b*-nek és *c*-nek a *d* legnagyobb közös osztóját (VII. 3.), és legyen annyi egység *e*-ben, *f*-ben, illetve *g*-ben, ahányszor megvan *d* az *a*-ban, *b*-ben, illetve *c*-ben. Ekkor *e*, *f*, illetve *g* annyiszor van meg *a*-ban, *b*-ben, illetve *c*-ben, ahány egység van *d*-ben. *e*, *f*, illetve *g* tehát ugyanannyiszor van meg *a*-ban, *b*-ben, illetve *c*-ben; *e*, *f* és *g* tehát ugyanabban az arányban áll, mint *a*, *b* és *c*. Azt állítom, hogy legkisebbek is. Ha ugyanis *e*, *f* és *g* nem legkisebbek azon számok között, melyeknek aránya ugyanaz, mint *a*-é, *b*-é és *c*-é, akkor vannak

e-nél, f-nél és g-nél kisebb számok, melyek aránya ugyanaz, mint a-é, b-é és c-é. Legyenek ezek h, k és l. Ekkor h ugyanannyiszor van meg a-ban, mint k, illetve l a b-ben, illetve c-ben (VII. 20.). Legyen annyi egység m-ben, ahányszor megvan h az a-ban. Ekkor k, illetve l annyiszor van meg b-ben, illetve c-ben, ahány egység van m-ben. Minthogy h annyiszor van meg a-ban, ahány egység van m-ben, m annyiszor van meg a-ban, ahány egység van h-ban (VII. 15.). Ugyanígy m annyiszor van meg b-ben, illetve c-ben, ahány egység van k-ban, illetve l-ben; m tehát osztja a-t, b-t és c-t. Minthogy h annyiszor van meg a-ban, ahány egység van m-ben, h-val m-et szorozva a-t kapunk. Ugyanígy e-vel d-t szorozva is a-t kapunk. e és d szorzata tehát egyenlő h és m szorzatával. Amint tehát e a h-hoz, úgy aránylik m a d-hez (VII. 19.). e nagyobb h-nál, tehát m is nagyobb d-nél; és osztja a-t, b-t és c-t; ami lehetetlen, feltevés szerint ugyanis d a legnagyobb közös osztója a-nak, b-nek és c-nek. Nem léteznek tehát e-nél, f-nél és g-nél kisebb számok, melyek ugyanabban az arányban állnak, mint a, b és c. e, f és g tehát a legkisebbek, melyek ugyanabban az arányban állnak, mint a, b és c. Éppen ezt kellett megmutatni.



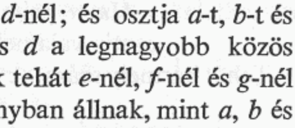
F.: VII. 34.; VIII. 2–3., 6., 8., 20–21., 26.; IX. 15.

VII. 34. Tétel

*Keressük meg két adott szám legkisebb közös többszörösét!**

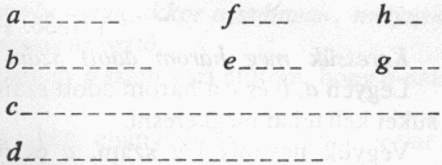
Legyen a és b a két adott szám. A legkisebb közös többszörösüket kell tehát megkeresni.

a és b vagy relatív prímek, vagy nem. Legyenek a és b először relatív prímek, és a-val b-t szorozva kapjuk c-t. Ekkor b-vel a-t szorozva is c-t kapjuk (VII. 16.). a és b tehát osztják c-t. Azt állítom, hogy c a legkisebb ilyen. Ellenkező esetben ugyanis a és b osztanak valamely c-nél kisebb számot. Osszák d-t. Legyen e-ben annyi egység, ahányszor megvan a a d-ben, f-ben pedig annyi egység, ahányszor megvan b a



d-ben. a-val e-t szorozva, b-vel pedig f-et szorozva tehát d-t kapunk; egyenlő tehát a és e szorzata b és f szorzatával. Amint tehát a a b-hez, úgy aránylik f az e-hez (VII. 19.). a és b viszont relatív prímek, a relatív prímek pedig legkisebbek (VII. 21.), a legkisebbek pedig osztják az ugyanabban az arányban álló számokat, mégpedig a nagyobb ugyanannyiszor van meg a nagyobban, mint a kisebb a kisebben (VII. 20.); b tehát osztja e-t, az egyik utótag a másik utótagot. Minthogy a-val b-t, illetve e-t szorozva c-t, illetve d-t kapjuk, c úgy aránylik d-hez, mint b az e-hez (VII. 17.). b osztja e-t, tehát c is osztja d-t, a nagyobb a kisebbet, ami lehetetlen. Nem osztanak tehát a és b semmilyen c-nél kisebb számot; c az a és b legkisebb közös többszöröse.

Ne legyenek most a és b relatív prímek, és vegyük a legkisebb számokat, melyek aránya ugyanaz, mint a-é és b-é, f-et és e-t (VII. 33.). Ekkor a és e szorzata egyenlő b és f szorzatával (VII. 19.). a-val e-t szorozva keletkezzék c; így b-vel f-et szorozva is c-t kapjuk; a és b tehát osztja c-t. Azt állítom, hogy c a legkisebb ilyen. Ellenkező esetben ugyanis a és b osztana valamely c-nél kisebb számot.



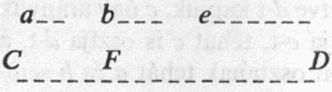
Osszák d-t. Legyen annyi egység g-ben, ahányszor megvan a a d-ben, h-ban pedig annyi, ahányszor megvan b a d-ben. a-val g-t szorozva, b-vel pedig h-t szorozva tehát d-t kapunk; egyenlő tehát a és g szorzata b és h szorzatával; amint tehát a a b-hez, úgy aránylik h a g-hez (VII. 19.). Amint viszont a a b-hez, úgy aránylik f az e-hez, amint tehát f az e-hez, úgy aránylik h a g-hez. f és e viszont legkisebbek, a legkisebbek pedig osztják az ugyanebben az arányban álló számokat, mégpedig a nagyobb ugyanannyiszor van meg a nagyobban, mint a kisebb a kisebben (VII. 20.); e tehát osztja g-t. Minthogy a-val e-t, illetve g-t szorozva c-t, illetve d-t kapjuk, amint e a g-hez, úgy aránylik c a d-hez (VII. 17.). e viszont osztja g-t, tehát c is osztja d-t, a nagyobb a kisebbet, ami lehetetlen. Nem osztanak tehát a és b semmilyen c-nél kisebb számot; c az a és b legkisebb közös többszöröse. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: VII. 36.; VIII. 4.

VII. 35. Tétel

Ha két szám oszt valamely számot, akkor a legkisebb közös többszörösük is osztja.

Osszon ugyanis két szám, a és b, valamely CD számot, és legyen e a legkisebb közös többszörösük. Azt állítom, hogy e is osztja CD-t. Ha ugyanis e nem osztja CD-t, ossza e a DF-et és legyen a nála kisebb maradék CF. Minthogy a és b osztja e-t, e pedig osztja DF-et, a és b is osztja DF-et (3. E.). Viszont a teljes CD-t is osztják, tehát a maradék CF-et is osztják (2. E.), mely kisebb, mint e, ami lehetetlen. Nem igaz tehát, hogy e nem osztja CD-t; osztja tehát. Éppen ezt kellett megmutatni.



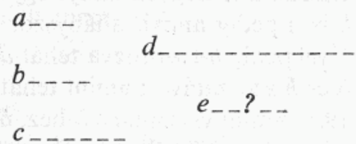
F.: VII. 36.; VIII. 4.

VII. 36. Tétel

Keressük meg három adott szám legkisebb közös többszörösét!

Legyen a, b és c a három adott szám. A legkisebb közös többszörösüket kell tehát megkeresni.

Vegyük ugyanis két szám, a és b legkisebb közös többszörösét (VII. 34.), d-t. c vagy osztja d-t, vagy nem osztja. Ossza először. Másrészt a és b is osztják d-t; a, b és c tehát osztják d-t. Azt állítom, hogy d a legkisebb ilyen. Ellenkező esetben ugyanis a, b és c osztanak valamely d-nél kisebb számot. Osszák e-t. Minthogy a, b és c osztja e-t, a és b is osztja e-t. Tehát a és b legkisebb közös többszöröse is osztja [e-t] (VII. 35.). a és b legkisebb közös többszöröse viszont d; d tehát osztja e-t, a nagyobb a kisebbet, ami lehetetlen. Nem osztanak tehát a, b és c semmilyen d-nél kisebb számot; a, b és c legkisebb közös többszöröse d.



Ne ossza most c a d-t, és vegyük c és d legkisebb közös többszörösét, e-t (VII. 34.). Minthogy a és b osztja d-t, d pedig osztja e-t, a és b is osztja e-t (3. E.). Viszont c is osztja [e-t], tehát a, b és c osztják e-t. Azt állítom, hogy e a legkisebb ilyen. Ellenkező esetben ugyanis a, b és *c* osztanak valamely *e*-nél kisebb számot. Osszák *f*-et. Minthogy *a*, *b* és *c* osztják *f*-et, *a* és *b* is osztják *f*-et, tehát *a* és *b* legkisebb közös többszöröse is osztja *f*-et (VII. 35.). *a* és *b* legkisebb közös többszöröse viszont *d*; *d* tehát osztja *f*-et. Másrészt *c* is osztja *f*-et, tehát *d* és *c* osztják *f*-et, úgyhogy *d* és *c* legkisebb közös többszöröse is osztja *f*-et (VII. 35.). *c* és *d* legkisebb közös többszöröse viszont *e*; *e* tehát osztja *f*-et, a nagyobb a kisebbet, ami lehetetlen. Nem osztanak tehát *a*, *b* és *c* semmilyen *e*-nél kisebb számot; *a*, *b* és *c* legkisebb közös többszöröse *e*. Éppen ezt kellett megmutatni.

```
a_ _            d_ _ _ _ _ _
b_ _ _     e_ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _
c_ _ _ _        f_ _ ?_ _
```

F.: VII. 39.

VII. 37. Tétel

Ha egy számnak osztója valamely szám, akkor a számnak, melynek ez osztója, van annyiad része, amennyi az osztó.

Ossza ugyanis az *a* számot valamely *b* szám. Azt állítom, hogy *a*-nak van annyiad része, amennyi *b*.

Legyen ugyanis annyi egység *c*-ben, ahányszor megvan *b* az *a*-ban. Minthogy *b* annyiszor van meg *a*-ban, ahány egység van *c*-ben, s a *d* egység annyiszor van meg *c*-ben, ahány egység van ebben, a *d* egység ugyanannyiszor van meg *c*-ben, mint *b* az *a*-ban. Fölcserélve tehát a *d* egység ugyanannyiszor van meg *b*-ben, mint *c* az *a*-ban (VII. 15.); amely hányada tehát a *d* egység a *b* számnak, ugyanaz a hányada *c* az *a*-nak. A *d* egység viszont annyiad része *b*-nek, amennyi *b*, tehát *c* az *a*-nak szintén annyiad része, amennyi *b*; tehát *c* annyiad része *a*-nak, amennyi *b*. Éppen ezt kellett megmutatni.

```
a_ _ _ _ _ _   c_ _ _
b_ _           d_
```

F.: VII. 39.

VII. 38. Tétel

Ha egy számnak létezik valamelyik hányada, akkor a számot osztja az a szám, ahányad része a hányad a számnak.

Legyen ugyanis *a*-nak *b* valamely hányada, és *c* az a szám, ahányad része *b* az *a*-nak. Azt állítom, hogy *c* osztja *a*-t.

Minthogy ugyanis *b* annyiad része *a*-nak, amennyi *c*, és a *d* egység is annyiad része *c*-nek, amennyi *c*, amely hányada a *d* egység a *c* számnak, ugyanaz a hányada *b* az *a*-nak; a *d* egység tehát ugyanannyiszor van meg a *c* számban, ahányszor *b* a *c*-ben. Fölcserélve tehát, a *d* egység ugyanannyiszor van meg a *b* számban, ahányszor *c* az *a*-ban (VII. 15.). *c* tehát osztja *a*-t. Éppen ezt kellett megmutatni.

a – – – – – –   *c* – –

b – – –   *d* –

F.: VII. 39.

VII. 39. Tétel

*Keressük meg a legkisebb számot, melynek léteznek adott hányadai!**

Legyenek az adott hányadok *a*, *b* és *c*. A legkisebb számot kell tehát megtalálni, melynek léteznek az *a*, *b*, *c* hányadai.

Legyenek ugyanis *d*, *e* illetve *f* azok a számok, ahányad része *a*, *b*, illetve *c*, és vegyük *d*, *e* és *f* legkisebb közös többszörösét, *g*-t (VII. 36.).

g-nek tehát léteznek annyiad részei, amennyi *d*, *e*, illetve *f* (VII. 37.). Az annyiad részek viszont, amennyi *d*, *e*, illetve *f*, *a*, *b*, illetve *c*. *g*-nek tehát léteznek az *a*, *b*, *c* hányadai. Azt állítom, hogy *g* a legkisebb ilyen. Ellenkező esetben ugyanis létezik valamilyen *g*-nél kisebb szám, melynek léteznek az *a*, *b*, *c* hányadai. Legyen ez *h*.

a – –   *b* – – –   *c* – – – –

d – – – – – –   *e* – – – –   *f* – – –

g – – – – – – – – – – – –   *h* – – ? – –

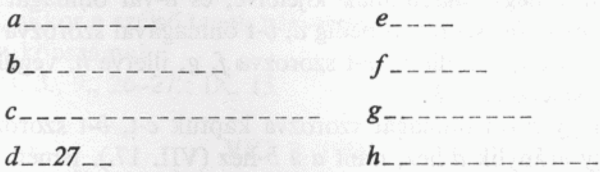
Minthogy *h*-nak léteznek az *a*, *b*, *c* hányadai, *h*-t osztják azok a számok, ahányad részek *a*, *b* és *c* (VII. 38.). Azok a számok viszont, ahányad részek *a*, *b* és *c*, *d*, *e* és *f*. *h*-t tehát osztja *d*, *e* és *f*, és kisebb *g*-nél, ami lehetetlen. Nincs tehát semmilyen *g*-nél kisebb szám, melynek léteznek az *a*, *b*, *c* hányadai. Éppen ezt kellett megmutatni.

Nyolcadik könyv

VIII. 1. Tétel

Ha egy tetszőleges sok tagú mértani sorozat szélső tagjai relatív prímek, akkor a sorozat tagjai legkisebbek azon számok között, melyeknek ugyanaz az aránya, mint nekik.

Legyen *a*, *b*, *c*, *d* egy tetszőleges sok tagú mértani sorozat, és a szélső tagjaik, *a* és *d*, legyenek relatív prímek. Azt állítom, hogy *a*, *b*, *c* és *d* a legkisebbek azon számok között, melyek aránya ugyanaz, mint nekik.



Ellenkező esetben ugyanis legyenek *e*, *f*, *g* és *h* az *a*-nál, *b*-nél, *c*-nél és *d*-nél kisebb számok, melyek aránya ugyanaz, mint ezeknek. Minthogy az *a*, *b*, *c*, *d* számok aránya ugyanaz, mint az *e*, *f*, *g*, *h* számoké, és [az *a*, *b*, *c*, *d* számok] száma egyenlő [az *e*, *f*, *g*, *h* számok] számával, egyenlő sok tagon át amint *a* a *d*-hez, úgy aránylik *e* a *h*-hoz (VII. 14.). *a* és *d* viszont relatív prímek, a relatív prímek pedig legkisebbek (VII. 21.), a legkisebbek pedig osztják az ugyanabban az arányban álló számokat, mégpedig a nagyobb ugyanannyiszor van meg a nagyobban, mint a kisebb a kisebben (VII. 20.), azaz az egyik előtag ugyanannyiszor a másik előtagban, mint az egyik utótag a másik utótagban. Osztja tehát *a* az *e*-t, a nagyobb a kisebbet, ami lehetetlen.

Nem állnak tehát az *a*, *b*, *c*, *d* számoknál kisebbként az *e*, *f*, *g*, *h* számok ugyanabban az arányban, mint azok, *a*, *b*, *c* és *d* a legkisebbek azon számok között, melyek aránya ugyanaz, mint nekik. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: VIII. 2., 9.

VIII. 2. Tétel

*Keressük meg tetszőlegesen kijelölt tagszám esetére az adott arány mellett legkisebb tagokból álló mértani sorozatot.**

Legyen a – legkisebb számokkal (VII. 33.) – adott arány *a*-é *b*-hez. Tetszőlegesen kijelölt tagszám esetére meg kell tehát keresni az *a* a *b*-hez arány mellett legkisebb tagokból álló mértani sorozatot.

a-- *b*--- *f*--------

c---- *g*------------

d------ *h*-------------------

e--------- *k*------------------------------

Legyen a négy tagszámnak kijelölve, és *a*-val önmagát szorozva keletkezzék *c*, *b*-t szorozva pedig *d*, *b*-t önmagával szorozva keletkezzék *e*, *a*-val *c*-t, *d*-t, illetve *e*-t szorozva *f*, *g*, illetve *h*, végül *b*-vel *e*-t szorozva keletkezzék *k*.

Minthogy *a*-val önmagát szorozva kaptuk *c*-t, *b*-t szorozva pedig *d*-t, *c* úgy aránylik *d*-hez, mint *a* a *b*-hez (VII. 17.). Ismét, minthogy *b*-t *a*-val szorozva kaptuk *d*-t, önmagával szorozva pedig *e*-t, *b*-t *a*-val, illetve *b*-vel szorozva *d*-t, illetve *e*-t kapunk, tehát *d* úgy aránylik *e*-hez, mint *a* a *b*-hez (VII. 18.). Másrészt *c* úgy aránylik *d*-hez, mint *a* a *b*-hez, tehát amint *c* a *d*-hez, úgy aránylik *d* az *e*-hez. Minthogy *a*-val *c*-t, illetve *d*-t szorozva kapjuk *f*-et, illetve *g*-t, *f* úgy aránylik *g*-hez, mint *c* a *d*-hez (VII. 17.). Viszont *a* úgy aránylott *b*-hez, mint *c* a *d*-hez, tehát amint *a* a *b*-hez, úgy aránylik *f* a *g*-hez. Ismét, minthogy *a*-val *d*-t, illetve *e*-t szorozva kaptuk *g*-t, illetve *h*-t, *g* úgy aránylik *h*-hoz, mint *d* az *e*-hez (VII. 17.). Másrészt *a* úgy aránylik *b*-hez, mint *d* az *e*-hez, amint tehát *a* a *b*-hez, úgy aránylik *g* a *h*-hoz. Minthogy *e*-t *a*-val, illetve *b*-vel szorozva kaptuk *h*-t és *k*-t, *h* úgy aránylik *k*-hoz, mint *a* a *b*-hez (VII. 18.). Másrészt amint *a* a *b*-hez, úgy aránylik mind *f* a *g*-hez, mind *g* a *h*-hoz, amint tehát *f* a *g*-hez, úgy mind *g* a *h*-hoz, mind *h* a *k*-hoz; *c*, *d*, *e* és *f*, *g*, *h*, *k* mértani sorozat tehát az *a* a *b*-hez arányban. Azt állítom, hogy a legkisebb ilyenek. Minthogy ugyanis *a* és *b* legkisebbek azon számok között, melyek aránya ugyanaz, mint nekik, az ugyanazon arányú számok között a legkisebbek pedig relatív prímek (VII. 22.), *a* és *b* relatív prímek. S *a*-val, illetve *b*-vel önmagát szorozva kaptuk *c*-t és *e*-t, *c*-t, illetve *e*-t szorozva pedig *f*-et, illetve *k*-t; *c*, *e* és *f*, *k* tehát relatív prímek (VII. 27.). Ha viszont egy tetszőleges sok tagú mértani sorozat szélső tagjai relatív prímek, akkor a sorozat tagjai legkisebbek azon számok között, melyek aránya ugyanaz, mint az övéké (VIII. 1.). *c*, *d*, *e* és *f*, *g*, *h*, *k* tehát a legkisebbek azon számok között, melyek aránya ugyanaz, mint *a*-é és *b*-é. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: VIII. 3., 8., 9., 21., 27.

Következmény

Ebből már nyilvánvaló, hogy ha egy háromtagú mértani sorozat tagjai legkisebbek azon számok között, melyek aránya ugyanaz, mint az övéké, akkor a szélső tagok négyzetszámok, négytagú sorozat esetén pedig köbszámok.

F.: VIII. 3., 9., 26–27.; IX. 15.

VIII. 3. Tétel

Ha egy tetszőleges sok tagú mértani sorozat tagjai legkisebbek azon számok között, melyek aránya ugyanaz, mint az övéké, akkor a szélső tagok relatív prímek.

Legyen *a*, *b*, *c*, *d* egy tetszőleges sok tagú mértani sorozat, melynek tagjai legkisebbek azon számok között, melyek aránya ugyanaz, mint az övéké. Azt állítom, hogy a szélső tagok, *a* és *d*, relatív prímek.

Vegyünk ugyanis az *a*, *b*, *c*, *d* sorozat arányában két legkisebb számot, *e*-t és *f*-et (VII. 33.), hármat, *g*-t, *h*-t és *k*-t, és sorban mindig eggyel többet (VIII. 2.), amíg a nyert tagszám egyenlő nem lesz *a*, *b*, *c*, *d* tagszámával. Vegyük ezeket, és legyenek *l*, *m*, *n*, *o*.

Minthogy *e* és *f* legkisebbek azon számok között, melyek aránya ugyanaz, mint az övéké, relatív prímek (VII. 22.). Minthogy *e*-vel, illetve *f*-fel önmagát szorozva kaptuk *g*-t, illetve *k*-t, *g*-t, illetve *k*-t szorozva pedig *l*-et, illetve *o*-t, *g*, *k* és *l*, *o* is relatív prímek (VII. 27.). Minthogy *a*, *b*, *c* és *d* a legkisebbek azon számok között, melyek ará-

```
a--------     o------------------------------------
b------------                n------------------
c-------------------          m--------------
d-------------------------------      l--------
e--    f---    g----    h------    k---------
```

nya ugyanaz, mint az övéké, *l*, *m*, *n* és *o* is legkisebbek azon számok között, melyek ugyanabban az arányban állnak, mint *a*, *b*, *c* és *d*, és *a*, *b*, *c*, *d* tagszáma egyenlő *l*, *m*, *n*, *o* tagszámával, *a*, *b*, *c*, *d* és *l*, *m*, *n*, *o* tagonként egyenlő; egyenlő tehát *a* az *l*-lel, *d* pedig *o*-val, *l* és *o* relatív prímek, tehát *a* és *d* is relatív prímek. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: VIII. 6., 8., 21.

VIII. 4. Tétel

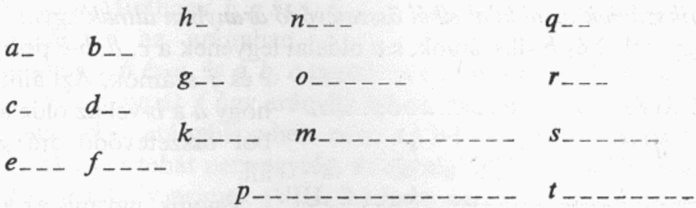
Tetszőlegesen sok – legkisebb számokkal – adott arányhoz keressük meg a legkisebb számokat, melyek rendre az adott arányokban állnak.

Legyenek a legkisebb számokkal adott arányok *a*-é *b*-hez, *c*-é *d*-hez, s végül *e*-é *f*-hez. Meg kell tehát keresni a legkisebb számokat, melyek rendre az *a* a *b*-hez, *c* a *d*-hez s végül *e* az *f*-hez arányban állnak.

```
                  h---                n--
a-    b--
                  g------             o---
c---  d-----
                  k----------         m----
e--   f---
                  l---------------    p-------
```

Vegyük ugyanis *b* és *c* legkisebb közös többszörösét, *g*-t (VII. 34.). Legyen *a* annyiszor meg *h*-ban, ahányszor megvan *b* a *g*-ben, s legyen annyiszor meg *d* a *k*-ban, ahányszor megvan *c* a *g*-ben. *e* vagy osztja *k*-t, vagy nem osztja. Ossza először. Legyen annyiszor meg *f* az *l*-ben, ahányszor megvan *e* a *k*-ban. Minthogy *a* ugyanannyiszor van meg *h*-ban, mint *b* a *g*-ben, amint *a* a *b*-hez, úgy aránylik *h* a *g*-hez (VII. 13.). Ugyanígy amint *c* a *d*-hez, úgy aránylik *g* a *k*-hoz, s végül amint *e* az *f*-hez, úgy *k* az *l*-hez. *h*, *g*, *k* és *l* tehát rendre az *a* a *b*-hez, *c* a *d*-hez, s végül *e* az *f*-hez arányban állnak. Azt állítom, hogy a legkisebb ilyenek. Ha ugyanis *h*, *g*, *k*, *l* nem a legkisebb számok, melyek rendre az *a* a *b*-hez, *c* a *d*-hez, s *e* az *f*-hez arányban állnak, legyenek *n*, *o*, *m*, *p* azok. Minthogy *n* úgy aránylik *o*-hoz, mint *a* a *b*-hez, *a* és *b* pedig legkisebbek, a legkisebbek pedig osztják az ugyanabban az arányban álló számokat, mégpedig a nagyobb ugyanannyiszor van meg a nagyobban, mint a kisebb a kisebben (VII. 20.), azaz az egyik előtag ugyanannyiszor a másikban, mint az egyik utótag a másik utótagban, *b* tehát osztja *o*-t. Ugyanígy *c* is osztja *o*-t, *b* és *c* tehát osztják *o*-t, tehát *b* és *c* legkisebb közös többszöröse is osztja *o*-t (VII. 35.). *b* és *c* legkisebb közös többszöröse viszont *g*, *g* tehát osztja *o*-t, a nagyobb a kisebbet, ami lehetetlen. Nincsenek tehát semmilyen, a *h*, *g*, *k*, *l* számoknál kisebb számok rendre az *a* a *b*-hez, *c* a *d*-hez, s végül *e* az *f*-hez arányban.

Ne ossza most *e* a *k*-t. Vegyük *e* és *k* legkisebb közös többszörösét, *m*-et (VII. 34.). Legyen *h*, illetve *g* ugyanannyiszor meg *n*-ben, illetve



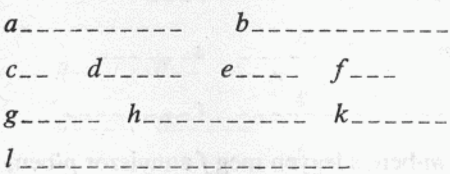
o-ban, ahányszor megvan *k* az *m*-ben, s legyen meg *f* annyiszor *p*-ben, ahányszor megvan *e* az *m*-ben.* Minthogy *h* ugyanannyiszor van meg *n*-ben, mint *g* az *o*-ban, *n* úgy aránylik *o*-hoz, mint *h* a *g*-hez (VII. 13.). Amint viszont *h* a *g*-hez, úgy aránylik *a* a *b*-hez, amint tehát *a* a *b*-hez, úgy aránylik *n* az *o*-hoz. Ugyanígy amint *c* a *d*-hez, úgy *o* az *m*-hez. Másrészt, minthogy *e* ugyanannyiszor van meg *m*-ben, mint *f* a *p*-ben, *m* úgy aránylik *p*-hez, mint *e* az *f*-hez (VII. 13.), *n*, *o*, *m* és *p* tehát rendre az *a* a *b*-hez, *c* a *d*-hez, s végül *e* az *f*-hez arányban állnak. Azt állítom, hogy a legkisebbek az $\overline{ab}$, $\overline{cd}$, $\overline{ef}$ arányokban.** Ellenkező esetben ugyanis léteznének valamely *n*-nél, *o*-nál, *m*-nél és *p*-nél kisebb számok, melyek rendre az $\overline{ab}$, $\overline{cd}$, $\overline{ef}$ arányban állnak. Legyenek ezek *q*, *r*, *s* és *t*. Minthogy *a* úgy aránylik *b*-hez, mint *q* az *r*-hez, *a* és *b* pedig legkisebbek, a legkisebbek pedig osztják az ugyanabban az arányban álló számokat, mégpedig az egyik előtag ugyanannyiszor van meg a másik előtagban, mint az egyik utótag a másik utótagban (VII. 20.), *b* tehát osztja *r*-et. Ugyanígy *c* is osztja *r*-et, *b* és *c* tehát osztják *r*-et. *b* és *c* legkisebb közös többszöröse is osztja tehát *r*-et (VII. 35.). *b* és *c* legkisebb közös többszöröse viszont *g*, *g* tehát osztja *r*-et. *k* úgy aránylik *s*-hez, mint *g* az *r*-hez (VII. 13.), *k* osztja tehát *s*-et. Viszont *e* is osztja *s*-et, *e* és *k* tehát osztják *s*-et. *e* és *k* legkisebb közös többszöröse is osztja tehát *s*-et (VII. 35.). *e* és *k* legkisebb közös többszöröse viszont *m*, *m* tehát osztja *s*-et, a nagyobb a kisebbet, ami lehetetlen. Nincsenek tehát semmilyen az *n*, *o*, *m*, *p* számoknál kisebb számok rendre az *a* a *b*-hez, *c* a *d*-hez, s végül *e* az *f*-hez arányban; *n*, *o*, *m* és *p* tehát a legkisebb számok, melyek rendre az $\overline{ab}$, $\overline{cd}$, $\overline{ef}$ arányban állnak. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: VIII. 5.; X. 12.

VIII. 5. Tétel

A síkszámok az oldalakéiből összetevődő arányban állnak egymással.

Legyenek *a* és *b* síkszámok, s *a* oldalai legyenek a *c*, *d*, *b*-é pedig az *e* és *f* számok. Azt állítom, hogy *a* a *b*-vel az oldalakéiből összetevődő arányban áll.



Vegyük ugyanis az adott *c* az *e*-hez és *d* az *f*-hez arányokhoz a legkisebb számokat, *g*-t, *h*-t és *k*-t, melyek rendre a $\overline{ce}$, $\overline{df}$ arányokban állnak (VIII. 4.), úgyhogy amint *c* az *e*-hez, úgy aránylik *g* a *h*-hoz, amint pedig *d* az *f*-hez, úgy *h* a *k*-hoz. *e*-t *d*-vel szorozva keletkezzék *l*.

Minthogy *d*-vel *c*-t szorozva kaptuk *a*-t, *e*-t szorozva pedig *l*-et,

a úgy aránylik l-hez, mint c az e-hez (VII. 17.). Amint viszont c az e-hez, úgy g a h-hoz, amint tehát g a h-hoz, úgy a az l-hez. Másrészt, minthogy e-vel d-t szorozva kaptuk l-et, f-et szorozva pedig b-t (VII. 16.), l úgy aránylik b-hez, mint d az f-hez (VII. 17.). Viszont amint d az f-hez, úgy h a k-hoz, amint tehát h a k-hoz, úgy l a b-hez. Megmutattuk, hogy amint g a h-hoz, úgy a az l-hez, egyenlő sok tagon át tehát amint g a k-hoz, úgy a a b-hez (VII. 14.); g a k-val viszont az oldalakéiból összetevődő arányban áll, a és b is az oldalakéiból összetevődő arányban áll tehát. Éppen ezt kellett megmutatni.

VIII. 6. Tétel

Ha egy tetszőleges sok tagú mértani sorozat első tagja nem osztja a másodikat, akkor egyetlen tag sem oszt semmilyen másikat.

Legyen a, b, c, d, e egy tetszőleges sok tagú mértani sorozat, és a ne ossza b-t. Azt állítom, hogy egyetlen tag sem oszt semmilyen másikat.

Hogy a, b, c, d és e rendre nem osztják egymást, az nyilvánvaló, a sem osztja ugyanis b-t. Azt állítom, hogy egyetlen tag sem oszt semmilyen másikat. Tegyük fel ugyanis, hogy a osztja c-t. Vegyük annyi számhoz, ahányan vannak a, b és c, a legkisebbeket f-et, g-t és h-t, melyek ugyanabban az arányban állnak, mint a, b és c (VII. 33.). Minthogy f, g és h ugyanabban az arányban

a--*16*-- *b*--*24*-- *c*--*36*--

d--*54*-- *e*--*81*--

f---- *g*------ *h*---------

állnak, mint a, b és c, és a, b, c tagszáma egyenlő f, g, h tagszámával, egyenlő sok tagon át f úgy aránylik h-hoz, mint a a c-hez (VII. 14.). Minthogy f úgy aránylik g-hez, mint a a b-hez, s a nem osztja b-t, f sem osztja g-t. f tehát nem egység, az egység ugyanis minden számot oszt. f és h relatív prímek (VIII. 3.) [nem osztja tehát f a h-t sem]. a úgy aránylik c-hez, mint f a h-hoz, a sem osztja tehát c-t. Hasonlóképpen mutathatnánk meg, hogy egyetlen tag sem oszt semmilyen másikat. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: VIII. 7.

VIII. 7. Tétel

*Ha egy tetszőleges sok tagú mértani sorozat első tagja osztja az utolsót, akkor a másodikat is osztja.**

Legyen *a*, *b*, *c*, *d* egy tetszőleges sok tagú mértani sorozat, és *a* ossza *d*-t. Azt állítom, hogy *a* a *b*-t is osztja.

*a*___ *b*______ *c*_____________

*d*___________________________

Ha ugyanis *a* nem osztja *b*-t, akkor egyetlen tag sem oszt semmilyen másikat (VIII. 6.), *a* viszont osztja *d*-t. Tehát *a* a *b*-t is osztja. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: VIII. 14–15.

VIII. 8. Tétel

Ha két szám közé mértani sorban beilleszthetők számok, akkor bármely két ugyanazon arányú szám közé is beilleszthető mértani sorban annyi szám, amennyi az előző számok közé.

Legyenek ugyanis két szám, *a* és *b* közé beilleszthetők mértani sorban a *c*, *d* számok, és arányuljék úgy *e* az *f*-hez, mint *a* a *b*-hez. Azt állítom, hogy az *e*, *f* számok közé is beilleszthető mértani sorban annyi szám, amennyi *a* és *b* közé.

*a*__ *c*____ *d*________

*b*________________

*e*___ *m*______ *n*____________

*f*__________________________

*g*_ *h*__ *k*____ *l*________

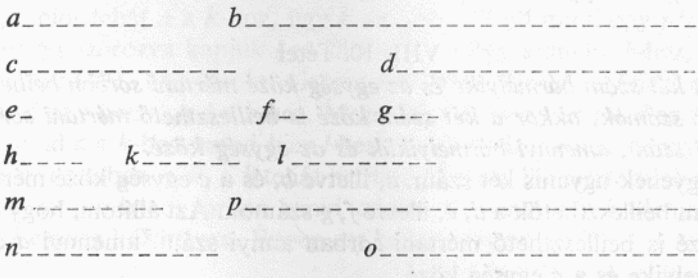
Vegyünk ugyanis azon számok közül, melyek aránya ugyanaz, mint az *a*, *c*, *d*, *b* számoké, annyi legkisebbet, ahányan vannak *a*, *b*, *c* és *d*, *g*-t, *h*-t, *k*-t és *l*-et (VIII. 2.). Ekkor a szélső tagjaik, *g* és *l* relatív prímek (VIII. 3.). Minthogy *a*, *c*, *d*, *b* ugyanabban az arányban állnak, mint *g*, *h*, *k*, *l*, és az *a*, *c*, *d*, *b* sorozat tagszáma egyenlő a *g*, *h*, *k*, *l* sorozat tagszámával, egyenlő sok tagon át *g* úgy aránylik *l*-hez, mint *a* a *b*-hez (VII. 14.). Amint viszont *a* a *b*-hez, úgy *e* az *f*-hez, amint tehát *g* az *l*-hez, úgy *e* az *f*-hez. *g* és *l* viszont relatív prímek, a relatív prímek pedig legkisebbek (VII. 21.), a legkisebbek pedig osztják az ugyanabban az arányban álló számokat, mégpedig a nagyobb ugyanannyiszor van meg a nagyobban, mint a kisebb a kisebben (VII. 20.), azaz az egyik előtag ugyanannyiszor a másik előtagban, mint az egyik utótag a másik utótagban, *g* tehát ugyanannyiszor van meg *e*-ben, mint *l* az *f*-ben. Legyen *h*, illetve *k* annyiszor meg *m*-ben, illetve *n*-ben, ahányszor megvan *g* az *e*-ben. Ekkor *g*, *h*, *k*, illetve *l* ugyanannyiszor van meg *e*-ben, *m*-ben, *n*-ben, illetve *f*-ben. *g*, *h*, *k*, *l* és *e*, *m*, *n*, *f* tehát ugyanabban az arányban állnak (VII. 9.). Másrészt ugyanabban az arányban állnak *g*, *h*, *k*, *l* és *a*, *c*, *d*, *b*, tehát *a*, *c*, *d*, *b* és *e*, *m*, *n*, *f* is ugyanabban az arányban állnak. *a*, *c*, *d*, *b* viszont egy mértani sorozat, tehát *e*, *m*, *n*, *f* is mértani sorozat. Beillesztettünk tehát *e* és *f* közé mértani sorban annyi számot, amennyi *a* és *b* között van. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: VIII. 24–25.; IX. 1–6.

VIII. 9. Tétel

Ha két szám relatív prím, és közéjük mértani sorban beilleszthetők számok, akkor bármelyikük és az egység közé is beilleszthető mértani sorban annyi szám, amennyi az előző számok közé.

Legyen ugyanis *a* és *b* két relatív prímszám, legyenek közéjük mértani sorban beilleszthetők a *c*, *d* számok, és vegyük az *e* egységet. Azt állítom, hogy *a* és *b* bármelyike és az egység közé is beilleszthető mértani sorban annyi szám, amennyi *a* és *b* közé.



Vegyünk ugyanis az *a*, *c*, *d*, *b* sorozat arányában két legkisebb számot, *f*-et és *g*-t (VII. 33.), hármat, *h*-t, *k*-t és *l*-et, és sorban mindig eggyel többet (VIII. 2.), amíg a nyert tagszám egyenlő nem lesz *a*, *c*, *d*, *b* tagszámával. Vegyük ezeket, és legyenek *m*, *n*, *o*, *p*. Nyilvánvaló, hogy *f*-fel önmagát szorozva kapjuk *h*-t, *h*-t szorozva pedig *m*-et, és hogy *g*-vel önmagát szorozva kapjuk *l*-et, *l*-et szorozva pedig *o*-t (VIII. 2. K.). Minthogy *m*, *n*, *o*, *p* legkisebbek azon számok között, melyek aránya ugyanaz, mint *f*-é és *g*-é, és *a*, *c*, *d*, *b* is legkisebbek azon számok között, melyek aránya ugyanaz, mint *f*-é és *g*-é (VIII. 1.), és *m*, *n*, *o*, *p* tagszáma egyenlő *a*, *c*, *d*, *b* tagszámával, *m*, *n*, *o*, *p* és *a*, *c*, *d*, *b* tagonként egyenlő, egyenlő tehát *m* az *a*-val, *p* pedig *b*-vel. Minthogy *f*-et önmagával szorozva kapjuk *h*-t, *f* annyiszor van meg *h*-ban, ahány egység van *f*-ben. Továbbá az *e* egység is annyiszor van meg *f*-ben, ahány egység van abban; az *e* egység tehát ugyanannyiszor van meg az *f* számban, mint *f* a *h*-ban. *f* tehát úgy aránylik *h*-hoz, mint az *e* egység az *f* számhoz. Másrészt, minthogy *f*-fel *h*-t szorozva kapjuk *m*-et, *h* annyiszor van meg *m*-ben, ahány egység van *f*-ben. Viszont az *e* egység is annyiszor van meg *f*-ben, ahány egység abban van; az *e* egység tehát ugyanannyiszor van meg az *f* számban, mint *h* az *m*-ben. *h* tehát úgy aránylik *m*-hez, mint az *e* egység az *f* számhoz. Megmutattuk, hogy *f* úgy aránylik *h*-hoz, mint az *e* egység az *f* számhoz; amint tehát az *e* egység az *f* számhoz, úgy aránylik *f* a *h*-hoz és *h* az *m*-hez. *m* viszont egyenlő *a*-val; amint tehát az *e* egység az *f* számhoz, úgy aránylik *f* a *h*-hoz és *h* az *a*-hoz. Ugyanígy amint az *e* egység a *g* számhoz, úgy *g* az *l*-hez és *l* a *b*-hez. Beillesztettünk tehát *a*, *b* mindegyike és az *e* egység közé mértani sorban annyi számot, amennyi *a* és *b* között volt. Éppen ezt kellett megmutatni.

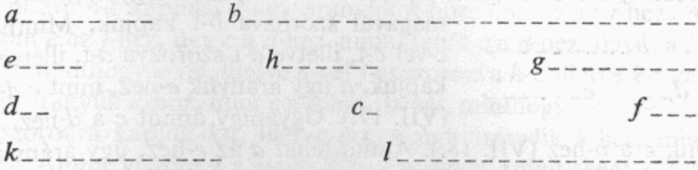
VIII. 10. Tétel

Ha két szám bármelyike és az egység közé mértani sorban beilleszthetők számok, akkor a két szám közé is beilleszthető mértani sorban annyi szám, amennyi bármelyikük és az egység közé.

Legyenek ugyanis két szám, *a*, illetve *b*, és a *c* egység közé mértani sorban beilleszthetők a *d*, *e*, illetve *f*, *g* számok. Azt állítom, hogy *a* és *b* közé is beilleszthető mértani sorban annyi szám, amennyi *a* és *b* bármelyike és a *c* egység közé.

Keletkezzék ugyanis *d*-vel *f*-et szorozva *h*, *d*-vel, illetve *f*-fel *h*-t szorozva pedig *k*, illetve *l*.

Minthogy *d* úgy aránylik *e*-hez, mint a *c* egység a *d* számhoz, *c* ugyanannyiszor van meg a d számban, mint d az e-ben. A c egység viszont annyiszor van meg a d számban, ahány egység van d-ben, a d szám tehát annyiszor van meg e-ben, mint ahány egység van d-ben, d-t önmagával szorozva tehát e-t kapunk. Továbbá, minthogy e úgy arány-



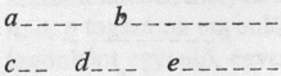
lik a-hoz, mint a c [egység] a d számhoz, a c egység ugyanannyiszor van meg a d számban, mint e az a-ban. A c egység viszont annyiszor van meg a d számban, ahány egység van d-ben, e tehát annyiszor van meg a-ban, ahány egység van d-ben, d-vel e-t szorozva tehát a-t kapunk. Ugyanígy f-fel önmagát szorozva g-t kapjuk, g-t szorozva pedig b-t. Minthogy d-vel önmagát szorozva kaptuk e-t, f-et szorozva pedig h-t, e úgy aránylik h-hoz, mint d az f-hez (VII. 17.). Ugyanígy amint d az f-hez, úgy h a g-hez (VII. 18.), amint tehát e a h-hoz, úgy h a g-hez. Ismét, minthogy d-vel e-t, illetve h-t szorozva kapjuk a-t, illetve k-t, a úgy aránylik k-hoz, mint e a h-hoz (VII. 17.). Másrészt amint e a h-hoz, úgy d az f-hez, amint tehát d az f-hez, úgy a a k-hoz. Ismét, minthogy h-t d-vel, illetve f-fel szorozva kapjuk k-t, illetve l-et, k úgy aránylik l-hez, mint d az f-hez (VII. 18.). Amint viszont d az f-hez, úgy a a k-hoz, amint tehát a a k-hoz, úgy k az l-hez. Végül minthogy f-fel h-t, illetve g-t szorozva kapjuk l-et, illetve b-t, l úgy aránylik b-hez, mint h a g-hez (VII. 17.). Amint viszont h a g-hez, úgy d az f-hez, amint tehát d az f-hez, úgy l a b-hez. Megmutattuk, hogy amint d az f-hez, úgy mind a a k-hoz, mind k az l-hez, amint tehát a a k-hoz, úgy k az l-hez és l a b-hez. a, k, l, b tehát mértani sorozat. Beillesztettünk tehát a és b közé mértani sorban annyi számot, amennyi a és b bármelyike és a c egység között van. Éppen ezt kellett megmutatni.

VIII. 11. Tétel

*Két négyzetszám között van egy középarányos szám, és a négyzetszámok egymással az oldalaikhoz képest kétszeres arányban állnak.**

Legyenek *a* és *b* négyzetszámok, és *a* oldala *c*, *b*-é pedig *d*. Azt állítom, hogy *a* és *b* között van egy középarányos szám, és *a* a *b*-vel kétszeres arányban áll *c*-nek *d*-hez való arányához képest.

Keletkezzék ugyanis *c*-vel *d*-t szorozva *e*. Minthogy *a* négyzetszám és *c* oldala, *c*-t önmagával szorozva *a*-t kapunk. Ugyanígy *d*-t önmagával szorozva *b*-t kapjuk. Minthogy *c*-vel *c*-t, illetve *d*-t szorozva *a*-t, illetve *e*-t kapjuk, *a* úgy aránylik *e*-hez, mint *c* *d*-hez (VII. 17.). Ugyanígy amint *c* a *d*-hez, úgy aránylik *e* a *b*-hez (VII. 18.). Amint tehát *a* az *e*-hez, úgy aránylik *e* a *b*-hez. *a* és *b* között van tehát egy középarányos szám.



Azt állítom, hogy *a* a *b*-vel kétszeres arányban áll *c*-nek *d*-hez való arányához képest. Minthogy ugyanis három szám, *a*, *e* és *b* arányos, *a* a *b*-vel kétszeres arányban áll *a*-nak *e*-hez való arányához képest. Amint viszont *a* az *e*-hez, úgy aránylik *c* a *d*-hez. *a* a *b*-vel kétszeres arányban áll tehát *c*-nek *d*-hez való arányához képest. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: VIII. 13., 15.; X. 9.

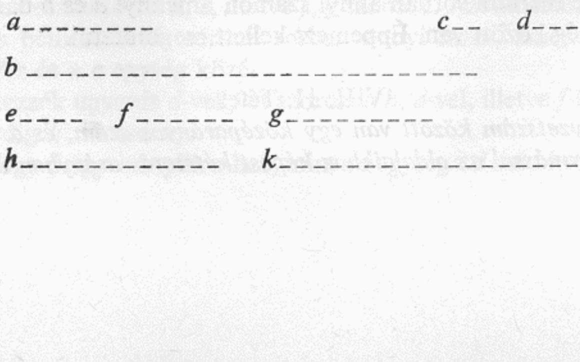
VIII. 12. Tétel

*Két köbszám között van két középarányos szám, és a köbszámok egymással az oldalaikhoz viszonyítva háromszoros arányban állnak.**

Legyenek *a* és *b* köbszámok, és *a* oldala *c*, *b*-é pedig *d*. Azt állítom, hogy *a* és *b* között van két középarányos szám, és *a* a *b*-vel háromszoros arányban áll *c*-nek *d*-hez való arányához képest.

Keletkezzék ugyanis *c*-vel önmagát szorozva *e*, *d*-t szorozva pedig *f*, *d*-t önmagával szorozva *g*, és *c*-vel, illetve *d*-vel *f*-et szorozva *h*, illetve *k*.

Minthogy *a* köbszám és *c* egy oldala, és *c*-t önmagával szorozva *e*-t kapjuk, *c*-vel önmagát szorozva *e*-t kapjuk, *e*-t szorozva pedig *a*-t.



Ugyanígy *d*-vel önmagát szorozva *g*-t kapjuk, *g*-t szorozva pedig *b*-t. Minthogy *c*-vel *c*-t, illetve *d*-t szorozva *e*-t, illetve *f*-et kapjuk, *e* úgy aránylik *f*-hez, mint *c* a *d*-hez (VII. 17.). Ugyanígy amint *c* a *d*-hez, úgy *f* a *g*-hez (VII. 18.). Ismét, minthogy *c*-vel *e*-t, illetve *f*-et szorozva *a*-t, illetve *h*-t kapjuk, *a* úgy aránylik *h*-hoz, mint *e* az *f*-hez. Amint viszont *e* az *f*-hez, úgy *c* a *d*-hez, amint tehát *c* a *d*-hez, úgy *a* a *h*-hoz. Ismét, minthogy *c*-vel, illetve *d*-vel *f*-et szorozva *h*-t, illetve *k*-t kapjuk, *h* úgy aránylik *k*-hoz, mint *c* a *d*-hez. Ismét, minthogy *d*-vel *f*-et, illetve *g*-t szorozva kapjuk *k*-t, illetve *b*-t, *k* úgy aránylik *b*-hez, mint *f* a *g*-hez. Amint viszont *f* a *g*-hez, úgy *c* a *d*-hez, amint tehát *c* a *d*-hez, úgy mind *a* a *h*-hoz, mind *h* a *k*-hoz, mind *k* a *b*-hez. *h* és *k* tehát két középarányos szám *a* és *b* között.

Azt állítom, hogy *a* a *b*-vel háromszoros arányban áll *c*-nek *d*-hez való arányához képest. Minthogy ugyanis négy szám, *a*, *h*, *k* és *b* arányos, *a* a *b*-vel háromszoros arányban áll *a*-nak *h*-hoz való arányához képest. Amint viszont *a* a *h*-hoz, úgy *c* a *d*-hez és *a* a *b*-vel háromszoros arányban áll *c*-nek *d*-hez való arányához képest. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: VIII. 13., 15.

VIII. 13. Tétel

Ha egy tetszőleges sok tagú mértani sorozat minden egyes tagját megszorozzuk önmagával, akkor az így keletkezett számok arányosak lesznek; s ha a kapott számokat megszorozzuk az eredeti számokkal, a keletkező számok ismét arányosak [és ez mindig így van az utóbbiakkal].

a	*b*	*c*
d 16	*e* 36	*f* 81
g 64	*h* 216	*k* 729
l 24	*m* 96	*n* 144
o 54	*p* 324	*q* 486

Legyen *a*, *b*, *c* egy tetszőleges sok tagú mértani sorozat: amint *a* a *b*-hez, úgy *b* a *c*-hez, és keletkezzenek *a*-val, *b*-vel, illetve *c*-vel önmagát megszorozva *d*, *e*, illetve *f*, *d*-t, *e*-t, illetve *f*-et szorozva pedig *g*, *h*, illetve *k*. Azt állítom, hogy mind *d*, *e*, *f*, mind *g*, *h*, *k* mértani sorozat.

Keletkezzék ugyanis *a*-val *b*-t szorozva *l*, *a*-val, illetve *b*-vel *l*-et szorozva pedig m, illetve n. Ismét, keletkezzék b-vel c-t szorozva o, b-vel, illetve c-vel o-t szorozva pedig p, illetve q.

Az előbbiekhez hasonlóan bizonyítható, hogy d, l, e és g, m, n, h mértani sorozat az a a b-hez arányban, s e, o, f és h. p, q, k mértani sorozat a b a c-hez arányban (VIII. 11–12.). b úgy aránylik c-hez, mint a a b-hez, tehát d, l, e és e, o, f, valamint g, m, n, h és h, p, q, k ugyanabban az arányban állnak. d, l, e tagszáma egyenlő e, o, f tagszámával, g, m, n, h tagszáma pedig egyenlő h, p, q, k tagszámával, egyenlő sok tagon át tehát e úgy aránylik f-hez, mint d az e-hez, h pedig k-hoz, mint g a h-hoz (VII. 14.). Éppen ezt kellett megmutatni.

VIII. 14. Tétel

Ha egy négyzetszám oszt egy másikat, akkor az oldala is osztja a másiknak az oldalát; s ha az egyiknek az oldala osztja a másiknak az oldalát, akkor az egyik négyzetszám is osztja a másik négyzetszámot.

Legyenek a, b négyzetszámok, c, d az oldalaik, és a ossza b-t. Azt állítom, hogy c is osztja d-t.

Keletkezzék ugyanis c-vel d-t szorozva e. Ekkor a, e, b mértani sorozat a c a d-hez arányban (VIII. 11.). Minthogy a, e, b mértani sorozat, és a osztja b-t, a az e-t is osztja (VIII. 7.). c úgy aránylik d-hez, mint a az e-hez, tehát c is osztja d-t.

a ---- b -----------------

c -- d ---- e --------

Másodszor ossza c a d-t. Azt állítom, hogy a is osztja b-t.

Azonos konstrukcióval hasonlóképp mutathatnánk meg ugyanis, hogy a, e, b mértani sorozat a c a d-hez arányban. Minthogy a úgy aránylik e-hez, mint c a d-hez, és c osztja d-t, a is osztja e-t.

S a, e, b mértani sorozat, tehát a a b-t is osztja (3. E.).

Ha tehát egy... Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: VIII. 16.

VIII. 15. Tétel

Ha egy köbszám oszt egy másikat, akkor az oldala is osztja a másiknak az oldalát; s ha az egyiknek az oldala osztja a másiknak az oldalát, akkor az egyik köbszám is osztja a másik köbszámot.

Ossza ugyanis az a köbszám a b köbszámot, és legyen a oldala c, b-é pedig d. Azt állítom, hogy c osztja d-t.

Keletkezzék ugyanis *c*-t önmagával megszorozva *e*, *d*-t önmagával megszorozva *g*, valamint *c*-vel *d*-t szorozva *f*, *c*-vel, illetve *d*-vel *f*-et szorozva pedig *h*, illetve *k*. Nyilvánvaló, hogy *e*, *f*, *g* és *a*, *h*, *k*, *b* mértani sorozatok a *c* a *d*-hez arányban (VIII. 11–12.). Minthogy *a*, *h*, *k*, *b* mértani sorozat, és *a* osztja *b*-t, *h*-t is osztja (VIII. 7.). S *c* úgy aránylik *d*-hez, mint *a* a *h*-hoz, tehát *c* is osztja *d*-t.

a – – 27 – – *b* – – 216 – –
c – – – *d* – – – – – –
e – – 9 – – *f* – – 18 – – *g* – – 36 – –
h – – 54 – – *k* – – 108 – –

Most ossza *c* a *d*-t. Azt állítom, hogy *a* is osztja *b*-t.

Azonos konstrukcióval hasonlóképp mutathatnánk meg ugyanis, hogy *a*, *h*, *k*, *b* mértani sorozat a *c* a *d*-hez arányban. Minthogy *c* osztja *d*-t, és *a* úgy aránylik *h*-hoz, mint *c* a *d*-hez, *a* is osztja *h*-t, úgyhogy *b*-t is osztja *a*. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: VIII. 17.

VIII. 16. Tétel

Ha egy négyzetszám nem oszt egy másik négyzetszámot, akkor az oldala sem osztja a másiknak az oldalát; s ha az egyiknek az oldala nem osztja a másiknak az oldalát, akkor az egyik négyzetszám sem osztja a másikat.

Legyenek *a*, *b* négyzetszámok, *c*, *d* az oldalaik, és *a* ne ossza *b*-t. Azt állítom, hogy *c* sem osztja *d*-t.

a – – – – *c* – –
b – – – – – – – – – – *d* – – –

Ha ugyanis *c* osztja *d*-t, *a* is osztja *b*-t (VIII. 14.). *a* viszont nem osztja *b*-t, tehát *c* sem osztja *d*-t.

Másodszor *c* ne ossza *d*-t. Azt állítom, hogy *a* sem osztja *b*-t.

Ha ugyanis *a* osztja *b*-t, *c* is osztja *d*-t (VIII. 14.). *c* viszont nem osztja *d*-t, tehát *a* sem osztja *b*-t. Éppen ezt kellett megmutatni.

VIII. 17. Tétel

Ha egy köbszám nem oszt egy másik köbszámot, akkor az oldala sem osztja a másiknak az oldalát; s ha az egyiknek az oldala nem osztja a másiknak az oldalát, akkor az egyik köbszám sem osztja a másikat.

Ne ossza ugyanis az *a* köbszám a *b* köbszámot, és legyen *a* oldala *c*, *b*-é pedig *d*. Azt állítom, hogy *c* nem osztja *d*-t.

Ha ugyanis *c* osztaná *d*-t, *a* is osztaná *b*-t (VIII. 15.). *a* viszont nem osztja *b*-t, tehát *c* sem osztja *d*-t.

Most *c* ne ossza *d*-t. Azt állítom, hogy *a* sem osztja *b*-t.

Ha ugyanis *a* osztaná *b*-t, *c* is osztaná *d*-t (VIII. 15.). *c* viszont nem osztja *d*-t, tehát *a* sem osztja *b*-t. Éppen ezt kellett megmutatni.

a – – – – – – – – –   *c* – –   *d* – – –

b –

VIII. 18. Tétel

Két hasonló síkszám között van egy középarányos szám, és a síkszámok egymással a megfelelő oldalaikhoz képest kétszeres arányban állnak.

Legyen *a* és *b* két hasonló síkszám, és *a* oldalai legyenek *c*, *d*, *b*-é pedig *e*, *f*. Minthogy azok a síkszámok hasonlók, melyeknek az oldalaik arányosak, *e* úgy aránylik *f*-hez, mint *c* a *d*-hez. Azt állítom, hogy *a* és *b* között van egy középarányos szám, és *a* a *b*-vel kétszeres arányban áll *c*-nek *e*-hez vagy *d*-nek *f*-hez való arányához képest, azaz a megfelelő oldalak arányához képest.

a – – – – – – – –   *b* – – – – – – – – – – – – – – – – – –

c – –   *d* – – – –   *e* – – –   *f* – – – – – –

g – – – – – – – – – – – –

Minthogy amint *c* a *d*-hez, úgy aránylik *e* az *f*-hez, fölcserélve amint *c* az *e*-hez, úgy *d* az *f*-hez (VII. 13.). Minthogy *a* síkszám, és *c*, *d* az oldalai, *d*-vel *c*-t szorozva *a*-t kapjuk. Ugyanígy *e*-vel *f*-et szorozva *b*-t kapjuk. Keletkezzék *d*-vel *e*-t szorozva *g*. Minthogy *d*-vel *c*-t szorozva *a*-t kapjuk, *e*-t szorozva pedig *g*-t, *a* úgy aránylik *g*-hez, mint *c* az *e*-hez (VII. 17.). Amint viszont *c* *e*-hez úgy *d* az *f*-hez, amint tehát *d* az *f*-hez, úgy *a* a *g*-hez. Ismét, minthogy *e*-vel *d*-t szorozva *g*-t, *f*-et szorozva (VII. 16.) pedig *b*-t kapjuk, *g* úgy aránylik *b*-hez, mint *d* az *f*-hez (VII. 17.). Megmutattuk viszont, hogy amint *d* az *f*-hez, úgy *a* a *g*-hez, amint tehát *a* a *g*-hez, úgy *g* a *b*-hez. *a*, *g*, *b* tehát mértani sorozat, *a* és *b* között van egy középarányos szám.

Most azt állítom, hogy *a* a *b*-vel kétszeres arányban áll a megfelelő oldalak arányához képest, azaz *c*-nek *e*-hez vagy *d*-nek *f*-hez való arányához képest. Minthogy ugyanis *a*, *g*, *b* mértani sorozat, *a* a *b*-vel kétszeres arányban áll *g*-hez képest. S amint *a* a *g*-hez, úgy aránylik mind *c* az *e*-hez, mind *d* az *f*-hez, tehát *a* a *b*-vel kétszeres arányban áll *c*-nek *e*-hez vagy *d*-nek *f*-hez való arányához képest. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: VIII. 19., 24., 26.; IX. 1–2.

VIII. 19. Tétel

Két hasonló térszám közé beilleszthető két középarányos szám, és a hasonló térszámok egymással a megfelelő oldalaikhoz képest háromszoros arányban állnak.

Legyen *a* és *b* két hasonló térszám, és legyenek *a* oldalai *c*, *d*, *e*, *b*-é pedig *f*, *g*, *h*. Minthogy azok a térszámok hasonlók, melyeknek az oldalaik arányosak, *f* úgy aránylik *g*-hez, mint *c* a *d*-hez, *g* pedig *h*-hoz, mint *d* az *e*-hez. Azt állítom, hogy *a* és *b* közé beilleszthető két középarányos szám, és *a* a *b*-vel háromszoros arányban áll *c*-nek *f*-hez, *d*-nek *g*-hez s végül *e*-nek *h*-hoz való arányához képest.

*a*__30__	*c*__	*d*___	*e*_____
*b*__240__	*f*____	*g*______	*h*__________
*k*__6__	*m*__12__	*l*__24__	
*n*__60__	*o*__120__		

Keletkezzék ugyanis *c*-vel *d*-t szorozva *k*, *f*-fel *g*-t szorozva pedig *l*. Minthogy *c*, *d* és *f*, *g* ugyanabban az arányban állnak, s *c* és *d* szorzata *k*, *f*-é és *g*-é pedig *l*, *k* és *l* hasonló síkszámok, tehát *k* és *l* között van egy középarányos szám (VIII. 18.). Legyen ez *m*. *m* a *d* és *f* szorzata, amint az ezelőtti tételben megmutattuk. Minthogy *d*-vel *c*-t szorozva *k*-t kapjuk, *f*-et szorozva pedig *m*-et, *k* úgy aránylik *m*-hez, mint *c* az *f*-hez (VII. 17.). Amint viszont *k* az *m*-hez, úgy *m* az *l*-hez, *k*, *m*, *l* tehát egy mértani sorozat a *c* az *f*-hez arányban. Mivel amint *c* a *d*-hez, úgy aránylik *f* a *g*-hez, fölcserélve amint *c* az *f*-hez, úgy *d* a *g*-hez (VII. 13.). Ugyanígy amint *d* a *g*-hez, úgy *e* a *h*-hoz. *k*, *l*, *m* tehát mértani sorozat az akár *c* az *f*-hez, akár *d* a *g*-hez, akár *e* a *h*-hoz arányban. Keletkezzék *e*-vel, illetve *h*-val *m*-et szorozva *n*, illetve *o*. Minthogy *a* térszám, melynek *c*, *d* és *e* az oldalai, *c* és *d* szorzatát *e*-vel szorozva *a*-t kapjuk. *c* és *d* szorzata viszont *k*, tehát *e*-vel *k*-t szorozva *a*-t kapjuk. Ugyanígy *h*-val *l*-et szorozva *b*-t kapjuk. Minthogy *e*-vel *k*-t szorozva *a*-t, *m*-et szorozva ellenben *n*-et kapjuk, *a* úgy aránylik *n*-hez, mint *k* az *m*-hez (VII. 17.). Amint viszont *k* az *m*-hez, úgy mind *c* az *f*-hez, mind *d* a *g*-hez, mind *e* a *h*-hoz, amint tehát *c* az *f*-hez, *d* a *g*-hez és *e* a *h*-hoz, úgy *a* az *n*-hez. Ismét, minthogy *e*-vel, illetve *h*-val *m*-et szorozva *n*-et, illetve *o*-t kapjuk, *n* úgy aránylik *o*-hoz, mint *e* a *h*-hoz (VII. 18.). Amint viszont *e* a *h*-hoz, úgy mind *c* az *f*-hez, mind *d* a *g*-hez, amint tehát *c* az *f*-hez, *d* a *g*-hez és *e* a *h*-hoz, úgy mind *a* az *n*-hez, mind *n* az *o*-hoz. Ismét, minthogy *h*-val *m*-et szorozva *o*-t kapjuk, *l*-et szorozva ellenben *b*-t, *o* úgy aránylik *b*-hez, mint *m* az *l*-hez. Amint viszont *m* az *l*-hez, úgy mind *c* az *f*-hez, mind *d* a *g*-hez, mind az *e* a *h*-hoz. Amint tehát *c* az *f*-hez, *d* a *g*-hez és *e* a *h*-hoz, úgy nemcsak *o* a *b*-hez, hanem *a* is *n*-hez és *n* az *o*-hoz. *a*, *n*, *o*, *b* tehát mértani sorozat az oldalak fönt említett arányában.

Azt állítom, hogy *a* a *b*-vel háromszoros arányban áll a megfelelő oldalak arányához képest, azaz *c*-nek *f*-hez vagy *d*-nek *g*-hez vagy *e*-nek *h*-hoz való arányához képest. Minthogy ugyanis négy szám, *a*, *n*, *o* és *b* mértani sorozatot alkot, *a* a *b*-vel háromszoros arányban áll *a*-nak *n*-hez való arányához képest. Megmutattuk viszont, hogy amint *a* az *n*-hez, úgy mind *c* az *f*-hez, mind *d* a *g*-hez, mind *e* a *h*-hoz. *a* a *b*-vel tehát háromszoros arányban áll a megfelelő oldalak arányához képest, azaz *c*-nek *f*-hez, *d*-nek *g*-hez és *e*-nek *h*-hoz való arányához képest. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: VIII. 25., 27.; IX. 4–6.

VIII. 20. Tétel

*Ha két szám közé beilleszthető egy középarányos szám, akkor a számok hasonló síkszámok.**

Legyen ugyanis két szám, *a* és *b* közé beilleszthető egy középarányos szám, *c*. Azt állítom, hogy *a* és *b* hasonló síkszámok.

Vegyük a legkisebb számokat, melyek aránya ugyanaz, mint *a*-é és *c*-é, *d*-t és *e*-t (VII. 33.). Ekkor *d* ugyanannyiszor van meg *a*-ban, mint *e* a *c*-ben (VII. 20.). Legyen annyi egység *f*-ben, ahányszor megvan *d* az *a*-ban. Ekkor *f*-fel *d*-t szorozva *a*-t kapjuk, úgyhogy *a* síkszám, melynek oldalai *d* és *f*. Ismét, minthogy *d* és *e* a legkisebbek

a_ _ _ _ _ _ _ _ _ b_ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

c_ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

d_ _ _ _ e_ _ _ f_ _ _ _ g_ _ _ _ _ _

azon számok között, melyek aránya ugyanaz, mint *c*-é és *b*-é, *d* ugyanannyiszor van meg *c*-ben, mint *e* a *b*-ben. Legyen annyi egység *g*-ben, ahányszor megvan *e* a *b*-ben. Ekkor *e* a *b*-t a *g*-beli egységek számaszor osztja, tehát *g*-vel *e*-t szorozva *b*-t kapjuk. *b* tehát síkszám, melynek oldalai *e* és *g*. *a* és *b* tehát síkszámok. Azt állítom, hogy hasonlóak. Minthogy ugyanis *f*-fel *d*-t szorozva *a*-t, *e*-t szorozva pedig *c*-t kapjuk, amint *d* az *e*-hez, úgy aránylik *a* a *c*-hez (VII. 17.), azaz *c* a *b*-hez. Ismét, minthogy *e*-vel *f*-et, illetve *g*-t szorozva *c*-t, illetve *b*-t kapjuk, *c* úgy aránylik *b*-hez, mint *f* a *g*-hez. Amint viszont *c* a *b*-hez, úgy *d* az *e*-hez, amint tehát *d* az *e*-hez, úgy *f* a *g*-hez, és fölcserélve amint *d* az *f*-hez, úgy *e* a *g*-hez (VII. 13.). *a* és *b* tehát hasonló síkszámok, hiszen az oldalaik arányosak. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: VIII. 21–22.; IX. 2.

VIII. 21. Tétel

*Ha két szám közé beilleszthető két középarányos szám, akkor a számok hasonló térszámok.**

Legyen ugyanis két szám, *a* és *b* közé beilleszthető két középarányos szám, *c* és *d*. Azt állítom, hogy *a* és *b* hasonló térszámok.

Vegyük ugyanis a három legkisebb számot, *e*-t, *f*-et és *g*-t, melyek aránya ugyanaz, mint az *a*, *c*, *d* számoké (VII. 33.). Ekkor a szélső tagok, *e* és *g* relatív prímek (VIII. 3.). Minthogy *e* és *g* közé beilleszthető egy *f* középarányos szám, *e* és *g* hasonló síkszámok (VIII. 20.).

a_ _120_ _ c_ _180_ _ d_ _270_ _ b_ _405_ _

e_ _ _ _ f_ _ _ _ _ _ g_ _ _ _ _ _ _ _ _

h_ _ k_ _ n_ _30_ _ l_ _ _ m_ _ _ o_ _45_ _

Legyenek e oldalai h és k, g-é pedig l és m. Az előző tételből nyilvánvaló, hogy e, f, g mértani sorozat az akár h az l-hez, akár k az m-hez arányban. Miután e, f, g a legkisebbek azon számok között, melyek aránya ugyanaz, mint az a, c, d számoké, és e, f, g tagszáma egyenlő a, c, d tagszámával, egyenlő sok tagon át amint e a g-hez, úgy aránylik a a d-hez (VII. 14.). e és g viszont relatív prímek, a relatív prímek pedig legkisebbek (VII. 21.), a legkisebbek pedig osztják az ugyanazon arányú számokat, mégpedig a nagyobb ugyanannyiszor van meg a nagyobban, mint a kisebb a kisebben (VII. 20.), azaz az egyik előtag ugyanannyiszor a másik előtagban, mint az egyik utótag a másik utótagban; e tehát ugyanannyiszor van meg a-ban, mint g a d-ben. Legyen annyi egység n-ben, ahányszor megvan e az a-ban. n-nel e-t szorozva tehát a-t kapjuk. e viszont h és k szorzata; n-nel megszorozva h és k szorzatát tehát a-t kapjuk. a tehát térszám, és h, k, n az oldalai. Ismét, minthogy e, f, g a legkisebbek azon számok között, melyek aránya ugyanaz, mint a c, d, b számoké, e ugyanannyiszor van meg c-ben, mint g a b-ben. Legyen annyi egység o-ban, ahányszor megvan e a c-ben. Ekkor g az o-beli egységek szerint van meg b-ben, o-val g-t szorozva tehát b-t kapjuk. g viszont l és m szorzata, o-val megszorozva l és m szorzatát tehát b-t kapjuk. b tehát térszám, és l, m, o az oldalai; a és b tehát térszámok.

Azt állítom, hogy hasonlók. Minthogy ugyanis n-nel, illetve o-val e-t szorozva a-t, illetve c-t kapjuk, amint n az o-hoz, úgy aránylik a a c-hez (VII. 18.), azaz e az f-hez. Amint viszont e az f-hez, úgy h az l-hez és k az m-hez, amint tehát h az l-hez, úgy k az m-hez és n az o-hoz. S h, k, n az a oldalai, o, l és m pedig b oldalai. a és b tehát hasonló térszámok. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: VIII. 23.

VIII. 22. Tétel

Ha egy háromtagú mértani sorozat első tagja négyzetszám, akkor a harmadik is négyzetszám.

a - - - -

b - - - - - -

c - - - - - - - - -

Legyen a, b, c egy háromtagú mértani sorozat, és legyen a négyzetszám. Azt állítom, hogy a harmadik tag, c is négyzetszám.

Minthogy ugyanis a és c között van egy b középarányos szám, a és c hasonló síkszámok (VIII. 20.). a viszont négyzetszám, tehát c is négyzetszám.* Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: VIII. 24.; IX. 1., 8–9.

VIII. 23. Tétel

Ha egy négytagú mértani sorozat első tagja köbszám, akkor a negyedik is köbszám.

Legyen a, b, c, d egy négytagú mértani sorozat, és legyen a köbszám. Azt állítom, hogy d is köbszám.

Minthogy ugyanis a és d között van két középarányos szám, a és d hasonló térszámok (VIII. 21.). a viszont köbszám, tehát d is köbszám.* Éppen ezt kellett megmutatni.

a -- 8 -- b -- 12 --

d -- 27 -- c -- 18 --

F.: VIII. 25.; IX. 3–6., 8–9.

VIII. 24. Tétel

Ha két számnak az egymáshoz való aránya olyan, mint egy négyzetszámnak egy másik négyzetszámhoz, és az első szám négyzetszám, akkor a második is négyzetszám.

Legyen ugyanis két számnak, a-nak és b-nek az egymáshoz való aránya olyan, mint a c négyzetszámnak a d négyzetszámhoz, és legyen a négyzetszám. Azt állítom, hogy b is négyzetszám.

Minthogy ugyanis c és d négyzetszámok, c és d hasonló síkszámok, tehát c és d közé beilleszthető egy középarányos szám (VIII. 18.). a úgy aránylik b-hez, mint c a d-hez, tehát a és b közé is beilleszthető egy középarányos szám (VIII. 8.). S a négyzetszám, tehát b is négyzetszám (VIII. 22.). Éppen ezt kellett megmutatni.

a -- 16 -- c ----

b -- 36 -- d ----------

F.: X. 29–30.

VIII. 25. Tétel

Ha két számnak az egymáshoz való aránya olyan, mint egy köbszámnak egy másik köbszámhoz, és az első szám köbszám, akkor a második is köbszám.

Legyen ugyanis két számnak, a-nak és b-nek az egymáshoz való aránya olyan, mint a *c* köbszámnak a *d* köbszámhoz, és legyen *a* köbszám. Azt állítom, hogy *b* is köbszám.

Minthogy ugyanis *c* és *d* köbszámok, *c* és *d* hasonló térszámok, tehát *c* és *d* közé beilleszthető két középarányos szám (VIII. 19.). Viszont ahány szám *c* és *d* közé beilleszthető mértani sorban, annyi az ugyanazon arányú számok közé is beilleszthető (VIII. 8.), úgyhogy *a* és *b* közé is beilleszthető két középarányos szám. Legyenek ezek *e* és *f*. Minthogy *a*, *e*, *f*, *b* egy négytagú mértani sorozat és *a* köbszám, *b* is köbszám (VIII. 23.). Éppen ezt kellett megmutatni.

a _ _ 64 _ _	*b* _ _ 216 _ _
c _ _ 8 _ _	*d* _ _ 27 _ _
e _ _ 96 _ _	*f* _ _ 144 _ _

F.: IX. 10.

VIII. 26. Tétel

Hasonló síkszámok egymáshoz való aránya olyan, mint egy négyzetszámnak egy másik négyzetszámhoz.

Legyenek *a* és *b* hasonló síkszámok. Azt állítom, hogy *a*-nak *b*-hez való aránya olyan, mint egy négyzetszámnak egy másik négyzetszámhoz.

Minthogy ugyanis *a* és *b* hasonló síkszámok, *a* és *b* közé beilleszthető egy középarányos szám (VIII. 18.). Illesszünk be egy *c* számot, és vegyük a legkisebb számokat, *d*-t, *e*-t és *f*-et, melyek aránya ugyanaz, mint az *a*, *c*, *b* számoké (VII. 33.). Ekkor a szélső tagok négyzetszámok (VIII. 2. K.). Minthogy *a* úgy aránylik *b*-hez, mint *d* az *f*-hez, s *d* és *f* négyzetszámok, *a*-nak *b*-hez való aránya olyan, mint egy négyzetszámnak egy másik négyzetszámhoz. Éppen ezt kellett megmutatni.

a _ _ 20 _ _	*c* _ _ 30 _ _	*b* _ _ 40 _ _
d _ _ _ _	*e* _ _ _ _ _ _	*f* _ _ _ _ _ _ _ _ _

F.: X. 10. L.

VIII. 27. Tétel

Hasonló térszámok egymáshoz való aránya olyan, mint egy köbszámnak egy másik köbszámhoz.

Legyenek *a* és *b* hasonló térszámok. Azt állítom, hogy *a*-nak *b*-hez való aránya olyan, mint egy köbszámnak egy másik köbszámhoz.

Minthogy ugyanis *a* és *b* hasonló térszámok, *a* és *b* közé beilleszthető két középarányos szám (VIII. 19.). Illesszük be *c*-t és *d*-t, és vegyük a legkisebb számokat, melyek aránya ugyanaz, mint az *a*, *c*, *d*, *b* számoké és ugyanannyian vannak, mint ezek, *e*-t, *f*-et, *g*-t és *h*-t (VII. 33.). Ekkor a szélső tagok köbszámok (VIII. 2. K.). *a* úgy aránylik *b*-hez, mint *e* a *h*-hoz, *a*-nak *b*-hez való aránya tehát olyan, mint egy köbszámnak egy másik köbszámhoz. Éppen ezt kellett megmutatni.

*a*__40__	*c*__60__	*d*__90__	*b*__135__
*e*__8__	*f*__12__	*g*__18__	*h*__27__

Kilencedik könyv

IX. 1. Tétel

A két hasonló síkszám összeszorzásakor keletkező szám négyzetszám.

Legyen *a* és *b* két hasonló síkszám, és *a*-val *b*-t szorozva keletkezzék *c*. Azt állítom, hogy *c* négyzetszám.

Keletkezzék ugyanis *a*-t önmagával szorozva *d*. Ekkor *d* négyzetszám. Minthogy *a*-val önmagát szorozva *d*-t, *b*-t szorozva pedig *c*-t kapjuk, *d* úgy aránylik *c*-hez, mint *a* a *b*-hez (VII. 17.). Minthogy *a* és *b* hasonló síkszámok, beilleszthető közéjük egy középarányos szám (VIII. 18.). Ha viszont két szám közé mértani sorban beilleszthetők számok, akkor bármely két ugyanazon arányú szám közé is beilleszthető annyi szám, amennyi az előző számok közé (VIII. 8.), úgyhogy *d* és *c* közé is beilleszthető egy középarányos szám. S *d* négyzetszám; tehát *c* is négyzetszám (VIII. 22.). Éppen ezt kellett megmutatni.

a--*8*--	*b*--*18*--
c--*144*--	*d*--*64*--

F.: X. 28. 1. L.

IX. 2. Tétel

Ha két szám összeszorzásakor négyzetszám keletkezik, akkor a számok hasonló síkszámok.

Legyen *a* és *b* két szám, és keletkezzék *a*-val *b*-t szorozva a *c* négyzetszám. Azt állítom, hogy *a* és *b* hasonló síkszámok.

Keletkezzék ugyanis *a*-t önmagával szorozva *d*. Ekkor *d* négyzetszám. Minthogy *a*-val önmagát szorozva *d*-t, *b*-t szorozva pedig *c*-t

a--*8*--	*b*--*18*--
c--*144*--	*d*--*64*--

kapjuk, *d* úgy aránylik *c*-hez, mint *a* a *b*-hez (VII. 17.). Minthogy *d* négyzetszám, másrészt *c* is, *d* és *c* hasonló síkszámok, *d* és *c* közé tehát beilleszthető egy középarányos szám (VIII. 18.). *a* úgy aránylik *b*-hez, mint *d* a *c*-hez, tehát *a* és *b* közé is beilleszthető egy középarányos szám (VIII. 8.). Ha viszont két szám közé beilleszthető egy középarányos szám, akkor a számok hasonló síkszámok (VIII. 20.); *a* és *b* tehát hasonló síkszámok. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: X. 29. 1. L.

IX. 3. Tétel

Ha egy köbszámot megszorzunk önmagával, köbszám keletkezik.

Keletkezzék ugyanis az *a* köbszámot önmagával megszorozva *b*. Azt állítom, hogy *b* köbszám.

Vegyük ugyanis a *c* oldalát, és keletkezzék *c*-t önmagával szorozva *d*. Nyilvánvaló, hogy *c*-vel *d*-t szorozva *a*-t kapjuk. Minthogy *c*-t önmagával szorozva kapjuk *d*-t, *c* a benne levő egységek szerint van meg *d*-ben. Másrészt az egység is az abban levő egységek szerint van meg *c*-ben, amint tehát az egység *c*-hez, úgy *c* a *d*-hez. Ismét, minthogy *c*-vel *d*-t szorozva *a*-t kapjuk, *d* a *c*-ben levő egységek szerint van meg *a*-ban. Viszont az egység is az abban levő egységek szerint van meg *c*-ben, tehát amint az egység *c*-hez, úgy *d* az *a*-hoz. Amint viszont az egység *c*-hez, úgy *c* a *d*-hez, amint tehát az egység *c*-hez, úgy *c* a *d*-hez és *d* az *a*-hoz. Az egység és az *a* szám közé tehát két számot illesztettünk mértani sorban, *c*-t és *d*-t. Ismét, minthogy *a*-t önmagával szorozva kapjuk *b*-t, *a* a benne levő egységek szerint van meg *b*-ben. Viszont az egység is az abban levő egységek szerint van meg *a*-ban, tehát amint az egység *a*-hoz, úgy *a* a *b*-hez. Az egység és *a* közé viszont beillesztettünk két középarányos számot; *a* és *b* közé is beilleszthető tehát két középarányos szám (VIII. 8.). Ha viszont két szám közé beilleszthető két középarányos, és az első szám köbszám, akkor a második is köbszám (VIII. 23.). S *a* köbszám, tehát *b* is köbszám. Éppen ezt kellett megmutatni.

*a*__8__ *b*__64__
*c*__ *d*____

F.: IX. 4–5., 9.

IX. 4. Tétel

Ha egy köbszámot megszorzunk egy másik köbszámmal, köbszám keletkezik.

Keletkezzék ugyanis az *a* köbszámmal a *b* köbszámot megszorozva *c*. Azt állítom, hogy *c* köbszám.

Keletkezzék ugyanis *a*-t önmagával szorozva *d*. Ekkor *d* köbszám (IX. 3.). Minthogy *a*-val önmagát szorozva *d*-t, *b*-t szorozva pedig *c*-t kapjuk, *d* úgy aránylik *c*-hez, mint *a* a *b*-hez (VII. 17.). Minthogy *a* és *b* köbszámok, *a* és *b* hasonló térszámok, tehát *a* és *b* közé beilleszthető két középarányos szám (VIII. 19.), úgyhogy *d* és *c* közé is beilleszthető két középarányos szám (VIII. 8.). S *d* köbszám, tehát *c* is köbszám (VIII. 23.). Éppen ezt kellett megmutatni.

a - - 8 - - *b* - - 27 - -

c - - 216 - - *d* - - 64 - -

IX. 5. Tétel

Ha egy köbszámmal megszorozva egy számot köbszám keletkezik, akkor a megszorzott szám is köbszám.

Keletkezzék ugyanis az *a* köbszámmal a *b* számot megszorozva a *c* köbszám. Azt állítom, hogy *b* köbszám.

Keletkezzék ugyanis *a*-t önmagával szorozva *d*. Ekkor *d* köbszám (IX. 3.). Minthogy *a*-val önmagát szorozva *d*-t, *b*-t szorozva pedig *c*-t kapjuk, *d* úgy aránylik *c*-hez, mint *a* a *b*-hez (VII. 17.). Minthogy *d* és *c* köbszámok, hasonló térszámok, tehát *d* és *c* közé beilleszthető két középarányos szám (VIII. 19.). *a* úgy aránylik *b*-hez, mint *d* a *c*-hez, tehát *a* és *b* közé is beilleszthető két középarányos szám (VIII. 8.). S *a* köbszám, köbszám tehát *b* is. Éppen ezt kellett megmutatni.

a - - 8 - - *b* - - 27 - -

c - - 216 - - *d* - - 64 - -

IX. 6. Tétel

Ha egy számot önmagával megszorozva köbszám keletkezik, akkor maga a szám is köbszám.

Keletkezzék ugyanis az *a* számot önmagával megszorozva a *b* köbszám. Azt állítom, hogy *a* is köbszám.

Keletkezzék ugyanis *a*-val *b*-t megszorozva *c*. Minthogy *a*-val önmagát szorozva kapjuk *b*-t, *b*-t szorozva pedig *c*-t, *c* köbszám. Minthogy *a*-t önmagával szorozva kapjuk *b*-t, *a* a benne levő egységek szerint van meg *b*-ben. Másrészt az egység is az abban levő egységek szerint van meg *a*-ban, amint tehát az egység *a*-hoz, úgy *a* a *b*-hez. Minthogy *a*-val *b*-t szorozva *c*-t kapjuk, *b* az *a*-ban levő egységek szerint van meg *c*-ben. Viszont az egység *a*-ban szintén az abban levő egységek szerint van meg, amint tehát az egység *a*-hoz, úgy *b* a *c*-hez. Minthogy *b* és *c* köbszámok, hasonló térszámok, tehát *b* és *c* között van két középarányos szám (VIII. 19.). *a* úgy aránylik *b*-hez, mint *b* a *c*-hez, tehát *a* és *b* között is van két középarányos szám (VIII. 8.). S *b* köbszám, tehát *a* is köbszám (VIII. 23.). Éppen ezt kellett megmutatni.

a _ _ *8* _ _

b _ _ *64* _ _

c _ _ *512* _ _

F.: IX. 10.

IX. 7. Tétel

Ha egy összetett számmal megszorzunk egy másik számot, akkor térszám keletkezik.

Keletkezzék ugyanis az *a* összetett számmal a *b* számot megszorozva *c*. Azt állítom, hogy *c* térszám.

Minthogy ugyanis *a* összetett, osztja valamely szám. Ossza *d*, és legyen annyi egység *e*-ben, ahányszor megvan *d* az *a*-ban. Minthogy *d* az *e*-ben levő egységek szerint osztja *a*-t, *e*-vel *d*-t szorozva *a*-t kapjuk. S minthogy *a*-val *b*-t szorozva *c*-t kapjuk, *a* viszont *d* és *e* szorzata, *d* és *e* szorzatával *b*-t szorozva *c*-t kapjuk. *c* tehát térszám, és *d*, *e*, *b* az oldalai. Éppen ezt kellett megmutatni.

a _ _ _ _ _ _ *b* _ _ _ _ _

c _ _ *30* _ _

d _ _ *e* _ _ _

IX. 8. Tétel

Ha van egy egységgel kezdődő valahány tagú mértani sorozat, akkor az egységtől számított harmadik tag és az egy tag kihagyásával következők négyzetszámok, a negyedik tag és az összes két tag kihagyásával következő köbszám, a hetedik pedig és az öt tag kihagyásával következők egyszerre köb- és négyzetszámok.

Alkosson valahány szám, *a*, *b*, *c*, *d*, *e* és *f* az egységgel kezdődően mértani sorozatot. Azt állítom, hogy az egységtől számított harmadik tag, *b*, és az összes egy tag kihagyásával következő négyzetszám, a negyedik tag, *c*, és az összes két tag kihagyásával következő köbszám, a hetedik tag pedig, *f*, és az összes öt tag kihagyásával következő egyszerre köb- és négyzetszám.

Mivel amint az egység *a*-hoz, úgy aránylik *a* a *b*-hez, az egység ugyanannyiszor van meg *a*-ban, mint *a* a *b*-ben. Az egység az *a* számban az abban levő egységek szerint van meg, tehát *a* a *b*-ben szintén az *a*-ban levő egységek szerint van meg. *a*-val önmagát szorozva tehát *b*-t kapjuk; *b* négyzetszám. Minthogy *b*, *c*, *d* mértani sorozat, s *b* négyzetszám, *d* is négyzetszám (VIII. 22.). Ugyanígy *f* is négyzetszám. Hasonlóképp mutathatnánk meg, hogy az összes egy tag kihagyásával következő is négyzetszám.* Azt is állítom, hogy az egységtől számított negyedik tag, *c*, és az összes két tag kihagyásával következő köbszám. Minthogy ugyanis amint az egység *a*-hoz, úgy aránylik *b* a *c*-hez, az egység ugyanannyiszor van meg az *a* számban, mint *b* a *c*-ben. Az egység viszont *a*-ban az *a*-ban levő egységek szerint van meg, tehát *b* a *c*-ben szintén az *a*-ban levő egységek szerint van meg, *a*-val *b*-t szorozva tehát *c*-t kapjuk. Minthogy *a*-val önmagát szorozva kapjuk *b*-t, *b*-t szorozva pedig *c*-t, *c* köbszám. Minthogy *c*, *d*, *e*, *f* mértani sorozat, és *c* köbszám, *f* is köbszám (VIII. 23.). Megmutattuk azt is, hogy négyzetszám; az egységtől számított hetedik tag tehát mind köbszám, mind négyzetszám. Hasonlóképp mutatható meg, hogy az összes öt tag kihagyásával következő is mind köbszám, mind négyzetszám.* Éppen ezt kellett megmutatni.

a-- *d*--*16*--

b---- *e*--*32*--

c-------- *f*--*64*--

F.: IX. 9–10., 12–13.

IX. 9. Tétel

Ha az egységgel kezdődően valahány szám mértani sorozatot alkot, és az egység utáni tag négyzetszám, akkor az összes többi tag is négyzetszám; s ha az egység utáni tag köbszám, akkor az összes többi tag is köbszám.

Alkosson az egységgel kezdődően valahány szám, *a*, *b*, *c*, *d*, *e* és *f* mértani sorozatot, és legyen az egység utáni tag, *a*, négyzetszám. Azt állítom, hogy az összes többi tag is négyzetszám.

Hogy az egységtől számított harmadik tag, *b*, és az összes egy tag kihagyásával következő négyzetszám, már megmutattuk (IX. 8.). Azt állítom, hogy az összes többi is négyzetszám. Minthogy ugyanis *a*, *b*, *c* mértani sorozat, és *a* négyzetszám, *c* is négyzetszám (VIII. 22.). Ismét, minthogy *b*, *c*, *d* mértani sorozat, s *b* négyzetszám, *d* is négyzetszám.** Hasonlóképp mutathatnánk meg, hogy az összes többi tag is négyzetszám.*

a -- 64 --	d -- 64^4 --
b -- 64^2 --	e -- 64^5 --
c -- 64^3 --	f -- 64^6 --

Legyen most *a* köbszám. Azt állítom, hogy az összes többi tag is köbszám.

Hogy az egységtől számított negyedik tag, *c*, és az összes két tag kihagyásával következő köbszám, már megmutattuk (IX. 8.). Azt állítom, hogy az összes többi is köbszám. Minthogy ugyanis amint az egység *a*-hoz, úgy aránylik *a* a *b*-hez, az egység ugyanannyiszor van meg *a*-ban, mint *a* a *b*-ben. Az egység viszont *a*-ban az abban levő egységek szerint van meg, *a* a *b*-ben tehát szintén az önmagában levő egységek szerint van meg, *a*-t önmagával szorozva tehát *b*-t kapjuk. S *a* köbszám. Ha viszont egy köbszámot megszorzunk önmagával, köbszám keletkezik (IX. 3.), *b* is köbszám tehát. Minthogy négy szám, *a*, *b*, *c* és *d* mértani sorozatot alkot, és *a* köbszám, *d* is köbszám (VIII. 23.). Ugyanígy *e* is köbszám, és hasonlóképp az összes többi tag is köbszám.* Éppen ezt kellett megmutatni.

IX. 10. Tétel

Ha az egységgel kezdődően valahány szám mértani sorozatot alkot, és az egység utáni tag nem négyzetszám, akkor egyetlen másik tag sem négyzetszám, kivéve az egységtől számított harmadikat és az összes egy tag kihagyásával következőt; s ha az egység utáni tag nem köbszám, akkor egyetlen másik tag sem köbszám, kivéve az egységtől számított negyediket és az összes két tag kihagyásával következőt.

Alkosson az egységgel kezdődően valahány szám, *a*, *b*, *c*, *d*, *e* és *f* mértani sorozatot, és az egység utáni tag, *a*, ne legyen négyzetszám. Azt állítom, hogy egyetlen másik tag sem négyzetszám, kivéve az egységtől számított harmadikat [és az egy tag kihagyásával következőket].

Tegyük fel ugyanis, hogy *c* négyzetszám. *b* is négyzetszám (IX. 8.), *b*-nek és *c*-nek egymáshoz való aránya tehát olyan, mint egy négyzetszámnak egy másik négyzetszámhoz. *a* úgy aránylik *b*-hez, mint *b* a *c*-hez, tehát *a*-nak és *b*-nek egymáshoz való aránya olyan, mint egy négyzetszámnak egy másik négyzetszámhoz, úgyhogy *a* és *b* hasonló síkszámok. S *b* négyzetszám, négyzetszám tehát *a* is, aminek az ellenkezőjét tettük föl. *c* tehát nem négyzetszám. Hasonlóképpen mutathatnánk meg, hogy egyetlen másik tag sem négyzetszám, kivéve az egységtől számított harmadikat és az egy tag kihagyásával következőket.

a – –	*d* – – *16* – –
b – – – –	*e* – – *32* – –
c – – – – – – – –	*f* – – *64* – –

Ne legyen most *a* köbszám. Azt állítom, hogy egyetlen másik tag sem köbszám, kivéve az egységtől számított negyediket és a két tag kihagyásával következőket.

Tegyük föl ugyanis, hogy *d* köbszám. *c* is köbszám, ugyanis az egységtől számított negyedik tag (IX. 8.). *b* úgy aránylik *c*-hez, mint *c* a *d*-hez, *b*-nek *c*-hez való aránya tehát olyan, mint egy köbszámnak egy másik köbszámhoz. S *c* köbszám, *b* is köbszám tehát (VIII. 25.). Minthogy *a* úgy aránylik *b*-hez, mint az egység *a*-hoz, és az egység *a*-ban az abban levő egységek szerint van meg, *a* a *b*-ben szintén az önmagában levő egységek szerint van meg; *a*-val önmagát szorozva tehát a *b* köbszámot kapjuk. Ha viszont egy számot önmagával megszorozva köbszám keletkezik, akkor maga a szám is köbszám (IX. 6.), tehát *a* is köbszám, aminek az ellenkezőjét tettük föl. *d* tehát nem köbszám. Hasonlóképp mutathatnánk meg, hogy egyetlen másik tag sem köbszám, kivéve az egységtől számított negyediket és a két tag kihagyásával következőket. Éppen ezt kellett megmutatni.

IX. 11. Tétel

Ha az egységgel kezdődően valahány szám mértani sorozatot alkot, akkor egy kisebb tag egy nagyobban valamely, a sorozatban előforduló szám szerint van meg.

Alkosson az *a* egységgel kezdődően valahány szám, *b*, *c*, *d* és *e* mértani sorozatot. Azt állítom, hogy a *b*, *c*, *d* és *e* tagok legkisebbike, *b*, *c* és *d* valamelyike szerint van meg *e*-ben.

Minthogy ugyanis *d* úgy aránylik *e*-hez, mint az *a* egység *b*-hez, az *a* egység ugyanannyiszor van meg a *b* számban, mint *d* az *e*-ben; fölcserélve tehát az *a* egység ugyanannyiszor van meg *d*-ben, mint *b* az *e*-ben (VII. 15.). Az *a* egység viszont az abban levő egységek szerint van meg *d*-ben, tehát *b* az *e*-ben szintén a *d*-ben levő egységek szerint van meg, úgyhogy a kisebb tag, *b*, a nagyobb tagban, *e*-ben, valamely, a sorozatban előforduló szám szerint van meg.

a– *b*– – *c*– – – –

d– –*8*– – *e*– –*16*– –

F.: IX. 12–13.

Következmény

És nyilvánvaló, hogy ahányadik helyen van az osztó az egységtől, ugyanannyiadik helyen van a hányados az osztott számtól visszafelé számítva. Éppen ezt kellett megmutatni.

IX. 12. Tétel

Ha az egységgel kezdődően valahány szám mértani sorozatot alkot, akkor ugyanazok a prímek az egység melletti tagot is osztják, amelyek az utolsót.

Alkosson az egységgel kezdődően valahány szám, *a*, *b*, *c* és *d* mértani sorozatot. Azt állítom, hogy ugyanazon prímek *a*-t is osztják, amelyek *d*-t.

a– –*6*– – *b*– –*36*– – *c*– –*216*– – *d*– –*1296*– –

e– – – *f*– –*432*– – *g*– –*72*– – *h*– –*12*– –

Ossza ugyanis *d*-t valamely *e* prím. Azt állítom, hogy *e* osztja *a*-t. Ellenkező esetben ugyanis: *e* prím, és bármely prímszám bármely számhoz, melyet nem oszt, relatív prím (VII. 29.), *e* és *a* tehát relatív prímek. Miután *e* osztja *d*-t, legyen meg *f*-szer benne. *e*-vel *f*-et szorozva tehát *d*-t kapjuk. Ismét, minthogy *a* a *c*-ben levő egységek számaszor van meg *d*-ben (IX. 11.), *a*-val *c*-t szorozva *d*-t kapjuk. Viszont *e*-vel *f*-et szorozva is *d*-t kapjuk, tehát *a* és *c* szorzata egyenlő *e* és *f* szorzatával. *f* tehát úgy aránylik *c*-hez, mint *a* az *e*-hez (VII. 19.). *a* és *e* viszont relatív prímek, a relatív prímek pedig legkisebbek (VII. 21.), a legkisebbek pedig osztják az ugyanabban az arányban álló számokat (VII. 20.), mégpedig az egyik előtag ugyanannyiszor van meg a másik előtagban, mint az egyik utótag a másik utótagban; *e* tehát osztja *c*-t. Legyen meg benne *g*-szer; *e*-vel *g*-t szorozva tehát *c*-t kapjuk. Az előző tétel szerint viszont *a*-val *b*-t szorozva is *c*-t kapjuk, *a* és *b* szorzata tehát egyenlő *e* és *g* szorzatával. *g* tehát úgy aránylik *b*-hez, mint *a* az *e*-hez (VII. 19.). *a* és *e* viszont relatív prímek, a relatív prímek pedig legkisebbek (VII. 21.), a legkisebbek pedig osztják az ugyanabban az arányban álló számokat (VII. 20.), mégpedig az egyik előtag ugyanannyiszor van meg a másik előtagban, mint az egyik utótag a másik utótagban; *e* tehát osztja *b*-t. Legyen meg benne *h*-szor. *e*-vel *h*-t szorozva tehát *b*-t kapjuk. Másrészt *a*-t önmagával szorozva is *b*-t kapjuk (IX. 8.), tehát *e* és *h* szorzata egyenlő *a* négyzetével, *a* tehát úgy aránylik *h*-hoz, mint *e* az *a*-hoz (VII. 19.). *a* és *e* viszont relatív prímek, a relatív prímek pedig legkisebbek, a legkisebbek pedig osztják az ugyanabban az arányban álló számokat, mégpedig az egyik előtag ugyanannyiszor van meg a másikban, mint az egyik utótag a másik utótagban; *e* tehát osztja *a*-t, az egyik előtag a másik előtagot. Viszont nem is osztja; ami lehetetlen. *e* és *a* tehát nem relatív prímek. Relatív összetettek tehát. A relatív összetett számokat viszont osztja valamely [prím] szám. Minthogy *e* a feltétel szerint prím, a prímet pedig más szám nem osztja, csak önmaga, *e* osztja az *a*, *e* számokat, úgyhogy *e* osztja *a*-t. [*d*-t is osztja, tehát *e* osztja az *a*, *d* számokat.] Hasonlóképp mutathatnánk meg, hogy ugyanazon prímek *a*-t is osztják, amelyek *d*-t. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: IX. 13.

IX. 13. Tétel

Ha az egységgel kezdődően valahány szám mértani sorozatot alkot, és az egység utáni szám prím, akkor a legnagyobb tagot egyetlen [más] szám sem osztja, kivéve a sorozatban előfordulókat.

Alkosson az egységgel kezdődően valahány szám, *a*, *b*, *c* és *d* mértani sorozatot, és az egység utáni tag, *a*, legyen prím. Azt állítom, hogy legnagyobbikukat, *d*-t, egyetlen más szám sem osztja, csak *a*, *b* és *c*.

Tegyük föl ugyanis, hogy *e* osztja, és *e* nem azonos az *a*, *b*, *c* számok egyikével sem. Nyilvánvaló, hogy *e* nem prímszám. Ha ugyanis

e prím lenne és osztaná d-t, a-t is osztaná (IX. 12.), mely prím és nem azonos vele, ami lehetetlen. e tehát nem prím. Összetett tehát. Viszont bármely összetett számot oszt valamely prímszám (VII. 31.), e-t tehát osztja valamely prímszám. Azt állítom, hogy egyetlen más prím sem osztja, csak a. Ha ugyanis egy másik osztaná e-t, e pedig osztaná d-t,

a – – – b – – 9 – – c – – 27 – – d – – 81 – –

e – – ? – – f – – ? g – – ? – – h – – ? – –

ez a szám is osztaná d-t, úgyhogy a-t is osztaná (IX. 2.), mely prím és nem azonos vele, ami lehetetlen. a osztja tehát e-t. Miután e osztja d-t, legyen meg benne f-szer. Azt állítom, hogy f nem azonos az a, b, c számok egyikével sem. Ha ugyanis f azonos lenne az a, b, c számok egyikével és e-szer lenne meg d-ben, az a, b, c számok egyike is e-szer lenne meg d-ben. Azonban az a, b, c számok egyike az a, b, c számok valamelyikeszer van meg d-ben (IX. 11.), e tehát azonos lenne az a, b, c számok valamelyikével, aminek az ellenkezőjét tettük föl. f tehát nem azonos az a, b, c számok egyikével sem. Hasonlóképp mutatható meg, hogy a osztja f-et, megmutatván, hogy f sem prímszám. Ha ugyanis az lenne és osztaná d-t, a-t is osztaná, mely prím és nem azonos vele, ami lehetetlen. f tehát nem prím; összetett szám tehát. Viszont bármely összetett számot oszt valamely prímszám, f-et tehát osztja valamely prímszám. Azt állítom, hogy más prím nem osztja, csak a. Ha ugyanis valamely másik prím osztaná f-et, f pedig d-t, ez a szám is osztaná d-t, úgyhogy a-t is osztaná, mely prím és nem azonos vele, ami lehetetlen. a tehát osztja f-et. Minthogy e a d-ben f-szer van meg, e-vel f-et szorozva d-t kapjuk. Másrészt a-val c-t szorozva is d-t kapjuk (IX. 11.); a és c szorzata tehát egyenlő e és f szorzatával. f tehát úgy aránylik c-hez, mint a az e-hez (VII. 19.). a viszont osztja e-t, tehát f is osztja c-t. Legyen meg benne g-szer. Hasonlóképp mutathatnánk meg, hogy g nem azonos az a, b számok egyikével sem, és hogy a osztja. Minthogy f c-ben g-szer van meg, f-fel g-t szorozva c-t kapjuk. Másrészt a-val b-t szorozva is c-t kapjuk; a és b szorzata tehát egyenlő f és g szorzatával. g tehát úgy aránylik b-hez, mint a az f-hez. a viszont osztja f-et, tehát g is osztja b-t. Legyen meg benne h-szor. Hasonlóképp mutathatnánk meg, hogy h nem azonos a-val. Minthogy g a b-ben h-szor van meg, g-vel h-t szorozva b-t kapjuk. Másrészt a-t önmagával szorozva is b-t kapjuk (IX. 8.), h és g szorzata tehát egyenlő a négyzetével. a tehát úgy aránylik g-hez, mint h az a-hoz. a viszont osztja g-t, tehát h is osztja a-t, mely prím és nem azonos vele, ami lehetetlen. Nem osztja tehát a legnagyobb tagot, d-t, más szám, csak a, b és c. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: IX. 32., 36.

IX. 14. Tétel

Prímszámok legkisebb közös többszörösét egyetlen más prímszám sem osztja, csak amelyek eredetileg is osztják.

Legyen ugyanis a a b, c, d prímszámok legkisebb közös többszöröse. Azt állítom, hogy a-t egyetlen más prímszám sem osztja, csak b, c és d.

Tegyük fel ugyanis, hogy osztja az e prímszám, és e nem azonos a b, c, d számok egyikével sem. Miután e osztja a-t, legyen meg benne f-szer. e-vel f-et szorozva tehát a-t kapjuk. S a-t osztják a b, c, d prímszámok. Ha viszont két számot megszorzunk egymással, és a szorzatukat osztja valamely prímszám, akkor a tényezők egyikét is osztja (VII. 30.); b, c és d tehát osztják e és f egyikét. e-t nem osztják, mert e prím és nem azonos a b, c, d számok egyikével sem. f-et osztják tehát, mely kisebb a-nál, ami lehetetlen, a ugyanis feltétel szerint b, c és d legkisebb közös többszöröse. Nem osztja tehát a-t más prímszám, csak b, c és d. Éppen ezt kellett megmutatni.

a- -*30*- -

b- -   *c*- - -   *d*- - - - -

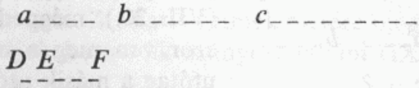
e- -?- -   *f*- -?- -

IX. 15. Tétel

Ha mértani sorban álló három szám legkisebb azon számok között, melyek aránya ugyanaz, mint az övéké, akkor bármely kettő összege relatív prím a harmadikhoz.

Legyen három mértani sorban álló szám, a, b és c, legkisebb azon számok között, melyek aránya ugyanaz, mint az övéké. Azt állítom, hogy az a, b, c számok közül bármely kettőnek az összege relatív prím a harmadikhoz, a meg b a c-hez, b meg c az a-hoz, végül a meg c a b-hez.

Vegyünk ugyanis két legkisebb számot, DE-t és EF-et, melyek aránya ugyanaz, mint az *a*, *b*, *c* számoké (VII. 33.). Nyilvánvaló, hogy *DE*-vel önmagát szorozva *a*-t kapjuk, *EF*-et szorozva *b*-t kapjuk, s végül *EF*-et önmagával szorozva *c*-t kapjuk (VIII. 2.). Minthogy *DE* és *EF* legkisebbek, relatív prímek (VII. 22.). Ha viszont két szám relatív prím, akkor az összegük relatív prím bármelyik taghoz (VII. 28.); *DF* is relatív prím tehát *DE*-hez és *EF*-hez. Másrészt *DE* is relatív prím *EF*-hez, tehát *DF* és *DE* relatív prímek *EF*-hez. Ha viszont két szám relatív prím egy harmadikhoz, akkor a szorzatuk is relatív prím hozzá (VII. 24.), úgyhogy *FD* és *DE* szorzata relatív prím *EF*-hez, úgyhogy *FD* és *DE* szorzata *EF* négyzetéhez is relatív prím [ha ugyanis két szám relatív prím, akkor az egyik négyzete is relatív prím a másikhoz (VII. 25.)]. *FD* és *DE* szorzata azonban *DE* négyzetének meg *DE* és *EF* szorzatának az összege (II. 3.), tehát *DE* négyzetének meg *DE* és *EF* szorzatának összege relatív prím *EF* négyzetéhez. S *DE* négyzete *a*, *DE* és *EF* szorzata *b*, *EF* négyzete pedig *c*, tehát *a* és *b* összege relatív prím *c*-hez. Hasonlóképp mutathatnánk meg, hogy *b* és *c* összege is relatív prím *a*-hoz. Azt állítom, hogy *a* és *c* összege is relatív prím *b*-hez. Minthogy ugyanis *DF* relatív prím *DE* és *EF* bármelyikéhez, *DF* négyzete relatív prím *DE* és *EF* szorzatához (VII. 24–25.). *DF* négyzetével azonban egyenlő *DE* és *EF* négyzeteinek meg *DE* és *EF* kétszeres szorzatának az összege (II. 4.), tehát *DE* és *EF* négyzeteinek meg *DE* és *EF* kétszeres szorzatának összege relatív prím *DE* és *EF* szorzatához. Szétbontván, *DE* és *EF* négyzeteinek meg *DE* és *EF* egyszeres szorzatának összege relatív prím *DE* és *EF* szorzatához. Újra szétbontván *DE* és *EF* négyzetösszege relatív prím *DE* és *EF* szorzatához. S *DE* négyzete *a*, *DE* és *EF* szorzata *b*, *EF* négyzete pedig *c*. *a* és *c* összege tehát relatív prím *b*-hez. Éppen ezt kellett megmutatni.



IX. 16. Tétel

Ha két szám relatív prím, akkor nem lehetséges, hogy amint az első szám a másodikhoz, úgy arányuljék a második valamely harmadikhoz.

Legyen ugyanis két szám, *a* és *b*, relatív prím. Azt állítom, hogy nem lehetséges, hogy amint a a b-hez, úgy arányuljék b valamely harmadik számhoz.

Tegyük föl ugyanis, hogy b úgy aránylik c-hez, mint a a b-hez. a és b relatív prímek, a relatív prímek pedig legkisebbek (VII. 21.), a legkisebbek pedig osztják az ugyanabban az arányban álló számokat (VII. 20.), mégpedig az egyik előtag ugyanannyiszor van meg a másik előtagban, mint az egyik utótag a másik utótagban; osztja tehát a a b-t, az egyik előtag a másikat. De önmagát is osztja: a tehát osztja az a, b relatív prímeket, ami lehetetlen. Nem aránylik tehát úgy b a c-hez, mint a a b-hez. Éppen ezt kellett megmutatni.

*a*___ *b*____

*c*__?__

F.: IX. 18.

IX. 17. Tétel

Ha valahány szám mértani sorozatot alkot, és a szélső tagok relatív prímek, akkor nem lehetséges, hogy amint az első tag a másodikhoz, úgy arányuljék az utolsó valamely másik számhoz.

Alkosson valahány szám, a, b, c és d mértani sorozatot, és legyenek a szélső tagok, a és d relatív prímek. Azt állítom, hogy nem lehetséges, hogy amint a a b-hez, úgy arányuljék d valamely másik számhoz.

Tegyük föl ugyanis, hogy d úgy aránylik e-hez, mint a a b-hez. Fölcserélve tehát amint a a d-hez, úgy b az e-hez (VII. 13.). a és d viszont relatív prímek, a relatív prímek pedig legkisebbek (VII. 21.), a legkisebbek pedig osztják az ugyanabban az arányban álló számokat, mégpedig az egyik előtag ugyanannyiszor van meg a másikban, mint az egyik utótag a másik utótagban (VII. 20.), a tehát osztja b-t. b úgy aránylik c-hez, mint a a b-hez, tehát b is osztja c-t, úgyhogy a is osztja c-t. Minthogy c úgy aránylik d-hez, mint b a c-hez, és b osztja c-t, c is osztja d-t. a azonban osztotta c-t, úgyhogy a a d-t is osztja. Viszont önmagát is osztja, a tehát osztja az a, d relatív prímszámokat, ami lehetetlen. Nem aránylik tehát úgy d valamely másik számhoz, mint a a b-hez. Éppen ezt kellett megmutatni.

*a*__*8*__ *b*__*12*__ *c*__*18*__

*d*__*27*__ *e*__?__

F.: IX. 19.

IX. 18. Tétel

Két adott szám esetén vizsgáljuk meg, lehetséges-e hozzájuk harmadik arányost találni!

Legyen a és b a két adott szám, és kelljen azt megvizsgálni, lehetséges-e hozzájuk harmadik arányost találni.

a és b vagy relatív prímek, vagy nem. A relatív prímek esetére megmutattuk, hogy nem lehet hozzájuk harmadik arányost találni (IX. 16.).

Most a és b ne legyenek relatív prímek, és b-t önmagával szorozva keletkezzék c. Mármost a vagy osztja c-t, vagy nem osztja. Legyen meg először benne, mégpedig d-szer. a-val d-t szorozva tehát c-t kapjuk. Másrészt b-t önmagával szorozva is c-t kapjuk, tehát a és d szorzata egyenlő b négyzetével. b tehát úgy aránylik d-hez, mint a a b-hez (VII. 19.): az a, b számokhoz tehát harmadik arányost találtunk, d-t.

*a*__6__ *b*__12__

*c*__144__ *d*__24__

Ne ossza most a a c-t. Azt állítom, hogy az a, b számokhoz nem lehet harmadik arányost találni. Tegyük föl ugyanis, hogy lehet, és legyen d az. Ekkor a és d szorzata egyenlő b négyzetével (VII. 19.). b négyzete viszont c, tehát a és d szorzata egyenlő c-vel, úgyhogy a-val d-t szorozva c-t kapjuk, a tehát c-ben megvan d-szer. Azonban a föltétel szerint nem osztja: ez ellentmondás. Nem lehet tehát az a, b számokhoz harmadik arányost találni, ha a nem osztja c-t. Éppen ezt kellett megmutatni.

IX. 19. Tétel

Három adott szám esetén vizsgáljuk meg, lehetséges-e hozzájuk negyedik arányost találni!

Legyen a, b és c a három adott szám, és kelljen megvizsgálni, hogy lehetséges-e hozzájuk negyedik arányost találni.

*a*___ *b*______ *c*_____

*d*__30__ *e*__________

Ekkor vagy nem alkotnak mértani sorozatot, és a szélső tagok relatív prímek, vagy mértani sorozatot alkotnak, és a szélső tagok nem relatív prímek, vagy sem nem alkotnak mértani sorozatot, sem a szélső tagok nem relatív prímek, vagy mind mértani sorozatot alkotnak, mind a szélső tagok relatív prímek.

Arra az esetre, ha *a*, *b* és *c* mértani sorozatot alkot, és a szélső tagok relatív prímek, már megmutattuk, hogy nem lehetséges hozzájuk negyedik arányos számot találni (IX. 17.).

Ne alkossanak most *a*, *b* és *c* mértani sorozatot, ám a szélső tagok legyenek ismét relatív prímek. Azt állítom, hogy ekkor sem lehet hozzájuk negyedik arányost találni.* Tegyük föl ugyanis, hogy lehet, és legyen *d* az, úgyhogy amint *a* a *b*-hez, úgy arányuljék *c* a *d*-hez, és amint *b* a *c*-hez, úgy *d* az *e*-hez. Mivel amint *a* a *b*-hez, úgy aránylik *c* a *d*-hez, amint pedig *b* a *c*-hez, úgy *d* az *e*-hez, egyenlő sok tagon át amint *a* a *c*-hez, úgy *c* az *e*-hez (VII. 14.). *a* és *c* viszont relatív prímek, a relatív prímek pedig legkisebbek (VII. 21.), a legkisebbek pedig osztják az ugyanabban az arányban álló számokat (VII. 20.), mégpedig az egyik előtag ugyanannyiszor van meg a másik előtagban, mint az egyik utótag a másik utótagban. Osztja tehát *a* a *c*-t, az egyik előtag a másik előtagot. De önmagát is osztja: *a* tehát osztja *a*-t és *c*-t, melyek relatív prímek, ami lehetetlen. Nem lehet tehát az *a*, *b*, *c* számokhoz negyedik arányost találni.

Alkossanak most ismét mértani sorozatot *a*, *b* és *c*, s *a* és *c* ne legyenek relatív prímek. Azt állítom, hogy lehetséges hozzájuk negyedik arányost találni. Keletkezzék ugyanis *b*-vel *c*-t szorozva *d*. Ekkor *a* vagy osztja *d*-t, vagy nem osztja. Legyen meg először benne, mégpedig *e*-szer. *a*-val *e*-t szorozva tehát *d*-t kapjuk. Másrészt *b*-vel *c*-t szorozva is *d*-t kapjuk, tehát *a* és *e* szorzata egyenlő *b* és *c* szorzatával. *c* tehát úgy aránylik *e*-hez, mint *a* a *b*-hez (VII. 19.): az *a*, *b*, *c* számokhoz tehát negyedik arányost találtunk, *e*-t. Ne ossza most *a* a *d*-t. Azt állítom, hogy nem lehet az *a*, *b*, *c* számokhoz negyedik arányost találni. Tegyük ugyanis föl, hogy lehet, és legyen *e* az. Ekkor *a* és *e* szorzata egyenlő *b* és *c* szorzatával (VII. 19.). *b* és *c* szorzata viszont *d*, tehát *a* és *e* szorzata is egyenlő *d*-vel. *a*-val *e*-t szorozva tehát *d*-t kapjuk. *a* tehát megvan *d*-ben *e*-szer, úgyhogy *a* osztja *d*-t. Azonban nem is osztja, ami ellentmondás. Nem lehet tehát az *a*, *b*, *c* számokhoz negyedik arányost találni, ha *a* nem osztja *d*-t.

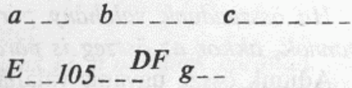
Most pedig az *a*, *b*, *c* számok se mértani sorozatot ne alkossanak, se a szélső tagok ne legyenek relatív prímek, és *b*-vel *c*-t szorozva keletkezzék *d*. Hasonlóképp mutathatnánk meg, hogy ha *a* osztja *d*-t, lehet hozzájuk negyedik arányost találni, ha pedig nem osztja, nem lehet. Éppen ezt kellett megmutatni.

IX. 20. Tétel

Prímszámból prímszámok bármely adott sokaságánál több van.

Legyenek az adott prímszámok *a*, *b* és *c*. Azt állítom, hogy több prímszám van, mint *a*, *b* és *c*.

Vegyük ugyanis *a*, *b* és *c* legkisebb közös többszörösét (VII. 36.), legyen ez *DE*, és adjuk hozzá *DE*-hez a *DF* egységet. Ekkor *EF* vagy prím, vagy nem. Legyen először prím. Találtunk tehát az *a*, *b*, *c* számoknál több prímet, *a*-t, *b*-t, *c*-t és *EF*-et.



Ne legyen most *EF* prím. Ekkor osztja valamely prímszám (VII. 31.). Ossza a *g* prím. Azt állítom, hogy *g* az *a*, *b* és *c* egyikével sem azonos. Tegyük föl ugyanis, hogy az. *a*, *b* és *c* osztják *DE*-t, tehát *g* is osztja *DE*-t. Viszont *EF*-et is osztja, tehát a maradék *DF* egységet is osztja *g* (2. E.), noha szám, ami ellentmondás. *g* tehát nem azonos az *a*, *b*, *c* számok egyikével sem. S feltétel szerint prím, tehát találtunk az adott *a*, *b*, *c* prímeknél több prímet, *a*-t, *b*-t, *c*-t és *g*-t. Éppen ezt kellett megmutatni.

IX. 21. Tétel

*Bárhány páros számot adunk össze, az összeg páros.**

Adjunk össze ugyanis valahány páros számot, *AB*-t, *BC*-t, *CD*-t és *DE*-t. Azt állítom, hogy az *AE* összeg páros.

Minthogy ugyanis *AB*, *BC*, *CD* és *DE* mindegyike páros, van fele része, úgyhogy az *AE* összegnek is van fele része. Páros pedig a ketté bontható szám: *AE* tehát páros. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: IX. 22–23., 28.

IX. 22. Tétel

Ha összeadunk valahány páratlan számot, melyek páros sokan vannak, akkor az összeg páros.

Adjunk össze ugyanis valahány páratlan számot, melyek páros sokan vannak, *AB*-t, *BC*-t, *CD*-t és *DE*-t. Azt állítom, hogy az *AE* összeg páros.

Minthogy ugyanis *AB*, *BC*, *CD* és *DE* mindegyike páratlan, ha mindegyikből kivonunk egy egységet, akkor minden maradék páros lesz, úgyhogy azok összege is páros lesz (IX. 21.). Másrészt az egységek száma is páros, tehát az *AE* összeg is páros (IX. 21.). Éppen ezt kellett megmutatni.

A B C D E

F.: IX. 23.

IX. 23. Tétel

Ha összeadunk valahány páratlan számot, melyek páratlan sokan vannak, akkor az összeg is páratlan lesz.

Adjunk össze ugyanis valahány páratlan számot, melyek páratlan sokan vannak, *AB*-t, *BC*-t és *CD*-t. Azt állítom, hogy az *AD* összeg páratlan.

A B C E D

Vonjuk ki *CD*-ből a *DE* egységet. Ekkor a *CE* maradék páros. Viszont *AC* is páros (IX. 22.), tehát az *AE* összeg is páros (IX. 21.). S *DE* egy egység, tehát *AD* páratlan. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: IX. 29–30.; X. 27. Függelék

IX. 24. Tétel

Ha egy páros számból párosat vonunk ki, a maradék páros.

Vonjuk ugyanis ki az *AB* páros számból a páros *BC*-t. Azt állítom, hogy a *CA* maradék páros.

Minthogy ugyanis *AB* páros, van fele része. Ugyanígy *BC*-nek is van fele része, úgyhogy a maradék [*CA*-nak] is [van fele része, tehát] *AC* páros. Éppen ezt kellett megmutatni.

A C B

F.: IX. 25–27., X. 29. 1. L.

IX. 25. Tétel

Ha egy páros számból páratlant vonunk ki, a maradék páratlan.

Vonjuk ugyanis ki az *AB* páros számból a páratlan *BC*-t. Azt állítom, hogy a *CA* maradék páratlan.

A C D B

Vonjuk ugyanis ki BC-ből a CD egységet. Ekkor DB páros. Viszont AB is páros, tehát az AD maradék is páros (IX. 24.). S CD egység, tehát CA páratlan. Éppen ezt kellett megmutatni.

IX. 26. Tétel

Ha egy páratlan számból páratlant vonunk ki, a maradék páros.

Vonjuk ugyanis ki az AB páratlan számból a páratlan BC-t. Azt állítom, hogy a CA maradék páros.

A C DB

Miután ugyanis AB páratlan, levonva a BD egységet a maradék AD páros. Ugyanígy CD is páros, úgyhogy a CA maradék is páros (IX. 24.). Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: X. 29. 1. L.

IX. 27. Tétel

Ha egy páratlan számból párosat vonunk ki, a maradék páratlan.

Vonjuk ugyanis ki az AB páratlan számból a páros BC-t. Azt állítom, hogy a CA maradék páratlan.

AD C B

Vonjuk ki az AD egységet. Ekkor DB páros. Viszont BC is páros, tehát a CD maradék is páros (IX. 24.). CA tehát páratlan. Éppen ezt kellett megmutatni.

IX. 28. Tétel

Ha egy páratlan számmal megszorzunk egy párosat, a szorzat páros lesz.

Keletkezzék ugyanis a páros b-t az a páratlan számmal megszorozva c. Azt állítom, hogy c páros.

a b

c

Minthogy ugyanis a-val b-t szorozva kaptuk c-t, c annyi b-vel egyenlő számból tevődik össze, ahány egység van a-ban. S b páros, tehát c páros számokból tevődik össze. Bárhány páros számot adunk viszont össze, az összeg páros (IX. 21.), tehát c páros. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: IX. 31.

IX. 29. Tétel

Ha egy páratlan számmal megszorzunk egy páratlant, a szorzat páratlan lesz.

Keletkezzék ugyanis az *a* páratlan számmal megszorozva a páratlan *b*-t *c*. Azt állítom, hogy *c* páratlan.

a--- b-----

c--15--

Minthogy ugyanis *a*-val *b*-t szorozva kaptuk *c*-t, *c* annyi *b*-vel egyenlő számból tevődik össze, ahány egység van *a*-ban. S *a* és *b* mindegyike páratlan, *c* tehát páratlan számokból tevődik össze, melyek páratlan sokan vannak, úgyhogy *c* páratlan (IX. 23.). Éppen ezt kellett megmutatni.

IX. 30. Tétel

Ha egy páratlan szám oszt egy párosat, akkor a felét is osztja.

Ossza ugyanis az *a* páratlan szám a páros *b*-t. Azt állítom, hogy a felét is osztja.

Miután ugyanis *a* osztja *b*-t, legyen meg benne *c*-szer. Azt állítom, hogy *c* nem páratlan. Tegyük föl ugyanis, hogy az. Minthogy *a* a *b*-ben *c*-szer van meg, *a*-val *c*-t szorozva *b*-t kapjuk. *b* tehát páratlan számokból tevődik össze, melyek páratlan sokan vannak. *b* tehát páratlan (IX. 23.), ami ellentmondás, mert feltétel szerint páros. *c* tehát nem páratlan; páros tehát *c*, úgyhogy *a* a *b*-ben párosszor van meg. Ezért aztán a felét is osztja. Éppen ezt kellett megmutatni.

a--- c----

b-------------

F.: IX. 31.

IX. 31. Tétel

*Ha egy páratlan szám relatív prím valamely számhoz, akkor a kétszereséhez is relatív prím.**

Legyen ugyanis az *a* páratlan szám valamely számhoz, *b*-hez relatív prím, és legyen *b* kétszerese *c*. Azt állítom, hogy *a* relatív prím *c*-hez [is].

a----- b---

c------- d--

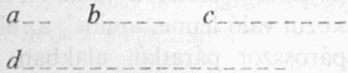
Ha ugyanis [*a* és *c*] nem relatív prímek, osztja őket valamely szám. Ossza, s legyen *d* az. *a* páratlan, tehát *d* is páratlan (IX. 28.). Minthogy a páratlan *d* osztja *c*-t, és *c* páros, *c*-nek a felét is osztja [*d*] (IX. 30.). *c* fele viszont *b*, tehát *d* osztja *b*-t. Másrészt *a*-t is osztja. *d* tehát osztja a relatív prím *a*-t és *b*-t, ami lehetetlen. Nem igaz tehát, hogy *a* nem relatív prím *c*-hez. *a* és *c* tehát relatív prímek. Éppen ezt kellett megmutatni.

IX. 32. Tétel

A diádból kétszerezéssel nyert összes szám csak párosszor páros alakban áll elő.*

Kapjuk ugyanis az *a* diádból kétszerezéssel a tetszőleges sok *b*, *c*, *d* számot. Azt állítom, hogy a *b*, *c*, *d* számok csak párosszor páros alakban állnak elő.

Hogy [a *b*, *c*, *d* számok] mindegyike előáll párosszor páros alakban, az nyilvánvaló, hiszen a diádból kétszerezéssel kaptuk őket. Azt állítom, hogy csak ilyen alakban állnak elő. Vegyünk ugyanis egy egységet. Minthogy ekkor az egységgel kezdődően valahány szám mértani sorozatot alkot, és az egység utáni szám, *a*, prím, az *a*, *b*, *c*, *d* számok legnagyobbikát, *d*-t, egyetlen más szám sem osztja, kivéve *a*-t, *b*-t és *c*-t (IX. 13.). S *a*, *b* és *c* mindegyike páros, tehát *d* csak párosszor páros alakban áll elő. Hasonlóképp mutathatnánk meg, hogy *b* és *c* mindketten [szintén] csak párosszor páros alakban állnak elő. Éppen ezt kellett megmutatni.



IX. 33. Tétel

Ha egy szám fele páratlan, akkor a szám csak párosszor páratlan alakban áll elő.

Legyen ugyanis az *a* szám fele páratlan. Azt állítom, hogy *a* csak párosszor páratlan alakban áll elő.

Hogy párosszor páratlan alakban előáll, az nyilvánvaló, hiszen a fele, mely páratlan, párosszor van meg benne. Most azt állítom, hogy csak ilyen alakban áll elő. Ha ugyanis *a* előállna párosszor páros alakban, akkor egy páros szám páros számszor lenne meg benne, úgyhogy a felét is osztaná egy páros szám, noha az páratlan, ami ellentmondás. *a* tehát csak párosszor páratlan alakban áll elő. Éppen ezt kellett megmutatni.

IX. 34. Tétel

Ha egy szám sem nem a diádból kétszerezéssel nyertek közül való, sem a fele nem páratlan, akkor mind párosszor páros, mind párosszor páratlan alakban előáll.

Ne legyen ugyanis az *a* szám sem a diádból kétszerezéssel nyertek közül való, sem a fele ne legyen páratlan. Azt állítom, hogy *a* mind párosszor páros, mind párosszor páratlan alakban előáll.

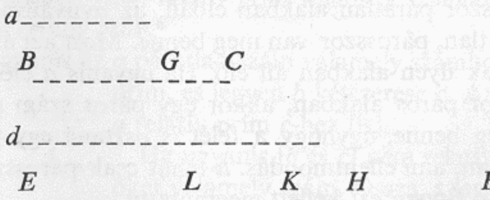
Hogy *a* párosszor páros alakban előáll, az nyilvánvaló, hiszen a fele nem páratlan. Most azt állítom, hogy párosszor páratlan alakban is

előáll. Ha ugyanis *a*-t megfelezzük és a felét megfelezzük és így tovább, valamely páratlan számhoz jutunk, mely páros számszor van meg *a*-ban. Ellenkező esetben ugyanis a diádhoz jutnánk, és *a* a diádból kétszerezéssel nyertek közül való lenne, aminek az ellenkezőjét tettük föl, úgyhogy *a* előáll párosszor páratlan alakban. Megmutattuk, hogy párosszor páros alakban is előáll. *a* tehát mind párosszor páros, mind párosszor páratlan alakban előáll. Éppen ezt kellett megmutatni.

IX. 35. Tétel

*Ha valahány szám mértani sorozatot alkot, és mind a második, mind az utolsó tagból az elsővel egyenlő számot vonunk ki, akkor amint a második tag maradéka az első taghoz, úgy aránylik az utolsó maradéka az előtte álló tagok összegéhez.**

Alkosson valahány szám, *a*, *BC*, *d* és *EF* – kezdve a legkisebbel, *a*-val – mértani sorozatot, és vonjuk ki *BC*-ből és *EF*-ből az *a*-val egyenlő *BG*-t, illetve *FH*-t. Azt állítom, hogy amint *GC* az *a*-hoz, úgy aránylik *EH* az *a* meg *BC* meg *d*-hez.



Vegyünk ugyanis egy *BC*-vel egyenlő *FK*-t és egy *d*-vel egyenlő *FL*-t. Minthogy *FK* egyenlő *BC*-vel, s ezekből *FH* egyenlő *BG*-vel, a maradék *HK* egyenlő a maradék *GC*-vel. Mivel amint *EF* a *d*-hez, úgy aránylik *d* a *BC*-hez, és *BC* az *a*-hoz, és *d* egyenlő *FL*-lel, *BC* az

FK-val, *a* pedig *FH*-val, amint *EF* az *FL*-hez, úgy aránylik *LF* az *FK*-hoz és *FK* az *FH*-hoz. Szétbontván, amint *EL* az *FL*-hez, úgy *LK* az *FK*-hoz és *KH* az *FH*-hoz (VII. 11., 13.). Amint tehát az egyik előtag az utótagjához, úgy aránylik az előtagok összege az utótagok összegéhez (VII. 12.), amint tehát *KH* az *FH*-hoz, úgy *EL* meg *LK* meg *KH* az *LF* meg *FK* meg *HF*-hez. *KH* viszont egyenlő *CG*-vel, *FH* az *a*-val, *LF* meg *FK* meg *HF* pedig *d* meg *BC* meg *a*-val, amint tehát *CG* az *a*-hoz, úgy aránylik *EH* a *d* meg *BC* meg *a*-hoz. Amint tehát a második tag maradéka az elsőhöz, úgy aránylik az utolsó tag maradéka az előtte álló tagok összegéhez. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: IX. 36.

IX. 36. Tétel

Ha az egységtől kezdve kétszeres arányban képzünk egy mértani sorozatot, amíg a sorösszeg prím nem lesz, és az összeggel megszorozzuk az utolsó tagot, akkor a szorzat tökéletes szám lesz.***

Képezzünk ugyanis az egységtől kezdve kétszeres arányban egy mértani sorozatot, amíg a sorösszeg prím nem lesz, *a*, *b*, *c*, *d*-t, legyen *e* egyenlő az összeggel, és keletkezzék *e*-vel *d*-t szorozva *FG*. Azt állítom, hogy *FG* tökéletes szám.

*a*__ *b*____ *c*________ *d*__16__

*e*__31__ *F*__31__*O*__465__*G*

*H*__31__*N*__31__*K* *l*__124__ *m*__248__

*p*__?__ *q*__?__

Vegyünk ugyanis kétszeres arányban *e*-vel kezdve annyi számot *e*-t, *HK*-t, *l*-et és *m*-et, ahányan vannak *a*, *b*, *c* és *d*. Ekkor egyenlő sok tagon át *e* úgy aránylik *m*-hez, mint *a* a *d*-hez (VII. 14.). *e* és *d* szorzata tehát egyenlő *a* és *m* szorzatával (VII. 19.). *e* és *d* szorzata *FG*, tehát *a* és *m* szorzata egyenlő *FG*-vel. *a*-val *m*-et szorozva tehát *FG*-t kapjuk, *m* tehát megvan *FG*-ben az *a*-ban levő egységek szerint. *a* diád, tehát *FG* kétszerese *m*-nek. Viszont *m*, *l*, *HK* és *e* is rendre egymás kétszeresei, tehát e, HK, l, m és FG mértani sorozatot alkot a kétszeres arányban. Vonjuk ki a második tagból, HK-ból és az utolsóból, FG-ből, az elsővel, e-vel egyenlő HN-t, illetve FO-t. Ekkor amint a második tag maradéka az elsőhöz, úgy aránylik az utolsó tag maradéka az előtte álló tagok összegéhez (IX. 35.), tehát amint NK az e-hez, úgy OG az m meg l meg KH meg e-hez. NK egyenlő e-vel, tehát OG is egyenlő m meg l meg HK meg e-vel. Másrészt FO is egyenlő e-vel, e pedig a meg b meg c meg d meg az egységgel. A teljes FG tehát egyenlő e meg HK meg l meg m meg a meg b meg c meg d meg az egységgel; és ezek osztják. Azt is állítom, hogy FG-t egyetlen más szám sem osztja, csak a, b, c, d, e, HK, l, m és az egység. Tegyük föl ugyanis, hogy FG-t osztja valamely p szám, és p nem azonos az a, b, c, d, e, HK, l, m számok egyikével sem. Legyen annyi egység q-ban, ahányszor megvan p az FG-ben. Ekkor q-val p-t szorozva FG-t kapjuk. Viszont e-vel d-t szorozva is FG-t kapjuk, tehát p úgy aránylik d-hez, mint e a q-hoz (VII. 19.). Minthogy az egységgel kezdődően a, b, c és d mértani sorozatot alkotnak, d-t egyetlen más szám sem osztja, csak a, b és c (IX. 13.). Föltettük, hogy p nem azonos a, b, c egyikével sem, tehát p nem osztja d-t. Viszont e úgy aránylik q-hoz, mint p a d-hez, tehát e sem osztja q-t. e prímszám, bármely prímszám viszont bármely számhoz, melyet nem oszt, relatív prím (VII. 29.). e és q tehát relatív prímek. A relatív prímek viszont legkisebbek (VII. 21.), a legkisebbek pedig osztják az ugyanabban az arányban álló számokat (VII. 20.), mégpedig az egyik előtag ugyanannyiszor van meg a másik előtagban, mint az egyik utótag a másik utótagban. S p úgy aránylik d-hez, mint e a q-hoz, tehát e ugyanannyiszor van meg p-ben, mint q a d-ben. d-t viszont egyetlen más szám sem osztja, csak a, b és c, tehát q azonos a, b és c egyikével. Legyen b-vel azonos. Vegyünk e-vel kezdődően annyi tagot, e-t, HK-t és l-et, ahányan vannak b, c, d. e, HK, l és b, c, d ugyanabban az arányban állnak, tehát egyenlő sok tagon át e úgy aránylik l-hez, mint b a d-hez (VII. 14.). b és l szorzata tehát egyenlő d és e szorzatával (VII. 19.). d és e szorzata viszont egyenlő p és q szorzatával, tehát p és q szorzata is egyenlő b és l szorzatával. l tehát úgy aránylik p-hez, mint q a b-hez (VII. 19.). q azonos b-vel, tehát l is azonos p-vel, ami lehetetlen, mivel föltettük, hogy p nem azonos az adott számok egyikével sem. Nem osztja tehát FG-t egyetlen szám sem, csak *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *HK*, *l*, *m* és az egység. Megmutattuk, hogy *FG* egyenlő *a* meg *b* meg *c* meg *d* meg *e* meg *HK* meg *l* meg *m* meg az egységgel. Egy szám viszont tökéletes, ha egyenlő az osztói összegével: *FG* tehát tökéletes szám. Éppen ezt kellett megmutatni.

Tizedik könyv

Definíciók

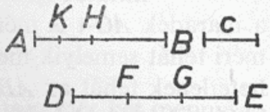
1. Mennyiségeket összemérhetőknek mondunk, ha ugyanazon mértékkel mérhetők, összemérhetetleneknek pedig, ha nem található hozzájuk közös mérték.
2. Szakaszok négyzetesen összemérhetők, ha a négyzeteik ugyanazon idommal mérhetők, összemérhetetlenek pedig, ha a négyzeteikhez nem található idom, mely közös mérték lenne.*
3. Ezek alapján megmutatjuk, hogy adott szakasszal végtelen sok összemérhető és – akár csak lineárisan, akár négyzetesen is – összemérhetetlen szakasz létezik (vö. X. 10.)*. Nevezzük az adott szakaszt racionálisnak, és a vele – akár lineárisan és négyzetesen, akár csak négyzetesen – összemérhető szakaszokat racionálisoknak, a vele összemérhetetleneket pedig irracionálisoknak.**
4. És nevezzük az adott szakasz négyzetét racionálisnak, és az azzal összemérhető felületeket racionálisoknak, az azzal összemérhetetleneket pedig irracionálisoknak, és az őket előállító szakaszokat – ti. ha a felületek négyzetek, magukat az oldalakat, ha pedig valamely más sokszögek, a velük egyenlő négyzeteket fölrajzoló szakaszokat* – irracionálisoknak.

X. 1. Tétel

Ha adva van két nem egyenlő mennyiség, és a nagyobból levonunk a felénél többet, és a maradékból a felénél többet, és így tovább, akkor egy *olyan mennyiség fog megmaradni, mely kisebb az adott mennyiségek kisebbikénél.*

Legyen AB és c két nem egyenlő mennyiség, és közülük AB a nagyobb. Azt állítom, hogy ha AB-ből levonunk a felénél többet, és a maradékból a felénél többet, és így tovább, akkor egy olyan mennyiség fog megmaradni, mely kisebb az adott mennyiségek kisebbikénél.

c valamely többszöröse ugyanis nagyobb lesz AB-nél (vö. V. 4. D.). Többszörözzük, és legyen DE a c-nek többszöröse és AB-nél nagyobb, bontsuk föl DE-t a c-vel egyenlő DF, FG, GE mennyiségekre, vonjuk le AB-ből a felénél nagyobb BH-t, AH-ból a felénél nagyobb HK-t, és így tovább, míg az AB-beli osztályok száma egyenlő nem lesz a DE-beliekével.



Legyen az AK, KH, HB osztályok száma egyenlő a DF, FG, GE osztályokéval. Minthogy DE nagyobb AB-nél, és DE-ből a felénél kisebb EG-t, AB-ből pedig a felénél nagyobb BH-t vontuk le, a GD maradék nagyobb a HA maradéknál. Minthogy GD nagyobb HA-nál, és GD-ből a felét, GF-et, HA-ból pedig a felénél nagyobb HK-t vontuk le, a DF maradék nagyobb az AK maradéknál. DF viszont egyenlő c-vel, tehát c is nagyobb AK-nál. AK tehát kisebb c-nél.

Az AB mennyiségből tehát egy olyan AK mennyiség marad meg, mely kisebb az adott mennyiségek kisebbikénél, c-nél. Éppen ezt kellett megmutatni. – Hasonló a bizonyítás, ha a fele részeket vonjuk le.

F.: X. 2.; XII. 2., 5., 10., 12., 16.

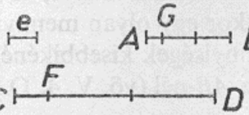
X. 2. Tétel

Ha van két nem egyenlő mennyiség, a kisebbet váltakozva mindig kivonjuk a nagyobból, és a maradék sosem méri az előzőt, akkor a mennyiségek összemérhetetlenek.

Legyen AB és CD két nem egyenlő mennyiség, AB a kisebb, és a kisebbet váltakozva mindig kivonván a nagyobból, a maradék sose mérje az előzőt. Azt állítom, hogy az AB, CD mennyiségek összemérhetetlenek.

Ha ugyanis összemérhetők, méri őket valamely mennyiség. Mérje őket egy e mennyiség. AB mérje FD-t, és legyen a nála kisebb maradék

CF, CF mérje BG-t és legyen a nála kisebb maradék AG, és így tovább, amíg egy olyan mennyiség nem marad, mely kisebb e-nél (X. 1.). Történt légyen ez meg, és legyen AG az e-nél kisebb maradék. Minthogy e méri AB-t, AB viszont méri DF-et, e is méri FD-t (3. E.). Másrészt a teljes CD-t is méri, tehát a maradék CF-et is méri (2. E.). CF viszont méri BG-t, tehát e is méri BG-t. Másrészt a teljes AB-t is méri, tehát a maradék AG-t is méri, a nagyobb a kisebbet, ami lehetetlen. Nem méri tehát semelyik mennyiség az AB, CD mennyiségeket: összemérhetetlenek tehát az AB, CD mennyiségek.



Ha tehát van két nem egyenlő mennyiség... s a többi.

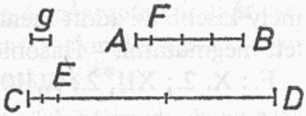
F.: X. 3. v.ö. II. 9.*

X. 3. Tétel

Keressük meg két adott összemérhető mennyiség legnagyobb közös mértékét!

Legyen az adott két összemérhető mennyiség AB és CD, s közülük AB a kisebb. Az AB, CD mennyiségeknek kell tehát megkeresni a legnagyobb közös mértékét.

Az AB mennyiség vagy méri CD-t, vagy nem. Ha méri – önmagát szintén méri – akkor AB közös mértéke AB-nek és CD-nek. És nyilván a legnagyobb, AB-nél nagyobb mennyiség ugyanis nem osztja AB-t.



Ne mérje most AB a CD-t. Ekkor a kisebbet váltakozva mindig kivonva a nagyobból a maradék egyszer mérni fogja az előzőt, mivel AB és CD nem összemérhetetlen (X. 2.). AB mérje ED-t, és legyen a nála kisebb maradék EC, EC mérje FB-t, és legyen a nála kisebb maradék AF, s AF mérje CE-t.

Minthogy AF méri CE-t, CE viszont méri FB-t, AF is méri FB-t (3. E.). Másrészt önmagát is méri, tehát a teljes AB-t is méri AF. Viszont AB méri DE-t, tehát AF is méri ED-t. Másrészt CE-t is méri, tehát a teljes CD-t is méri: AF tehát közös mértéke AB-nek és CD-nek. Azt állítom, hogy a legnagyobb. Ellenkező esetben ugyanis létezik egy AF-nél nagyobb mennyiség, mely méri AB-t és CD-t. Legyen ez g. Minthogy g méri AB-t, AB pedig méri ED-t, g is méri ED-t. Másrészt a teljes CD-t is méri, g tehát méri a maradék CE-t. CE viszont méri FB-t, tehát g is méri FB-t. Másrészt a teljes AB-t is méri, így a maradék AF-et is méri, a nagyobb a kisebbet, ami lehetetlen. Nem méri tehát semelyik AF-nél nagyobb mennyiség AB-t és CD-t: AF tehát AB-nek és CD-nek a legnagyobb közös mértéke.

Megtaláltuk tehát két adott összemérhető mennyiség, AB és CD legnagyobb közös mértékét. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: X. 4.

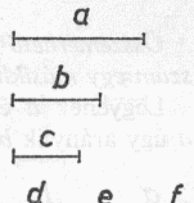
Következmény

Ebből már nyilvánvaló, hogy ha egy mennyiség mér két mennyiséget, akkor a legnagyobb közös mértéküket is méri.

F.: X. 4.

X. 4. Tétel

Keressük meg három adott összemérhető mennyiség legnagyobb közös mértékét!



Legyen az adott három összemérhető mennyiség a, b és c. a-nak, b-nek és c-nek kell tehát megkeresni a legnagyobb közös mértékét.

Vegyük ugyanis kettőnek, a-nak és b-nek a legnagyobb közös mértékét (X. 3.). Ez legyen d. d vagy méri c-t, vagy nem [méri].

Mérje először. Minthogy d méri c-t, és méri a-t és b-t is, d méri a-t, b-t és c-t. d tehát közös mértéke a-nak, b-nek és c-nek. S nyilvánvaló az is, hogy a legnagyobb, d-nél nagyobb mennyiség ugyanis nem méri a-t és b-t.

Ne mérje most d a c-t. Azt állítom először is, hogy c és d összemérhető. Minthogy ugyanis a, b és c összemérhetők, méri őket valamely mennyiség, mely nyilván a-t és b-t is méri, úgyhogy a és b legnagyobb közös mértékét, d-t is méri (X. 3. K.). Másrészt c-t is méri, úgyhogy az említett mennyiség méri c-t és d-t: összemérhető tehát c és d. Vegyük hát a legnagyobb közös mértéküket (X. 3.). Ez legyen e. Minthogy e méri d-t, d ellenben méri a-t és b-t, e is méri a-t és b-t. Viszont c-t is méri, tehát e méri a-t, b-t és c-t: e közös mértéke a-nak, b-nek és c-nek. Azt állítom, hogy a legnagyobb. Ellenkező esetben ugyanis legyen

f valamely e-nél nagyobb mennyiség, mely méri a-t, b-t és c-t. Minthogy f méri a-t, b-t és c-t, a-t és b-t is méri, meg a és b legnagyobb közös mértékét is méri. a és b legnagyobb közös mértéke viszont d, f tehát méri d-t. Másrészt c-t is méri, tehát f méri c-t és d-t, tehát c és d legnagyobb közös mértékét is méri f. Ez viszont e, tehát f méri e-t, a nagyobb a kisebbet, ami lehetetlen. Nem méri tehát semelyik e-nél nagyobb mennyiség a-t, b-t és c-t: e tehát a legnagyobb közös mértéke a-nak, b-nek és c-nek, ha d nem méri c-t, ha pedig méri, maga c.

Megtaláltuk tehát három adott összemérhető mennyiség legnagyobb közös mértékét. [Éppen ezt kellett megmutatni.]

Következmény

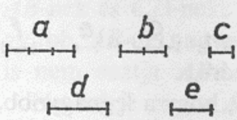
Ebből már nyilvánvaló, hogy ha egy mennyiség mér három mennyiséget, akkor a legnagyobb közös mértéküket is méri.

Hasonlóképp nyerhető több mennyiség esetén is a legnagyobb közös mérték, és a következmény is igaz marad.

X. 5. Tétel

*Összemérhető mennyiségek úgy aránylanak egymáshoz, mint egy szám egy másikhoz.**

Legyenek a és b összemérhető mennyiségek. Azt állítom, hogy a úgy aránylik b-hez, mint egy szám egy másikhoz.



Minthogy ugyanis a és b összemérhető, méri őket valamely mennyiség. Mérje egy c mennyiség. Legyen annyi egység d-ben, ahányszor megvan c az a-ban, s annyi egység legyen e-ben, ahányszor megvan c a b-ben.

Minthogy c a d-beli egységek számaszor van meg a-ban, s az egység d-ben szintén az abban levő egységek számaszor van meg, az egység ugyanannyiszor van meg a d számban, mint a c mennyiség a-ban. Amint tehát c az a-hoz, úgy aránylik az egység d-hez, s fordítva, amint a a c-hez, úgy d az egységhez (V. 7. K.). Ismét, minthogy c az e-beli egységek számaszor van meg b-ben, s az egység e-ben szintén az abban levő egységek számaszor van meg, az egység ugyanannyiszor van meg e-ben, mint c a b-ben. Amint tehát c a b-hez, úgy aránylik az egység e-hez. Megmutattuk, hogy amint a a c-hez, úgy aránylik d az egységhez, egyenlő sok tagon át tehát amint *a* a *b*-hez, úgy aránylik a *d* szám *e*-hez (V. 22.).

Az *a*, *b* összemérhető mennyiségek tehát úgy aránylanak egymáshoz, mint a *d* szám az *e* számhoz. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: X. 8–9., 11–12.

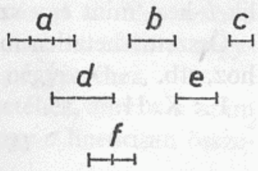
X. 6. Tétel

Ha két mennyiség úgy aránylik egymáshoz, mint egy szám egy másikhoz, akkor összemérhetők a mennyiségek.

Arányuljék ugyanis úgy egymáshoz két mennyiség, *a* és *b*, mint a *d* szám az *e* számhoz. Azt állítom, hogy összemérhetők az *a*, *b* mennyiségek.

Ahány egység van *d*-ben, annyi egyenlő részre bontsuk föl *a*-t*, és az egyikükkel legyen egyenlő *c*, és ahány egység van *e*-ben, annyi *c*-vel egyenlő mennyiségből álljon *f*.

Minthogy tehát *a*-ban annyi *c*-vel egyenlő mennyiség van, ahány egység van *d*-ben, *c* ugyanaz a hányada *a*-nak, mint az egység *d*-nek. Az egység osztja a *d* számot, tehát *c* méri *a*-t. Minthogy az egység úgy aránylik *d*-hez, mint *c* az *a*-hoz, fordítva *d* úgy aránylik az egységhez, mint *a* a *c*-hez (V. 7. K.). Ismét, minthogy *f*-ben annyi *c*-vel egyenlő mennyiség van, ahány egység *e*-ben, az egység úgy aránylik *e*-hez, mint *c* az *f*-hez. Megmutattuk, hogy *d* úgy aránylik az egységhez, mint *a* a *c*-hez, így egyenlő sok tagon át *d* úgy aránylik *e*-hez, mint *a* az *f*-hez (V. 22.). Amint viszont *d* az *e*-hez, úgy aránylik *a* a *b*-hez, *a* tehát úgy aránylik *f*-hez, mint *b*-hez (V. 11.). *a*-nak tehát *b*, *f* mindegyikéhez ugyanaz az aránya, *b* tehát egyenlő *f*-fel (V. 9.). *c* viszont méri *f*-et, tehát *b*-t is méri. Másrészt *a*-t is méri; *c* tehát méri *a*-t és *b*-t: *a* és *b* összemérhető.



Ha tehát két mennyiség úgy aránylik egymáshoz... s a többi.

F.: X. 7., 9., 9. K., 11–12., 18., 26., 29., 34., 36., 38–40., 44., 48–55., 57., 75., 85–87., 89–90.; XIII. 6.

Következmény

Ebből már nyilvánvaló, hogy ha van két szám, *d* és *e*, és egy szakasz, *a*, akkor elérhető, hogy a szakasz úgy arányuljék egy másik szakaszhoz, mint a *d* szám az *e* számhoz. Ha pedig vesszük *a* és *f* középarányosát (VI. 13.), *b*-t, akkor amint *a* az *f*-hez, úgy aránylik *a* négyzete *b* négyzetéhez, azaz amint az első szakasz a harmadikhoz, úgy az elsőre emelt (sokszög) a másodikra emelt hasonló és hasonlóan elhelyezkedő (sokszög)höz (VI. 19. K.). Amint viszont *a* az *f*-hez, úgy aránylik a *d* szám az *e* számhoz. Elértük tehát, hogy amint a *d* szám az *e* számhoz, úgy aránylik *a* négyzete *b* négyzetéhez. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: X. 10., 29–30., 48–53., 86–88.

X. 7. Tétel

Összemérhetetlen mennyiségek nem úgy aránylanak egymáshoz, mint egy szám egy másikhoz.

Legyenek *a* és *b* összemérhetetlen mennyiségek. Azt állítom, hogy *a* nem úgy aránylik *b*-hez, mint egy szám egy másikhoz.

Ha ugyanis *a* úgy aránylik *b*-hez, mint egy szám egy másikhoz, akkor *a* összemérhető *b*-vel (X. 6.). De nem az, tehát *a* nem úgy aránylik *b*-hez, mint egy szám egy másikhoz.

Összemérhetetlen mennyiségek tehát nem úgy aránylanak egymáshoz, stb.

F.: X. 11.

X. 8. Tétel

Ha két mennyiség nem úgy aránylik egymáshoz, mint egy szám egy másikhoz, akkor összemérhetetlenek a mennyiségek.

Ne arányuljék ugyanis egymáshoz két mennyiség, *a* és *b* úgy, mint egy szám egy másikhoz. Azt állítom, hogy az *a* és a *b* mennyiség összemérhetetlen.

Ha ugyanis összemérhetők, *a* úgy aránylik *b*-hez, mint egy szám egy másikhoz (X. 5.). De nem úgy aránylik, tehát az *a* és a *b* mennyiség összemérhetetlen.

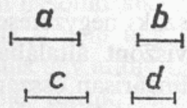
F.: X. 11.

X. 9. Tétel

A lineárisan összemérhető szakaszokra emelt négyzetek úgy aránylanak egymáshoz, mint egy négyzetszám egy másikhoz; és az oly négyzeteknek, melyek úgy aránylanak egymáshoz, mint egy négyzetszám *egy másikhoz, lineárisan összemérhetők az oldalaik. A lineárisan összemérhetetlen szakaszokra emelt négyzetek viszont nem úgy aránylanak egymáshoz, mint egy négyzetszám egy másikhoz; és az oly négyzeteknek, melyek nem úgy aránylanak egymáshoz, mint egy négyzetszám egy másikhoz, az oldalaik sem lineárisan összemérhetők.*

Legyen ugyanis *a* és *b* lineárisan összemérhető. Azt állítom, hogy *a* négyzete úgy aránylik *b* négyzetéhez, mint egy négyzetszám egy másikhoz.

Minthogy ugyanis *a* lineárisan összemérhető *b*-vel, *a* úgy aránylik *b*-hez, mint egy szám egy másikhoz (X. 5.). Arányuljék úgy, mint *c* a *d*-hez. Minthogy amint *a* a *b*-hez, úgy aránylik *c* a *d*-hez, és *a*-nak *b*-hez való arányának kétszerese *a* négyzetének *b* négyzetéhez való aránya – hasonló sokszögek ugyanis egymással a megfelelő oldalakhoz képest kétszeres arányban állnak (VI. 20. 1. K.) –, *c*-nek *d*-hez való arányának pedig kétszerese *c* négyzetének *d* négyzetéhez való aránya – két négyzetszám között ugyanis van egy középarányos szám, és a négyzetszámok egymással az oldalaikhoz képest kétszeres arányban állnak (VIII. 11.) –, amint tehát *a* négyzete *b* négyzetéhez, úgy aránylik *c* négyzete *d* négyzetéhez.



Arányuljék most amint *a* négyzete *b* négyzetéhez, úgy a *c* szám négyzete a *d* szám négyzetéhez. Azt állítom, hogy *a* lineárisan összemérhető *b*-vel.

Minthogy ugyanis amint *a* négyzete *b* négyzetéhez, úgy aránylik *c* négyzete *d* négyzetéhez, és *a* négyzetének *b* négyzetéhez való aránya kétszerese *a*-nak *b*-hez való arányának, *c* négyzetének *d* négyzetéhez való aránya pedig kétszerese *c*-nek *d*-hez való arányának, amint *a* a *b*-hez, úgy aránylik *c* a *d*-hez. *a* tehát úgy aránylik *b*-hez, mint a *c* szám a *d* számhoz; lineárisan összemérhető tehát *a* a *b*-vel (X. 6.).

Legyen most *a* lineárisan összemérhetetlen *b*-vel. Azt állítom, hogy *a* négyzete nem úgy aránylik *b* négyzetéhez, mint egy négyzetszám egy négyzetszámhoz.

Ha ugyanis *a* négyzete úgy aránylik *b* négyzetéhez, mint egy négyzetszám egy négyzetszámhoz, akkor *a* összemérhető *b*-vel. De nem az, *a* négyzete tehát nem úgy aránylik *b* négyzetéhez, mint egy négyzetszám egy négyzetszámhoz.

Megfordítva, most ne arányuljék úgy *a* négyzete *b* négyzetéhez, mint egy négyzetszám egy négyzetszámhoz. Azt állítom, hogy *a* lineárisan összemérhetetlen *b*-vel.

Ha ugyanis *a* összemérhető *b*-vel, *a* négyzete úgy aránylik *b* négyzetéhez, mint egy négyzetszám egy négyzetszámhoz. De nem úgy aránylik, tehát *a* nem mérhető össze lineárisan *b*-vel.

Tehát a lineárisan összemérhető... stb.

F.: X. 10., 29–30., 48–53., 85–90., 114.; XIII. 6., 11.

Következmény

S a bizonyítottakból világos, hogy a lineárisan összemérhető szakaszok négyzetesen is összemérhetők, a négyzetesen összemérhetők viszont általában nem mérhetők össze lineárisan is [minthogy a lineárisan összemérhető szakaszokra emelt négyzetek úgy aránylanak egymáshoz, mint egy négyzetszám egy négyzetszámhoz, s mennyiségek, melyek úgy aránylanak, mint egy szám egy másikhoz, összemérhetők (X. 6.); úgyhogy a lineárisan összemérhető szakaszok nemcsak lineárisan, hanem négyzetesen is összemérhetők.

Másrészt, minthogy amely négyzetek úgy aránylanak egymáshoz, mint egy négyzetszám egy négyzetszámhoz, mint megmutattuk, lineárisan összemérhetők, és négyzetesen is összemérhetők, mivel úgy aránylanak, mint egy szám egy számhoz, így amely négyzetek nem úgy aránylanak, mint egy négyzetszám egy négyzetszámhoz, hanem csak mint egy szám egy számhoz, maguk ugyan négyzetesen összemérhetők, de lineárisan nem; úgyhogy a lineárisan összemérhető négyzetek négyzetesen is összemérhetők, a négyzetesen összemérhetők viszont általában nem mérhetők össze lineárisan is, hacsak nem úgy aránylanak, mint egy négyzetszám egy négyzetszámhoz.

Azt állítom, hogy a lineárisan összemérhetetlen szakaszok általában nem négyzetesen is összemérhetetlenek, minthogy előfordulhat, hogy a négyzetesen összemérhető szakaszok nem úgy aránylanak, mint egy négyzetszám egy négyzetszámhoz, és ezért – noha négyzetesen összemérhetők – lineárisan összemérhetetlenek; úgyhogy a lineárisan összemérhetetlen szakaszok általában nem négyzetesen is összemérhetetlenek, hanem – noha lineárisan összemérhetetlenek – négyzetesen lehetnek mind összemérhetetlenek, mind összemérhetők.

A négyzetesen összemérhetetlen szakaszok viszont mind lineárisan is összemérhetetlenek; ha ugyanis lineárisan összemérhetők, akkor négyzetesen is összemérhetők. De feltevés szerint összemérhetetlenek, ami ellentmondás. A négyzetesen összemérhetetlen szakaszok tehát lineárisan is összemérhetetlenek.

F.: X. 19. L.

X. 10. Lemma

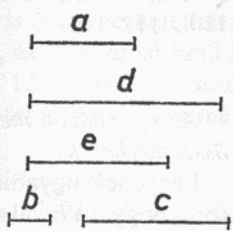
Megmutattuk az aritmetikai könyvekben, hogy hasonló síkszámok úgy aránylanak egymáshoz, mint két négyzetszám (VIII. 26.), és hogyha két szám úgy aránylik egymáshoz, mint két négyzetszám, akkor hasonló síkszámok.* S ebből világos, hogy nem hasonló síkszámok – azaz amelyeknek nem arányosak az oldalaik – nem úgy aránylanak egymáshoz, mint két négyzetszám. Ha ugyanis úgy aránylanak, akkor hasonló síkszámok, aminek az ellenkezőjét tettük föl. A nem hasonló síkszámok tehát nem úgy aránylanak egymáshoz, mint két négyzetszám.

X. 10. Tétel

Adott szakaszhoz keressünk két másikat, melyek egyike csak lineárisan, másika négyzetesen is összemérhetetlen vele!

Legyen a az adott szakasz. Két szakaszt kell tehát keresni, melyek egyike csak lineárisan, másika négyzetesen is összemérhetetlen a-val.

Vegyünk ugyanis két számot b-t és c-t, melyek nem úgy aránylanak egymáshoz, mint két négyzetszám, azaz nem hasonló síkszámok (L.), és arányuljék amint b a c-hez, úgy a négyzete d négyzetéhez – ezt el tudjuk érni (X. 6. K.). Ekkor a négyzete összemérhető d négyzetével (X. 6.). Minthogy b nem úgy aránylik c-hez, mint egy négyzetszám egy négyzetszámhoz, a négyzete sem úgy aránylik d négyzetéhez, mint egy négyzetszám egy négyzetszámhoz, tehát a lineárisan összemérhetetlen d-vel (X. 9.). Vegyük a és d középarányosát, e-t (VI. 13.). Ekkor amint a a d-hez, úgy aránylik a négyzete e négyzetéhez (VI. 19. K.). a lineárisan összemérhetetlen d-vel, tehát a négyzete is összemérhetetlen e négyzetével (X. 11.), tehát a négyzetesen összemérhetetlen e-vel.



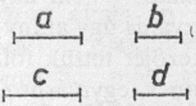
Találtunk tehát az adott a szakaszhoz két szakaszt, melyek egyike, d, csak lineárisan, másika, e, négyzetesen és nyilván lineárisan is összemérhetetlen vele. [Éppen ezt kellett megmutatni.]

F.: X. 27–28.

X. 11. Tétel

Ha négy mennyiség arányos, és az első összemérhető a másodikkal, akkor a harmadik is összemérhető a negyedikkel; és ha az első összemérhetetlen a másodikkal, akkor a harmadik is összemérhetetlen a negyedikkel.

Legyen a, b, c és d négy arányos mennyiség: amint a a b-hez, úgy c a d-hez, és legyen a összemérhető b-vel. Azt állítom, hogy c is összemérhető d-vel.



Minthogy ugyanis a összemérhető b-vel, a úgy aránylik b-hez, mint egy szám egy számhoz (X. 5.). c úgy aránylik d-hez, mint a a b-hez, tehát c szintén úgy aránylik d-hez, mint egy szám egy számhoz (V. 11.); c tehát összemérhető d-vel (X. 6.).

Ne legyen most a összemérhető b-vel. Azt állítom, hogy c sem összemérhető d-vel. Minthogy ugyanis a összemérhetetlen b-vel, a nem úgy aránylik b-hez, mint egy szám egy számhoz (X. 7.), c úgy aránylik d-hez, mint a a b-hez, tehát c a d-hez szintén nem úgy aránylik, mint egy szám egy számhoz (V.11.); c tehát összemérhetetlen d-vel (X. 8.).

Ha tehát négy mennyiség arányos... stb.

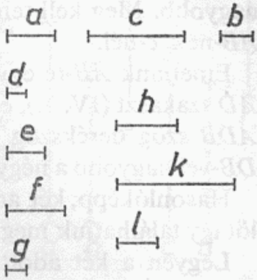
F.: X. 10., 12., 14., 19–20., 22–24., 26–28., 31–35., 38., 41., 44., 47., 54–55., 57–63., 65–68., 71–73., 75., 78., 81., 84., 91–94., 97., 99–105., 110., 112–114.

X. 12. Tétel

Az ugyanazon mennyiséggel összemérhető mennyiségek egymással is összemérhetők.

Legyenek ugyanis a és b mindketten összemérhetők c-vel. Azt állítom, hogy a a b-vel szintén összemérhető.

Minthogy ugyanis a összemérhető c-vel, a úgy aránylik c-hez, mint egy szám egy számhoz (X. 5.). Arányuljék mint d az e-hez. Ismét, minthogy c összemérhető b-vel, c úgy aránylik b-hez, mint egy szám egy számhoz. Arányuljék mint *f* a *g*-hez, és vegyünk e valahány adott arányhoz, *d*-nek *e*-hez és *f*-nek *g*-hez való arányához, számokat, melyek rendre az adott arányokban állnak, *h*-t, *k*-t és *l*-et, úgyhogy amint *d* az *e*-hez, úgy *h* a *k*-hoz, amint pedig *f* a *g*-hez, úgy *k* az *l*-hez (VIII. 4.).



Minthogy amint *a* a *c*-hez, úgy aránylik *d* az *e*-hez, amint pedig *d* az *e*-hez, úgy *h* a *k*-hoz, *h* úgy aránylik *k*-hoz, mint *a* a *c*-hez (V. 11.). Ismét, minthogy amint *c* a *b*-hez, úgy aránylik *f* a *g*-hez, amint pedig *f* a *g*-hez, úgy *k* az *l*-hez, *k* úgy aránylik *l*-hez, mint *c* a *b*-hez. Másrészt *h* úgy aránylik *k*-hoz, mint *a* a *c*-hez, egyenlő sok tagon át tehát *h* úgy aránylik *l*-hez, mint *a* a *b*-hez (V. 22.). *a* tehát úgy aránylik *b*-hez, mint a *h* szám az *l* számhoz; *a* tehát összemérhető *b*-vel (X. 6.).

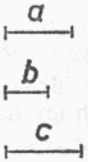
Az ugyanazon *a* mennyiséggel összemérhető mennyiségek tehát egymással is összemérhetők. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: X. 13., 17., 19., 22., 54., 58., 66., 69., 91., 103., 111–114.

X. 13. Tétel

Ha két mennyiség összemérhető, és az egyikük összemérhetetlen valamely mennyiséggel, akkor a másik is összemérhetetlen ugyanezzel a mennyiséggel.

Legyen *a* és *b* két összemérhető mennyiség, és legyen az egyikük, *a*, összemérhetetlen valamely harmadik *c* mennyiséggel. Azt állítom, hogy a másik mennyiség, *b* is összemérhetetlen *c*-vel.



Ha ugyanis *b* összemérhető *c*-vel, és *a* összemérhető *b*-vel, akkor *a* is összemérhető *c*-vel (X. 12.). Viszont összemérhetetlen is vele, ami lehetetlen. *b* tehát nem összemérhető *c*-vel: összemérhetetlen tehát.

Ha tehát két mennyiség összemérhető. . . stb.

F.: X. 18., 21., 22–23., 26., 35–36., 38., 44., 54–61., 63–64., 66., 68., 75., 81., 92–93., 99., 103–105., 108–109., 111., 113.

X. 14. Lemma

Két adott nem egyenlő szakaszhoz keressük meg, mennyivel nagyobb a négyzetértéke a nagyobbnak a kisebbnél.

Legyen a két adott nem egyenlő szakasz *AB* és *c*, és közülük *AB* a nagyobb. Meg kell tehát keresni, mennyivel nagyobb a négyzetértéke *AB*-nek *c*-nél.

Emeljünk *AB*-re egy *ADB* félkört, illesszünk bele egy *c*-vel egyenlő *AD* szakaszt (IV. 1.), és húzzuk meg *DB*-t. Ekkor nyilvánvaló, hogy az *ADB* szög derékszög (III. 31.), és hogy *AB*-nek *AD*-nél, azaz *c*-nél *DB*-vel nagyobb a négyzetértéke (I. 47.).

Hasonlóképp, két adott szakaszhoz összegükkel négyzetesen egyenlőt így találhatjuk meg:

Legyen a két adott szakasz *AD* és *DB*, és kelljen megkeresni az összegükkel négyzetesen egyenlő szakaszt. Helyezzük őket úgy el, hogy *AD* és *DB* derékszöget fogjon közre, és húzzuk meg *AB*-t. Ismét nyilvánvaló, hogy *AD* és *DB* négyzetesen vett összege *AB*. Éppen ezt kellett megmutatni.

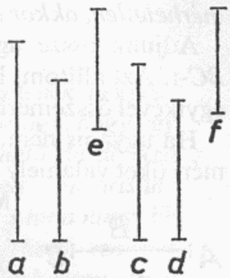
F.: X. 14., 48., 85–90., XIII. 11.

X. 14. Tétel

*Ha négy szakasz arányos, és az első négyzetértéke egy vele [lineárisan] összemérhető szakasz négyzetével nagyobb a másodikénál, akkor a harmadik négyzetértéke is egy vele [lineárisan] összemérhető szakasz négyzetével nagyobb a negyedikénél. S ha az első négyzetértéke egy vele [lineárisan] összemérhetetlen szakasz négyzetével nagyobb a másodikénál, akkor a harmadik négyzetértéke is egy vele [lineárisan] összemérhetetlen szakasz négyzetével nagyobb a negyedikénél.**

Legyen *a*, *b*, *c* és *d* négy arányos szakasz: amint *a* a *b*-hez, úgy *c* a *d*-hez, és legyen *a* négyzetértéke *e* négyzetével nagyobb *b*-énél, *c* négyzetértéke pedig *f* négyzetével nagyobb *d*-énél (L.). Azt állítom, hogy ha *a* összemérhető *e*-vel, akkor *c* is összemérhető *f*-fel, ha pedig *a* összemérhetetlen *e*-vel, akkor *c* is összemérhetetlen *f*-fel.

Minthogy ugyanis amint *a* a *b*-hez, úgy aránylik *c* a *d*-hez, amint *a* négyzete *b* négyzetéhez, úgy aránylik *c* négyzete *d* négyzetéhez (VI. 22.). *a* négyzetével viszont egyenlő *e* és *b* négyzetösszege, *c*-ével pedig *d* és *f* négyzetösszege. Amint tehát *e* és *b* négyzetösszege *b* négyzetéhez, úgy aránylik *d* és *f* négyzetösszege *d* négyzetéhez. Szétbontva tehát, amint *e* négyzete *b* négyzetéhez, úgy *f* négyzete *d* négyzetéhez (V. 17.); amint tehát *e* a *b*-hez, úgy *f* a *d*-hez (VI. 22.); invertálva tehát amint *b* az *e*-hez, úgy *d* az *f*-hez (V. 7. K.). Másrészt amint *a* a *b*-hez, úgy *c* a *d*-hez, egyenlő sok tagon át tehát amint *a* az *e*-hez, úgy *c* az *f*-hez (V. 22.). Ha tehát *a* összemérhető *e*-vel, *c* is összemérhető *f*-fel, ha pedig *a* összemérhetetlen *e*-vel, *c* is összemérhetetlen *f*-fel (X. 11.).



Ha tehát... stb.

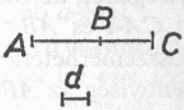
F.: X. 31–32., 66., 103., 112–113.

X. 15. Tétel

Ha összeadunk két összemérhető mennyiséget, akkor az összeg mindkettejükkel összemérhető; s ha az összeg egyikükkel összemérhető, akkor a tagok is összemérhetők.

Adjunk össze ugyanis két összemérhető mennyiséget, *AB*-t és *BC*-t. Azt állítom, hogy az *AC* összeg az *AB*, *BC* mennyiségek mindegyikével összemérhető.

Minthogy ugyanis az *AB*, *BC* mennyiségek összemérhetők, méri őket valamely mennyiség. Mérje egy *d* mennyiség. Minthogy *d* méri az *AB*, *BC* mennyiségeket, az *AC* összeget is méri (1. E.). Viszont *AB*-t és *BC*-t is méri; *d* tehát méri *AB*-t, *BC*-t és *AC*-t: összemérhető tehát *AC* az *AB*, *BC* mennyiségek mindegyikével.



Legyen most *AC* összemérhető *AB*-vel. Azt állítom, hogy *AB* és *BC* is összemérhetők.

Minthogy ugyanis az *AC*, *AB* mennyiségek összemérhetők, méri őket valamely mennyiség. Mérje egy *d* mennyiség. Minthogy *d* méri a *CA*, *AB* mennyiségeket, a maradék *BC*-t is méri (2. E.). Viszont *AB*-t is méri; *d* tehát méri *AB*-t és *BC*-t: összemérhetők tehát az *AB*, *BC* mennyiségek.

Ha tehát összeadunk két... stb.

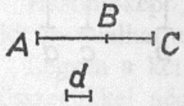
F.: X. 17., 26., 36., 38., 54–55., 60–62., 73., 75., 91–93., 98–99., 111–113.

X. 16. Tétel

Ha összeadunk két összemérhetetlen mennyiséget, akkor az összeg mindkettejükkel összemérhetetlen; s ha az összeg egyikükkel összemérhetetlen, akkor a tagok is összemérhetetlenek.

Adjunk össze ugyanis két összemérhetetlen mennyiséget, *AB*-t és *BC*-t. Azt állítom, hogy az *AC* összeg az *AB*, *BC* mennyiségek mindegyikével összemérhetetlen.

Ha ugyanis nem összemérhetetlenek a *CA*, *AB* mennyiségek, akkor méri őket valamely mennyiség. Tegyük föl, hogy méri egy *d* mennyiség.



Minthogy *d* méri a *CA*, *AB* mennyiségeket, a maradék *BC*-t is méri. Viszont *AB*-t is méri; *d* tehát méri *AB*-t és *BC*-t: összemérhető tehát *AB* és *BC*. Feltétel szerint viszont összemérhetetlenek is, ami lehetetlen. Nem méri tehát semmilyen mennyiség a *CA*, *AB* mennyiségeket: *CA* és *AB* összemérhetetlenek. Hasonlóképp mutathatnánk meg, hogy *AC* és *CB* is összemérhetetlenek. *AC* tehát összemérhetetlen az *AB*, *BC* mennyiségek mindegyikével.

Legyen most *AC* összemérhetetlen az *AB*, *BC* mennyiségek egyikével, méghozzá először *AB*-vel. Azt állítom, hogy az *AB*, *BC* mennyiségek is összemérhetetlenek.

Ha ugyanis összemérhetők, méri őket valamely mennyiség. Mérje egy *d* mennyiség. Minthogy *d* méri az *AB*, *BC* mennyiségeket, az *AC* összeget is méri. Viszont *AB*-t is méri; *d* tehát méri *CA*-t és *AB*-t: összemérhető tehát *CA* és *AB*. Feltétel szerint viszont összemérhetetlenek is, ami lehetetlen. Nem méri tehát semmilyen mennyiség az *AB*, *BC* mennyiségeket: *AB* és *BC* összemérhetetlenek.

Ha tehát összeadunk két... stb.

F.: X. 18., 26., 36–37., 39–40., 73–74., 76–77.

X. 17. Lemma

Ha egy szakaszhoz úgy illesztünk egy paralelogrammát, hogy egy négyzet marad fönn, akkor az odaillesztett paralelogramma egyenlő a szakasznak az illesztés révén keletkezett szeletei közötti téglalappal.

Illesszünk ugyanis úgy az *AB* szakaszhoz egy *AD* paralelogrammát, hogy egy *DB* négyzet maradjon fönn. Azt állítom, hogy *AD* egyenlő az *AC* és *CB* közötti téglalappal.

Ez eleve nyilvánvaló: minthogy ugyanis *DB* négyzet, *DC* egyenlő *CB*-vel, és *AD* az *AC* és *CD*, azaz *AC* és *CB* közötti téglalap.

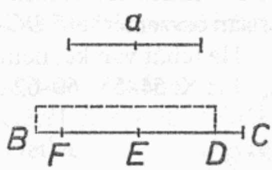
Ha tehát egy szakaszhoz... stb.

F.: X. 17–18.

X. 17. Tétel

*Ha van két nem egyenlő szakasz, és a kisebb négyzetének negyedrészével egyenlő paralelogrammát illesztünk a nagyobbhoz úgy, hogy egy négyzet marad fönn, és e szakasz lineárisan összemérhető darabokra bomlik, akkor a nagyobb szakasz négyzetértéke egy vele [lineárisan] összemérhető szakasz négyzetével nagyobb a kisebbénél; s ha a nagyobb szakasz négyzetértéke egy vele [lineárisan] összemérhető szakasz négyzetével nagyobb a kisebbénél, és a kisebb négyzetének negyedével egyenlő paralelogrammát illesztünk a nagyobbhoz úgy, hogy egy négyzet marad fönn, akkor e szakasz lineárisan összemérhető darabokra bomlik.**

Legyen *a* és *BC* két nem egyenlő szakasz, közülük *BC* a nagyobb, és illesszünk a kisebb *a* négyzetének negyedével, azaz *a* felének négyzetével egyenlő paralelogrammát *BC*-hez úgy, hogy egy négyzet maradjon fönn (VI. 28.). Legyen az odaillesztett alakzat a *BD* és *DC* közötti téglalap (L.), és *BD* lineárisan összemérhető *DC*-vel. Azt állítom, hogy *BC* négyzetértéke egy vele összemérhető szakasz négyzetével nagyobb *a*-énál.



Legyen ugyanis *BC* felezőpontja *E* (I. 10.), és mérjünk föl egy *DE*-vel egyenlő *EF*-et (I. 3.). Ekkor a maradék *DC* egyenlő *BF*-fel. Minthogy a *BC* szakaszt kettéosztottuk egyenlő részekre az *E* és nem egyenlőkre a *D* pontban, a *BD* és *DC* közötti téglalapnak és *ED* négyzetének az összege egyenlő *EC* négyzetével (II. 5.), szintúgy a négyszeresek: a *BD* és *DC* közötti téglalap négyszerese meg *DE* négyzete négyszerese egyenlő *EC* négyzetének négyszeresével. Viszont a *BD* és *DC* közötti téglalap négyszeresével egyenlő *a* négyzete, *DE* négyzetének négyszeresével egyenlő *DF* négyzete – *DF* ugyanis kétszerese *DE*-nek –, *EC* négyzetének négyszeresével pedig egyenlő *BC* négyzete – ismét mert *BC* kétszerese *CE*-nek. *a* és *DF* négyzetösszege tehát egyenlő *BC* négyzetével, úgyhogy *BC* négyzete *DF* négyzetével nagyobb *a* négyzeténél, *BC* négyzetértéke tehát *DF*-fel nagyobb *a*-énál. Azt kell még megmutatni, hogy *BC* összemérhető *DF*-fel. Minthogy *BD* lineárisan összemérhető *DC*-vel, *BC* is lineárisan összemérhető *CD*-vel (X. 15.). Másrészt *CD* lineárisan összemérhető *CD* és *BF* összegével, mert *CD* egyenlő *BF*-fel. *BC* is lineárisan összemérhető tehát *BF* és *CD* összegével (X. 12.), úgyhogy az *FD* maradék is lineárisan összemérhető *BC*-vel: *BC* négyzetértéke tehát egy vele összemérhető szakasz négyzetével nagyobb *a*-énál.

Legyen most *BC* négyzetértéke egy vele összemérhető szakasz négyzetével nagyobb *a*-énál, és illesszünk egy *a* négyzetének negyedével egyenlő paralelogrammát *BC*-hez úgy, hogy egy négyzet maradjon fönn. Legyen az odaillesztett alakzat a *BD* és *DC* közötti téglalap. Azt kell megmutatni, hogy *BD* lineárisan összemérhető *DC*-vel.

Az előbbiekkel azonos lépésekkel hasonlóképp mutatható meg, hogy *BC* négyzetértéke *FD* négyzetével nagyobb *a*-énál. *BC* négyzetértéke viszont egy vele összemérhető szakasz négyzetével nagyobb *a*-énál, tehát *BC* lineárisan összemérhető *FD*-vel, úgyhogy a maradék *BF* meg *DC* összeggel is lineárisan összemérhető *BC* (X. 15.). *BF* és *DC* összege viszont [lineárisan] összemérhető *DC*-vel (X. 6.), úgyhogy *BC* is lineárisan összemérhető *CD*-vel (X. 12.), és szétbontva *BD* lineárisan összemérhető *DC*-vel (X. 15.).

Ha tehát van két nem egyenlő szakasz. . . stb.

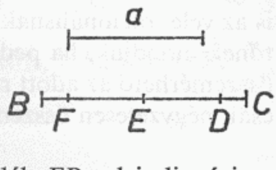
F.: X. 54–55., 60–62., 91–93., 97–98.

X. 18. Tétel

*Ha van két nem egyenlő szakasz, és a kisebb négyzetének negyedrészével egyenlő paralelogrammát illesztünk a nagyobbhoz úgy, hogy egy négyzet marad fönn, és e szakasz [lineárisan] összemérhetetlen darabokra bomlik, akkor a nagyobb szakasz négyzetértéke egy vele összemérhetetlen szakasz négyzetével nagyobb a kisebbénél; s ha a nagyobb szakasz négyzetértéke egy vele összemérhetetlen szakasz négyzetével nagyobb a kisebbénél, és a kisebb négyzetének negyedével egyenlő paralelogrammát illesztünk a nagyobbhoz úgy, hogy egy négyzet marad fönn, akkor a szakasz [lineárisan] összemérhetetlen darabokra bomlik.**

Legyen *a* és *BC* két nem egyenlő szakasz, közülük *BC* a nagyobb, és illesszünk egy, a kisebb *a* négyzetének negyedével egyenlő paralelogrammát *BC*-hez úgy, hogy egy négyzet maradjon fönn (VI. 28.). Legyen az odaillesztett alakzat a *BD* és *DC* közötti téglalap (X. 17. L.), és *BD* lineárisan összemérhetetlen *DC*-vel. Azt állítom, hogy *BC* négyzetértéke egy vele összemérhetetlen szakasz négyzetével nagyobb *a*-énál.

Az előző tételbeliekkel azonos lépések során hasonlóképp mutatható meg, hogy *BC* négyzetértéke *FD* négyzetével nagyobb *a*-énál. Azt kell megmutatni, hogy *BC* lineárisan összemérhetetlen *DF*-fel. Minthogy *BD* lineárisan összemérhetetlen *DC*-vel, *BC* is lineárisan összemérhetetlen *CD*-vel (X. 16.). *DC* viszont összemérhető *BF* és *DC* összegével (X. 6.), tehát *BC* a *BF* és *DC* összegével is összemérhetetlen (X. 13.), úgyhogy a maradék *FD*-vel is lineárisan összemérhetetlen *BC* (X. 16.). S *BC* négyzetértéke *FD* négyzetével nagyobb *a*-énál: *BC* négyzetértéke tehát egy vele összemérhetetlen szakasz négyzetével nagyobb *a*-énál.



Megfordítva, legyen most *BC* négyzetértéke egy vele összemérhetetlen szakasz négyzetével nagyobb *a*-énál, és illesszünk egy *a* négyzetének negyedével egyenlő paralelogrammát *BC*-hez úgy, hogy egy négyzet maradjon fönn. Legyen az odaillesztett alakzat a *BD* és *DC* közötti téglalap. Azt kell megmutatni, hogy *BD* lineárisan összemérhetetlen *DC*-vel.

Az előbbiekkel azonos lépések során hasonlóképp mutatható meg, hogy *BC* négyzetértéke *FD* négyzetével nagyobb *a*-énál. *BC* négyzetértéke viszont egy vele összemérhetetlen szakasz négyzetével nagyobb *a*-énál, tehát *BC* lineárisan összemérhetetlen *FD*-vel, úgyhogy a maradék *BF* meg *DC* összeggel is összemérhetetlen *BC* (X. 16.). *BF* és *DC* összege viszont lineárisan összemérhető *DC*-vel (X. 6.), tehát *BC* *DC*-vel is lineárisan összemérhetetlen (X. 13.), úgyhogy szétbontva *BD* lineárisan összemérhetetlen *DC*-vel (X. 16.).

Ha tehát van két nem egyenlő... stb.

F.: X. 33–34., 57–58., 63–65., 94–96., 100–102.

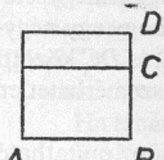
X. 19. Lemma

Miután megmutattuk, hogy a lineárisan összemérhető szakaszok négyzetesen is összemérhetők, a négyzetesen összemérhetők viszont általában nem mérhetők össze lineárisan is, hanem lineárisan lehetnek mind összemérhetők, mind összemérhetetlenek (X. 9. K.), nyilvánvaló, hogy ha valamely szakasz az adott racionálissal lineárisan összemérhető, akkor racionálisnak és azzal nemcsak lineárisan, hanem négyzetesen is összemérhetőnek mondjuk, minthogy a lineárisan összemérhető szakaszok négyzetesen is azok; ha pedig valamely szakasz négyzetesen összemérhető az adott racionálissal, akkor ha lineárisan is az vele, racionálisnak és azzal lineárisan és négyzetesen összemérhetőnek mondjuk, ha pedig valamely szakasz – noha ismét négyzetesen összemérhető az adott racionálissal – lineárisan összemérhetetlen vele, csak négyzetesen összemérhető racionálisnak mondjuk.

X. 19. Tétel

Lineárisan összemérhető és a fönt említett módok valamelyikén racionális szakaszok által közrefogott téglalap racionális.

Fogják ugyanis közre a lineárisan összemérhető *AB*, *BC* racionális szakaszok az *AC* téglalapot. Azt állítom, hogy *AC* racionális.



Emeljük ugyanis *AB*-re az *AD* négyzetet. Ekkor *AD* racionális. Minthogy *AB* lineárisan összemérhető *BC*-vel és *AB* egyenlő *BD*-vel, *BD* lineárisan összemérhető *BC*-vel. S amint *BD* a *BC*-hez, úgy aránylik *DA* az *AC*-hez (VI. 1.). *DA* tehát összemérhető *AC*-vel (X. 11.). *DA* viszont racionális, tehát *AC* is racionális (X. 12.).

Tehát lineárisan összemérhető és... stb.

F.: X. 25., 54–55., 57., 71., 91–92., 94.

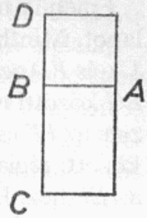
X. 20. Tétel

Ha egy racionális szakaszhoz racionális felületet illesztünk, a szélessége racionális lesz és lineárisan összemérhető azzal a szakasszal, amely mellé helyeztük.

Illesszük ugyanis az – ismét a fönt említett módok valamelyikén – racionális *AB* szakaszhoz az *AC* racionális felületet, melynek legyen *BC* a szélessége. Azt állítom, hogy *BC* racionális és lineárisan összemérhető *BA*-val.

Emeljük ugyanis *AB*-re az *AD* négyzetet. Ekkor *AD* racionális.

AC is racionális, tehát *DA* összemérhető *AC*-vel (X. 12.). Amint *DA* az *AC*-hez, úgy aránylik *DB* a *BC*-hez (VI. 1.), tehát *DB* is összemérhető *BC*-vel (X. 11.). *DB* viszont egyenlő *BA*-val, tehát *AB* is összemérhető *BC*-vel. *AB* viszont racionális, tehát *BC* is racionális és lineárisan összemérhető *AB*-vel.



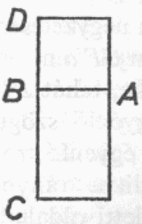
Ha tehát egy racionális szakaszhoz racionális... stb.

F.: X. 26., 38., 60–61., 63–64., 75., 78., 97., 100–101., 108., 112–113., 115.

X. 21. Tétel

Csak négyzetesen összemérhető racionális szakaszok által közrefogott téglalap irracionális, és a szakasz, melynek négyzetértéke, irracionális, mégpedig nevezzük mediálisnak.*

Fogják ugyanis közre a csak négyzetesen összemérhető *AB*, *BC* racionális szakaszok az *AC* téglalapot. Azt állítom, hogy *AC* irracionális, és a szakasz, melynek négyzetértéke, irracionális, mégpedig nevezzük mediálisnak.



Emeljük ugyanis *AB*-re az *AD* négyzetet. Ekkor *AD* racionális. Minthogy *AB* lineárisan összemérhetetlen *BC*-vel – feltettük ugyanis, hogy csak négyzetesen összemérhetők –, és *AB* egyenlő *BD*-vel, *DB* is lineárisan összemérhetetlen *BC*-vel. S amint *DB* *BC*-hez, úgy aránylik *AD* az *AC*-hez (VI. 1.), *DA* tehát összemérhetetlen *AC*-vel (X. 11.). *DA* viszont racionális, tehát *AC* irracionális (X. 13.), úgyhogy a szakasz, melynek négyzetértéke *AC* [azaz melynek négyzete egyenlő *AC*-vel], szintén irracionális, mégpedig nevezzük mediálisnak. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: X. 22–23., 25., 27–28., 31–33., 55–61., 79., 81., 91., 93., 96–97.

X. 22. Lemma

Ha van két szakasz, akkor amint az első a másodikhoz, úgy aránylik az első négyzete a két szakasz közötti téglalaphoz.

Legyen *FE* és *EG* két szakasz. Azt állítom, hogy amint *FE* az *EG*-hez, úgy aránylik *FE* négyzete az *FE* és *EG* közötti téglalaphoz.

Emeljük ugyanis *FE*-re a *DF* négyzetet, és egészítsük ki a *GD* téglalapot. Minthogy amint *FE* az *EG*-hez, úgy aránylik *FD* a *DG*-hez (VI. 1.), és *FD* az *FE* négyzete, *DG* pedig a *DE* és *EG* közötti, azaz az *FE* és *EG* közötti téglalap, amint tehát *FE* az *EG*-hez, úgy aránylik *FE* négyzete az *FE* és *EG* közötti téglalaphoz. Hasonlóképp amint a *GE* és *EF* közötti téglalap *EF* négyzetéhez, azaz amint *GD* az *FD*-hez, úgy *GE* az *EF*-hez. Éppen ezt kellett megmutatni.

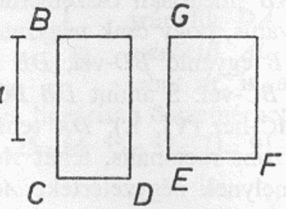
F.: X. 22., 26., 31–32., 35–36., 38., 44., 47., 60., 62., 67., 71., 73., 97., 102., 104.

X. 22. Tétel

Ha egy mediális négyzetét racionális szakaszhoz illesztjük, akkor a keletkező idom szélessége racionális lesz és lineárisan összemérhetetlen azzal a szakasszal, amely mellé helyeztük.

Legyen ugyanis *a* egy mediális, *CB* egy racionális, és illesszük *BC*-hez az *a* négyzetével egyenlő *BD* téglalapot (I. 44.), melynek legyen *CD* a szélessége. Azt állítom, hogy *CD* racionális és lineárisan összemérhetetlen *CB*-vel.

Minthogy ugyanis *a* mediális, *a* négyzetértéke egy csak négyzetesen összemérhető racionálisok által közrefogott idom. Legyen *GF a* négyzetértéke. *BD* is négyzetértéke, tehát *BD* egyenlő *GF*-fel. Másrészt egyenlő szögű is vele, viszont az egyenlő és egyenlő szögű paralelogrammáknak fordítva arányosak az egyenlő szögek melletti oldalaik (VI. 14.), amint tehát *BC* az *EG*-hez, úgy aránylik *EF* a *CD*-hez, így amint *BC* négyzete *EG* négyzetéhez, úgy *EF* négyzete *CD* négyzetéhez (VI. 22.). *CB* négyzete összemérhető *EG* négyzetével – racionális ugyanis mindkét szakasz –, tehát *EF* négyzete szintén összemérhető *CD* négyzetével (X. 11.). *EF* négyzete racionális, tehát *CD* négyzete is racionális (X. 12.), így *CD* racionális. Minthogy *EF* lineárisan összemérhetetlen *EG*-vel ugyanis csak négyzetesen összemérhetők – és amint *EF* az *EG*-hez, úgy aránylik *EF* négyzete az *FE* és *EG* közötti téglalaphoz (L.), *EF* négyzete összemérhetetlen az *FE* és *EG* közötti téglalappal (X. 11.). *EF* négyzetével viszont összemérhető *CD* négy-



zete – a szakaszok ugyanis négyzetértékben racionálisok –, az *FE* és *EG* közötti téglalappal pedig összemérhető a *DC* és *CB* közötti téglalap – egyenlők ugyanis *a* négyzetével, tehát *CD* négyzete összemérhetetlen a *DC* és *CB* közötti téglalappal (X. 13.). Amint viszont *CD* négyzete a *DC* és *CB* közötti téglalaphoz, úgy aránylik *DC* a *CB*-hez (L.), *DC* tehát lineárisan összemérhetetlen *CB*-vel (X. 11.). *CD* tehát racionális és lineárisan összemérhetetlen *CB*-vel. Éppen ezt kellett megmutatni.

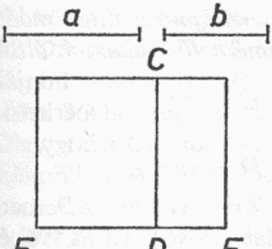
F.: X. 23., 25–26., 38., 41., 44., 47., 61–65., 72., 75., 78., 81., 84., 97., 99–102., 108., 110–111.

X. 23. Tétel

Mediálissal összemérhető szakasz mediális.*

Legyen *a* mediális és *b* az *a*-val összemérhető. Azt állítom, hogy *b* is mediális.

Vegyünk ugyanis egy *CD* racionálist, és illesszük *CD*-hez az *a* négyzetével egyenlő *CE* téglalapot, melynek legyen *ED* a szélessége. Ekkor *ED* racionális és lineárisan összemérhetetlen *CD*-vel (X. 22.). Illesszük még *CD*-hez a *b* négyzetével egyenlő *CF* téglalapot (I. 44.), melynek legyen *DF* a szélessége. Minthogy *a* összemérhető *b*-vel, *a* négyzete is összemérhető *b* négyzetével. *a* négyzetével viszont egyenlő *EC*, *b*-ével pedig egyenlő *CF*, tehát *EC* összemérhető *CF*-fel. S amint *EC* a *CF*-hez, úgy aránylik *ED* *DF*-hez (VI. 1.), *ED* tehát lineárisan összemérhető *DF*-fel (X. 11.).



ED racionális és lineárisan összemérhetetlen *DC*-vel, tehát *DF* is racionális és lineárisan összemérhetetlen *DC*-vel (X. 13.). *CD* és *DF* tehát csak négyzetesen összemérhető racionálisok. Az a szakasz viszont, melynek négyzetértéke egy csak négyzetesen összemérhető szakaszok közötti téglalap, mediális, tehát az a szakasz, melynek négyzetértéke a *CD* és *DF* közötti téglalap, mediális. *b*-nek négyzetértéke a *CD* és *DF* közötti téglalap, *b* tehát mediális.

F.: X. 27–28., 31–32., 67., 97., 104.

Következmény

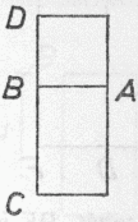
Ebből már nyilvánvaló, hogy mediális idommal összemérhető idom mediális. [Ugyanis olyan szakaszok négyzetértékei, melyek négyzetesen összemérhetők és egyikük mediális, úgyhogy a másik is mediális.]

F.: X. 24., 33., 39., 61–62., 67–69., 75., 81., 98–99., 104–105.

Következetesen járunk el, ha ugyanúgy, mint a racionálisok esetében (X. 19. L.), a mediálissal lineárisan összemérhető szakaszt mediálisnak és azzal nemcsak lineárisan, hanem négyzetesen is összemérhetőnek mondjuk, minthogy általánosságban a lineárisan összemérhető szakaszok négyzetesen is azok; ha pedig valamely szakasz négyzetesen összemérhető a mediálissal, akkor ha lineárisan is az vele, mediálisoknak és lineárisan és négyzetesen összemérhetőknek mondjuk őket, ha pedig csak négyzetesen, akkor csak négyzetesen összemérhető mediálisoknak mondjuk őket.

X. 24. Tétel

A [fönt említett módok valamelyikén] mediális és lineárisan összemérhető szakaszok által közrefogott téglalap mediális.*



Fogják ugyanis közre az *AB*, *BC* lineárisan összemérhető mediálisok az *AC* téglalapot. Azt állítom, hogy *AC* mediális.

Emeljük ugyanis *AB*-re az *AD* négyzetet. Ekkor *AD* mediális. Minthogy *AB* lineárisan összemérhető *BC*-vel és *AB* egyenlő *BD*-vel, *DB* is lineárisan összemérhető *BC*-vel, úgyhogy *DA* is összemérhető *AC*-vel (VI. 1., X. 11.). *DA* viszont mediális, tehát *AC* is mediális (X. 23. K.). Éppen ezt kellett megmutatni.

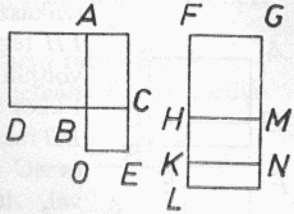
F.: X. 80.

X. 25. Tétel

*Csak négyzetesen összemérhető mediális szakaszok által közrefogott téglalap vagy racionális, vagy mediális.**

Fogják közre ugyanis az *AB*, *BC* csak négyzetesen összemérhető mediális szakaszok az *AC* téglalapot. Azt állítom, hogy *AC* vagy racionális, vagy mediális.

Emeljük ugyanis *AB*-re és *BC*-re az *AD*, illetve *BE* négyzetet. Ekkor mind *AD*, mind *BE* mediális. Vegyünk egy *FG* racionálist, és illesszük *FG*-hez az *AD*-vel egyenlő *GH* téglalapot, melynek legyen *FH* a szélessége, illesszük *HM*-hez az *AC*-vel egyenlő *MK* téglalapot, melynek legyen *HK* a szélessége, és végül hasonlóképp illesszük *KN*-hez a *BE*-vel egyenlő *NL*-t, melynek legyen *KL* a szélessége (I. 44.). Ekkor *FH*, *HK* és *KL* egy egyenesen van. Minthogy *AD* és *BE* mindketten mediálisok, és *AD* egyenlő *GH*-val, *BE* pedig *NL*-lel, *GH* és *NL* is mindketten mediálisok. És a racionális *FG* mellé illesztettük őket: *FH* és *KL* tehát mindketten racionálisok és lineárisan összemérhetetlenek *FG*-vel (X. 22.). Minthogy *AD* összemérhető *BE*-vel, *GH* is összemérhető *NL*-lel. S amint *GH* az *NL*-hez, úgy aránylik *FH* a *KL*-hez (VI. 1.), *FH* tehát lineárisan összemérhető *KL*-lel (X. 11.). *FH* és *KL* tehát lineárisan összemérhető racionálisok, tehát az *FH* és *KL* közötti téglalap racionális (X. 19.). Minthogy *DB* egyenlő *BA*-val, *OB* pedig *BC*-vel, amint *DB* a *BC*-hez, úgy aránylik *AB* a *BO*-hoz. Amint viszont *DB* a *BC*-hez, úgy aránylik *DA* az *AC*-hez, amint pedig *AB* a *BO*-hoz, úgy *AC* a *CO*-hoz (VI. 1.), amint tehát *DA* az *AC*-hez, úgy *AC* a *CO*-hoz (V. 11.). *AD* egyenlő *GH*-val, *AC* az *MK*-val, *CO* pedig *NL*-lel, tehát amint *GH* az *MK*-hoz, úgy aránylik *MK* az *NL*-hez, tehát amint *FH* a *HK*-hoz, úgy *HK* a *KL*-hez (VI. 1., V. 11.), tehát az *FH* és *KL* közötti téglalap egyenlő *HK* négyzetével (VI. 17.). Az *FH* és *KL* közötti téglalap viszont racionális, tehát *HK* négyzete is racionális, tehát *HK* racionális. S ha lineárisan összemérhető *FG*-vel, akkor *HN* racionális (X. 19.), ha pedig lineárisan összemérhetetlen *FG*-vel, akkor *KH* és *HM* csak négyzetesen összemérhető racionálisok, így *HN* mediális. *HN* tehát vagy racionális, vagy mediális. *HN* viszont egyenlő *AC*-vel, tehát *AC* vagy racionális, vagy mediális.

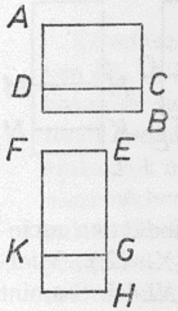


Tehát csak négyzetesen összemérhető mediális... stb.

X. 26. Tétel

Két mediális felület különbsége nem lehet racionális.

Tegyük föl ugyanis, hogy az *AB* mediális felület a *DB* racionális felülettel nagyobb az *AC* mediálisnál, vegyünk egy *EF* racionális szakaszt, és illesszünk *EF*-hez egy *AB*-vel egyenlő *FH* téglalapot, melynek legyen *EH* a szélessége, és vonjunk le belőle egy *AC*-vel egyenlő *FG*-t (I. 44.). Ekkor a maradék *BD* egyenlő a maradék *KH*-val. *DB* racionális, tehát *KH* is racionális. Minthogy *AB* és *AC* mindketten mediálisok, és *AB* egyenlő *FH*-val, *AC* pedig *FG*-vel, *FH* és *FG* is mindketten mediálisok. S a racionális *EF* szakasz mellé illesztettük őket, tehát *HE* és *EG* mindketten racionálisok és lineárisan összemérhetetlenek *EF*-fel (X. 22.). Minthogy *DB* racionális és egyenlő *KH*-val, *KH* is racionális. S a racionális *EF* mellé illesztettük, tehát *GH* racionális és lineárisan összemérhető *EF*-fel (X. 20.). Másrészt *EG* racionális és lineárisan összemérhetetlen *EF*-fel, tehát *EG* lineárisan összemérhetetlen *GH*-val (X. 13.). *EG* négyzete úgy aránylik az *EG* és *GH* közötti téglalaphoz, mint *EG* a *GH*-hoz (X. 22. L.), tehát *EG* négyzete összemérhetetlen az *EG* és *GH* közötti téglalappal (X. 11.). Másrészt *EG* négyzetével összemérhető *EG* és *GH* négyzeteinek összege – ugyanis mind a kettő racionális felület (X. 15.) –, az *EG* és *GH* közötti téglalappal pedig összemérhető a kétszer vett *EG* és *GH* közötti téglalap – a kétszerese ugyanis (X. 6.) –, tehát *EG* és *GH* négyzetösszege összemérhetetlen a kétszer vett *EG* és *GH* közötti téglalappal (X. 13.), így *EG* és *GH* négyzeteinek meg a kétszer vett *EG* és *GH* közötti téglalapnak az összege, ami *EH* négyzete (II. 4.), összemérhetetlen *EG* és *GH* négyzetösszegével (X. 16.). *EG* és *GH* négyzetösszege viszont racionális, tehát *EH* négyzete irracionális (X. 13.), tehát az *EG* szakasz irracionális. Másrészt racionális is, ami lehetetlen.



Két mediális felület különbsége tehát nem lehet racionális. Éppen ezt kellett megmutatni.

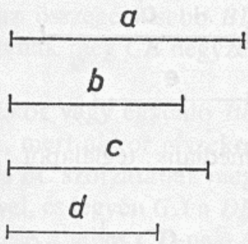
F.: X. 42–43., 45–46., 79–80., 82.

X. 27. Tétel

Keressünk olyan, csak négyzetesen összemérhető mediális szakaszokat, melyek racionális téglalapot fognak közre!

Legyen *a* és *b* két, csak négyzetesen összemérhető racionális (X. 10.), vegyük a *c* középarányosukat (VI. 13.), és arányuljék amint *a* a *b*-hez, úgy *c* a *d*-hez (VI. 12.).*

Minthogy *a* és *b* csak négyzetesen összemérhető racionálisok, az *a* és *b* közötti téglalap, azaz *c* négyzete (VI. 17.), mediális. *c* tehát mediális szakasz. Minthogy *c* úgy aránylik *d*-hez, mint *a* a *b*-hez, és *a* meg *b* csak négyzetesen összemérhetők, *c* és *d* is csak négyzetesen összemérhetők (X. 11., VI. 22.). S *c* mediális, tehát *d* is mediális (X. 23.). *c* és *d* tehát csak négyzetesen összemérhető mediális szakaszok. Azt állítom, hogy racionális téglalapot fognak közre. Minthogy ugyanis amint *a* a *b*-hez, úgy aránylik *c* a *d*-hez, fölcserélve amint *a* a *c*-hez, úgy aránylik *b* a *d*-hez (V. 16.). Amint viszont *a* a *c*-hez, úgy *c* a *b*-hez, amint tehát *c* a *b*-hez, úgy *b* a *d*-hez (V. 11.), tehát a *c* és *d* közötti téglalap egyenlő *b* négyzetével (VI. 17.). *b* négyzete viszont racionális, tehát a *c* és *d* közötti téglalap is racionális.



Találtunk tehát olyan, csak négyzetesen összemérhető mediális szakaszokat, melyek racionális téglalapot fognak közre.

Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: X. 37.

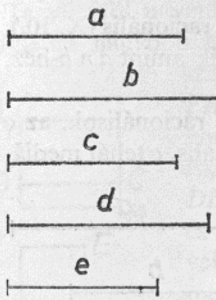
X. 28. Tétel

Keressünk olyan, csak négyzetesen összemérhető mediális szakaszokat, melyek mediális téglalapot fognak közre!

Legyen *a*, *b* és *c* [három] (páronként) csak négyzetesen összemérhető racionális (X. 10.), vegyük *a* és *b* középarányosát, *d*-t (VI. 13.), és arányuljon amint *b* a *c*-hez, úgy *d* az *e*-hez (VI. 12.).*

Minthogy *a* és *b* csak négyzetesen összemérhető racionálisok, az *a* és *b* közötti téglalap, azaz *d* négyzete (VI. 17.), mediális. *d* tehát mediális szakasz. Minthogy *b* és *c* csak négyzetesen összemérhetők, és *d* úgy aránylik *e*-hez, mint *b* a *c*-hez, *d* és *e* is csak négyzetesen összemérhetők

(X. 11., VI. 22.). *d* mediális, tehát *e* is mediális (X. 23.). *d* és *e* tehát csak négyzetesen összemérhető mediális szakaszok. Azt állítom, hogy mediális téglalapot fognak közre. Minthogy ugyanis amint *b* a *c*-hez, úgy aránylik *d* az *e*-hez, fölcserélve amint *b* a *d*-hez, úgy *c* az *e*-hez (V. 16.). Amint viszont *b* a *d*-hez, úgy *d* az *a*-hoz (V. 7. K.), amint tehát *d* az *a*-hoz, úgy *c* az *e*-hez (V. 11.), tehát az *a* és *c* közötti téglalap egyenlő a *d* és *e* közöttivel (VI. 16.). Az *a* és *c* közötti téglalap viszont mediális, tehát a *d* és *e* közötti is mediális.

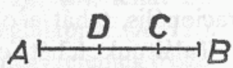


Találtunk tehát olyan, csak négyzetesen összemérhető mediális szakaszokat, melyek mediális téglalapot fognak közre. Éppen ezt kellett megmutatni.

X. 29. 1. Lemma

Keressünk két olyan négyzetszámot, melyek összege is négyzetszám!

Vegyünk két számot, *AB*-t és *BC*-t, melyek legyenek egyszerre vagy párosak, vagy páratlanok. Minthogy akár páros számból párosat, akár páratlanból páratlant vonunk le, a maradék páros (IX. 24., 26.), az *AC* maradék páros. Legyen *D* az *AC* felezőpontja. Legyenek még *AB* és *BC* vagy hasonló síkszámok, vagy négyzetszámok – melyek maguk is hasonló síkszámok. Ekkor *AB* és *BC* szorzatának meg *CD* négyzetének az összege egyenlő *BD* négyzetével (vö. II. 6.). S *AB* és *BC* szorzata négyzetszám, mert mint megmutattuk, ha két hasonló síkszámot szorzunk össze, négyzetszámot kapunk (IX. 1.). Találtunk tehát két olyan négyzetszámot, *AB* és *BC* szorzatát meg *CD* négyzetét, melyek összeadva *BD* négyzetét adják.



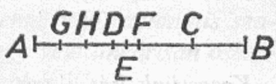
És nyilvánvaló, hogy találtunk két olyan négyzetszámot, *BD* négyzetét és *CD* négyzetét, melyek különbsége, *AB* és *BC* szorzata, négyzetszám, ha *AB* és *BC* hasonló síkszámok. Ha pedig nem hasonló síkszámok, akkor találtunk két olyan négyzetszámot, *BD* négyzetét és *DC* négyzetét, melyek különbsége, *AB* és *BC* szorzata, nem négyzetszám (IX. 2.). Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: X. 29., 48–53., 85–87., 89–90.

X. 29. 2. Lemma

Keressünk két olyan négyzetszámot, melyek összege nem négyzetszám!

Legyen ugyanis – mint föntebb – *AB* és *BC* szorzata négyzetszám, *CA* páros, és *CA* felezőpontja *D*. Ekkor nyilván *AB* és *BC* szorzatának meg *CD* négyzetének az összege egyenlő *BD* négyzetével. Vonjunk le (*CD*-ből) egy *DE* egységet. Ekkor *AB* és *BC* szorzatának meg *CE* négyzetének az összege kisebb *BD* négyzeténél. Azt állítom, hogy *AB* és *BC* szorzatának meg *CE* négyzetének az összege nem négyzetszám.



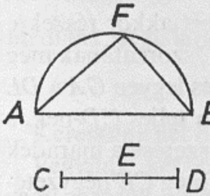
Ha ugyanis föltesszük, hogy négyzetszám, akkor vagy egyenlő *BE* négyzetével, vagy kisebb nála, de nem nagyobb, mert akkor részekre oszlana az egység. Tegyük föl először, hogy *AB* és *BC* szorzatának meg *CE* négyzetének az összege egyenlő *BE* négyzetével, és legyen *GA* a *DE* egység kétszerese. Minthogy a teljes *AC* kétszerese a teljes *CD*-nek, s ezekből *AG* kétszerese *DE*-nek, a maradék *GC* is kétszerese a maradék *EC*-nek. *E* tehát felezi *GC*-t. *GB* és *BC* szorzatának meg *CE* négyzetének az összege tehát egyenlő *BE* négyzetével (II. 6.). Másrészt feltétel szerint *AB* és *BC* szorzatának meg *CE* négyzetének az összege is egyenlő *BE* négyzetével, tehát *GB* és *BC* szorzatának meg *CE* négyzetének az összege egyenlő *AB* és *BC* szorzatának meg *CE* négyzetének az összegével, s ha levonjuk a közös *CE* négyzetet, következik, hogy *AB* egyenlő *GB*-vel, ami ellentmondás. Nem egyenlő tehát *AB* és *BC* szorzatának meg *CE* négyzetének az összege *BE* négyzetével. Azt állítom, hogy nem is kisebb *BE* négyzeténél. Tegyük föl ugyanis, hogy az, legyen *BF* négyzetével egyenlő, és *DF*-nek kétszerese *HA*. Ismét következik, hogy *HC* kétszerese *CF*-nek, úgyhogy *F* a *CH* felezőpontja, és így *HB* és *BC* szorzatának meg *FC* négyzetének az összege egyenlő *BF*-fel (II. 6.). Feltétel szerint *AB* és *BC* szorzatának meg *CE* négyzetének az összege is egyenlő *BF* négyzetével, úgyhogy *HB* és *BC* szorzatának meg *CF* négyzetének az összege egyenlő *AB* és *BC* szorzatának meg *CE* négyzetének az összegével, ami ellentmondás. *AB* és *BC* szorzatának meg *CE* négyzetének az összege tehát nem egyenlő *BE* négyzeténél kisebb számmal. Megmutattuk, hogy [magával] *BE* négyzetével sem egyenlő. *AB* és *BC* szorzatának meg *CE* négyzetének az összege tehát nem négyzetszám. [Noha még többféle módon is elő lehet állítani fönti tulajdonságú számokat, elégedjünk meg az elmondottakkal, nehogy túlzott hosszadalmasságunkkal tovább nyújtsuk a tárgyalást.] Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: X. 30., 87., 89–90.

X. 29. Tétel

*Keressünk két olyan, csak négyzetesen összemérhető racionális szakaszt, melyek közül a nagyobb négyzetértéke egy vele lineárisan összemérhető szakasz négyzetével nagyobb a kisebbénél!**

Vegyünk ugyanis valamely *AB* racionális szakaszt, két olyan négyzetszámot, *CD*-t és *DE*-t, melyek különbsége, *CE*, nem négyzetszám (1. L.), emeljünk *AB*-re egy *AFB* félkört, arányuljon úgy *BA* négyzete *AF* négyzetéhez, mint *DC* a *CE*-hez (X. 6. K.), és húzzuk meg *FB*-t.



Minthogy *DC* úgy aránylik *CE*-hez, mint *BA* négyzete *AF* négyzetéhez, *BA* négyzete úgy aránylik *AF*-éhez, mint egy szám, *DC*, egy másik számhoz, *CE*-hez; *BA* négyzete tehát összemérhető *AF* négyzetével (X. 6.). *AB* négyzete racionális, tehát *AF* négyzete is racionális (X. 12.), így *AF* is racionális. Minthogy *DC* nem úgy aránylik *CE*-hez, mint egy négyzetszám egy másik négyzetszámhoz (VIII. 24.), *BA* négyzete sem úgy aránylik *AF* négyzetéhez, mint egy négyzetszám egy másik négyzetszámhoz, tehát *AB* lineárisan összemérhetetlen *AF*-fel (X. 9.): *BA* és *AF* tehát csak négyzetesen összemérhető racionálisok. Minthogy amint *DC* a *CE*-hez, úgy aránylik *BA* négyzete *AF* négyzetéhez, fölforgatva amint *CD* a *DE*-hez, úgy *AB* négyzete *BF* négyzetéhez (V. 19. K., III. 31., I. 47.). *CD* viszont úgy aránylik *DE*-hez, mint egy négyzetszám egy másik négyzetszámhoz, tehát *AB* négyzete is úgy aránylik *BF* négyzetéhez, mint egy négyzetszám egy másik négyzetszámhoz, *AB* tehát lineárisan összemérhető *BF*-fel (X. 9.). S *AB* négyzete egyenlő *AF* és *FB* négyzetösszegével, tehát *AB* négyzetértéke a vele összemérhető *BF*-fel nagyobb *AF*-énél.

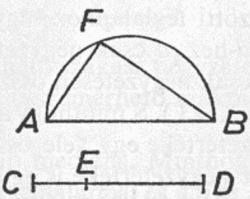
Találtunk tehát két olyan, csak négyzetesen összemérhető racionális szakaszt, *BA*-t és *AF*-et, melyek közül a nagyobb, *AB* négyzetértéke egy vele lineárisan összemérhető szakasz, BF négyzetével nagyobb AF-énél. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: X. 31–32.

X. 30. Tétel

Keressünk két olyan, csak négyzetesen összemérhető racionális szakaszt, melyek közül a nagyobb négyzetértéke egy vele lineárisan összemérhetetlen szakasz négyzetével nagyobb a kisebbénél!

Vegyünk ugyanis egy AB racionális szakaszt, két olyan négyzetszámot, CE-t és ED-t, melyek összege, CD, nem négyzetszám (X. 29. 2. L.), emeljünk AB-re egy AFB félkört, arányuljék úgy BA négyzete AF négyzetéhez, mint DC a CE-hez (X. 6. K.), és húzzuk meg FB-t.



Az előző tételhez hasonlóan bizonyíthatnánk, hogy BA és AF csak négyzetesen összemérhető racionálisok. Minthogy BA négyzete úgy aránylik AF négyzetéhez, mint DC a CE-hez, fölforgatva amint CD a DE-hez, úgy AB négyzete BF négyzetéhez (V. 19. K., III. 31., I. 47.). CD viszont nem úgy aránylik DE-hez, mint egy négyzetszám egy másik négyzetszámhoz (VIII. 24.), tehát AB négyzete sem úgy aránylik BF négyzetéhez, mint egy négyzetszám egy másik négyzetszámhoz, AB tehát lineárisan összemérhetetlen BF-fel (X. 9.). S AB négyzetértéke a vele összemérhetetlen FB négyzetével nagyobb AF-énél.

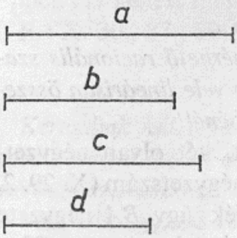
AB és AF tehát csak négyzetesen összemérhető racionálisok, és AB négyzetértéke a vele lineárisan összemérhetetlen FB négyzetével nagyobb AF-énél. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: X. 31., 33.

X. 31. Tétel

Keressünk két olyan, csak négyzetesen összemérhető mediális szakaszt, melyek racionális téglalapot fognak közre, és a nagyobb négyzetértéke egy vele lineárisan összemérhető szakasz négyzetével nagyobb a kisebbénél!

Vegyünk két olyan, csak négyzetesen összemérhető racionális szakaszt, a-t és b-t, melyek közül a nagyobb a négyzetértéke egy vele lineárisan összemérhető szakasz négyzetével nagyobb a kisebb b-énél (X. 29.). Az a és b közötti téglalappal legyen egyenlő c négyzete (II. 14.). Az a és b közötti téglalap mediális, tehát c négyzete is mediális, tehát a c szakasz is mediális. b négyzetével legyen egyenlő a c és d közötti téglalap (VI. 11., 17.). b négyzete racionális, tehát a c és d közötti téglalap is racionális. Mivel amint a a b-hez, úgy aránylik az a és b közötti téglalap b négyzetéhez (X. 22. L.), és az a és b közötti téglalappal egyenlő c négyzete, b négyzetével pedig egyenlő a c és d közötti téglalap, amint a a b-hez, úgy aránylik c négyzete a c és d közötti téglalaphoz. Amint viszont c négyzete a c és d közötti téglalaphoz, úgy c a d-hez (ua.), amint tehát a a b-hez, úgy c a d-hez. a csak négyzetesen összemérhető b-vel, tehát c a d-vel szintén csak négyzetesen összemérhető (X. 11.). c mediális, tehát d is mediális (X. 23.). S minthogy amint a a b-hez, úgy aránylik c a d-hez, és a négyzetértéke egy vele összemérhető szakasz négyzetével nagyobb b-énél, c négyzetértéke is egy vele összemérhető szakasz négyzetével nagyobb d-énél (X. 14.).



Találtunk tehát két, csak négyzetesen összemérhető mediális szakaszt, c-t és d-t, melyek racionális téglalapot fognak közre, és c négyzetértéke egy vele lineárisan összemérhető szakasz négyzetével nagyobb d-énél.

Hasonló a bizonyítás az összemérhetetlen szakasz négyzetének esetére, azaz amikor a négyzetértéke egy vele összemérhetetlen szakasz négyzetével nagyobb b-énél (X. 30.).

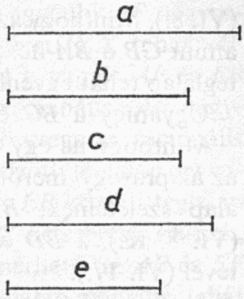
F.: X. 34.

X. 32. Tétel

Keressünk két olyan, csak négyzetesen összemérhető mediális szakaszt, melyek mediális téglalapot fognak közre, és a nagyobb négyzetértéke egy vele összemérhető szakasz négyzetével nagyobb a kisebbénél!

Vegyünk három olyan, csak négyzetesen összemérhető racionális szakaszt, a-t, b-t és c-t, hogy a négyzetértéke egy vele összemérhető szakasz négyzetével nagyobb c-énél (X. 29.), és legyen az a és b közötti téglalappal egyenlő d négyzete (II. 14.). d négyzete tehát mediális, így

d is mediális (X. 21.). Másrészt, legyen a b és c közötti téglalappal egyenlő a d és e közötti téglalap (I. 41. és 44.). Mivel amint az a és b közötti téglalap a b és c közötti téglalaphoz, úgy aránylik a a c-hez (VI. 1.), és az a és b közötti téglalappal egyenlő d négyzete, a b és c közötti téglalappal pedig egyenlő a d és e közötti téglalap, amint a a c-hez, úgy aránylik d négyzete a d és e közötti téglalaphoz. Amint viszont d négyzete a d és e közötti téglalaphoz, úgy d az e-hez (X. 22. L.), amint tehát a a c-hez, úgy d az e-hez. a [csak] négyzetesen összemérhető c-vel, tehát d az e-vel szintén csak négyzetesen összemérhető (X. 11.). d mediális, tehát e is mediális (X. 23.). Mivel amint a a c-hez, úgy aránylik d az e-hez, és a négyzetértéke egy vele összemérhető szakasz négyzetével nagyobb c-énél, d négyzetértéke is egy vele összemérhető szakasz négyzetével nagyobb e-énél (X. 14.).



Azt is állítom, hogy a d és e közötti téglalap mediális. Minthogy a b és c közötti téglalap egyenlő a d és e közötti téglalappal és a b és c közötti téglalap mediális [– b és c ugyanis csak négyzetesen összemérhető racionálisok –] (X. 21.), a d és e közötti téglalap is mediális.

Találtunk tehát két, csak négyzetesen összemérhető mediális szakaszt, d-t és e-t, hogy a nagyobb négyzetértéke egy vele összemérhető szakasz négyzetével nagyobb a kisebbénél.

Ismét hasonló a bizonyítás az összemérhetetlen szakasz négyzetének esetére, azaz amikor a négyzetértéke egy vele összemérhetetlen szakasz négyzetével nagyobb c-énél (X. 30.).

F.: X. 35.

X. 33. Lemma

Legyen *ABC* egy derékszögű háromszög, melynek *A*-nál levő szöge derékszög, és húzzuk meg az *AD* merőlegest. Azt állítom, hogy a *CB* és *BD* közötti téglalap egyenlő *BA* négyzetével, a *BC* és *CD* közötti téglalap egyenlő *CA* négyzetével, a *BD* és *DC* közötti egyenlő *AD* négyzetével, és végül a *BC* és *AD* közötti egyenlő a *BA* és *AC* közötti téglalappal.

Először is, hogy a *CB* és *BD* közötti téglalap egyenlő *BA* négyzetével. Minthogy ugyanis egy derékszögű háromszögben a derékszög csúcsából az alapra egy *AD* merőlegest bocsátottunk, az *ABD*, *ADC* háromszögek hasonlóak mind a teljes *ABC* háromszöghöz, mind egymáshoz (VI. 8.). Minthogy az *ABC* háromszög hasonló az *ABD* háromszöghöz, amint *CB* a *BA*-hoz, úgy aránylik *BA* a *BD*-hez, a *CB* és *BD* közötti téglalap tehát egyenlő *AB* négyzetével (VI. 17.).

Ugyanígy a *BC* és *CD* közötti téglalap egyenlő *AC* négyzetével. Minthogy ha egy derékszögű háromszögben a derékszög csúcsából az alapra egy merőlegest bocsátunk, a merőleges középarányosa az alap szeleteinek, *BD* úgy aránylik *DA*-hoz, mint *AD* a *DC*-hez (VI. 8. K.), a *BD* és *DC* közötti téglalap tehát egyenlő *DA* négyzetével (VI. 17.).

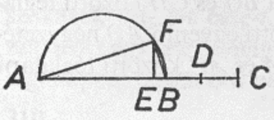
Azt is állítom, hogy a *BC* és *AD* közötti téglalap egyenlő a *BA* és *AC* közöttivel. Minthogy ugyanis – mint láttuk – az *ABC* háromszög hasonló *ABD*-hez, *BC* úgy aránylik *CA*-hoz, mint *BA* az *AD*-hez. [Ha viszont négy szakasz arányos, akkor a kültagok közötti téglalap egyenlő a beltagok közöttivel], a *BC* és *AD* közötti téglalap tehát egyenlő a *BA* és *AC* közöttivel (VI. 16.). Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: X. 33–35.

X. 33. Tétel

Keressünk két olyan, négyzetesen összemérhetetlen szakaszt, melyek négyzetösszege racionális, és mediális téglalapot fognak közre!

Vegyünk két olyan, csak négyzetesen összemérhető racionális szakaszt, *AB*-t és *BC*-t, melyek közül a nagyobb *AB* négyzetértéke egy vele lineárisan összemérhetetlen szakasz négyzetével nagyobb a kisebb *BC*-énél (X. 30.), legyen *BC* felezőpontja *D* (I. 10.), illesszünk úgy *AB*-hez egy *BD* vagy *DC* négyzetével egyenlő paralelogrammát – legyen ez az *AE* és *EB* közötti téglalap –, hogy egy négyzet maradjon fönn (VI. 28.), írjunk *AB* fölé egy *AFB* félkört, emeljünk *AB*-re egy *EF* merőlegest (I. 11.), és húzzuk meg *AF*-et és *FB*-t.



Minthogy *AB* és *BC* két, nem egyenlő szakasz, *AB* négyzetértéke egy vele összemérhetetlen szakasz négyzetével nagyobb *BC*-énél, *BC* négyzetének negyedével, azaz

BC felének négyzetével egyenlő paralelogrammát illesztettünk *AB*-hez úgy, hogy egy négyzet maradt fönn, és az *AE* és *EB* közötti téglalapot kaptuk, *AE* összemérhetetlen *EB*-vel (X. 18.). Amint *AE* az *EB*-hez, úgy aránylik a *BA* és *AE* közötti téglalap az *AB* és *BE* közöttihez (VI. 1.), a *BA* és *AE* közötti téglalap egyenlő *AF* négyzetével, az *AB* és *BE* közötti pedig *BF* négyzetével (L.), tehát *AF* négyzete összemérhetetlen *FB* négyzetével (X. 11.), vagyis *AF* és *FB* négyzetesen összemérhetetlenek. Minthogy *AB* racionális, *AB* négyzete is racionális, úgyhogy *AF* és *FB* négyzetösszege is racionális (III. 31., I. 47.). Továbbá minthogy az *AE* és *EB* közötti téglalap egyenlő *EF* négyzetével (L.), és feltétel szerint az *AE* és *EB* közötti téglalap egyenlő *BD* négyzetével, *FE* egyenlő *BD*-vel, *BC* kétszerese *FE*-nek, úgyhogy az *AB* és *BC* közötti téglalap is összemérhető az *AB* és *EF* közöttivel (VI. 1., X. 6.). Az *AB* és *BC* közötti téglalap mediális, tehát az *AB* és *EF* közötti is mediális (X. 23. K.). Az *AB* és *EF* közötti téglalap egyenlő az *AF* és *FB* közöttivel (L.), tehát az *AF* és *FB* közötti téglalap is mediális. Azt is megmutattuk, hogy a négyzetösszegük racionális.

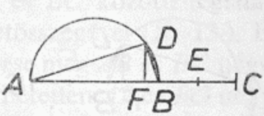
Találtunk tehát két olyan, négyzetesen összemérhetetlen szakaszt, *AF*-et és *FB*-t, melyek négyzetösszege racionális és mediális téglalapot fognak közre. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: X. 39., 76.

X. 34. Tétel

Keressünk két olyan négyzetesen összemérhetetlen szakaszt, melyek négyzetösszege mediális, és racionális téglalapot fognak közre!

Vegyünk két olyan, csak négyzetesen összemérhető mediális szakaszt, *AB*-t és *BC*-t, melyek racionális téglalapot fognak közre, és *AB* négyzetértéke egy vele összemérhetetlen szakasz négyzetével nagyobb *BC*-énél (X. 31.), írjunk *AB* fölé egy *ADB* félkört (I. 10.), legyen *BC* felezőpontja *E* (ua.), és illesszünk úgy *AB*-hez egy *BE* négyzetével egyenlő paralelogrammát – az *AF* és *FB* közöttit –, hogy egy négyzet maradjon fönn (VI. 28.). Ekkor *AF* lineárisan összemérhetetlen *FB*-vel



(X. 18.). Emeljünk *AB*-re *F*-ben egy *FD* merőlegest (I. 11.) és húzzuk meg *AD*-t, *DB*-t.

Minthogy *AF* összemérhetetlen *FB*-vel, a *BA* és *AF* közötti téglalap is összemérhetetlen az *AB* és *BF* közöttivel (VI. 1., X. 11.). A *BA* és *AF* közötti téglalap viszont egyenlő *AD* négyzetével, az *AB* és *BF* közötti pedig *DB* négyzetével (X. 33. L.), tehát *AD* négyzete is összemérhetetlen *DB* négyzetével. Minthogy *AB* négyzete mediális, *AD* és *DB* négyzetösszege is mediális (III. 31., I. 47.). Minthogy *BC* kétszerese *DF*-nek, az *AB* és *BC* közötti téglalap is kétszerese az *AB* és *FD* közöttinek. Az *AB* és *BC* közötti téglalap racionális, tehát az *AB* és *FD* közötti is racionális (X. 6., 12.). Az *AB* és *FD* közötti téglalap viszont egyenlő az *AD* és *DB* közöttivel (X. 33. L.), úgyhogy az *AD* és *DB* közötti téglalap is racionális.

Találtunk tehát két olyan, négyzetesen összemérhetetlen szakaszt, *AD*-t és *DB*-t, melyek négyzetösszege mediális, és racionális téglalapot fognak közre. Éppen ezt kellett megmutatni.

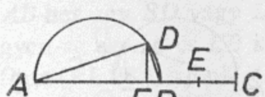
F.: X. 40., 77.

X. 35. Tétel

Keressünk két olyan, négyzetesen összemérhetetlen szakaszt, melyeknek mind négyzetösszege mediális, mind mediális – és a négyzetösszeggel összemérhetetlen – téglalapot fognak közre!

Vegyünk két olyan, csak négyzetesen összemérhető mediális szakaszt, *AB*-t és *BC*-t, melyek mediális téglalapot fognak közre, és *AB* négyzetértéke egy vele összemérhetetlen szakasz négyzetével nagyobb *BC*-énél (X. 32.), írjunk *AB* fölé egy *ADB* félkört (I. 10.) és így tovább, mint az előző tételben.

Minthogy *AF* lineárisan összemérhetetlen *FB*-vel, *AD* négyzetesen összemérhetetlen *DB*-vel (vö. X. 34.). Minthogy *AB* négyzete mediális, *AD* és *DB* négyzetösszege is mediális (III. 31., I. 47.). Minthogy az *AF* és *FB* közötti téglalap egyenlő *BE* és *DF* bármelyikének négyzetével, *BE* egyenlő *DF*-fel, *BC* tehát kétszerese *FD*-nek, úgyhogy az *AB* és *BC* közötti téglalap is kétszerese az *AB* és *FD* közöttinek. Az *AB* és *BC* közötti téglalap viszont mediális, tehát az *AB* és *FD* közötti is mediális



(X. 6., 23. K.). Ez egyenlő az *AD* és *DB* közötti téglalappal (X. 33. L.), tehát az *AD* és *DB* közötti téglalap is mediális. Minthogy *AB* lineárisan összemérhetetlen *BC*-vel, *CB* viszont összemérhető *BE*-vel, *AB* lineárisan összemérhetetlen *BE*-vel (X. 13.), úgyhogy *AB* négyzete is összemérhetetlen az *AB* és *BE* közötti téglalappal (X. 22. L., 11.). *AB* négyzetével viszont egyenlő *AD* és *DB* négyzetösszege, az *AB* és *BE* közötti téglalappal pedig egyenlő az *AB* és *FD* közötti, azaz az *AD* és *DB* közötti téglalap, tehát *AD* és *DB* négyzetösszege összemérhetetlen az *AD* és *DB* közötti téglalappal.

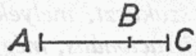
Találtunk tehát két olyan, négyzetesen összemérhetetlen szakaszt, *AD*-t és *DB*-t, melyeknek mind négyzetösszege mediális, mind mediális – és a négyzetösszeggel összemérhetetlen – téglalapot fognak közre. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: X. 41., 78.

X. 36. Tétel

*Ha két, csak négyzetesen összemérhető racionális szakaszt összeadunk, az összeg irracionális, mégpedig nevezzük binomiálisnak.**

Adjunk össze ugyanis két, csak négyzetesen összemérhető racionálist, *AB*-t és *BC*-t. Azt állítom, hogy az összeg, *AC*, irracionális.



Minthogy ugyanis *AB* lineárisan összemérhetetlen *BC*-vel – hiszen csak négyzetesen összemérhetők – és amint *AB* a *BC*-hez, úgy aránylik az *AB* és *BC* közötti téglalap *BC* négyzetéhez (X. 22. L.), az *AB* és *BC* közötti téglalap összemérhetetlen *BC* négyzetével (X. 11.). Az *AB* és *BC* közötti téglalappal viszont összemérhető az *AB* és *BC* közötti téglalap kétszerese (X. 6.), *BC* négyzetével pedig összemérhető *AB* és *BC* négyzetösszege – hiszen *AB* és *BC* csak négyzetesen összemérhető racionálisok (X. 15.) –, tehát az *AB* és *BC* közötti téglalap kétszerese összemérhetetlen *AB* és *BC* négyzetösszegével (X. 13.). És összetéve, az *AB* és *BC* közötti téglalap kétszerese meg *AB* és *BC* négyzetösszege, azaz *AC* négyzete (II. 4.), összemérhetetlen *AB* és *BC* négyzetösszegével (X. 16.). *AB* és *BC* négyzetösszege viszont racionális, *AC* négyzete tehát irracionális (X. 13.), úgyhogy *AC* is irracionális, mégpedig nevezzük binomiálisnak. Éppen ezt kellett megmutatni.

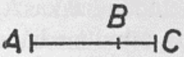
F.: X. 38., 41–42., 44., 47–53., 60–61., 64., 66., 71–72., 112–113.

X. 37. Tétel

*Ha két olyan, csak négyzetesen összemérhető mediális szakaszt összeadunk, melyek racionális téglalapot fognak közre, akkor az összeg irracionális, mégpedig nevezzük első bimediálisnak.**

Adjunk össze ugyanis két olyan, csak négyzetesen összemérhető mediális szakaszt, *AB*-t és *BC*-t, melyek racionális téglalapot fognak közre (X. 27.). Azt állítom, hogy az összeg, *AC*, irracionális.

Minthogy ugyanis *AB* lineárisan összemérhetetlen *BC*-vel, *AB* és *BC* négyzetösszege is összemérhetetlen az *AB* és *BC* közötti téglalap kétszeresével (vö. X. 36.). És összetéve, *AB* és *BC* négyzetösszege meg az *AB* és *BC* közötti téglalap kétszerese, ami *AC* négyzete (II. 4.), összemérhetetlen az *AB* és *BC* közötti téglalappal (X. 16., 6., 13.). Az *AB* és *BC* közötti téglalap viszont racionális – hiszen föltettük, hogy *AB* és *BC* racionális téglalapot fog közre –, *AC* négyzete tehát irracionális (X. 13.), *AC* tehát irracionális, mégpedig nevezzük első bimediálisnak.



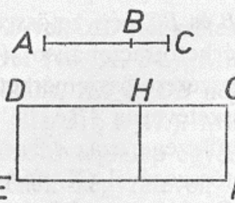
F.: X. 43., 55., 61., 67.

X. 38. Tétel

*Ha összeadunk két olyan csak négyzetesen összemérhető mediális szakaszt, melyek mediális téglalapot fognak közre, akkor az összeg irracionális, mégpedig nevezzük második bimediálisnak.**

Adjunk össze ugyanis két olyan, csak négyzetesen összemérhető mediális szakaszt, *AB*-t és *BC*-t, melyek mediális téglalapot fognak közre (X. 28.). Azt állítom, hogy *AC* irracionális.

Vegyük ugyanis a *DE* racionálist, és illesszünk *DE*-hez egy *AC* négyzetével egyenlő *DG* szélességű *DF* téglalapot (I. 41. 44.). Minthogy *AC* négyzete egyenlő *AB* és *BC* négyzetösszegével meg az *AB* és *BC* közötti téglalap kétszeresével (II. 4.), ha *DE*-hez *AB* és *BC* négyzetösszegével egyenlő *EH* téglalapot illesztünk, akkor a maradék *HF* egyenlő az *AB* és *BC* közötti téglalap kétszeresével. Minthogy *AB* és *BC* mediálisok, *AB* és *BC* négyzetösszege is mediális (X. 15., 23. K.).



Feltétel szerint az AB és BC közötti téglalap kétszerese is mediális (X. 6., 23. K.). AB és BC négyzetösszegével egyenlő EH, az AB és BC közötti téglalap kétszeresével pedig egyenlő FH, EH és FH tehát mediális idomok. S a DE racionálishoz vannak illesztve, DH és HG tehát racionálisok és lineárisan összemérhetetlenek DE-vel (X. 22.). Minthogy AB lineárisan összemérhetetlen BC-vel és amint AB a BC-hez, úgy aránylik AB négyzete az AB és BC közötti téglalaphoz (X. 22. L.), AB négyzete összemérhetetlen az AB és BC közötti téglalappal (X. 11.). AB négyzetével viszont összemérhető AB és BC négyzetösszege (X. 15.), az AB és BC közötti téglalappal pedig összemérhető az AB és BC közötti téglalap kétszerese (X. 6.), AB és BC négyzetösszege tehát összemérhetetlen az AB és BC közötti téglalap kétszeresével (X. 13.). AB és BC négyzetösszegével viszont egyenlő EH, az AB és BC közötti téglalap kétszeresével pedig egyenlő HF, EH tehát összemérhetetlen HF-fel, úgyhogy DH is lineárisan összemérhetetlen HG-vel (VI. 1., X. 11.). DH és HG tehát csak négyzetesen összemérhető racionálisok, úgyhogy DG irracionális (X. 36.). DE racionális, az irracionális és racionális szakasz által közrefogott téglalap pedig irracionális (X. 20.), DF tehát irracionális idom, és a szakasz, melynek négyzetértéke, irracionális. DF az AC négyzetértéke, AC tehát irracionális, mégpedig nevezzük második bimediálisnak. Éppen ezt kellett megmutatni.

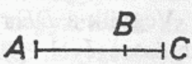
F.: X. 44., 67.

X. 39. Tétel

*Ha összeadunk két olyan, négyzetesen összemérhetetlen szakaszt, melyek négyzetösszege racionális és mediális téglalapot fognak közre, akkor az összeg irracionális, mégpedig nevezzük maiornak.**

Adjunk össze ugyanis két olyan, négyzetesen összemérhetetlen szakaszt, AB-t és BC-t, melyek kielégítik a feltételeket (X. 33.). Azt állítom, hogy AC irracionális.

Minthogy ugyanis az AB és BC közötti téglalap mediális, az AB és BC közötti téglalap kétszerese is mediális (X. 6., 23. K.). AB és BC négyzetösszege viszont racionális, az AB és BC közötti téglalap kétszerese tehát összemérhetetlen AB és BC négyzetösszegével (X. 13.), úgyhogy AB



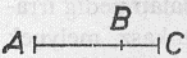
és *BC* négyzetösszege meg az *AB* és *BC* közötti téglalap kétszerese, ami *AC* négyzete (II. 4.), szintén összemérhetetlen *AB* és *BC* négyzetösszegével (X. 16.). [*AB* és *BC* négyzetösszege viszont racionális] *AC* négyzete tehát irracionális (X. 13.), úgyhogy *AC* is irracionális, mégpedig nevezzük maiornak. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: X. 45., 57., 63., 68.

X. 40. Tétel

*Ha összeadunk két olyan, négyzetesen összemérhetetlen szakaszt, melyek négyzetösszege mediális és racionális téglalapot fognak közre, akkor az összeg irracionális, mégpedig nevezzük négyzetértékben racionális plusz mediálisnak.**

Adjunk össze ugyanis két olyan, négyzetesen összemérhetetlen szakaszt, *AB*-t és *BC*-t, melyek kielégítik a feltételeket (X. 34.). Azt állítom, hogy *AC* irracionális.



Minthogy ugyanis *AB* és *BC* négyzetösszege mediális, az *AB* és *BC* közötti téglalap kétszerese pedig racionális (X. 6., 12.), *AB* és *BC* négyzetösszege összemérhetetlen az *AB* és *BC* közötti téglalap kétszeresével (X. 13.), úgyhogy *AC* négyzete is összemérhetetlen az *AB* és *BC* közötti téglalap kétszeresével (X. 16.). Az *AB* és *BC* közötti téglalap kétszerese viszont racionális, *AC* négyzete tehát irracionális (X. 13.), *AC* tehát irracionális, mégpedig nevezzük négyzetértékben racionális plusz mediálisnak. Éppen ezt kellett megmutatni.

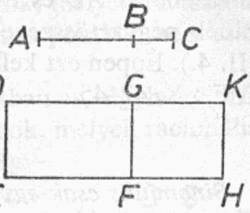
F.: X. 46., 64., 69.

X. 41. Tétel

*Ha összeadunk két olyan, négyzetesen összemérhetetlen szakaszt, melyeknek mind négyzetösszege mediális, mind mediális – és a négyzetösszeggel összemérhetetlen – téglalapot fognak közre, akkor az összeg irracionális, mégpedig nevezzük négyzetértékben két mediális összegének.**

Adjunk össze ugyanis két olyan, négyzetesen összemérhetetlen szakaszt, *AB*-t és *BC*-t, melyek kielégítik a feltételeket (X. 35.). Azt állítom, hogy *AC* irracionális.

Vegyük a *DE* racionálist, és illesszünk *DE*-hez egy *AB* és *BC* négyzetösszegével egyenlő *DF* és egy, az *AB* és *BC* közötti téglalap kétszeresével egyenlő *GH* téglalapot (I. 41., 44.). Ekkor a teljes *DH* egyenlő *AC* négyzetével (II. 4.). Minthogy *AB* és *BC* négyzetösszege mediális és egyenlő *DF*-fel, *DF* is mediális. S a *DE* racionálishoz illesztettük, *DG* tehát racionális és lineárisan összemérhetetlen *DE*-vel (X. 22.). Ugyanígy *GK* is racionális és lineárisan összemérhetetlen *GF*-fel, azaz *DE*-vel. Minthogy *AB* és *BC* négyzetösszege összemérhetetlen az *AB* és *BC* közötti téglalap kétszeresével (X. 6., 13.), *DF* összemérhetetlen *GH*-val, úgyhogy *DG* is összemérhetetlen *GK*-val (VI. 1., X. 11.). S racionálisok, *DG* és *GK* tehát csak négyzetesen összemérhető racionálisok, *DK* tehát irracionális, ún. binomiális (X. 36.). *DE* racionális, *DH* tehát irracionális (X. 20.), és a szakasz, melynek négyzetértéke, irracionális. *HD* az *AC* négyzetértéke, *AC* tehát irracionális, mégpedig nevezzük négyzetértékben két mediális összegének. Éppen ezt kellett megmutatni.



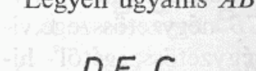
F.: X. 47., 59., 65., 70.

X. 42. Lemma

Hogy pedig a nevezett irracionálisok egyértelműen esnek szét olyan szakaszok összegére, melyek teljesítik a feltételeket, eme lemmácska előrebocsátása után mutatjuk meg:

Vegyünk egy *AB* szakaszt, osszuk föl nem egyenlő részekre a *C*, *D* pontokban, és tegyük föl, hogy *AC* nagyobb *DB*-nél. Azt állítom, hogy *AC* és *CB* négyzetösszege nagyobb *AD* és *DB* négyzetösszegénél.

Legyen ugyanis *AB* felezőpontja *E* (I. 10.). Minthogy *AC* nagyobb *DB*-nél, ha levonjuk a közös *DC*-t, akkor a maradék *AD* nagyobb a maradék *CB*-nél. *AE* egyenlő *EB*-vel, *DE* tehát kisebb *EC*-nél, a *C*, *D* pontok tehát nincsenek egyforma távol a felezőponttól. Minthogy az *AC* és *CB* közötti téglalapnak és *EC* négyzetének az összege egyenlő *EB* négyzetével (II. 5.), és az *AD* és *DB* közötti téglalapnak és *DE* négyzetének az összege szintén egyenlő *EB* négyzetével, az *AC* és *CB* közötti téglalapnak és *EC* négyzetének az összege egyenlő az *AD* és *DB* közötti téglalapnak és *DE* négyzetének



az összegével. A tagok közül *DE* négyzete kisebb *EC* négyzeténél, a maradék *AC* és *CB* közötti téglalap tehát kisebb az *AD* és *DB* közötti téglalapnál, úgyhogy az *AC* és *CB* közötti téglalap kétszerese is kisebb az *AD* és *DB* közötti téglalap kétszeresénél. *AC* és *CB* maradék négyzetösszege tehát nagyobb *AD* és *DB* négyzetösszegénél (II. 4.). Éppen ezt kellett megmutatni.

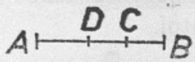
F.: X. 42–45.

X. 42. Tétel

Binomiális csak egy pontban esik szét a különböző tagokra.

Legyen *AB* egy binomiális, mely a *C* pontban esik szét a különböző tagokra. Ekkor *AC* és *CB* csak négyzetesen összemérhető racionálisok. Azt állítom, hogy *AB* más pontban nem esik szét két, csak négyzetesen összemérhető racionális összegére.

Tegyük föl ugyanis, hogy szétesik a *D* pontban is, úgyhogy *AD* és *DB* is csak négyzetesen összemérhető racionálisok. Nyilvánvaló, hogy *AC* nem ugyanaz, mint *DB*. Tegyük föl ugyanis, hogy az. Ekkor *AD* is ugyanaz, mint *CB* és *AC* úgy aránylik *CB*-hez, mint *BD* a *DA*-hoz, és *AB* a *C*-beli fölosztással megegyezőleg bomlik föl *D*-ben, aminek az ellenkezőjét tettük föl. *AC* tehát nem ugyanaz, mint *DB*. Ezért a *C*, *D* pontok nincsenek egyforma távol a felezőponttól. Amennyivel különbözik tehát *AC* és *CB* négyzetösszege *AD* és *DB* négyzetösszegétől, annyival különbözik az *AD* és *DB* közötti téglalap kétszerese is az *AC* és *CB* közötti téglalap kétszeresétől, mivel mind *AC* és *CB* négyzetösszege meg az *AC* és *CB* közötti téglalap kétszerese, mind *AD* és *DB* négyzetösszege meg az *AD* és *DB* között téglalap kétszerese egyenlő *AB* négyzetével (II. 4.). *AC* és *CB* négyzetösszege viszont racionális felülettel különbözik *AD* és *DB* négyzetösszegétől – hiszen mindketten racionálisok –, az *AD* és *DB* közötti téglalap kétszerese is racionális felülettel különbözik tehát az *AC* és *CB* közötti téglalap kétszeresétől, noha mediálisok (X. 6., 22. K.), ami ellentmondás, mert két mediális felület különbsége nem lehet racionális (X. 26.).



Binomiális tehát nem esik szét különböző pontokban; csak egy pontban tehát. Éppen ezt kellett megmutatni.

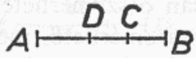
F. X. 44., 47.

X. 43. Tétel

Első bimediális csak egy pontban esik szét.

Essék szét az *AB* első bimediális a *C* pontban, úgyhogy *AC* és *CB* csak négyzetesen összemérhető mediális szakaszok, melyek racionális téglalapot fognak közre. Azt állítom, hogy *AB* más pontban nem esik szét.

Tegyük föl ugyanis, hogy szétesik a *D* pontban is, úgyhogy *AD* és *DB* is csak négyzetesen összemérhető mediálisok, melyek racionális téglalapot fognak közre. Minthogy *AC* és *CB* négyzetösszege annyival különbözik *AD* és *DB* négyzetösszegétől, amennyivel az *AD* és *DB* közötti téglalap kétszerese az *AC* és *CB* közötti téglalap kétszeresétől, és az *AD* és *DB* közötti téglalap kétszerese racionális felülettel különbözik az *AC* és *CB* közötti téglalap kétszeresétől – hiszen mindketten racionálisok (X. 6., 12.) –, *AC* és *CB* négyzetösszege is racionális felülettel különbözik tehát *AD* és *DB* négyzetösszegétől, noha mediálisok (X. 15., 23. K.), ami ellentmondás (X. 26.).

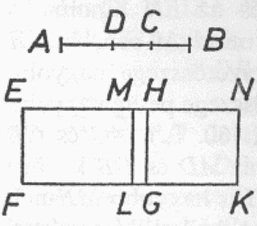


Első bimediális tehát nem esik szét tagokra különböző pontokban; tehát csak egy pontban. Éppen ezt kellett megmutatni.

X. 44. Tétel

Második bimediális csak egy pontban esik szét.

Essék szét az *AB* második bimediális a *C* pontban, úgyhogy *AC* és *CB* csak négyzetesen összemérhető mediális szakaszok, melyek mediális téglalapot fognak közre (X. 38.). Nyilvánvaló, hogy *C* nem a felezőpont, mivel a szakaszok nem lineárisan összemérhetők. Azt állítom, hogy *AB* más pontban nem esik szét.



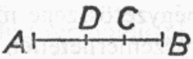
Tegyük föl ugyanis, hogy szétesik a *D* pontban is, úgyhogy *AC* nem ugyanaz, mint *DB*, hanem például *AC* nagyobb. Világos, hogy ekkor – mint fönt megmutattuk – *AD* és *DB* négyzetösszege kisebb *AC* és *CB* négyzetösszegénél (X. 42. L.), s *AD* és *DB* csak négyzetesen összemérhető mediálisok, melyek mediális téglalapot fognak közre. Vegyük az *EF* racionálist, illesszünk *EF*-hez egy *AB* négyzetével egyenlő *EK* téglalapot, és vonjuk le az *AC* és *CB* négyzetösszegével egyenlő *EG* téglalapot (I. 41., 44.). Ekkor a maradék *HK* egyenlő az *AC* és *CB* közötti téglalap kétszeresével (II. 4.). Ismét, vonjunk le egy *AD* és *DB* négyzetösszegével, mely mint megmutattuk, kisebb *AC* és *CB* négyzetösszegénél, egyenlő *EL* téglalapot. Ekkor a maradék *MK* egyenlő az *AD* és *DB* közötti téglalap kétszeresével. Minthogy *AC* és *CB* négyzetösszege mediális (X. 15., 23. K.), *EG* [is] mediális. S az *EF* racionális mellé illesztettük, *EH* tehát racionális és lineárisan összemérhetetlen *EF*-fel (X. 22.). Ugyanígy *HN* is racionális és lineárisan összemérhetetlen *EF*-fel. Minthogy *AC* és *CB* csak négyzetesen összemérhető mediálisok, *AC* lineárisan összemérhetetlen *CB*-vel. *AC* négyzete úgy aránylik az *AC* és *CB* közötti téglalaphoz, mint *AC* a *CB*-hez (X. 22. L.), *AC* négyzete tehát összemérhetetlen az *AC* és *CB* közötti téglalappal (X. 11.). *AC* négyzetével viszont összemérhető *AC* és *CB* négyzetösszege – hiszen *AC* és *CB* négyzetesen összemérhetők (X. 15.) –, az *AC* és *CB* közötti téglalappal pedig összemérhető az *AC* és *CB* közötti téglalap kétszerese (X. 6.), *AC* és *CB* négyzetösszege tehát összemérhetetlen az *AC* és *CB* közötti téglalap kétszeresével (X. 13.). *AC* és *CB* négyzetösszegével viszont egyenlő *EG*, az *AC* és *CB* közötti téglalap kétszeresével pedig egyenlő *HK*, *EG* tehát összemérhetetlen *HK*-val, úgyhogy *EH* is lineárisan összemérhetetlen *HN*-nel (VI. 1., X. 11.). S racionálisok, *EH* és *HN* tehát csak négyzetesen összemérhető racionálisok. Ha viszont két, csak négyzetesen összemérhető racionálist összeadunk, az összeg irracionális, ún. binomiális (X. 36.), *EN* tehát egy binomiális, mely a *H* pontban esik szét. Ugyanígy mutatható meg, hogy *EM* és *MN* is csak négyzetesen összemérhető racionálisok, és az *EN* binomiális különböző pontokban esik szét, mind *H*-ban, mind *M*-ben, és *EH* nem ugyanaz, mint *MN*, mert *AC* és *CB* négyzetösszege nagyobb *AD* és *DB* négyzetösszegénél, *AD* és *DB* négyzetösszege pedig nagyobb az *AD* és *DB* közötti téglalap kétszeresénél (X. 60. L.), *AC* és *CB* négyzetösszege, azaz *EG*, annál nagyobb tehát az *AD* és *DB* közötti téglalap kétszeresénél, azaz *MK*-nál, úgyhogy *EH* is nagyobb *MN*-nél. *EH* tehát nem ugyanaz, mint *MN*. Éppen ezt kellett bizonyítani (X. 42.).

X. 45. Tétel

Maior csak ugyanabban a pontban esik szét.

Essék szét az *AB* maior a *C* pontban, úgyhogy *AC* és *CB* négyzetesen összemérhetetlen szakaszok, *AC* és *CB* négyzetösszege racionális, és az *AC* és *CB* közötti téglalap mediális (X. 39.). Azt állítom, hogy *AB* más pontban nem esik szét.

Tegyük föl ugyanis, hogy a *D* pontban is szétesik, úgyhogy *AD* és *DB* négyzetesen összemérhetetlenek, *AD* és *DB* négyzetösszege racionális, az általuk közrefogott téglalap pedig mediális. Minthogy az *AD* és *DB* közötti téglalap kétszerese annyival különbözik az *AC* és *CB* közötti téglalap kétszeresétől, amennyivel *AC* és *CB* négyzetösszege *AD* és *DB* négyzetösszegétől (II. 4.), és *AC* és *CB* négyzetösszege racionális felülettel különbözik *AD* és *DB* négyzetösszegétől – hiszen mindketten racionálisok –, az *AD* és *DB* közötti téglalap kétszerese is racionális felülettel különbözik az *AC* és *CB* közötti téglalap kétszeresétől, noha mediálisok (X. 6., 23. K.), ami ellentmondás (X. 26.). Maior tehát nem esik szét különböző pontokban; tehát csak ugyanabban. Éppen ezt kellett megmutatni.

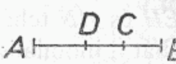


X. 46. Tétel

Négyzetértékben racionális plusz mediális szakasz csak egy pontban esik szét.

Essék szét a négyzetértékben racionális plusz mediális *AB* a *C* pontban, úgyhogy *AC* és *CB* négyzetesen összemérhetetlenek, *AC* és *CB* négyzetösszege mediális, az *AC* és *CB* közötti téglalap kétszerese racionális (X. 6., 12.). Azt állítom, hogy *AB* más pontban nem esik szét.

Tegyük föl ugyanis, hogy szétesik a *D* pontban is, úgyhogy *AD* és *DB* is négyzetesen összemérhetetlenek, *AD* és *DB* négyzetösszege mediális, az *AD* és *DB* közötti téglalap kétszerese pedig racionális. Minthogy *AD* és *DB* négyzetösszege annyival különbözik *AC* és *CB* négyzetösszegétől, amennyivel az *AC* és *CB* közötti téglalap kétszerese különbözik az *AD* és *DB* közötti téglalap kétszeresétől, és az *AC* és *CB* közötti téglalap kétszerese racionális felülettel különbözik az *AD* és *DB* közötti téglalap kétszeresétől, *AD* és *DB* négyzet-



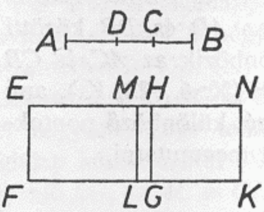
összege is racionális felülettel különbözik AC és CB négyzetösszegétől, noha mediálisok, ami ellentmondás (X. 26.). Nem esik szét tehát négyzetértékben racionális plusz mediális szakasz különböző pontokban; tehát csak egy pontban esik szét. Éppen ezt kellett megmutatni.

X. 47. Tétel

Négyzetértékben két mediális összege csak egy pontban esik szét.

Essék szét egy négyzetértékben két mediális összege, AB, a C pontban, úgyhogy AC és CB négyzetesen összemérhetetlenek, AC és CB négyzetösszege mediális, az AC és CB közötti téglalap mediális és összemérhetetlen a négyzetösszegükkel (X. 41.). Azt állítom, hogy AB a feltételek mellett más pontban nem esik szét.

Tegyük föl ugyanis, hogy D-ben is szétesik, úgyhogy AC nyilván ismét nem ugyanaz, mint DB, hanem például legyen AC a nagyobb, vegyük az EF racionálist, és illesszünk EF mellé egy AC és CB négyzetösszegével egyenlő EG s egy, az AC és CB közötti téglalap kétszeresével egyenlő HK téglalapot (I. 41., 44.). Ekkor a teljes EK egyenlő AB négyzetével (II. 4.). Ismét, illesszünk EF mellé egy AD és DB négyzetösszegével egyenlő EL téglalapot. Ekkor a maradék, az AD és DB közötti téglalap kétszerese, egyenlő az MK maradékkal. Minthogy AC és CB négyzetösszege föltevés szerint mediális, EG is mediális. S az EF racionális mellé illesztettük, HE tehát racionális és lineárisan összemérhetetlen EF-fel (X. 22.). Ugyanígy HN is racionális és lineárisan összemérhetetlen EF-fel. Minthogy AC és CB négyzetösszege összemérhetetlen az AC és CB közötti téglalap kétszeresével (X. 6., 13.), EG is összemérhetetlen GN-nel, úgyhogy EH is összemérhetetlen HN-nel (VI. 1., X. 11.). S racionálisok, EH és HN tehát csak négyzetesen összemérhető racionálisok, EN tehát binomiális, mely szétesik H-ban. Hasonlóképp mutathatjuk meg, hogy M-ben is szétesik. EH nem ugyanaz, mint MN (X. 60. L.), a binomiális tehát különböző pontokban esik szét, ami ellentmondás (X. 42.). Nem esik tehát szét négyzetértékben két mediális összege különböző pontokban; tehát csak egy [pontban] esik szét.



Definíciók. Második rész

2.1. Legyen adva a racionális és egy tagjaira bontott binomiális, melynek nagyobbik tagjának négyzetértéke egy vele lineárisan összemérhető szakasz négyzetével nagyobb a kisebbénél. Ha a nagyobbik tag lineárisan összemérhető az adott racionálissal, nevezzük [az összeget] első binomiálisnak.

2.2. Ha a kisebb tag lineárisan összemérhető az adott racionálissal, nevezzük (az összeget) második binomiálisnak.

2.3. Ha egyik tag sem lineárisan összemérhető az adott racionálissal, nevezzük harmadik binomiálisnak.

2.4. Legyen most a nagyobb tag négyzetértéke egy vele lineárisan összemérhetetlen szakasz négyzetével nagyobb [a kisebbénél]. Ha a nagyobbik tag lineárisan összemérhető az adott racionálissal, nevezzük (az összeget) negyedik binomiálisnak.

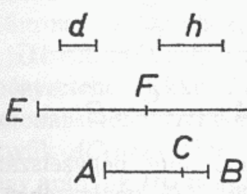
2.5. Ha a kisebb, ötödiknek.

2.6. Ha pedig egyik sem, hatodiknak.

X. 48. Tétel

*Keressünk első binomiálist!**

Vegyünk két számot, *AC*-t és *CB*-t, melyek összege, *AB*, *BC*-hez úgy aránylik, mint négyzetszám négyzetszámhoz, *CA*-hoz viszont nem úgy aránylik, mint négyzetszám négyzetszámhoz, vegyünk egy *d* racionálist, és legyen *EF* lineárisan összemérhető *d*-vel. Ekkor *EF* is racionális (X. 9. K., 12.). Arányuljék amint a *BA* szám *AC*-hez, úgy *EF* négyzete *FG* négyzetéhez (X. 6. K.). *AB* úgy aránylik *AC*-hez, mint szám számhoz, *EF* négyzete tehát szintén úgy aránylik *FG* négyzetéhez, mint szám számhoz, úgyhogy *EF* négyzete összemérhető *FG* négyzetével (X. 6.). *EF* racionális, tehát *FG* is racionális (X. 12.). Minthogy *BA* nem úgy aránylik *AC*-hez, mint négyzetszám négyzetszámhoz, *EF* négyzete sem úgy aránylik *FG* négyzetéhez, mint négyzetszám négyzetszámhoz, *EF* tehát lineárisan összemérhetetlen *FG*-vel (X. 9.). *EF*



és *FG* tehát csak négyzetesen összemérhető racionálisok, *EG* tehát binomiális.

Azt állítom, hogy első.

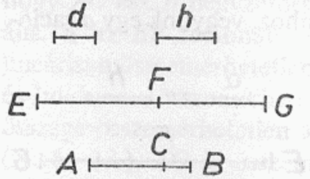
Minthogy ugyanis *EF* négyzete úgy aránylik *FG* négyzetéhez, mint a *BA* szám *AC*-hez, és *BA* nagyobb *AC*-nél, *EF* négyzete is nagyobb *FG* négyzeténél (V. 14.). Legyen *EF* négyzetével egyenlő *FG* és *h* négyzetösszege (X. 14. L.). Minthogy *EF* négyzete úgy aránylik *FG* négyzetéhez, mint *BA* az *AC*-hez, fölforgatva *EF* négyzete úgy aránylik *h* négyzetéhez, mint *AB* a *BC*-hez (V. 19. K.). *AB* viszont úgy aránylik *BC*-hez, mint négyzetszám négyzetszámhoz, tehát *EF* négyzete szintén úgy aránylik *h* négyzetéhez, mint négyzetszám négyzetszámhoz. *EF* tehát lineárisan összemérhető *h*-val (X. 9.), *EF* négyzetértéke egy vele összemérhető szakasz négyzetével nagyobb *FG*-énél. S *EF* és *FG* racionálisok, és *EF* lineárisan összemérhető *d*-vel.

EG tehát első binomiális. Éppen ezt kellett megmutatni.

X. 49. Tétel

*Keressünk második binomiálist!**

Vegyünk két számot, *AC*-t és *CB*-t, melyek összege, *AB*, *BC*-hez úgy aránylik, mint négyzetszám négyzetszámhoz, *AC*-hez viszont nem úgy aránylik, mint négyzetszám négyzetszámhoz, vegyünk föl egy *d* racionálist, és legyen *EF* lineárisan összemérhető *d*-vel. Ekkor *EF* racionális. Arányuljék amint a *CA* szám *AB*-hez, úgy *EF* négyzete *FG* négyzetéhez (X. 6. K.). Ekkor *EF* négyzete összemérhető *FG* négyzetével (X. 6.), tehát *FG* is racionális (X. 12.). Minthogy a *CA* szám nem úgy aránylik *AB*-hez, mint négyzetszám négyzetszámhoz, *EF* négyzete sem úgy aránylik *FG* négyzetéhez, mint négyzetszám négyzetszámhoz, *EF* tehát lineárisan összemérhetetlen *FG*-vel (X. 9.). *EF* és *FG* tehát csak négyzetesen összemérhető racionálisok, *EG* tehát binomiális.



Azt kell még megmutatni, hogy második.

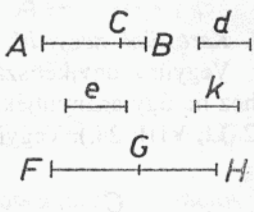
Minthogy ugyanis fordítva *GF* négyzete úgy aránylik *FE* négyzetéhez, mint a *BA* szám *AC*-hez, és *BA* nagyobb *AC*-nél, *GF* négyzete [is] nagyobb *FE* négyzeténél (V. 14.). Legyen *GF* négyzetével egyenlő *EF* és *h* négyzetösszege (X. 14. L.). Fölforgatva *FG* négyzete úgy aránylik *h* négyzetéhez, mint *AB* a *BC*-hez (V. 19. K.). *AB* viszont úgy aránylik *BC*-hez, mint négyzetszám négyzetszámhoz, tehát *FG* négyzete is úgy aránylik *h* négyzetéhez, mint négyzetszám négyzetszámhoz. *FG* tehát lineárisan összemérhető *h*-val (X. 9.), úgyhogy *FG* négyzetértéke egy vele összemérhető szakasz négyzetével nagyobb *FE*-énél. S *FG* és *FE* csak négyzetesen összemérhető racionálisok, és a kisebb tag, *EF*, lineárisan összemérhető a fölvett racionálissal, *d*-vel.

EG tehát második binomiális. Éppen ezt kellett megmutatni.

X. 50. Tétel

*Keressünk harmadik binomiálist!**

Vegyünk két számot, *AC*-t és *CB*-t, melyek összege, *AB*, *BC*-hez úgy aránylik, mint négyzetszám négyzetszámhoz, *AC*-hez viszont nem úgy aránylik, mint négyzetszám négyzetszámhoz, vegyünk valamely másik nem négyzetszámot, *d*-t, mely sem *BA*-hoz, sem *AC*-hez nem úgy aránylik, mint négyzetszám négyzetszámhoz, vegyünk föl valamely *e* racionálist, és arányuljék amint *d* az *AB*-hez, úgy *e* négyzete *FG* négyzetéhez (X. 6. K.). Ekkor *e* négyzete összemérhető *FG* négyzetével (X. 6.). *e* racionális, tehát *FG* is racionális. Minthogy *d* nem úgy aránylik *AB*-hez, mint négyzetszám négyzetszámhoz, *e* négyzete sem úgy aránylik *FG* négyzetéhez, mint négyzetszám négyzetszámhoz, *e* tehát lineárisan összemérhetetlen *FG*-vel (X. 9.). Ismét, arányuljék amint a *BA* szám *AC*-hez, úgy *FG* négyzete *GH* négyzetéhez. Ekkor *FG* négyzete összemérhető *GH* négyzetével. *FG* racionális, tehát *GH* is racionális (X. 12.). Minthogy *BA* nem úgy aránylik *AC*-hez, mint négyzetszám négyzetszámhoz, *FG* négyzete sem úgy aránylik *HG* négyzetéhez, mint négyzetszám négyzetszámhoz, *FG* tehát lineárisan összemérhetetlen *GH*-val. *FG* és *GH* tehát csak négyzetesen összemérhető racionálisok, *FH* tehát binomiális.



Azt állítom még, hogy harmadik.

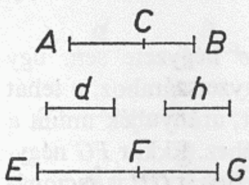
Minthogy ugyanis *d* úgy aránylik *AB*-hez, mint *e* négyzete *FG* négyzetéhez, és *BA* az *AC*-hez, mint *FG* négyzete *GH* négyzetéhez, egyenlő sok tagon át *d* úgy aránylik *AC*-hez, mint *e* négyzete *GH* négyzetéhez (V. 22.). *d* viszont nem úgy aránylik *AC*-hez, mint négyzetszám négyzetszámhoz, tehát *e* négyzete sem úgy aránylik *GH* négyzetéhez, mint négyzetszám négyzetszámhoz, *e* tehát lineárisan összemérhetetlen *GH*-val. Minthogy *FG* négyzete úgy aránylik *GH* négyzetéhez, mint *BA* az *AC*-hez, *FG* négyzete nagyobb, mint *GH* négyzete (V. 14.). Legyen *FG* négyzetével egyenlő *GH* és *k* négyzetösszege (X. 14. L.). Fölforgatva *FG* négyzete úgy aránylik *k* négyzetéhez, mint *AB* a *BC*-hez (V. 19. K.). *AB* viszont úgy aránylik *BC*-hez, mint négyzetszám négyzetszámhoz, tehát *FG* négyzete is úgy aránylik *k* négyzetéhez, mint négyzetszám négyzetszámhoz. *FG* tehát lineárisan összemérhető *k*-val. *FG* négyzetértéke tehát egy vele összemérhető szakasz négyzetével nagyobb *GH*-énál. S *FG* és *GH* csak négyzetesen összemérhető racionálisok, és egyikük sem lineárisan összemérhető *e*-vel.

GH tehát harmadik binomiális. Éppen ezt kellett megmutatni.

X 51. Tétel

*Keressünk negyedik binomiálist!**

Vegyünk úgy két számot, *AC*-t és *CB*-t, hogy *AB* se *BC*-hez, se *AC*-hez ne úgy arányuljék, mint négyzetszám négyzetszámhoz (pl. X. 29. 2. L., VIII. 24.). Vegyünk föl egy *d* racionálist, és legyen *EF* lineárisan összemérhető *d*-vel. Ekkor *EF* is racionális. Arányuljék amint a *BA* szám *AC*-hez, úgy *EF* négyzete *FG* négyzetéhez (X. 6. K.). Ekkor *EF* négyzete összemérhető *FG* négyzetével (X. 6.), tehát *FG* is racionális (X. 12.). Minthogy *BA* nem úgy aránylik *AC*-hez, mint négyzetszám négyzetszámhoz, *EF* négyzete sem úgy aránylik *FG* négyzetéhez, mint négyzetszám négyzetszámhoz, *EF* tehát lineárisan összemérhetetlen *FG*-vel (X. 9.). *EF* és *FG* tehát csak négyzetesen összemérhető racionálisok, úgyhogy *EG* binomiális.



Azt állítom még, hogy negyedik.

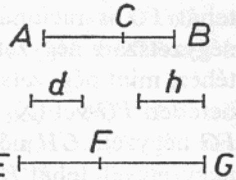
Minthogy ugyanis *EF* négyzete úgy aránylik *FG* négyzetéhez, mint *BA* az *AC*-hez [és *BA* nagyobb *AC*-nél], *EF* négyzete nagyobb *FG* négyzeténél (V. 14.). Legyen EF négyzetével egyenlő FG és h négyzetösszege (X. 14. L.). Fölforgatva EF négyzete úgy aránylik h négyzetéhez, mint az AB szám BC-hez (V. 19. K.). AB viszont nem úgy aránylik BC-hez, mint négyzetszám négyzetszámhoz, tehát EF négyzete sem úgy aránylik h négyzetéhez, mint négyzetszám négyzetszámhoz. EF tehát lineárisan összemérhetetlen h-val (X. 9.). EF négyzetértéke tehát egy vele összemérhetetlen szakasz négyzetével nagyobb GF-énél. S EF és FG csak négyzetesen összemérhető racionálisok, és EF lineárisan összemérhető d-vel.

EG tehát negyedik binomiális. Éppen ezt kellett megmutatni.

X. 52. Tétel

*Keressünk ötödik binomiálist!**

Vegyünk úgy két számot, AC-t és CB-t, hogy AB egyikőjükhöz se arányuljék úgy, mint négyzetszám négyzetszámhoz (pl. X. 29. 2. L., VIII. 24.). Vegyünk föl valamilyen d racionális szakaszt, és legyen EF [lineárisan] összemérhető d-vel. Ekkor EF is racionális. Arányuljék amint CA az AB-hez, úgy EF négyzete FG négyzetéhez (X. 6. K.). CA nem úgy aránylik AB-hez, mint négyzetszám négyzetszámhoz, tehát EF négyzete sem úgy aránylik FG négyzetéhez, mint négyzetszám négyzetszámhoz. EF és FG tehát csak négyzetesen összemérhető racionálisok (X. 12., 9.). EG tehát binomiális.



Azt állítom még, hogy ötödik.

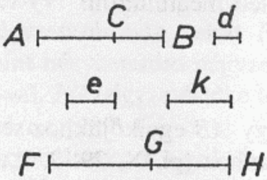
Minthogy ugyanis EF négyzete úgy aránylik FG négyzetéhez, mint CA az AB-hez, fordítva FG négyzete úgy aránylik FE négyzetéhez, mint BA az AC-hez (V. 7. K.), GF négyzete tehát nagyobb FE négyzeténél (V. 14.). Legyen GF négyzetével egyenlő EF és h négyzetösszege (X. 14. L.). Fölforgatva GF négyzete úgy aránylik h négyzetéhez, mint az AB szám BC-hez (V. 19. K.). AB viszont nem úgy aránylik BC-hez, mint négyzetszám négyzetszámhoz, tehát FG négyzete sem úgy aránylik h négyzetéhez, mint négyzetszám négyzetszámhoz. FG tehát lineárisan összemérhetetlen h-val, úgyhogy FG négyzetértéke egy vele összemérhetetlen szakasz négyzetével nagyobb FE-énél. S GF és FE csak négyzetesen összemérhető racionálisok, és a kisebb tag, *EF*, lineárisan összemérhető a fölvett racionálissal, *d*-vel.

EG tehát ötödik binomiális. Éppen ezt kellett megmutatni.

X. 53. Tétel

*Keressünk hatodik binomiálist!**

Vegyünk úgy két számot, *AC*-t és *CB*-t, hogy *AB* egyikőjükhöz se arányuljék úgy, mint négyzetszám négyzetszámhoz (pl. X. 29. 2. L., VIII. 24.). Legyen *d* egy másik szám, mely nem négyzetszám és sem *BA*-hoz, sem *AC*-hez nem úgy aránylik, mint négyzetszám négyzetszámhoz (ua.). Vegyünk föl valamilyen *e* racionális szakaszt, és arányuljék amint *d* az *AB*-hez, úgy *e* négyzete *FG* négyzetéhez (X. 6. K.). Ekkor *e* négyzete összemérhető *FG* négyzetével (X. 6.). *e* racionális, tehát *FG* is racionális. Minthogy *d* nem úgy aránylik *AB*-hez, mint négyzetszám négyzetszámhoz, *e* négyzete sem úgy aránylik *FG* négyzetéhez, mint négyzetszám négyzetszámhoz, *e* tehát lineárisan összemérhetetlen *FG*-vel (X. 9.). Ismét, arányuljék amint *BA* az *AC*-hez, úgy *FG* négyzete *GH* négyzetéhez. Ekkor *FG* négyzete összemérhető *HG* négyzetével, tehát *HG* négyzete racionális (X. 12.), tehát *HG* racionális. Minthogy *BA* nem úgy aránylik *AC*-hez, mint négyzetszám négyzetszámhoz, *FG* négyzete sem úgy aránylik *GH* négyzetéhez, mint négyzetszám négyzetszámhoz, *FG* tehát lineárisan összemérhetetlen *GH*-val. *FG* és *GH* tehát csak négyzetesen összemérhető racionálisok, *FH* tehát binomiális.



Azt kell még megmutatni, hogy hatodik.

Minthogy ugyanis *e* négyzete úgy aránylik *FG* négyzetéhez, mint *d* az *AB*-hez és *FG* négyzete úgy aránylik *GH* négyzetéhez, mint *BA* *AC*-hez, egyenlő sok tagon át *e* négyzete úgy aránylik *GH* négyzetéhez, mint *d* az *AC*-hez (V. 22.). *d* viszont nem úgy aránylik *AC*-hez, mint négyzetszám négyzetszámhoz, tehát *e* négyzete sem úgy aránylik *GH* négyzetéhez, mint négyzetszám négyzetszámhoz, *e* tehát lineárisan összemérhetetlen *GH*-val. Megmutattuk, hogy *FG*-vel is összemérhetetlen, tehát mind *FG*, mind *GH* lineárisan összemérhetetlen *e*-vel.

Minthogy *FG* négyzete úgy aránylik *GH* négyzetéhez, mint *BA* az *AC*-hez, *FG* négyzete nagyobb *GH* négyzeténél (V. 14.). Legyen *FG* négyzetével egyenlő *GH* és *k* négyzetösszege (X. 14. L.). Fölforgatva tehát *FG* négyzete úgy aránylik *k* négyzetéhez, mint *AB* a *BC*-hez (V. 19. K.). *AB* viszont nem úgy aránylik *BC*-hez, mint négyzetszám négyzetszámhoz, úgyhogy *FG* négyzete sem úgy aránylik *k* négyzetéhez, mint négyzetszám négyzetszámhoz. *FG* tehát lineárisan összemérhetetlen *k*-val, *FG* négyzetértéke tehát egy vele összemérhetetlen szakasz négyzetével nagyobb *GH*-énál. S *FG* és *GH* csak négyzetesen összemérhető racionálisok, és egyikőjük sem lineárisan összemérhető a fölvett racionálissal, *e*-vel.

FH tehát hatodik binomiális. Éppen ezt kellett megmutatni.

X. 54. Lemma

Legyen *AB* és *BC* két négyzet, melyek úgy vannak elhelyezve, hogy *DB* egy egyenesen van *BE*-vel. Ekkor *FB* és *BG* is egy egyenesen van. Egészítsük ki az *AC* paralelogrammát. Azt állítom, hogy *AC* négyzet, *AB*-nek és *BC*-nek középarányosa *DG*, s végül *AC*-nek és *CB*-nek középarányosa *DC*.

Minthogy ugyanis *DB* egyenlő *BF*-fel, *BE* pedig *BG*-vel a teljes *DE* egyenlő a teljes *FG*-vel. *DE* viszont egyenlő *AH* és *KC*, *FG* pedig *AK* és *HC* bármelyikével (I. 34.), tehát *AH* és *KC* bármelyike egyenlő *AK* és *HC* bármelyikével. Az *AC* paralelogramma tehát egyenlő oldalú; s derékszögű, *AC* tehát négyzet. Minthogy *DB* úgy aránylik *BE*-hez, mint *FB* a *BG*-hez, *AB* a *DG*-hez, mint *FB* a *BG*-hez és *DG* a *BC*-hez, mint *DB* a *BE*-hez (VI. 1.), *AB* úgy aránylik *DG*-hez, mint *DG* a *BC*-hez (V. 11.). *DG* tehát középarányosa *AB*-nek és *BC*-nek.

Még azt állítom, hogy *DC* középarányosa *AC*-nek és *CB*-nek.

Minthogy ugyanis *AD* úgy aránylik *DK*-hoz, mint *KG* a *GC*-hez – hiszen páronként egyenlők (V. 7.) –, összetéve *AK* úgy aránylik *KD*-hez, mint *KC* a *CG*-hez (V. 18.). Amint viszont *AK* a *KD*-hez, úgy *AC* a *CD*-hez, amint pedig *KC* a *CG*-hez, úgy *DC* a *CB*-hez, amint tehát *AC* a *DC*-hez, úgy *DC* a *BC*-hez. *DC* tehát középarányosa *AC*-nek és *CB*-nek. Ezt volt feladatunk megmutatni.

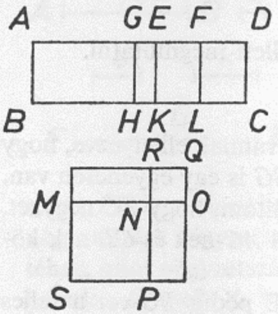
F.: X. 54–55., 60., 92.

X. 54. Tétel

*Ha egy idomot egy racionális és egy első binomiális szakasz fog közre, akkor a szakasz, melynek az idom négyzetértéke, irracionális, ún. binomiális.**

Fogja ugyanis közre az *AC* idomot az *AB* racionális és az *AD* első binomiális. Azt állítom, hogy a szakasz, melynek négyzetértéke *AC*, irracionális, ún. binomiális.

Miután *AD* első binomiális, essék hát szét *E*-ben a tagjaira, és legyen *AE* a nagyobb tag. Nyilvánvaló, hogy *AE* és *ED* csak négyzetesen összemérhető racionálisok, *AE* négyzetértéke egy vele összemérhető szakasz négyzetével nagyobb *ED*-énél és *AE* lineárisan összemérhető az adott *AB* racionálissal. Legyen *F ED* felezőpontja (I. 10.). Minthogy *AE* négyzetértéke egy vele összemérhető szakasz négyzetével nagyobb *ED*-énél, ha a kisebb tag négyzetének negyedével, azaz *EF* négyzetével egyenlő paralelogrammát illesztünk a nagyobb *AE*-hez úgy, hogy egy négyzet marad fönn, akkor (*AE*) összemérhető darabokra bomlik (X. 17.). Illesszük tehát *AE*-hez az *EF* négyzetével egyenlő *AG* és *GE* közötti téglalapot (VI. 28.). Ekkor *AG* lineárisan összemérhető *EG*-vel. Húzzuk meg *G*-n, *E*-n, illetve *F*-en át *AB*-vel és *CD*-vel párhuzamosan *GH*-t, *EK*-t, illetve *FL*-t (I. 31.), szerkesszünk egy, az *AH* paralelogrammával egyenlő *SN* és egy *GK*-val egyenlő *NQ* négyzetet (II. 14.), és helyezzük őket úgy el, hogy *MN* egy egyenesen legyen *NO*-val. Ekkor *RN* is egy egyenesen van *NP*-vel. Egészítsük ki az *SQ* paralelogrammát. Ekkor *SQ* négyzet (L.). Minthogy az *AG* és *GE* közötti téglalap egyenlő *EF* négyzetével, *AG* úgy aránylik *EF*-hez, mint *FE* az *EG*-hez (VI. 17.), *AH* tehát úgy aránylik *EL*-hez, mint *EL* a *KG*-hez (VI. 1.), *EL* tehát középarányosa *AH*-nak és *GK*-nak. *AH* viszont egyenlő *SN*-nel, *GK* pedig egyenlő *NQ*-val, *SN*-nek és *NQ*-nak tehát középarányosa *EL*. Ugyanazon *SN*-nek és *NQ*-nak *MR* is középarányosa (L.), *EL* tehát egyenlő *MR*-rel, úgyhogy *PO*-val is egyenlő (I. 43.). *AH* meg *GK*



egyenlő *SN* meg *NQ*-val, a teljes *AC* tehát egyenlő a teljes *SQ*-val, azaz *MO* négyzetével. *AC* tehát *MO* négyzetértéke.

Azt állítom, hogy *MO* binomiális.

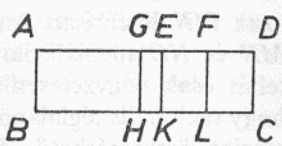
Minthogy ugyanis *AG* összemérhető *GE*-vel, *AE* az *AG* és *GE* bármelyikével összemérhető (X. 15.). *AE* feltétel szerint összemérhető *AB*-vel, tehát *AG* és *GE* összemérhető *AB*-vel (X. 12.). *AB* racionális, tehát *AG* és *GE* racionális, tehát *AH* és *GK* racionális (X. 19.), és *AH* összemérhető *GK*-val. *AH* egyenlő *SN*-nel, *GK* pedig *NQ*-val, tehát *SN* és *NQ*, azaz *MN* négyzete és *NO* négyzete, racionálisok és összemérhetőek. Minthogy *AE* lineárisan összemérhetetlen *ED*-vel, *AE* összemérhető *AG*-vel, *DE* összemérhető *EF*-fel, *AG* összemérhetetlen *EF*-fel (X. 13.), úgyhogy *AH* is összemérhetetlen *EL*-lel (VI. 1., X. 11.). *AH* egyenlő *SN*-nel, *EL* pedig *MR*-rel, tehát *SN* is összemérhetetlen *MR*-rel. *PN* úgy aránylik *NR*-hez, mint *SN* az *MR*-hez, tehát *PN* összemérhetetlen *NR*-rel. *PN* egyenlő *MN*-nel, *NR* pedig *NO*-val, tehát *MN* összemérhetetlen *NO*-val. *MN* négyzete összemérhető *NO* négyzetével, és mindkettő racionális, *MN* és *NO* tehát csak négyzetesen összemérhető racionálisok.

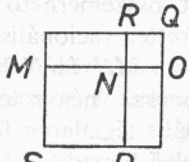
MO tehát binomiális, és négyzetértéke *AC*. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: X. 58., 71.

X. 55. Tétel

Ha egy idomot egy racionális és egy második binomiális szakasz fog közre, akkor a szakasz, melynek az idom négyzetértéke, irracionális, ún. első bimediális.





Fogja ugyanis közre az *ABCD* idomot az *AB* racionális és az *AD* második binomiális. Azt állítom, hogy a szakasz, melynek négyzetértéke *AC*, irracionális, ún. első bimediális.

AD második binomiális, essék hát szét úgy *E*-ben a tagjaira, hogy *AE* legyen a nagyobb tag. *AE* és *ED* tehát csak négyzetesen összemérhető racionálisok, *AE* négyzetértéke egy vele összemérhető szakasz négyzetével nagyobb *ED*-énél, és a kisebb tag, *ED*, lineárisan összemérhető *AB*-vel. Legyen *F* az *ED* felezőpontja (I. 10.), és illesszük úgy *AE*-hez az *EF* négyzetével egyenlő *AGE* paralelogrammát, hogy egy négyzet maradjon fönn (VI. 28.). Ekkor *AG* lineárisan összemérhető *GE*-vel (X. 17.). Húzzuk meg *G*-n, *E*-n, illetve *F*-en át *AB*-vel és *CD*-vel párhuzamosan *GH*-t, *EK*-t, illetve *FL*-t (I. 31.), szerkesszünk egy, az *AH* paralelogrammával egyenlő *SN* és egy *GK*-val egyenlő *NQ* négyzetet (II. 14.), és helyezzük őket úgy el, hogy *MN* egy egyenesen legyen *NO*-val. Ekkor *RN* is egy egyenesen van *NP*-vel (I. 14.). Egészítsük ki az *SQ* négyzetet. Az előbb bizonyítottakból világos, hogy *MR* középarányosa *SN*-nek és *NQ*-nak, és egyenlő *EL*-lel, és hogy az *AC* idom *MO* négyzetértéke. Azt kell még megmutatni, hogy *MO* első bimediális. Minthogy *AE* lineárisan összemérhetetlen *ED*-vel és *ED* összemérhető *AB*-vel, *AE* összemérhetetlen *AB*-vel (X. 13.). Minthogy *AG* összemérhető *EG*-vel, *AE* az *AG* és *GE* bármelyikével összemérhető (X. 15.). *AE* viszont lineárisan összemérhetetlen *AB*-vel, tehát *AG* és *GE* összemérhetetlenek *AB*-vel (X. 13.). *BA*, *AG* és *GE* tehát csak négyzetesen összemérhető racionálisok, úgyhogy mind *AH*, mind *GK* mediális, úgyhogy mind *SN*, mind *NQ* mediális. Tehát az *MN*, *NO* szakaszok is mediálisok. Minthogy *AG* lineárisan összemérhető *GE*-vel, *AH* is összemérhető *GK*-val (VI. 1., X. 11.), azaz *SN* az *NQ*-val, azaz *MN* négyzete *NO* négyzetével [úgyhogy *MN* és *NO* négyzetesen összemérhetők]. Minthogy *AE* lineárisan összemérhetetlen *ED*-vel, *AE* összemérhető *AG*-vel és *ED* összemérhető *EF*-fel, *AG* összemérhetetlen *EF*-fel, úgyhogy *AH* is összemérhetetlen *EL*-lel, azaz *SN* az *MR*-rel, azaz *PN* az *NR*-rel, azaz *MN* lineárisan összemérhetetlen *NO*-val. Megmutattuk, hogy *MN* és *NO* mediálisok és négyzetesen összemérhetők, *MN* és *NO* tehát csak négyzetesen összemérhető mediálisok. Még azt állítom, hogy racionális téglalapot fognak közre. Minthogy ugyanis *DE* feltétel szerint összemérhető *AB*-vel és *EF*-fel, *EF* összemérhető *EK*-val. Mindketten racionálisok, tehát *EL*, azaz *MR*, racionális (X. 19.). *MR* pedig az *MN* és *NO* közötti téglalap. Ha viszont összeadunk két olyan, csak négyzetesen összemérhető mediális szakaszt, melyek racionális téglalapot fognak közre, akkor az összeg irracionális, és a neve első bimediális (X. 37.).

MO tehát első bimediális. Éppen ezt kellett megmutatni.

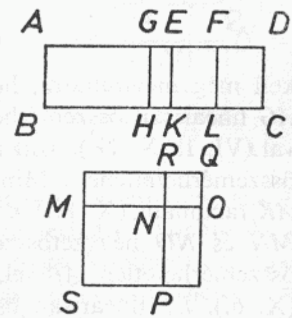
F.: X. 71.

X. 56. Tétel

Ha egy idomot egy racionális és egy harmadik binomiális szakasz fog közre, akkor a szakasz, melynek az idom négyzetértéke, irracionális, ún. második bimediális.

Fogja ugyanis közre az *ABCD* idomot az *AB* racionális és az *AD* harmadik binomiális, mely *E*-ben szétesik a tagjaira, melyek közül *AE* a nagyobb. Azt állítom, hogy a szakasz, melynek négyzetértéke *AC*, irracionális, ún. második bimediális.

Végezzük el ugyanazokat a konstrukciókat, mint az előbb. Minthogy *AD* harmadik binomiális, *AE* és *ED* csak négyzetesen összemérhető racionálisok, *AE* négyzetértéke egy vele összemérhető szakasz négyzetével nagyobb *ED*-énél és sem *AE*, sem *ED* nem lineárisan összemérhető *AB*-vel. Az előbbiekhez hasonlóan mutathatjuk meg, hogy *MO* négyzetértéke *AC* és *MN*, *NO* csak négyzetesen összemérhető mediálisok (vö. X. 54–55.), úgyhogy *MO* bimediális.



Azt kell még megmutatni, hogy második. Minthogy *DE* lineárisan összemérhetetlen *AB*-vel, azaz *EK*-val, és *DE* összemérhető *EF*-fel, *EF* lineárisan összemérhetetlen *EK*-val (X. 13.). S racionálisok, *FE* és *EK* tehát csak négyzetesen összemérhető racionálisok. Mediális tehát *EL*, azaz *MR*, s *MN* és *NO* fogja közre, az *MN* és *NO* közötti téglalap tehát mediális.

MO tehát második bimediális. Éppen ezt kellett megmutatni.

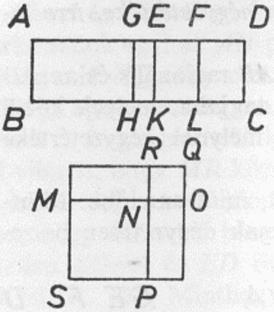
F.: X. 72.

X. 57. Tétel

Ha egy idomot egy racionális és egy negyedik binomiális szakasz fog közre, akkor a szakasz, melynek az idom négyzetértéke, irracionális, ún. maior.

Fogja ugyanis közre az *AC* idomot az *AB* racionális és az *AD* negyedik binomiális, mely *E*-ben szétesik a tagjaira, melyek közül *AE* a nagyobb. Azt állítom, hogy a szakasz, melynek négyzetértéke *AC*, irracionális, ún. maior.

Minthogy ugyanis *AD* negyedik binomiális, *AE* és *ED* csak négyzetesen összemérhető racionálisok, *AE* négyzetértéke egy vele összemérhetetlen szakasz négyzetével nagyobb *ED*-énél, és *AE* lineárisan összemérhető *AB*-vel. Legyen *DE* felezőpontja *F*, és illesszünk *AE*-hez egy *EF* négyzetével egyenlő paralelogrammát, az *AG* és *GE* közöttit (VI. 28.). Ekkor *AG* lineárisan összemérhetetlen *GE*-vel (X. 18.). Húzzuk meg *AB*-vel párhuzamosan *GH*-t, *EK*-t, *FL*-t és így tovább, mint az előző tételben. Világos, hogy az *AC* idom *MO* négyzetértéke. Azt kell még megmutatni, hogy *MO* irracionális, ún. maior. Minthogy *AG* lineárisan összemérhetetlen *EG*-vel, *AH* is összemérhetetlen *GK*-val (VI. 1., X. 11.), azaz *SN* az *NQ*-val. *MN* és *NO* tehát négyzetesen összemérhetetlenek. Minthogy *AE* lineárisan összemérhető *AB*-vel, *AK* racionális (X. 19.), s egyenlő *MN* és *NO* négyzetösszegével, tehát *MN* és *NO* négyzetösszege is racionális. Minthogy *DE* lineárisan összemérhetetlen *AB*-vel, azaz *EK*-val, és *DE* összemérhető *EF*-fel (X. 6.), *EF* lineárisan összemérhetetlen *EK*-val (X. 13.). *EK* és *EF* tehát csak négyzetesen összemérhető racionálisok, mediális tehát *LE*, azaz *MR*. S *MN* és *NO* fogja közre; az *MN* és *NO* közötti téglalap tehát mediális. *MN* és *NO* négyzetösszege racionális, és *MN*, *NO* négyzetesen összemérhetetlenek. Ha viszont összeadunk két olyan, négyzetesen összemérhetetlen szakaszt, melyek négyzetösszege racionális és mediális téglalapot fognak közre, akkor az összeg irracionális, mégpedig maior a neve (X. 39.).



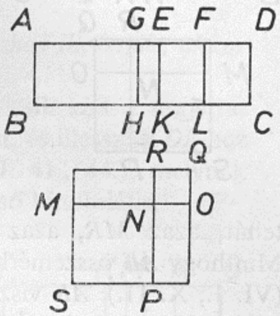
MO tehát irracionális, ún. maior, és négyzetértéke az *AC* idom. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: X. 71.

X. 58. Tétel

Ha egy idomot egy racionális és egy ötödik binomiális szakasz fog közre, akkor a szakasz, melynek az idom négyzetértéke, irracionális, ún. négyzetértékben racionális plusz mediális.

Fogja ugyanis közre az *AC* idomot az *AB* racionális és az *AD* ötödik binomiális, mely *E*-ben úgy esik szét a tagjaira, hogy *AE* a nagyobb tag. Azt állítom, hogy a szakasz, melynek négyzetértéke *AC*, irracionális, ún. négyzetértékben racionális plusz mediális.



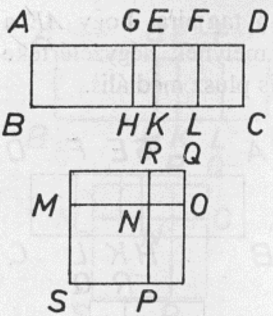
Végezzük el ugyanazokat a lépéseket, mint az előbbi bizonyításban. Világos, hogy az *AC* idom *MO* négyzetértéke. Azt kell még megmutatni, hogy *MO* négyzetértékben racionális plusz mediális. Minthogy ugyanis *AG* összemérhetetlen *GE*-vel (X. 18.), *AH* is összemérhetetlen *HE*-vel (VI. 1., X. 11.), azaz *MN* négyzete *NO* négyzetével. *MN* és *NO* tehát négyzetesen összemérhetetlenek. Minthogy *AD* ötödik binomiális és *ED* a kisebb szelete, *ED* lineárisan összemérhető *AB*-vel. *AE* összemérhetetlen *ED*-vel, tehát *AB* is lineárisan összemérhetetlen *AE*-vel (X. 13.). *BA* és *AE* csak négyzetesen összemérhető racionálisok, *AK* tehát, azaz *MN* és *NO* négyzetösszege, mediális. Minthogy *DE* lineárisan összemérhető *AB*-vel, azaz *EK*-val, és *DE* összemérhető *EF*-fel (X. 6.), *EF* is összemérhető *EK*-val (X. 12.). *EK* racionális, tehát racionális *EL* is (X. 19.), azaz *MR*, azaz az *MN* és *NO* közötti téglalap. *MN* és *NO* tehát két olyan, négyzetesen összemérhetetlen szakasz, melyek négyzetösszege mediális és racionális téglalapot fognak közre. *MO* tehát négyzetértékben racionális plusz mediális, és négyzetértéke az *AC* idom. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: X. 59., 71.

X. 59. Tétel

Ha egy idomot egy racionális és egy hatodik binomiális szakasz fog közre, akkor a szakasz, melynek az idom négyzetértéke, irracionális, ún. négyzetértékben két mediális összege.

Fogja ugyanis közre az *ABCD* idomot az *AB* racionális és az *AD* hatodik binomiális, mely *E*-ben úgy esik szét a tagjaira, hogy *AE* a nagyobb tag. Azt állítom, hogy a szakasz, melynek négyzetértéke *AC*, irracionális, ún. négyzetértékben két mediális összege.



Végezzük el ugyanazokat a lépéseket, mint az előző bizonyításban. Világos, hogy az *AC* idom *MO* négyzetértéke, és *MN* négyzetesen összemérhetetlen *NO*-val. Minthogy *EA* lineárisan összemérhetetlen *AB*-vel, *EA* és *AB* csak négyzetesen összemérhető racionálisok, *AK* tehát, azaz *MN* és *NO* négyzetösszege, mediális. Ismét, minthogy *ED* lineárisan összemérhetetlen *AB*-vel, *FE* is összemérhetetlen *EK*-val (X. 6., 13.), *FE* és *EK* tehát csak négyzetesen összemérhető racionálisok, *EL* tehát, azaz *MR*, azaz az *MN* és *NO* közötti téglalap, mediális. Minthogy *AE* összemérhetetlen *EF*-fel, *AK* is összemérhetetlen *EL*-lel (VI. 1., X. 11.). *AK* viszont *MN* és *NO* négyzetösszege, *EL* pedig az *MN* és *NO* közötti téglalap, *MN* és *NO* négyzetösszege tehát összemérhetetlen az *MN* és *NO* közötti téglalappal. S mindkét idom mediális, és *MN*, *NO* négyzetesen összemérhetetlenek.

MO tehát négyzetértékben két mediális összege, és négyzetértéke *AC*. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: X. 72.

X. 60. Lemma

Ha egy egyenesszakaszt nem egyenlő részekre osztunk, akkor a nem egyenlő részek négyzetösszege nagyobb a nem egyenlő részek által közrefogott téglalap kétszeresénél.

Legyen *AB* egy szakasz, osszuk nem egyenlő részekre *C*-ben, és legyen *AC* a nagyobb. Azt állítom, hogy *AC* és *CB* négyzetösszege nagyobb az *AC* és *CB* közötti téglalap kétszeresénél.

Legyen ugyanis *AB* felezőpontja *D* (I. 10.). Minthogy így egy egyenesszakaszt egyenlő részekre osztottunk *D*-ben és nem egyenlőkre *C*-ben, az *AC* és *CB* közötti téglalapnak és *CD* négyzetének az összege egyenlő *AD* négyzetével (II. 5.), úgyhogy az *AC* és *CB* közötti téglalap kisebb *AD* négyzeténél, tehát az *AC* és *CB* közötti téglalap kétszerese kisebb, mint *AD* négyzetének a kétszerese. *AC* és *CB* négyzetösszege viszont egyenlő *AD* és *DC* négyzetösszegének a kétszeresével (II. 9.), tehát *AC* és *CB* négyzetösszege nagyobb az *AC* és *CB* közötti téglalap kétszeresénél. Éppen ezt kellett megmutatni.]

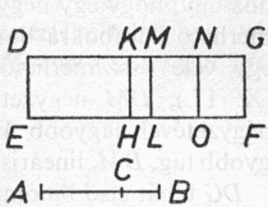
F.: X. 44., 47., 60–61.

X. 60. Tétel

Ha egy binomiális négyzetét racionális szakaszhoz illesztjük, akkor a keletkező idom szélessége első binomiális lesz.

Legyen *AB* egy binomiális, mely *C*-ben úgy esik szét a tagjaira, hogy *AC* a nagyobb tag, vegyük a *DE* racionálist, és illesszük *DE*-hez az *AB* négyzetével egyenlő *DEFG* téglalapot (I. 41., 44.), melynek legyen *DG* a szélessége. Azt állítom, hogy *DG* első binomiális.

Illesszük ugyanis *DE*-hez az *AC* négyzetével egyenlő *DH*-t és a *BC* négyzetével egyenlő *KL*-t. Ekkor a maradék, az *AC* és *CB* közötti téglalap kétszerese, egyenlő *MF*-fel (II. 4.). Legyen *MG* felezőpontja *N*, és húzzuk *ML*-lel és *GF*-fel párhuzamosan *NO*-t (I. 31.). *MO* és *NF* tehát egyenlő az *AC* és *CB* közötti téglalap egyszeresével.



Minthogy *AB* binomiális, mely *C*-ben szétesik a tagjaira, *AC* és *CB* csak négyzetesen összemérhető racionálisok. *AC* és *CB* négyzete tehát racionális és összemérhetők, úgyhogy *AC* és *CB* négyzetösszege is [összemérhető *AC* és *CB* négyzetével (X. 15.), *AC* és *CB* négyzetösszege tehát racionális (X. 12.)]. S egyenlő *DL*-lel, *DL* tehát racionális. S a *DE* racionális mellé illesztettük, *DM* tehát racionális és lineárisan összemérhető *DE*-vel (X. 20.). Másrészt, minthogy *AC* és *CB* csak négyzetesen összemérhető racionálisok, az *AC* és *CB* közötti téglalap kétszerese, azaz *MF*, mediális (X. 6., 23. K.). S a racionális *ML*-hez illesztettük, *MG* tehát racionális és lineárisan összemérhetetlen *ML*-lel, azaz *DE*-vel (X. 22.). *MD* is racionális, és lineárisan összemérhető *DE*-vel, *DM* tehát lineárisan összemérhetetlen *MG*-vel

(X. 13.). S racionálisok, *DM* és *MG* tehát csak négyzetesen összemérhető racionálisok, *DG* tehát binomiális.

Azt kell még megmutatni, hogy első.

Minthogy *AC* és *CB* négyzetének középarányosa az *AC* és *CB* közötti téglalap (X. 54. L.), *DH*-nak és *KL*-nek is középarányosa *MO*. Amint tehát *DH* az *MO*-hoz, úgy aránylik *MO* a *KL*-hez, azaz amint *DK* az *MN*-hez, úgy *MN* az *NK*-hoz (VI. 1.), a *DK* és *KM* közötti téglalap tehát egyenlő *MN* négyzetével (VI. 17.). Minthogy *AC* négyzete összemérhető *CB* négyzetével, *DH* is összemérhető *KL*-lel, úgyhogy *DK* is összemérhető *KM*-mel (VI. 1., X. 11.). Minthogy *AC* és *CB* négyzetösszege nagyobb az *AC* és *CB* közötti téglalap kétszeresénél (L.), *DL* is nagyobb *MF*-nél, úgyhogy *DM* is nagyobb *MG*-nél (VI. 1., V. 14.). S a *DK* és *KM* közötti téglalap egyenlő *MN* négyzetével, azaz *MG* négyzetének negyedével, és *DK* összemérhető *KM*-mel. Ha viszont van két nem egyenlő szakasz és a kisebb négyzetének negyedrészével egyenlő paralelogrammát illesztünk a nagyobbhoz úgy, hogy egy négyzet marad fönn, és e szakasz lineárisan összemérhető darabokra bomlik, akkor a nagyobb szakasz négyzetértéke egy vele összemérhető szakasz négyzetével nagyobb a kisebbénél (X. 17.), *DM* négyzetértéke tehát egy vele összemérhető szakasz négyzetével nagyobb *MG*-énél. S *DM* és *MG* racionálisok, és a nagyobb tag, *DM*, lineárisan összemérhető a fölvett racionálissal, *DE*-vel. *DG* tehát első binomiális. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: X. 72., 111.

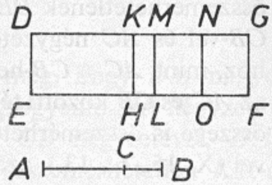
X. 61. Tétel

Ha egy első bimediális négyzetét a racionálishoz illesztjük, akkor a keletkező idom szélessége második binomiális lesz.

Essék szét az *AB* első bimediális *C*-ben a mediálisokra, melyek közül *AC* a nagyobb, vegyük a *DE* racionálist, és illesszük *DE*-hez az *AB* négyzetével egyenlő *DG* szélességű *DF* paralelogrammát (I. 41., 44.). Azt állítom, hogy *DG* második binomiális.

Végezzük el ugyanis ugyanazokat a lépéseket, mint az előbb. Minthogy *AB* első bimediális, mely *C*-ben szétesik, *AC* és *CB* olyan, csak négyzetesen összemérhető mediálisok, melyek racionális téglalapot fognak közre, úgyhogy *AC* és *CB* négyzetösszege is mediális

(X. 15., 23. K.), tehát *DL* mediális. S a *DE* racionális mellett fekszik, *MD* tehát racionális és lineárisan összemérhetetlen *DE*-vel (X. 22.). Másrészt, minthogy az *AC* és *CB* közötti téglalap kétszerese racionális (X. 6., 12.), *MF* is racionális. S a racionális *ML* mellett fekszik, *MG* is racionális tehát és lineárisan összemérhető *ML*-lel (X. 20.), azaz *DE*-vel, *DM* tehát lineárisan összemérhetetlen *MG*-vel (X. 13.). S racionálisok, *DM* és *MG* tehát csak négyzetesen összemérhető racionálisok. *DG* tehát binomiális.



Azt kell még megmutatni, hogy második.

Minthogy ugyanis *AC* és *CB* négyzetösszege nagyobb az *AC* és *CB* közötti téglalap kétszeresénél (X. 60. L.), *DL* is nagyobb *MF*-nél, úgyhogy *DM* is *MG*-nél (VI. 1., V. 14.). Minthogy *AC* négyzete összemérhető *CB* négyzetével, *DH* is összemérhető *KL*-lel, úgyhogy *DK* is összemérhető *KM*-mel (VI. 1., X. 11.). S a *DK* és *KM* közötti téglalap egyenlő *MN* négyzetével, *DM* négyzetértéke tehát egy vele összemérhető szakasz négyzetével nagyobb *MG*-énél (X. 17.). S *MG* lineárisan összemérhető *DE*-vel.

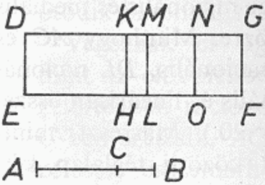
DG tehát második binomiális.

F.: X. 62., 72.

X. 62. Tétel

Ha egy második bimediális négyzetét a racionálishoz illesztjük, akkor a keletkező idom szélessége harmadik binomiális lesz.

Legyen *AB* egy második bimediális, mely *C*-ben úgy esik szét, hogy *AC* a nagyobb szelete, legyen *DE* a racionális, és illesszük *DE*-hez az *AB* négyzetével egyenlő *DG* szélességű *DF* paralelogrammát (I. 41., 44.). Azt állítom, hogy *DG* harmadik binomiális.



Végezzük el ugyanis ugyanazokat a lépéseket, mint az előbbi bizonyításban. Minthogy *AB* második bimediális, mely szétesik *C*-ben, *AC* és *CB* olyan, csak négyzetesen összemérhető mediálisok, melyek mediális téglalapot fognak közre, úgyhogy *AC* és *CB* négyzetösszege is mediális (X. 15., 23. K.).

S egyenlő DL-lel, tehát DL is mediális. S a racionális DE mellett fekszik, tehát MD is racionális és lineárisan összemérhetetlen DE-vel (X. 22.). Ugyanígy MG is racionális és lineárisan összemérhetetlen ML-lel, azaz DE-vel. DM és MG tehát racionálisok és lineárisan összemérhetetlenek DE-vel. Minthogy AC lineárisan összemérhetetlen CB-vel és AC négyzete úgy aránylik az AC és CB közötti téglalaphoz, mint AC a CB-hez (X. 22. L.), AC négyzete is összemérhetetlen az AC és CB közötti téglalappal (X. 11.), úgyhogy AC és CB négyzetösszege is összemérhetetlen az AC és CB közötti téglalap kétszeresével (X. 15., 6., 13.), azaz DL az MF-fel, úgyhogy DM is összemérhetetlen MG-vel (VI., 1., X. 11.). S racionálisok, DG tehát binomiális.

Azt kell még megmutatni, hogy harmadik.

Az előzőekhez hasonlóan láthatjuk be, hogy DM nagyobb MG-nél és DK összemérhető KM-mel. A DK és KM közötti téglalap egyenlő MN négyzetével, DM négyzetértéke tehát egy vele összemérhető szakasz négyzetével nagyobb MG-énél (X. 17.). S sem DM, sem MG nem lineárisan összemérhető DE-vel.

DG tehát harmadik binomiális. Éppen ezt kellett megmutatni.

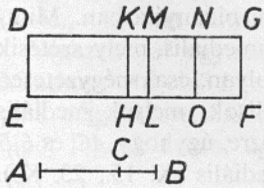
F.: X. 72.

X. 63. Tétel

*Ha egy maior négyzetét a racionálishoz illesztjük, akkor a keletkező idom szélessége negyedik binomiális lesz.**

Legyen AB egy maior, mely úgy esik szét C-ben, hogy AC nagyobb CB-nél, legyen DE a racionális, és illesszük DE-hez az AB négyzetével egyenlő DG szélességű DF paralelogrammát (I. 41., 44.). Azt állítom, hogy DG negyedik binomiális.

Végezzük el ugyanis ugyanazokat a lépéseket, mint az előbbi bizonyításban. Minthogy AB maior, mely szétesik C-ben, AC és CB két olyan összemérhetetlen szakasz, melyek négyzetösszege racionális és mediális téglalapot fognak közre. Minthogy AC és CB négyzetösszege racionális, DL racionális, DM tehát racionális és lineárisan összemérhető DE-vel (X. 20.). Másrészt, minthogy az AC és CB közötti téglalap két-



szerese, azaz *MF*, mediális (X. 6., 23. K.) és a racionális *ML* mellett fekszik, *MG* is racionális és lineárisan összemérhetetlen *DE*-vel (X. 22.), tehát *DM* is lineárisan összemérhetetlen *MG*-vel (X. 13.). *DM* és *MG* tehát csak négyzetesen összemérhető racionálisok, *DG* tehát binomiális.

Azt kell még megmutatni, hogy negyedik.

Az előzőekhez hasonlóan mutathatjuk meg, hogy *DM* nagyobb *MG*-nél és hogy a *DK* és *KM* közötti téglalap egyenlő *MN* négyzetével. Minthogy *AC* négyzete összemérhetetlen *CB* négyzetével, *DH* is összemérhetetlen *KL*-lel, úgyhogy *DK* is összemérhetetlen *KM*-mel (VI. 1., X. 11.). Ha viszont van két nem egyenlő szakasz, és a kisebb négyzetének negyedrészével egyenlő paralelogrammát illesztünk a nagyobbhoz úgy, hogy egy négyzet marad fönn, és e szakasz összemérhetetlen darabokra bomlik, akkor a nagyobb szakasz négyzetértéke egy vele összemérhetetlen szakasz négyzetével nagyobb a kisebbénél (X. 18.), *DM* négyzetértéke tehát egy vele összemérhetetlen szakasz négyzetével nagyobb *MG*-énél. S *DM* és *MG* csak négyzetesen összemérhető racionálisok és *DM* összemérhető az adott racionálissal, *DE*-vel.

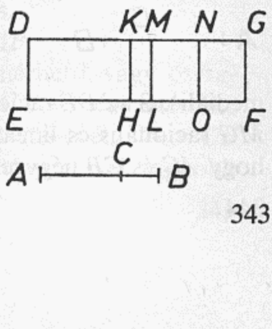
DG tehát negyedik binomiális. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: X. 73.

X. 64. Tétel

*Ha egy négyzetértékben racionális plusz mediális négyzetét a racionálishoz illesztjük, akkor a keletkező idom szélessége ötödik binomiális lesz.**

Legyen *AB* négyzetértékben racionális plusz mediális, mely *C*-ben úgy esik szét, hogy *AC* a nagyobb, vegyük a *DE* racionálist, és illesszük *DE*-hez az *AB* négyzetével egyenlő *DG* szélességű *DF* paralelogrammát (I. 41., 44.). Azt állítom, hogy *DG* ötödik binomiális.



Végezzük el ugyanazokat a lépéseket, mint az előbbiekben. Minthogy *AB* négyzetértékben racionális plusz mediális, mely *C*-ben szétesik, *AC* és *CB* két olyan, négyzetesen összemérhetetlen szakasz, melyek négyzetösszege mediális, és racionális téglalapot fognak közre. Minthogy *AC* és *CB* négyzetösszege mediális, *DL* mediális, úgyhogy *DM* racionális és lineárisan összemérhetetlen *DE*-vel (X. 22.). Másrészt, minthogy az *AC* és *CB* közötti téglalap kétszerese, azaz *MF*, racionális (X. 6., 12.), *MG* racionális és összemérhető *DE*-vel (X. 20.). *DM* tehát összemérhetetlen *MG*-vel (X. 13.), *DM* és *MG* tehát csak négyzetesen összemérhető racionálisok, *DG* tehát binomiális.

Azt állítom még, hogy ötödik.

Hasonlóképp mutatható meg, hogy a *DK* és *KM* közötti téglalap egyenlő *MN* négyzetével, és *DK* lineárisan összemérhetetlen *KM*-mel, *DM* négyzetértéke tehát egy vele összemérhetetlen szakasz négyzetével nagyobb *MG*-énél (X. 18.). S *DM* és *MG* csak négyzetesen összemérhető [racionálisok], és a kisebb *MG* lineárisan összemérhető *DE*-vel. *DG* tehát ötödik binomiális. Éppen ezt kellett megmutatni.

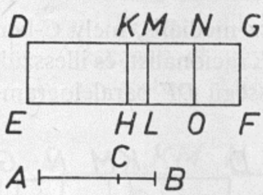
F.: X. 72.

X. 65. Tétel

*Ha egy négyzetértékben két mediális összegének négyzetét a racionálishoz illesztjük, akkor a keletkező idom szélessége hatodik binomiális lesz.**

Legyen *AB* négyzetértékben két mediális összege, mely szétesik *C*-ben, legyen *DE* a racionális, és illesszük *DE*-hez az *AB* négyzetével egyenlő *DG* szélességű *DF* paralelogrammát (I. 41., 44.). Azt állítom, hogy *DG* hatodik binomiális.

Végezzük el ugyanis ugyanazokat a lépéseket, mint föntebb. Minthogy *AB* négyzetértékben két mediális összege és *C*-ben esik szét, *AC* és *CB* olyan négyzetesen összemérhetetlen szakaszok, melyeknek mind a négyzetösszege mediális, mind mediális téglalapot fognak közre és négyzetösszegük összemérhetetlen az általuk közrefogott téglalappal, úgyhogy a föntebb bizonyítottak szerint mind *DL*, mind *MF* mediális. S az *DE* racionális mellett fekszenek, tehát mind *DM*, mind *MG* racionális és lineárisan összemérhetetlen *DE*-vel (X. 22.). Minthogy *AC* és *CB* négyzetösszege összmérhetetlen az *AC* és *CB* közötti



téglalap kétszeresével (X. 6., 13.), *DL* összemérhetetlen *MF*-fel, tehát *DM* is összemérhetetlen *MG*-vel (VI. 1., X. 11.), *DM* és *MG* tehát csak négyzetesen összemérhető racionálisok, tehát *DG* binomiális.

Azt állítom még, hogy hatodik.

Ismét hasonlóan mutathatjuk meg, hogy a *DK* és *KM* közötti téglalap egyenlő *MN* négyzetével, és hogy *DK* lineárisan összemérhetetlen *KM*-mel, és ugyanúgy *DM* négyzetértéke egy vele lineárisan összemérhetetlen szakasz négyzetével nagyobb *MG*-énél (X. 18.). S sem *DM*, sem *MG* nem lineárisan összemérhető az adott racionálissal, *DE*-vel. *DG* tehát hatodik binomiális. Éppen ezt kellett megmutatni.

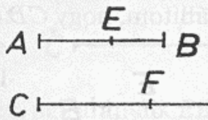
F.: X. 72.

X. 66. Tétel

*Binomiálissal lineárisan összemérhető szakasz maga is binomiális, mégpedig ugyanannyiadik.**

Legyen *AB* binomiális, és legyen *CD* lineárisan összemérhető *AB*-vel. Azt állítom, hogy *CD* binomiális, mégpedig ugyanannyiadik, mint *AB*.

AB binomiális, essék hát szét *E*-ben a tagjaira, és legyen *AE* a nagyobb tag. *AE* és *EB* tehát csak négyzetesen összemérhető racionálisok. Arányuljék amint *AB* a *CD*-hez, úgy *AE* a *CF*-hez (VI. 12.). Ekkor a maradék *EB* úgy aránylik a maradék *FD*-hez, mint *AB* a *CD*-hez (V. 16., 19. K.). *AB* lineárisan összemérhető *CD*-vel, tehát *AE* is összemérhető *CF*-fel, *EB* pedig *FD*-vel (X. 11.). *AE* és *EB* racionálisok, tehát *CF* és *FD* is racionálisok (X. 12.). [Minthogy] *AE* úgy aránylik *CF*-hez, mint *EB* az *FD*-hez (V. 11.), fölcserélve *AE* úgy aránylik *EB*-hez, mint *CF* az *FD*-hez (V. 16.). *AE* és *EB* csak négyzetesen összemérhetők, tehát *CF* és *FD* is csak négyzetesen összemérhetők (X. 11.). S racionálisok, *CD* tehát binomiális.



Azt állítom még, hogy ugyanannyiadik, mint *AB*.

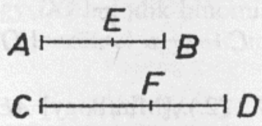
AE négyzetértéke ugyanis egy vele vagy összemérhető, vagy összemérhetetlen szakasz négyzetével nagyobb *EB*-énél. Ha *AE* négyzetértéke egy vele összemérhető szakasz négyzetével nagyobb *EB*-énél, akkor *CF* négyzetértéke is egy vele összemérhető szakasz négyzetével nagyobb

FD-énél (X. 14.). S ha *AE* összemérhető a fölvett racionálissal, akkor *CF* is összemérhető vele (X. 12.), és ezért mind *AB*, mind *CD* első, azaz ugyanannyiadik binomiális. Ha *EB* összemérhető az adott racionálissal, akkor *FD* is összemérhető vele, és ezért ismét ugyanannyiadik, mint *AB*, hiszen mindketten második binomiálisok. Ha *AE* és *EB* egyike sem összemérhető az adott racionálissal, akkor *CF* és *FD* sem összemérhető vele (X. 13.), és mindkettő harmadik.* Ha *AE* négyzetértéke egy vele összemérhetetlen szakasz négyzetével nagyobb *EB*-énél, akkor *CF* négyzetértéke is egy vele összemérhetetlen szakasz négyzetével nagyobb *FD*-énél (X. 14.). S ha *AE* összemérhető az adott racionálissal, akkor *CF* is összemérhető vele, és mindkettő negyedik. Ha viszont *EB*, akkor *FD* is, és mindkettő ötödik. Ha pedig *AE* és *EB* egyike sem, akkor *CF* és *FD* sem összemérhető az adott racionálissal, és mindkettő hatodik, úgyhogy binomiálissal lineárisan összemérhető szakasz binomiális, mégpedig ugyanannyiadik. Éppen ezt kellett megmutatni.

X. 67. Tétel

*Bimediálissal lineárisan összemérhető szakasz maga is bimediális, mégpedig ugyanannyiadik.**

Legyen *AB* bimediális, és legyen *CD* lineárisan összemérhető *AB*-vel. Azt állítom, hogy *CD* bimediális, mégpedig ugyanannyiadik, mint *AB*.



AB bimediális, essék hát szét *E*-ben a mediálisokra. *AE* és *EB* tehát csak négyzetesen összemérhető mediálisok. Arányuljék amint *AB* a *CD*-hez, úgy *AE* a *CF*-hez (VI. 12.). Ekkor a maradék *EB* úgy aránylik a maradék *FD*-hez, mint *AB* a *CD*-hez (X. 16., 19. K.). *AB* lineárisan összemérhető *CD*-vel, tehát *AE*, illetve *EB* is összemérhető *CF*-fel, illetve *FD*-vel (X. 11.). *AE* és *EB* mediálisok, tehát *CF* és *FD* is mediálisok (X. 23.). Minthogy *CF* úgy aránylik *FD*-hez, mint *AE* az *EB*-hez (V. 11., 16.), és *AE* meg *EB* csak négyzetesen összemérhetők, *CF* és *FD* is csak négyzetesen összemérhetők (X. 11.). Megmutattuk azt is, hogy mediálisok, *CD* tehát bimediális.

Azt állítom még, hogy ugyanannyiadik, mint *AB*.

Minthogy *AE* úgy aránylik *EB*-hez, mint *CF* az *FD*-hez, *AE* négyzete úgy aránylik az *AE* és *EB* közötti téglalaphoz, mint *CF* négyzete a *CF* és *FD* közötti téglalaphoz (X. 22. L.), fölcserélve tehát *AE* négyzete úgy aránylik *CF* négyzetéhez, mint az *AE* és *EB* közötti téglalap a *CF* és *FD* közöttihez (V. 16.). *AE* négyzete összemérhető *CF* négyzetével, tehát az *AE* és *EB* közötti téglalap is összemérhető a *CF* és *FD* közöttivel (X. 11.). Ha tehát az *AE* és *EB* közötti téglalap racionális, akkor a *CF* és *FD* közötti is racionális (X. 12.) [és ezért a szakasz első bimediális], ha pedig mediális, akkor mediális (X. 23. K.), és mindkét szakasz második.

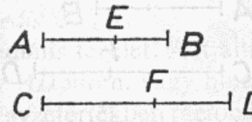
És ezért *CD* ugyanannyiadik, mint *AB*. Éppen ezt kellett megmutatni.

X. 68. Tétel

Maiorral összemérhető szakasz maga is maior.

Legyen *AB* maior és legyen *CD* összemérhető *AB*-vel. Azt állítom, hogy *CD* maior.

Essék szét *AB* az *E*-ben. *AE* és *EB* tehát olyan, négyzetesen összemérhetetlen szakaszok, melyek négyzetösszege racionális és mediális téglalapot fognak közre. Hajtsuk végre az előbbiekkel azonos lépéseket. Mivel *AE* a *CF*-hez és *EB* az *FD*-hez úgy aránylik, mint *AB* a *CD*-hez, *AE* úgy aránylik *CF*-hez, mint *EB* az *FD*-hez (V. 11.). *AB* összemérhető *CD*-vel, tehát *AE*, illetve *EB* is összemérhető *CF*-fel, illetve *FD*-vel (X. 11.). Mivel amint *AE* a *CF*-hez, úgy aránylik *EB* az *FD*-hez, és fölcserélve amint *AE* az *EB*-hez, úgy *CF* az *FD*-hez (V. 16.), összetéve amint *AB* a *BE*-hez, úgy *CD* a *DF*-hez (V. 18.), amint tehát *AB* négyzete *BE* négyzetéhez, úgy *CD* négyzete *DF* négyzetéhez (VI. 22.). Hasonlóképp mutathatjuk meg azt is, hogy amint *AB* négyzete *AE* négyzetéhez, úgy aránylik *CD* négyzete *CF* négyzetéhez. Amint tehát *AB* négyzete *AE* és *EB* négyzetösszegéhez, úgy *CD* négyzete *CF* és *FD* négyzetösszegéhez (V. 7. K., 24.), fölcserélve tehát amint *AB* négyzete *CD* négyzetéhez, úgy *AE* és *EB* négyzetösszege *CF* és *FD* négyzetösszegéhez (V. 16.). *AB* négyzete összemérhető *CD* négyzetével, tehát *AE* és *EB* négyzetösszege is összemérhető *CF* és *FD* négyzetösszegével (X. 11.). *AE* és *EB* négyzetösszege racionális, tehát *CF* és *FD* négyzet-



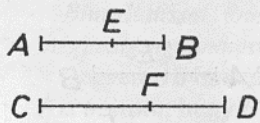
összege is racionális (X. 12.). Hasonlóképp az *AE* és *EB* közötti téglalap kétszerese is összemérhető a *CF* és *FD* közötti kétszeresével (V. 16., 19. K., II. 4.). Az *AE* és *EB* közötti téglalap mediális (X. 6., 23. K.), tehát a *CF* és *FD* közötti téglalap kétszerese is mediális. *CF* és *FD* tehát olyan, négyzetesen összemérhetetlen szakaszok, melyek négyzetösszege racionális és az általuk közrefogott téglalap kétszerese mediális. A *CD* összeg tehát irracionális, ún. maior.

Maiorral összemérhető szakasz tehát maior. Éppen ezt kellett megmutatni.

X. 69. Tétel

Négyzetértékben racionális plusz mediális szakasszal összemérhető szakasz [maga is] négyzetértékben racionális plusz mediális.

Legyen *AB* négyzetértékben racionális plusz mediális, és legyen *CD* összemérhető *AB*-vel. Azt kell megmutatni, hogy *CD* is négyzetértékben racionális plusz mediális.



Essék szét *AB* az *E*-ben a szakaszaira. *AE* és *EB* tehát két olyan, négyzetesen összemérhetetlen szakasz, melyek négyzetösszege mediális és racionális téglalapot fognak közre. Végezzük el ugyanazokat a lépéseket, mint az előbb. Ekkor hasonlóképp mutathatnánk meg, hogy *CF* és *FD* is négyzetesen összemérhetetlenek, és összemérhető *AE* és *EB* négyzetösszege *CF* és *FD* négyzetösszegével, az *AE* és *EB* közötti téglalap pedig a *CF* és *FD* közötti téglalappal, úgyhogy *CF* és *FD* négyzetösszege is mediális (X. 23. K.), a *CF* és *FD* közötti téglalap pedig racionális (X. 12.).

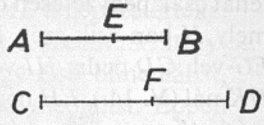
CD tehát négyzetértékben racionális plusz mediális. Éppen ezt kellett megmutatni.

X. 70. Tétel

Négyzetértékben két mediális összegével összemérhető szakasz négyzetértékben két mediális összege.

Legyen *AB* négyzetértékben két mediális összege, és *CD* összemérhető *AB*-vel. Azt kell megmutatni, hogy *CD* is négyzetértékben két mediális összege.

AB négyzetértékben két mediális összege, essék hát szét *E*-ben. *AE* és *EB* tehát olyan, négyzetesen összemérhetetlen szakaszok, melyeknek mind a négyzetösszege mediális, mind mediális téglalapot fognak közre, és *AE* és *EB* négyzetösszege összemérhetetlen az *AE* és *EB* közötti téglalappal. Hajtsuk végre ugyanazokat a lépéseket, mint az előbb. Ekkor hasonlóképp mutathatnánk meg, hogy *CF* és *FD* is négyzetesen összemérhetetlenek, és összemérhető *AE* és *EB* négyzetösszege *CF* és *FD* négyzetösszegével, az *AE* és *EB* közötti téglalap pedig a *CF* és *FD* közötti téglalappal, úgyhogy *CF* és *FD* négyzetösszege is mediális, és a *CF* és *FD* közötti téglalap mediális (X. 23. K.), és *CF* és *FD* négyzetösszege összemérhetetlen a *CF* és *FD* közötti téglalappal (X. 13.).



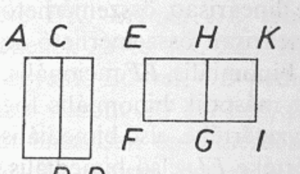
CD tehát négyzetértékben két mediális összege. Éppen ezt kellett megmutatni.

X. 71. Tétel

Ha egy racionális és egy mediális területet összeadunk, négyféle irracionálist kaphatunk: vagy binomiálist, vagy első bimediálist, vagy maiort, vagy négyzetértékben racionális plusz mediálist.

Legyen *AB* egy racionális, *CD* pedig egy mediális terület. Azt állítom, hogy a szakasz, melynek négyzetértéke az *AD* idom, vagy binomiális, vagy első bimediális, vagy maior, vagy négyzetértékben racionális plusz mediális.

AB ugyanis vagy nagyobb *CD*-nél, vagy kisebb nála. Legyen először nagyobb. Vegyük az *EF* racionálist, és illesszük *EF*-hez az *AB*-vel egyenlő *EH* szélességű *EG*-t és a *DC*-vel egyenlő *HK* szélességű *HI*-t (I. 41., 44.). Minthogy *AB* racionális és egyenlő *EG*-vel, *EG* is racionális. Az *EF* [racionális]hoz illesztve szélessége *EH*, *EH* tehát racionális és lineárisan összemérhető *EF*-fel (X. 20.). Ismét, minthogy *CD* mediális és egyenlő *HI*-vel, *HI* is mediális. Az *EF* racionálishoz illesztve szélessége *HK*, *HK* tehát racionális és lineárisan összemérhetetlen *EF*-fel



(X. 22.). Minthogy *CD* mediális, *AB* pedig racionális, *AB* összemérhetetlen *CD*-vel, úgyhogy *EG* is összemérhetetlen *HI*-vel. Amint viszont *EG* a *HI*-hez, úgy aránylik *EH* a *HK*-hoz (VI. 1.), tehát *EH* is lineárisan összemérhetetlen *HK*-val (X. 11.). Mind a kettő racionális, *EH* és *HK* tehát csak négyzetesen összemérhető racionálisok, *EK* tehát binomiális, mely *H*-ban esik szét. Minthogy *AB* nagyobb *CD*-nél és *AB* egyenlő *EG*-vel, *CD* pedig *HI*-vel, *EG* is nagyobb *HI*-nél, tehát *EH* is nagyobb *HK*-nál (V. 14.). *EH* négyzetértéke tehát egy vele lineárisan vagy összemérhető, vagy összemérhetetlen szakasz négyzetével nagyobb *HK*-énál. Legyen először egy vele összemérhető négyzetével nagyobb. A nagyobb tag, *HE*, összemérhető az adott racionálissal, *EF*-fel, *EK* tehát első binomiális. *EF* racionális, ha viszont egy idomot egy racionális és egy első binomiális fog közre, akkor a szakasz, melynek az idom négyzetértéke, binomiális (X. 54.). A szakasz tehát, melynek négyzetértéke *EI*, binomiális, úgyhogy az is binomiális, melynek *AD* a négyzetértéke. Most pedig legyen *EH* négyzetértéke egy vele összemérhetetlen szakasz négyzetével nagyobb *HK*-énál. A nagyobb tag, *EH*, lineárisan összemérhető az adott racionálissal, *EF*-fel, *EK* tehát negyedik binomiális. *EF* racionális, ha viszont egy idomot egy racionális és egy negyedik binomiális fog közre, akkor a szakasz, melynek az idom négyzetértéke, irracionális, ún. maior (X. 57.). A szakasz tehát, melynek négyzetértéke *EI*, maior, úgyhogy az is maior, melynek *AD* a négyzetértéke.

Most pedig legyen *AB* kisebb *CD*-nél. *EG* is kisebb tehát *HI*-nél, úgyhogy *EH* is kisebb *HK*-nál (VI. 1., V. 14.). *HK* négyzetértéke egy vele vagy összemérhető, vagy összemérhetetlen szakasz négyzetével nagyobb *EH*-énál. Legyen először egy vele lineárisan összemérhető négyzetével nagyobb. A kisebb tag, *EH*, lineárisan összemérhető az adott racionálissal, *EF*-fel, *EK* tehát második binomiális. *EF* racionális, ha viszont egy idomot egy racionális és egy második binomiális fog közre, akkor a szakasz, melynek az idom négyzetértéke, első bimediális (X. 55.). A szakasz tehát, melynek négyzetértéke *EI*, első bimediális, úgyhogy az is első bimediális, melynek *AD* a négyzetértéke. Most pedig legyen *HK* négyzetértéke egy vele összemérhetetlen szakasz négyzetével nagyobb *HE*-énél. A kisebb tag, *EH*, összemérhető az adott racionálissal, *EF*-fel, *EK* tehát ötödik binomiális. *EF* racionális, ha viszont egy idomot egy racionális és egy ötödik binomiális fog közre, akkor a szakasz, melynek az idom négyzetértéke, négyzetértékben racionális plusz mediális (X. 58.). A szakasz tehát, melynek négyzetértéke *EI*, négyzetértékben racionális plusz mediális, úgyhogy az is négyzetértékben racionális plusz mediális, melynek *AD* a négyzetértéke.

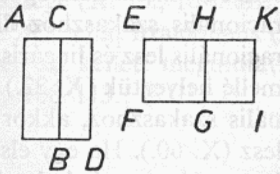
Ha tehát egy racionális és egy mediális területet összeadunk, négyféle irracionálist kaphatunk: vagy binomiálist, vagy első bimediálist, vagy maiort, vagy négyzetértékben racionális plusz mediálist. Éppen ezt kellett megmutatni.

X. 72. Tétel

Ha két, egymással összemérhetetlen mediális területet összeadunk, a maradék két irracionálist kapjuk: vagy második bimediálist, vagy négyzetértékben két mediális összegét.

Adjunk össze ugyanis két, egymással összemérhetetlen mediálist, *AB*-t és *CD*-t. Azt állítom, hogy a szakasz, melynek négyzetértéke az *AD* idom, vagy második bimediális, vagy négyzetértékben két mediális összege.

AB ugyanis vagy nagyobb *CD*-nél, vagy kisebb nála. Legyen először például *AB* nagyobb *CD*-nél, vegyük az *EF* racionálist, és illesszünk *EF*-hez egy *AB*-vel egyenlő *EH* szélességű *EG* és egy *CD*-vel egyenlő *HK* szélességű *HI* téglalapot (I. 41., 44.). Minthogy *AB* és *CD* mediálisok, *EG* és *HI* is mediálisok. Az *FE* racionálishoz illesztve szélességük *EH*, illetve *HK*, *EH* és *HK* tehát racionálisok és lineárisan összemérhetetlenek *EF*-fel (X. 22.). Minthogy *AB* összemérhetetlen *CD*-vel és *AB* egyenlő *EG*-vel, *CD* pedig *HI*-vel, *EG* is összemérhetetlen *HI*-vel. Amint viszont *EG HI*-hez, úgy aránylik *EH* a *HK*-hoz (VI. 1.), *EH* tehát lineárisan összemérhetetlen *HK*-val (X. 11.). *EH* és *HK* tehát csak négyzetesen összemérhető racionálisok, *EK* tehát binomiális. *EH* négyzetértéke egy vele vagy összemérhető, vagy összemérhetetlen szakasz négyzetével nagyobb *HK*-énál (V. 14.). Legyen először egy vele lineárisan összemérhető szakasz négyzetével nagyobb. Sem *EH*, sem *HK* nem lineárisan összemérhető az adott racionálissal, *EF*-fel,



EK tehát harmadik binomiális. *EF* racionális, ha viszont egy idomot egy racionális és egy harmadik binomiális fog közre, akkor a szakasz, melynek az idom négyzetértéke, második bimediális (X. 56.). A szakasz tehát, melynek négyzetértéke *EI*, azaz *AD*, második bimediális. Legyen most *EH* négyzetértéke egy vele lineárisan összemérhetetlen szakasz négyzetével nagyobb *HK*-énál. Mind *EH*, mind *HK* lineárisan összemérhetetlen *EF*-fel, *EK* tehát hatodik binomiális. Ha viszont egy idomot egy racionális és egy hatodik binomiális fog közre, akkor a szakasz, melynek az idom négyzetértéke, négyzetértékben két mediális összege (X. 59.), úgyhogy az a szakasz is négyzetértékben két mediális összege, melynek négyzetértéke az *AD* idom.

[Hasonlóképp mutathatnánk meg, hogy ha *AB* kisebb *CD*-nél, a szakasz, melynek négyzetértéke az *AD* idom, akkor is vagy második bimediális, vagy négyzetértékben két mediális összege.]

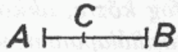
Ha tehát két, egymással összemérhetetlen mediális területet összeadunk, a maradék két irracionálist kapjuk: vagy második bimediálist, vagy négyzetértékben két mediális összegét.

A binomiális és az azutáni irracionális szakaszok sem a mediálissal, sem egymással nem egyeznek meg. Ha ugyanis egy mediális négyzetét racionális szakaszhoz illesztjük, akkor a keletkező idom szélessége racionális lesz és lineárisan összemérhetetlen azzal a szakasszal, amely mellé helyeztük (X. 22.). Ha egy binomiális négyzetét illesztjük racionális szakaszhoz, akkor a keletkező idom szélessége első binomiális lesz (X. 60.). Ha egy első bimediális négyzetét illesztjük a racionálishoz, akkor a keletkező idom szélessége második binomiális lesz (X. 61.). Ha egy második bimediális négyzetét illesztjük a racionálishoz, akkor a keletkező idom szélessége harmadik binomiális lesz (X. 62.). Ha egy maior négyzetét illesztjük a racionálishoz, akkor a keletkező idom szélessége negyedik binomiális lesz (X. 63.). Ha egy négyzetértékben racionális plusz mediális négyzetét illesztjük a racionálishoz, akkor a keletkező idom szélessége ötödik binomiális lesz (X. 64.). Ha pedig egy négyzetértékben két mediális összegének négyzetét illesztjük a racionálishoz, akkor a keletkező idom szélessége hatodik binomiális lesz (X. 65.). Ezek a mondott szélességek mind az elsőtől, mind egymástól különböznek, az elsőtől, mivel racionális, egymástól pedig, mivel nem ugyanannyiadikok,* úgyhogy maguk az irracionális szakaszok is különböznek egymástól.

X. 73. Tétel

*Ha egy racionális szakaszból kivonunk egy vele csak négyzetesen összemérhető racionálist, akkor a maradék irracionális, mégpedig nevezzük apotoménak.**

Vonjuk ki ugyanis az *AB* racionálisból a vele csak négyzetesen összemérhető *BC* racionálist. Azt állítom, hogy a maradék *AC* irracionális, ún. apotomé.



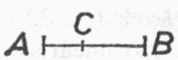
Minthogy ugyanis *AB* lineárisan összemérhetetlen *BC*-vel és *AB* négyzete úgy aránylik az *AB* és *BC* közötti téglalaphoz, mint *AB* *BC*-hez (X. 22. L.), *AB* négyzete összemérhetetlen az *AB* és *BC* közötti téglalappal (X. 11.). *AB* négyzetével összemérhető *AB* és *BC* négyzetösszege (X. 15.), az *AB* és *BC* közötti téglalappal pedig összemérhető az *AB* és *BC* közötti téglalap kétszerese (X. 6.). Minthogy *AB* és *BC* négyzetösszege egyenlő az *AB* és *BC* közötti téglalap kétszeresének és *CA* négyzetének az összegével (II. 7.), a maradék *AC* négyzettel összemérhetetlen *AB* és *BC* négyzetösszege (X. 13., 16.). *AB* és *BC* négyzetösszege racionális (X. 15., 12.), *AC* tehát irracionális (X. 13.), mégpedig nevezzük apotoménak. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: X. 75., 78–79., 81., 84–87., 89–102., 108–113.; XIII. 11.

X. 74. Tétel

Ha egy mediális szakaszból kivonunk egy vele csak négyzetesen összemérhető mediálist, mely a teljes szakasszal racionális téglalapot fog közre, akkor a maradék irracionális, mégpedig nevezzük első mediálapotoménak.

Vonjuk ki ugyanis az *AB* mediálisból a *BC* mediálist, mely csak négyzetesen összemérhető *AB*-vel és *AB*-vel racionális téglalapot fog közre (X. 27. vagy 31.). Azt állítom, hogy a maradék *AC* irracionális, mégpedig nevezzük első mediálapotoménak.



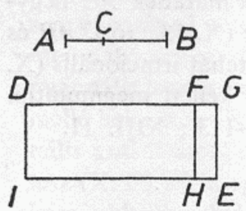
Minthogy ugyanis *AB* és *BC* mediálisok, *AB* és *BC* négyzetösszege is mediális (X. 15., 23. K.). Az *AB* és *BC* közötti téglalap kétszerese racionális (X. 6., 12.), tehát *AB* és *BC* négyzetösszege összemérhetetlen az *AB* és *BC* közötti téglalap kétszeresével (X. 13.), tehát a maradék *AC* négyzettel összemérhetetlen az *AB* és *BC* közötti téglalap kétszerese (II. 7.), minthogy ha az összeg egyikükkel összemérhetetlen, akkor a tagok is összemérhetetlenek (X. 16.). Az *AB* és *BC* közötti téglalap racionális, *AC* négyzete tehát irracionális (X. 13.), *AC* tehát irracionális, mégpedig nevezzük első mediálapotoménak.

F.: X. 80., 92., 98., 104.

X. 75. Tétel

Ha egy mediális szakaszból kivonunk egy vele csak négyzetesen összemérhető mediálist, mely a teljes szakasszal mediális téglalapot fog közre, akkor a maradék irracionális, mégpedig nevezzük második mediálapotoménak.

Vonjuk ki ugyanis az *AB* mediálisból a *CB* mediálist, mely csak négyzetesen összemérhető a teljes *AB*-vel és a teljes *AB*-vel mediális téglalapot fog közre (X. 28. vagy 32.). Azt állítom, hogy a maradék *AC* irracionális, mégpedig nevezzük második mediálapotoménak.



Vegyük ugyanis a *DI* racionálist, és illesszünk *DI*-hez egy *AB* és *BC* négyzetösszegével egyenlő *DG* szélességű *DE*, és egy, az *AB* és *BC* közötti téglalap kétszeresével egyenlő *DF* szélességű *DH* téglalapot (I. 41., 44.). Ekkor a maradék *FE* egyenlő *AC* négyzetével (II. 7.). Minthogy *AB*, illetve *BC* négyzete mediálisok és összemérhetők, *DE* is mediális (X. 15., 23. K.). A *DI* racionálishoz illesztve *DG* a szélessége, *DG* tehát racionális és lineárisan összemérhetetlen *DI*-vel (X. 22.). Ismét, minthogy az *AB* és *BC* közötti téglalap mediális, az *AB* és *BC* közötti téglalap kétszerese is mediális (X. 6., 23. K.); s egyenlő *DH*-val, tehát *DH* is mediális. A *DI* racionálishoz illesztve *DF* a szélessége, *DF* tehát racionális és lineárisan összemérhetetlen *DI*-vel (X. 22.). Minthogy *AB* és *BC* csak négyzetesen összemérhetők, *AB* lineárisan összemérhetetlen *BC*-vel, tehát *AB* négyzete is összemérhetetlen az *AB* és *BC* közötti téglalappal (X. 22. L., 11.). *AB* négyzetével viszont összemérhető *AB* és *BC* négyzetösszege (X. 15.), az *AB* és *BC* közötti téglalappal pedig összemérhető az *AB* és *BC* közötti téglalap kétszerese (X. 6.), az *AB* és *BC* közötti téglalap kétszerese tehát összemérhetetlen *AB* és *BC* négyzetösszegével (X. 13.). *AB* és *BC* négyzetösszegével egyenlő *DE*, az *AB* és *BC* közötti téglalap kétszeresével pedig *DH*, *DE* tehát összemérhetetlen *DH*-val. Amint viszont *DE* a *DH*-hoz, úgy aránylik *GD* a *DF*-hez (VI. 1.), *GD* tehát összemérhetetlen *DF*-fel (X. 11.). Mindketten racionálisok, *GD* és *DF* tehát csak négyzetesen összemérhető racionálisok, *FD* tehát apotomé. *DI* racionális, a racionális és irracionális (X. 73.) szakasz által közrefogott téglalap viszont irracionális, és a szakasz, melynek négyzetértéke, irracionális (X. 20.). *FE* az *AC* négyzetértéke, *AC* tehát irracionális, mégpedig nevezzük második mediálapotoménak. Éppen ezt kellett megmutatni.

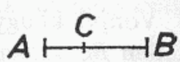
F.: X. 81., 93., 99., 104.

X. 76. Tétel

Ha egy szakaszból kivonunk egy vele négyzetesen összemérhetetlen szakaszt, melynek a teljes szakasszal vett négyzetösszege racionális és mediális téglalapot fog közre vele, akkor a maradék irracionális, mégpedig nevezzük minornak.

Vonjuk ki ugyanis az *AB* szakaszból a vele négyzetesen összemérhetetlen *BC* szakaszt, mely teljesíti a feltételeket (X. 33.). Azt állítom, hogy a maradék *AC* irracionális, ún. minor.

Minthogy ugyanis *AB* és *BC* négyzetösszege racionális, az *AB* és *BC* közötti téglalap kétszerese viszont irracionális (X. 6., 13.), *AB* és *BC* négyzetösszege összemérhetetlen az *AB* és *BC* közötti téglalap kétszeresével (X. 13.), és fölforgatva, a maradék *AC* négyzettel (II. 7.) összemérhetetlen *AB* és *BC* négyzetösszege (X. 16.). *AB* és *BC* négyzetösszege racionális, *AC* négyzete tehát irracionális (X. 13.), *AC* tehát irracionális, mégpedig nevezzük minornak. Éppen ezt kellett megmutatni.

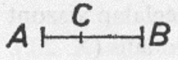


F.: X. 82., 94., 100., 105.; XIII. 11.

X. 77. Tétel

Ha egy szakaszból kivonunk egy vele négyzetesen összemérhetetlen szakaszt, melynek a teljes szakasszal vett négyzetösszege mediális *és a vele közrefogott téglalap kétszerese racionális, akkor a maradék irracionális, mégpedig nevezzük négyzetértékben mediális mínusz racionálisnak.*

Vonjuk ki ugyanis az *AB* szakaszból a vele négyzetesen összemérhetetlen *BC* szakaszt, mely teljesíti a feltételeket (X. 34.). Azt állítom, hogy a maradék *AC* irracionális, neve mint fönt.



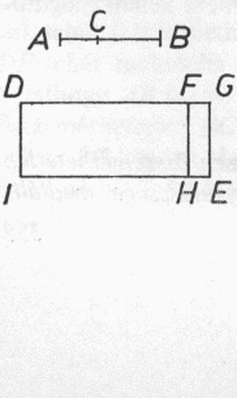
Minthogy ugyanis *AB* és *BC* négyzetösszege mediális, az *AB* és *BC* közötti téglalap kétszerese viszont irracionális, *AB* és *BC* négyzetösszege összemérhetetlen az *AB* és *BC* közötti téglalap kétszeresével (X. 13.), tehát a maradék *AC* négyzet (II. 7.) is összemérhetetlen az *AB* és *BC* közötti téglalap kétszeresével (X. 16.). Az *AB* és *BC* közötti téglalap kétszerese racionális, *AC* négyzete tehát irracionális (X. 13.), *AC* tehát irracionális, mégpedig nevezzük négyzetértékben mediális mínusz racionálisnak. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: X. 83., 95., 101., 106., 108.

X. 78. Tétel

Ha egy szakaszból kivonunk egy vele négyzetesen összemérhetetlen szakaszt, melynek mind a teljes szakasszal vett négyzetösszege mediális, mind a vele közrefogott téglalap kétszerese mediális, és a négyzetösszegük összemérhetetlen az általuk közrefogott téglalap kétszeresével, akkor a maradék irracionális, mégpedig nevezzük négyzetértékben mediális mínusz mediálisnak.

Vonjuk ki ugyanis az *AB* szakaszból a vele négyzetesen összemérhetetlen *BC* szakaszt, mely teljesíti a feltételeket (X. 35.). Azt állítom, hogy a maradék *AC* irracionális, ún. négyzetértékben mediális mínusz mediális.



Vegyük ugyanis a *DI* racionálist, illesszünk *DI*-hez egy *AB* és *BC* négyzetösszegével egyenlő *DG* szélességű *DE* téglalapot, és vonjunk le belőle egy, az *AB* és *BC* közötti téglalap kétszeresével egyenlő [*DF* szélességű] *DH* téglalapot (I. 41., 44.). Ekkor a maradék *FE* egyenlő *AC* négyzetével (II. 7.), úgyhogy *FE AC* négyzetértéke. Minthogy *AB* és *BC* négyzetösszege mediális és egyenlő *DE*-vel, *DE* mediális. A *DI* racionálishoz illesztve *DG* a szélessége, *DG* tehát racionális és lineárisan összemérhetetlen *DI*-vel (X. 22.). Ismét, minthogy az *AB* és *BC* közötti téglalap kétszerese mediális és egyenlő *DH*-val, *DH* mediális. A *DI* racionálishoz illesztve *DF* a szélessége, tehát *DF* is racionális és lineárisan összemérhetetlen *DI*-vel (X. 22.). Minthogy *AB* és *BC* négyzetösszege összemérhetetlen az *AB* és *BC* közötti téglalap kétszeresével, *DE* is összemérhetetlen *DH*-val. Amint viszont *DE* *DH*-hoz, úgy aránylik *DG* a *DF*-hez (VI. 1.), *DG* tehát összemérhetetlen *DF*-fel (X. 11.). Mindketten racionálisok, *GD* és *DF* tehát csak négyzetesen összemérhető racionálisok, *FG* tehát apotomé. *FH* racionális, a racionális és apotomé által közrefogott téglalap viszont irracionális (X. 73., 20.), és a szakasz, melynek négyzetértéke, irracionális. *FE* az *AC* négyzetértéke, *AC* tehát irracionális, mégpedig nevezzük négyzetértékben mediális mínusz mediálisnak. Éppen ezt kellett megmutatni.

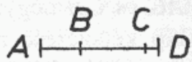
F.: X. 84., 96., 102., 107.

X. 79. Tétel

Apotoméhoz [csak] egy olyan racionális szakasz illik, mely csak négyzetesen összemérhető az összeggel.

Legyen *AB* egy apotomé, és illeszkedjék hozzá *BC*. *AC* és *CB* tehát csak négyzetesen összemérhető racionálisok (X. 12.). Azt állítom, hogy *AB*-hez nem illeszkedik más olyan racionális szakasz, mely csak négyzetesen összemérhető az összeggel.

Tegyük föl ugyanis, hogy illeszkedik egy *BD*. *AD* és *DB* tehát szintén csak négyzetesen összemérhető racionálisok. Minthogy *AD* és *DB* négyzetösszege annyival nagyobb az *AD* és *DB* közötti téglalap kétszeresénél, amenynyivel *AC* és *CB* négyzetösszege az *AC* és *CB* közötti téglalap kétszeresénél – hiszen mind a kettő ugyanazzal az *AB* négyzettel nagyobb (II. 7.) –, fölcserélve tehát, *AD* és *DB* négyzetösszege annyival nagyobb *AC* és *CB* négyzetösszegénél, amennyivel az *AD* és *DB* közötti téglalap kétszerese az *AC* és *CB* közötti téglalap kétszereséénél. *AD* és *DB* négyzetösszege racionális területtel nagyobb *AC* és *CB* négyzetösszegénél – hiszen mind a kettő racionális (X. 15., 12.) –,



tehát az AD és DB közötti téglalap kétszerese is racionális területtel nagyobb az AC és CB közötti téglalap kétszeresénél, ami lehetetlen, hiszen mind a kettő mediális (X. 6., 23. K.) és két mediális felület különbsége nem lehet racionális (X. 26.). AB-hez tehát nem illeszkedik más olyan racionális, mely csak négyzetesen összemérhető az összeggel.

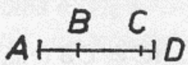
Apotoméhoz tehát egyetlenegy olyan racionális illeszkedik, mely csak négyzetesen összemérhető az összeggel. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: X. 81., 84.

X. 80. Tétel

Első mediálapotoméhoz csak egy olyan mediális szakasz illeszkedik, mely csak négyzetesen összemérhető az összeggel és racionális téglalapot fog közre vele.

Legyen ugyanis AB egy első mediálapotomé, és illeszkedjék AB-hez BC. AC és CB tehát olyan, csak négyzetesen összemérhető mediálisok (X. 23.), melyek racionális téglalapot fognak közre. Azt állítom, hogy AB-hez nem illeszkedik más olyan mediális, mely csak négyzetesen összemérhető az összeggel és racionális téglalapot fog közre vele.



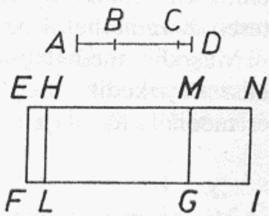
Tegyük föl ugyanis, hogy DB is illeszkedik hozzá. AD és DB tehát olyan, csak négyzetesen összemérhető mediálisok (ua.), melyek racionális téglalapot fognak közre. Minthogy AD és DB négyzetösszege annyival nagyobb az AD és DB közötti téglalap kétszeresénél, amenynyivel AC és CB négyzetösszege az AC és CB közötti téglalap kétszeresénél – hiszen [ismét] ugyanazzal az AB négyzettel nagyobbak (II. 7.) –, fölcserélve tehát, AD és DB négyzetösszege annyival nagyobb AC és CB négyzetösszegénél, amennyivel az AD és DB közötti téglalap kétszerese nagyobb az AC és CB közötti téglalap kétszeresénél. Az AD és DB közötti téglalap kétszerese racionális területtel nagyobb az AC és CB közötti téglalap kétszeresénél – hiszen mind a kettő racionális (X. 6., 12.) –, tehát AD és DB négyzetösszege is racionális területtel nagyobb AC és CB négyzetösszegénél, ami lehetetlen, hiszen mind a kettő mediális (X. 15., 23. K.), és két mediális felület különbsége nem lehet racionális (X. 26.).

Első mediálapotoméhoz tehát csak egy olyan mediális szakasz illeszkedik, mely csak négyzetesen összemérhető az összeggel és racionális téglalapot fog közre vele. Éppen ezt kellett megmutatni.

X. 81. Tétel

Második mediálapotoméhoz csak egy olyan mediális szakasz illeszkedik, mely csak négyzetesen összemérhető az összeggel és mediális téglalapot fog közre vele.

Legyen *AB* egy második mediálapotomé, és illeszkedjék *AB*-hez *BC*. *AC* és *CB* tehát olyan, csak négyzetesen összemérhető mediálisok (X. 23.), melyek mediális téglalapot fognak közre. Azt állítom, hogy *AB*-hez nem illeszkedik más olyan mediális, mely csak négyzetesen összemérhető az összeggel, és mediális téglalapot fog közre vele.



Tegyük föl ugyanis, hogy *BD* is így illeszkedik hozzá. *AD* és *DB* tehát szintén olyan, csak négyzetesen összemérhető mediálisok (ua.), melyek mediális téglalapot fognak közre. Vegyük az *EF* racionálist, illesszünk *EF*-hez egy *AC* és *CB* négyzetösszegével egyenlő *EM* szélességű *EG* téglalapot, és vonjunk le belőle egy, az *AC* és *CB* közötti téglalap kétszeresével egyenlő *HM* szélességű *HG* téglalapot (I. 41., 44.). Ekkor a maradék *EL* egyenlő *AB* négyzetével (II. 7.), úgyhogy *EL* az *AB* négyzetértéke. Ismét, illesszünk *EF*-hez egy *AD* és *DB* négyzetösszegével egyenlő *EN* szélességű *EI* téglalapot. *EL* egyenlő *AB* négyzetével, tehát a maradék *HI* egyenlő az *AD* és *DB* közötti téglalap kétszeresével (II. 7.). Minthogy *AC* és *CB* mediálisok, *AC* és *CB* négyzetösszege is mediális (X. 15., 23. K.), s egyenlő *EG*-vel, tehát *EG* is mediális. Az *EF* racionálishoz illesztve szélessége *EM*, *EM* tehát racionális és lineárisan összemérhetetlen *EF*-fel (X. 22.). Ismét, minthogy az *AC* és *CB* közötti téglalap mediális, az *AC* és *CB* közötti téglalap kétszerese is mediális (X. 6., 23. K.), s egyenlő *HG*-vel, tehát *HG* is mediális. Az *EF* racionális mellé illesztve szélessége *HM*, *HM* tehát racionális és lineárisan összemérhetetlen *EF*-fel (X. 22.). Minthogy *AC* és *CB* csak négyzetesen összemérhetők, *AC* lineárisan összemérhetetlen *CB*-vel. Amint viszont *AC* a *CB*-hez, úgy aránylik *AC* négyzete az *AC* és *CB* közötti téglalaphoz (X. 22. L.), *AC* négyzete tehát összemérhetetlen az AC és CB közötti téglalappal (X. 11.). AC négyzetével összemérhető AC és CB négyzetösszege (X. 15.), az AC és CB közötti téglalappal pedig összemérhető az AC és CB közötti téglalap kétszerese (X. 6.), AC és CB négyzetösszege tehát összemérhetetlen az AC és CB közötti téglalap kétszeresével (X. 13.). AC és CB négyzetösszegével egyenlő EG, az AC és CB közötti téglalap kétszeresével pedig egyenlő GH, EG tehát összemérhetetlen HG-vel. Amint viszont EG a HG-hez, úgy aránylik EM a HM-hez (VI. 1.), EM tehát lineárisan összemérhetetlen MH-val (X. 11.). Mindkettő racionális, EM és MH tehát csak négyzetesen összemérhető racionálisok, EH tehát apotomé és HM illeszkedik hozzá. Hasonlóképp mutathatnánk meg, hogy HN is illeszkedik hozzá. Egy apotoméhoz tehát különböző olyan szakaszok illeszkednek, melyek csak négyzetesen összemérhetők az összeggel, ami lehetetlen (X. 79.).

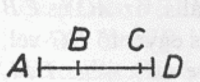
Második mediálapotoméhoz tehát csak egy olyan mediális szakasz illeszkedik, mely csak négyzetesen összemérhető az összeggel és mediális téglalapot fog közre vele. Éppen ezt kellett megmutatni.

X. 82. Tétel

Minorhoz csak egy olyan szakasz illeszkedik, mely négyzetesen összemérhetetlen az összeggel és az összeggel vett négyzetösszege racionális, a vele közrefogott téglalap kétszerese pedig mediális.

Legyen AB egy minor, és illeszkedjék AB-hez BC. AC és CB tehát olyan négyzetesen összemérhetetlen szakaszok, melyek négyzetösszege racionális, az általuk közrefogott téglalap kétszerese pedig mediális. Azt állítom, hogy AB-hez nem illeszkedik más, e feltételeket teljesítő szakasz.

Tegyük föl ugyanis, hogy illeszkedik egy BD. AD és DB tehát szintén olyan négyzetesen összemérhetetlen szakaszok, melyek teljesítik a föntieket. Minthogy AD és DB négyzetösszege annyival nagyobb AC és CB négyzetösszegénél, amennyivel az AD és DB közötti téglalap kétszerese nagyobb az AC és CB közötti téglalap kétszeresénél (II. 7.) és AD és DB négyzetösszege racionális területtel nagyobb AC és CB négyzetösszegénél – hiszen mind a kettő racionális –, tehát az AD és DB közötti téglalap kétszerese is racionális területtel



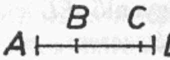
nagyobb az AC és CB közötti téglalap kétszeresénél, ami lehetetlen (X. 26.), mert mind a kettő mediális.

Minorhoz tehát csak egy olyan szakasz illeszkedik, mely négyzetesen összemérhetetlen az összeggel és a vele vett négyzetösszege racionális, a vele közrefogott téglalap kétszerese pedig mediális. Éppen ezt kellett megmutatni.

X. 83. Tétel

Négyzetértékben mediális mínusz racionálishoz csak egy olyan szakasz illeszkedik, mely négyzetesen összemérhetetlen az összeggel és az összeggel vett négyzetösszege mediális, a vele közrefogott téglalap kétszerese pedig racionális.

Legyen AB egy négyzetértékben mediális mínusz racionális, és illeszkedjék AB-hez BC. AC és CB tehát olyan négyzetesen összemérhetetlen szakaszok, melyek teljesítik a feltételeket. Azt állítom, hogy AB-hez másik ugyanezeket a feltételeket kielégítő szakasz nem illeszkedik. Tegyük föl ugyanis, hogy illeszkedik egy BD. AD és DB tehát szintén olyan négyzetesen összemérhetetlen szakaszok, melyek kielégítik a feltételeket. Minthogy – az előbbiek mintájára – AD és DB négyzetösszege annyival nagyobb AC és CB négyzetösszegénél, amennyivel

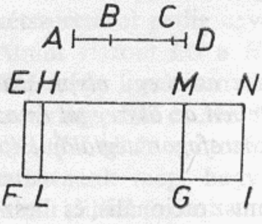


az AD és DB közötti téglalap kétszerese nagyobb az AC és CB közötti téglalap kétszeresénél (II. 7.), és az AD és DB közötti téglalap kétszerese racionális területtel nagyobb az AC és CB közötti téglalap kétszeresénél – hiszen mind a kettő racionális –, tehát AD és DB négyzetösszege szintén racionális területtel nagyobb AC és CB négyzetösszegénél, ami lehetetlen (X. 26.), mert mind a kettő mediális. Nem illeszkedik tehát AB-hez más olyan szakasz, mely négyzetesen összemérhetetlen az összeggel és az összeggel kielégíti a föntieket. Csak egy illeszkedik tehát. Éppen ezt kellett megmutatni.

X. 84. Tétel

Négyzetértékben mediális mínusz mediálishoz egyetlenegy olyan szakasz illeszkedik, mely négyzetesen összemérhetetlen az összeggel, és mind az összeggel vett négyzetösszege, mind az azzal közrefogott téglalap kétszerese mediális, és összemérhetetlen a négyzetösszeggel.

Legyen *AB* egy négyzetértékben mediális mínusz mediális, és illesz-kedjék hozzá *BC*. *AC* és *CB* tehát olyan, négyzetesen összemérhetetlen szakaszok, melyek kielégítik a föntieket. Azt állítom, hogy *AB*-hez nem illeszkedik más, a föntieket kielégítő szakasz.



Tegyük föl ugyanis, hogy illeszkedik egy *BD*, úgyhogy *AD* és *DB* is olyan, négyzetesen összemérhetetlen szakaszok, hogy mind *AD* és *DB* négyzetösszege, mind az *AD* és *DB* közötti téglalap kétszerese mediális, és *AD* és *DB* négyzetösszege összemérhetetlen az *AD* és *DB* közötti téglalap kétszeresével. Vegyük az *EF* racionálist, és illesszünk *EF*-hez egy *AC* és *CB* négyzetösszegével egyenlő *EM* szélességű *EG* és egy, az *AC* és *CB* közötti téglalap kétszeresével egyenlő *HM* szélességű *HG* téglalapot (I. 41., 44.). Ekkor a maradék *AB* négyzet egyenlő *EL*-lel (II. 7.), *EL* tehát *AB* négyzetértéke. Ismét, illesszünk *EF*-hez egy *AD* és *DB* négyzetösszegével egyenlő *EN* szélességű *EI* téglalapot. *AB* négyzete egyenlő *EL*-lel, tehát a maradék, az *AD* és *DB* közötti téglalap kétszerese, egyenlő *HI*-vel. Minthogy *AC* és *CB* négyzetösszege mediális és egyenlő *EG*-vel, *EG* is mediális. Az *EF* racionálishoz illesztve szélessége *EM*, *EM* tehát racionális és lineárisan összemérhetetlen *EF*-fel (X. 22.). Ismét, minthogy az *AC* és *CB* közötti téglalap kétszerese mediális és egyenlő *HG*-vel, *HG* is mediális. Az *EF* racionálishoz illesztve szélessége *HM*, *HM* tehát racionális és lineárisan összemérhetetlen *EF*-fel. Minthogy *AC* és *CB* négyzetösszege összemérhetetlen az *AC* és *CB* közötti téglalap kétszeresével, *EG* is összemérhetetlen *HG*-vel, tehát *EM* lineárisan összemérhetetlen *MH*-val (VI. 1., X. 11.). Mind a kettő racionális, *EM* és *MH* tehát csak négyzetesen összemérhető racionálisok, *EH* tehát apotomé és *HM* illeszkedik hozzá. Hasonlóképp mutathatnánk meg, hogy *EH* ismét apotomé és *HN* illeszkedik hozzá. Egy apotoméhoz tehát különböző olyan racionálisok illeszkednek, melyek csak négyzetesen összemérhetők az összeggel, amiről kimutattuk, hogy lehetetlen (X. 79.). *AB*-hez tehát nem illeszkedik másik szakasz.

AB-hez tehát csak egy olyan szakasz illeszkedik, mely négyzetesen összemérhetetlen az összeggel, mind az összeggel vett négyzetösszege, mind az azzal közrefogott téglalap kétszerese mediális, és a négyzetösszeg összemérhetetlen a téglalap kétszeresével. Éppen ezt kellett megmutatni.

Definíciók. Harmadik rész

3.1. Legyen adva a racionális és egy apotomé. Ha a teljes szakasz négyzetértéke egy vele lineárisan összemérhető szakasz négyzetével nagyobb az (apotoméhoz) illeszkedő szakaszénál, és a teljes szakasz lineárisan összemérhető az adott racionálissal, akkor első apotoméról beszélünk.

3.2. Ha az illeszkedő szakasz lineárisan összemérhető az adott racionálissal, és a teljes szakasz négyzetértéke egy vele összemérhető szakasz négyzetével nagyobb az illeszkedő szakaszénál, akkor második apotoméról beszélünk.

3.3. Ha egyik sem lineárisan összemérhető az adott racionálissal, és a teljes szakasz négyzetértéke egy vele összemérhető szakasz négyzetével nagyobb az illeszkedő szakaszénál, akkor harmadik apotoméról beszélünk.

3.4. Másrészt, ha a teljes szakasz négyzetértéke egy vele [lineárisan] összemérhetetlen szakasz négyzetével nagyobb az illeszkedő szakaszénál, akkor ha a teljes szakasz lineárisan összemérhető az adott racionálissal, negyedik apotoméról beszélünk.

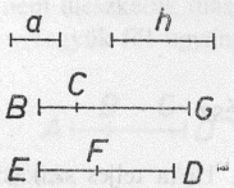
3.5. Ha az illeszkedő szakasz, ötödikről.

3.6. Ha pedig egyik sem, hatodikról.

X. 85. Tétel

Keressünk első apotomét!

Vegyük az a racionálist, és legyen BG lineárisan összemérhető a-val. Tehát BG is racionális. Vegyünk két négyzetszámot, DE-t és EF-et, melyek különbsége, FD, nem négyzetszám (X. 29. 1. L.). ED tehát nem úgy aránylik DF-hez, mint négyzetszám négyzetszámhoz (VIII. 24.). Arányuljék amint ED a DF-hez, úgy BG négyzete GC négyzetéhez (X. 6. K.). *BG* négyzete tehát összemérhető *GC* négyzetével (X. 6.). *BG* négyzete racionális, tehát *GC* négyzete is racionális (X. 12.), tehát *GC* is racionális. Minthogy *ED* nem úgy aránylik *DF*-hez, mint négyzetszám négyzetszámhoz, *BG* négyzete sem úgy aránylik *GC* négyzetéhez, mint négyzetszám négyzetszámhoz, *BG* tehát lineárisan összemérhetetlen *GC*-vel (X. 9.). Mind a kettő racionális, *BG* és *GC* tehát csak négyzetesen összemérhető racionálisok, *BC* tehát apotomé.



Azt is állítom, hogy első.

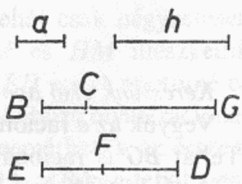
Legyen ugyanis *h* négyzete az, amivel *BG* négyzete nagyobb *GC* négyzeténél (X. 14. L.). Minthogy *BG* négyzete úgy aránylik *GC* négyzetéhez, mint *ED* az *FD*-hez, fölforgatva *GB* négyzete úgy aránylik *h* négyzetéhez, mint *DE* az *EF*-hez (V. 19. K.). *DE* úgy aránylik *EF*-hez, mint négyzetszám négyzetszámhoz – hiszen mind a kettő négyzetszám –, tehát *GB* négyzete is úgy aránylik *h* négyzetéhez, mint négyzetszám négyzetszámhoz, *BG* tehát lineárisan összemérhető *h*-val (X. 9.). *BG* négyzetértéke *h* négyzetével nagyobb *GC*-énél, *BG* négyzetértéke tehát egy vele lineárisan összemérhető szakasz négyzetével nagyobb *GC*-énél. A teljes szakasz, *BG*, lineárisan összemérhető az adott racionálissal, *a*-val, *BC* tehát első apotomé.

Találtunk tehát első apotomét, *BC*-t. Éppen ezt kellett keresni.

X. 86. Tétel

Keressünk második apotomét!

Vegyük az *a* racionálist és az *a*-val lineárisan összemérhető *GC*-t. *GC* tehát racionális. Vegyünk két négyzetszámot, *DE*-t és *EF*-et, melyek különbsége, *DF*, ne legyen négyzetszám (X. 29. 1. L.). Arányuljék amint *FD* a *DE*-hez, úgy *CG* négyzete *GB* négyzetéhez (X. 6. K.). *CG* négyzete tehát összemérhető *GB* négyzetével (X. 6.). *GC* négyzete racionális, tehát *GB* négyzete is racionális (X. 12.), tehát *BG* racionális. Minthogy *GC* négyzete nem úgy aránylik *GB* négyzetéhez, mint négyzetszám négyzetszámhoz, *CG* lineárisan összemérhetetlen *GB*-vel (X. 9.). Mind a kettő



racionális, *CG* és *GB* tehát csak négyzetesen összemérhető racionálisok, *BC* tehát apotomé.

Azt is állítom, hogy második.

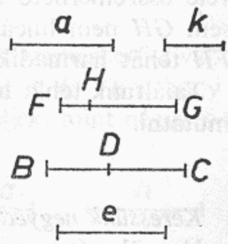
Legyen ugyanis *h* négyzete az, amivel *BG* négyzete nagyobb *GC* négyzeténél (X. 14. L.). Minthogy az *ED* szám úgy aránylik a *DF* számhoz, mint *BG* négyzete *GC* négyzetéhez, fölforgatva *DE* úgy aránylik *EF*-hez, mint *BG* négyzete *h* négyzetéhez (V. 19. K.). Mind *DE*, mind *EF* négyzetszám, *BG* négyzete tehát úgy aránylik *h* négyzetéhez, mint négyzetszám négyzetszámhoz, *BG* tehát lineárisan összemérhető *h*-val (X. 9.). *BG* négyzetértéke *h* négyzetével nagyobb *GC*-énél, és az illeszkedő szakasz, *CG*, összemérhető az adott *a* racionálissal, *BC* tehát második apotomé.

Találtunk tehát második apotomét, *BC*-t. Éppen ezt kellett megmutatni.

X. 87. Tétel

Keressünk harmadik apotomét!

Vegyük az *a* racionálist, és vegyünk három számot, *e*-t, *BC*-t és *CD*-t, melyek nem úgy aránylanak egymáshoz, mint négyzetszám négyzetszámhoz, *CB* viszont úgy aránylik *BD*-hez, mint négyzetszám négyzetszámhoz (X. 29. 1. L., VIII. 24.), és arányuljék amint *e* a *BC*-hez, úgy *a* négyzete *FG* négyzetéhez, amint pedig *BC* a *CD*-hez, úgy *FG* négyzete *GH* négyzetéhez (X. 6. K.). Minthogy *a* négyzete úgy aránylik *FG* négyzetéhez, mint *e* a *BC*-hez, *a* négyzete összemérhető *FG* négyzetével (X. 6.). *a* négyzete racionális, tehát *FG* négyzete is racionális, tehát *FG* racionális. Minthogy *e* nem úgy aránylik *BC*-hez, mint négyzetszám négyzetszámhoz, *a* négyzete sem úgy aránylik *FG* négyzetéhez, mint négyzetszám négyzetszámhoz, *a* tehát lineárisan összemérhetetlen *FG*-vel (X. 9.). Ismét, minthogy *FG* négyzete úgy aránylik *GH* négyzetéhez, mint *BC* a *CD*-hez, *FG* négyzete összemérhető *GH* négyzetével. *FG* négyzete racionális, tehát *GH* négyzete is racionális (X. 12.), tehát *GH* racionális. Minthogy *BC* nem úgy aránylik *CD*-hez, mint négyzetszám négyzetszámhoz, *FG* négyzete sem úgy



aránylik GH négyzetéhez, mint négyzetszám négyzetszámhoz, FG tehát lineárisan összemérhetetlen GH-val. Mind a kettő racionális, FG és GH tehát csak négyzetesen összemérhető racionálisok, FH tehát apotomé.

Azt is állítom, hogy harmadik.

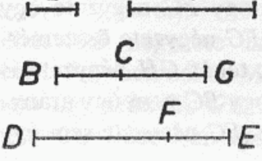
Mivel amint e a BC-hez, úgy aránylik a négyzete FG négyzetéhez, amint pedig BC a CD-hez, úgy FG négyzete HG négyzetéhez, egyenlő sok tagon át tehát amint e a CD-hez, úgy a négyzete HG négyzetéhez (V. 22.). e nem úgy aránylik CD-hez, mint négyzetszám négyzetszámhoz, tehát a négyzete sem úgy aránylik GH négyzetéhez, mint négyzetszám négyzetszámhoz, a tehát lineárisan összemérhetetlen GH-val (X. 9.). Tehát sem FG, sem GH nem lineárisan összemérhető az adott racionálissal, a-val. Legyen k négyzete az, amivel FG négyzete nagyobb GH négyzeténél (X. 14. L.). Minthogy FG négyzete úgy aránylik GH négyzetéhez, mint BC a CD-hez, fölforgatva FG négyzete úgy aránylik k négyzetéhez, mint BC a BD-hez (V. 19. K.). BC viszont úgy aránylik BD-hez, mint négyzetszám négyzetszámhoz, tehát FG négyzete is úgy aránylik k négyzetéhez, mint négyzetszám négyzetszámhoz, FG tehát lineárisan összemérhető k-val (X. 9.), és FG négyzetértéke egy vele összemérhető szakasz négyzetével nagyobb GH-énál. Sem FG, sem GH nem lineárisan összemérhető az adott racionálissal, a-val, FH tehát harmadik apotomé.

Találtunk tehát harmadik apotomét, FH-t. Éppen ezt kellett megmutatni.

X. 88. Tétel

Keressünk negyedik apotomét!

Vegyük az a racionálist és az a-val lineárisan összemérhető BG-t. BG tehát racionális. Vegyünk úgy két számot, DF-et és FE-t, hogy a DE összeg sem DF-hez, sem EF-hez ne úgy arányuljék, mint négyzetszám négyzetszámhoz. Arányuljék amint DE az EF-hez, úgy BG négyzete GC négyzetéhez (X. 6. K.). BG négyzete tehát összemérhető GC négyzetével (X. 6.). BG négyzete racionális, tehát GC négyzete is racionális (X. 12.), tehát GC



racionális. Minthogy *DE* nem úgy aránylik *EF*-hez, mint négyzetszám négyzetszámhoz, *BG* négyzete sem úgy aránylik *GC* négyzetéhez, mint négyzetszám négyzetszámhoz, *BG* tehát lineárisan összemérhetetlen *GC*-vel (X. 9.). Mind a kettő racionális, *BG* és *GC* tehát csak négyzetesen összemérhető racionálisok, *BC* tehát apotomé.

[Azt is állítom, hogy negyedik.]

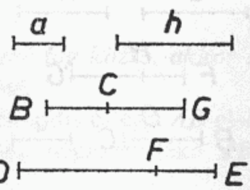
Legyen ugyanis *h* négyzete az, amivel *BG* négyzete nagyobb *GC* négyzeténél (X. 14. L.). Minthogy *BG* négyzete úgy aránylik *GC* négyzetéhez, mint *DE* az *EF*-hez, fölforgatva *GB* négyzete úgy aránylik *h* négyzetéhez, mint *ED* a *DF*-hez (V. 19. K.). *ED* nem úgy aránylik *DF*-hez, mint négyzetszám négyzetszámhoz, tehát *GB* négyzete sem úgy aránylik *h* négyzetéhez, mint négyzetszám négyzetszámhoz, *BG* tehát lineárisan összemérhetetlen *h*-val (X. 9.). *BG* négyzetértéke *h* négyzetével nagyobb *GC*-énél, *BG* négyzetértéke tehát egy vele összemérhetetlen szakasz négyzetével nagyobb *GC*-énél. A teljes *BG* lineárisan összemérhető az adott racionálissal, *a*-val, *BC* tehát negyedik apotomé.

Találtunk tehát negyedik apotomét. Éppen ezt kellett megmutatni.

X. 89. Tétel

Keressünk ötödik apotomét!

Vegyük az *a* racionálist, és legyen *CG* lineárisan összemérhető *a*-val. *CG* tehát racionális. Vegyünk úgy két számot, *DF*-et és *FE*-t, hogy ismét *DE* sem *DF*-hez, sem *FE*-hez ne úgy arányuljék, mint négyzetszám négyzetszámhoz, és arányuljék amint *FE* az *ED*-hez, úgy *CG* négyzete *GB* négyzetéhez (X. 6. K.). Ekkor *GB* négyzete is racionális (X. 6., 12.), tehát *GB* is racionális. Minthogy *BG* négyzete úgy aránylik *GC* négyzetéhez, mint *DE* az *EF*-hez, és *DE* nem úgy aránylik *EF*-hez, mint négyzetszám négyzetszámhoz, *BG* négyzete sem úgy aránylik *GC* négyzetéhez, mint négyzetszám négyzetszámhoz, *BG* tehát lineárisan összemérhetetlen *GC*-vel (X. 9.). Mind a kettő racionális, *BG* és *GC* tehát csak négyzetesen összemérhető racionálisok, *BC* tehát apotomé.



Azt is állítom, hogy ötödik.

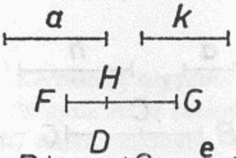
Legyen ugyanis *h* négyzete az, amivel *BG* négyzete nagyobb *GC* négyzeténél (X. 14. L.). Minthogy *DE* úgy aránylik *EF*-hez, mint *BG* négyzete *GC* négyzetéhez, fölforgatva *BG* négyzete úgy aránylik *h* négyzetéhez, mint *ED* a *DF*-hez (V. 19. K.). *ED* nem úgy aránylik *DF*-hez, mint négyzetszám négyzetszámhoz, tehát *BG* négyzete sem úgy aránylik *h* négyzetéhez, mint négyzetszám négyzetszámhoz, *BG* tehát lineárisan összemérhetetlen *h*-val (X. 9.). *BG* négyzetértéke *h* négyzetével nagyobb *GC*-énél, *GB* négyzetértéke tehát egy vele lineárisan összemérhetetlen szakasz négyzetével nagyobb *GC*-énél. Az illeszkedő *CG* lineárisan összemérhető az adott racionálissal, *a*-val, *BC* tehát ötödik apotomé.

Találtunk tehát ötödik apotomét, *BC*-t. Éppen ezt kellett megmutatni.

X. 90. Tétel

Keressünk hatodik apotomét!

Vegyük az *a* racionálist és három számot, *e*-t, *BC*-t és *CD*-t, melyek nem úgy aránylanak egymáshoz, mint négyzetszám négyzetszámhoz, továbbá *CB* a *BD*-hez sem úgy arányuljék, mint négyzetszám négyzetszámhoz. Arányuljék amint *e* a *BC*-hez, úgy *a* négyzete *FG* négyzetéhez, amint pedig *BC* a *CD*-hez, úgy *FG* négyzete *GH* négyzetéhez (X. 6. K.).



Minthogy *a* négyzete úgy aránylik *FG* négyzetéhez, mint *e* a *BC*-hez, *a* négyzete összemérhető *FG* négyzetével (X. 6.). *a* négyzete racionális, tehát *FG* négyzete is racionális, tehát *FG* is racionális. Minthogy *e* nem úgy aránylik *BC*-hez, mint négyzetszám négyzetszámhoz, *a* négyzete sem úgy aránylik *FG* négyzetéhez, mint négyzetszám négyzetszámhoz, *a* tehát lineárisan összemérhetetlen *FG*-vel (X. 9.). Ismét, minthogy *FG* négyzete úgy aránylik *GH* négyzetéhez, mint *BC* a *CD*-hez, *FG* négyzete összemérhető *GH* négyzetével. *FG* négyzete racionális, tehát *GH* négyzete is racionális (X. 12.), tehát *GH* is racionális. Minthogy *BC* nem úgy aránylik *CD*-hez, mint négyzetszám négyzetszámhoz, *FG* négyzete sem úgy aránylik *GH* négyzetéhez, mint négyzetszám négyzetszámhoz, FG tehát lineárisan összemérhetetlen GH-val. Mind a kettő racionális, FG és GH tehát csak négyzetesen összemérhető racionálisok, FH tehát apotomé.

Azt is állítom, hogy hatodik.

Mivel amint e a BC-hez, úgy aránylik a négyzete FG négyzetéhez, amint pedig BC a CD-hez, úgy FG négyzete GH négyzetéhez, egyenlő sok tagon át tehát amint e a CD-hez, úgy a négyzete GH négyzetéhez (V. 22.). e nem úgy aránylik CD-hez, mint négyzetszám négyzetszámhoz, tehát a négyzete sem úgy aránylik GH négyzetéhez, mint négyzetszám négyzetszámhoz, a tehát lineárisan összemérhetetlen GH-val (X. 9.). Tehát sem FG, sem GH nem lineárisan összemérhető az a racionálissal. Legyen k négyzete az, amivel FG négyzete nagyobb GH négyzeténél (X. 14. L.). Minthogy FG négyzete úgy aránylik GH négyzetéhez, mint BC a CD-hez, fölforgatva FG négyzete úgy aránylik k négyzetéhez, mint CB a BD-hez (V. 19. K.). CB viszont nem úgy aránylik BD-hez, mint négyzetszám négyzetszámhoz, tehát FG négyzete sem úgy aránylik k négyzetéhez, mint négyzetszám négyzetszámhoz, FG tehát lineárisan összemérhetetlen k-val (X. 9.). FG négyzetértéke k négyzetével nagyobb GH-énál, FG négyzetértéke tehát egy vele lineárisan összemérhetetlen szakasz négyzetével nagyobb GH-énál. Sem FG, sem GH nem lineárisan összemérhető az adott racionálissal, a-val, FH tehát hatodik apotomé.

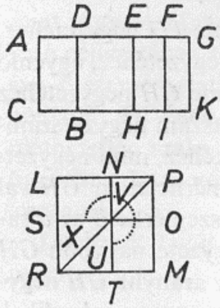
Találtunk tehát hatodik apotomét, FH-t. Éppen ezt kellett megmutatni.

X. 91. Tétel

Ha egy idomot a racionális és egy első apotomé fog közre, akkor a szakasz, melynek az idom négyzetértéke, apotomé.

Fogja ugyanis közre az AB idomot az AC racionális és egy AD első apotomé. Azt állítom, hogy a szakasz, melynek négyzetértéke AB, apotomé.

Miután AD első apotomé, illeszkedjék hát hozzá DG. Ekkor AG és GD csak négyzetesen összemérhető racionálisok, a teljes AG összemérhető az adott racionálissal, AC-vel, és AG négyzetértéke egy vele lineárisan összemérhető szakasz négyzetével nagyobb GD-énél, ha tehát DG négyzetének negyedrészével egyenlő paralelogrammát illesztünk *AG*-hez úgy, hogy egy négyzet marad fönn, akkor *AG* összemérhető darabokra bomlik (X. 17.). Legyen *E* a *DG* felezőpontja (I. 10.), és illesszünk *AG*-hez egy *EG* négyzetével egyenlő paralelogrammát



– legyen ez az *AF* és *FG* közötti – úgy, hogy egy négyzet maradjon fönn (VI. 28.). *AF* tehát összemérhető *FG*-vel. Húzzuk meg az *E*, *F*, illetve *G* pontokon át *AC*-vel párhuzamosan *EH*-t, *FI*-t, illetve *GK*-t (I. 31.).

Minthogy *AF* lineárisan összemérhető *FG*-vel, *AG* lineárisan összemérhető mind *AF*-fel, mind *FG*-vel (X. 15.). *AG* összemérhető *AC*-vel, tehát mind *AF*, mind *FG* lineárisan összemérhető *AC*-vel (X. 12.). *AC* racionális, tehát mind *AF*, mind *FG* racionális, úgyhogy mind *AI*, mind *FK* racionális (X. 19.). Minthogy *DE* lineárisan összemérhető *EG*-vel, *DG* is lineárisan összemérhető *DE*-vel és *EG*-vel (X. 15.). *DG* racionális és lineárisan összemérhetetlen *AC*-vel (X. 13.), *DE* és *EG* tehát racionális és lineárisan összemérhetetlen *AC*-vel (X. 12–13.), *DH* és *EK* tehát mediális.

Vegyünk egy *AI*-vel egyenlő *LM* négyzetet, és vonjunk le belőle úgy egy *FK*-val egyenlő *NO* négyzetet, hogy az *LPM* szögük közös legyen (II. 14.). Ekkor az *LM*, *NO* négyzetek ugyanazon átló mellett fekszenek (VI. 26.). Legyen *PR* az átlójuk, és rajzoljuk meg az ábrát. Minthogy az *AF* és *FG* közötti téglalap egyenlő *EG* négyzetével, *AF* úgy aránylik *EG*-hez, mint *EG* az *FG*-hez (VI. 17.). Amint viszont *AF* az *EG*-hez, úgy aránylik *AI* az *EK*-hoz, amint pedig *EG* az *FG*-hez, úgy *EK* a *KF*-hez (VI. 1.), *AI*-nek és *KF*-nek tehát középarányosa *EK* (V. 11.). *LM*-nek és *NO*-nak *MN* a középarányosa – mint föntebb megmutattuk (X. 54. L.) –, *AI* egyenlő az *LM* négyzettel és *KF* egyenlő *NO*-val, *MN* tehát egyenlő *EK*-val. *EK* egyenlő *DH*-val, *MN* pedig egyenlő *LO*-val (I. 43.), *DK* tehát egyenlő az *UVX* gnómón és *NO* összegével. *AK* egyenlő az *LM*, *NO* négyzetek összegével, az *AB* különbség tehát egyenlő *ST*-vel. *ST* az *LN* négyzete, *LN* négyzete tehát egyenlő *AB*-vel, azaz *AB* az *LN* négyzetértéke.

Azt állítom, hogy *LN* apotomé.

Minthogy *AI* és *FK* racionális és egyenlő *LM*-mel, illetve *NO*-val, *LM* és *NO*, azaz *LP*, illetve *PN* négyzete racionális, tehát *LP* és *PN* is racionális. Másrészt, minthogy *DH* mediális és egyenlő *LO*-val, *LO* is mediális. Minthogy *LO* mediális *NO* pedig racionális, *LO* összemérhetetlen *NO*-val (X. 13.). *LP* úgy aránylik *PN*-hez, mint *LO* az *NO*-hoz (VI. 1.), *LP* tehát lineárisan összemérhetetlen *PN*-nel (X. 11.). Mind a kettő racionális, *LP* és *PN* tehát csak négyzetesen összemérhető racionálisok, *LN* tehát apotomé. S négyzetértéke az *AB* idom, a szakasz tehát, melynek négyzetértéke az *AB* idom, apotomé.

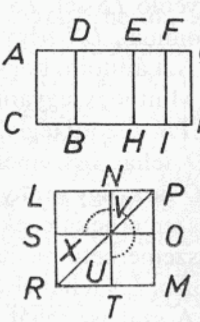
Ha tehát egy idomot egy racionális... stb.

F.: X. 108.

X. 92. Tétel

Ha egy idomot a racionális és egy második apotomé fog közre, akkor a szakasz, melynek az idom négyzetértéke, első mediálapotomé.

Fogja közre ugyanis az *AB* idomot az *AC* racionális és egy *AD* második apotomé. Azt állítom, hogy a szakasz, melynek négyzetértéke az *AB* idom, első mediálapotomé.



Illeszkedjék ugyanis *AD*-hez *DG*. Ekkor *AG* és *GD* csak négyzetesen összemérhető racionálisok, az illeszkedő *DG* összemérhető az adott *AC* racionálissal, és a teljes *AG* négyzetértéke egy vele összemérhető szakasz négyzetével nagyobb *GD*-énél. Minthogy *AG* négyzetértéke egy vele összemérhető szakasz négyzetével nagyobb *GD*-énél, ha *GD* négyzetének negyedrészével egyenlő paralelogrammát illesztünk *AG*-hez úgy, hogy egy négyzet marad fönn, akkor *AG* összemérhető darabokra bomlik (X. 17.). Legyen *E* a *DG* felezőpontja (I. 10.), és illesszünk *AG*-hez egy *EG* négyzetével egyenlő paralelogrammát – legyen ez az *AF* és *FG* közötti – úgy, hogy egy négyzet maradjon fönn (VI. 28.). *AF* tehát lineárisan összemérhető *FG*-vel és *AG* lineárisan összemérhető *AF*-fel és *FG*-vel (X. 15.). *AG* racionális és lineárisan összemérhetetlen *AC*-vel (X. 13.), *AF* és *FG* tehát szintén racionális és lineárisan összemérhetetlen *AC*-vel (ua.), *AI* és *FK* tehát mediális. Másrészt, minthogy *DE* összemérhető *EG*-

vel, *DG* is összemérhető *DE*-vel és *EG*-vel (X. 15.). *DG* lineárisan összemérhető *AC*-vel, [*DE* és *EG* tehát racionális és lineárisan összemérhető *AC*-vel (X. 12.)] *DH* és *EK* tehát racionális (X. 19.).

Szerkesszünk egy *AI*-vel egyenlő *LM* négyzetet, és vonjunk le belőle úgy egy *FK*-val egyenlő *NO* négyzetet, hogy az *LPM* szögük közös legyen (II. 14.). Ekkor az *LM*, *NO* négyzetek ugyanazon átló mellett fekszenek (VI. 26.). Legyen *PR* az átlójuk, és rajzoljuk meg az ábrát. Minthogy *AI* és *FK* mediális és egyenlő *LP*, illetve *PN* négyzetével, *LP* és *PN* négyzete is mediális, tehát *LP* és *PN* is mediálisok és négyzetesen összemérhetők (VI. 1., X. 11.). Minthogy az *AF* és *FG* közötti téglalap egyenlő *EG* négyzetével, *AF* úgy aránylik *EG*-hez, mint *EG* az *FG*-hez (VI. 17.). Amint viszont *AF* az *EG*-hez, úgy aránylik *AI* az *EK*-hoz, amint pedig *EG* az *FG*-hez, úgy *EK* az *FK*-hoz (VI. 1.), *AI*-nek és *FK*-nak tehát középarányosa *EK* (V. 11.). Az *LM*, *NO* négyzeteknek középarányosa *MN* (X. 54. L.), *AI* egyenlő *MN*-nel és *FK* az *NO*-val, tehát *MN* is egyenlő *EK*-val. *EK*-val egyenlő *DH*, *MN*-nel pedig egyenlő *LO* (I. 43.), a teljes *DK* tehát egyenlő az *UVX* gnómón és *NO* összegével. Minthogy a teljes *AK* egyenlő *LM* és *NO* összegével s ebből *DK* egyenlő az *UVX* gnómón és *NO* összegével, a maradék *AB* egyenlő *TS*-sel. *TS* az *LN* négyzete, *LN* négyzete tehát egyenlő az *AB* idommal, *LN* négyzetértéke tehát az *AB* idom.

Azt állítom, hogy *LN* első mediálapotomé.

Minthogy ugyanis *EK* racionális és egyenlő *LO*-val, *LO*, azaz az *LP* és *PN* közötti téglalap racionális. *NO*-ról megmutattuk, hogy mediális, *LO* tehát összemérhetetlen *NO*-val (X. 13.). Amint viszont *LO* az *NO*-hoz, úgy aránylik *LP* a *PN*-hez (VI. 1.), *LP* és *PN* tehát lineárisan összemérhetetlenek (X. 11.). *LP* és *PN* tehát olyan csak négyzetesen összemérhető mediális szakaszok, melyek racionális téglalapot fognak közre, *LN* tehát első mediálapotomé, s négyzetértéke az *AB* idom.

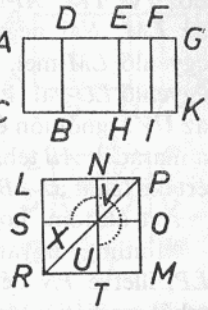
A szakasz tehát, melynek az *AB* idom négyzetértéke, első mediálapotomé. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: X. 109., 114.

X. 93. Tétel

Ha egy idomot a racionális és egy harmadik apotomé fog közre, akkor a szakasz, melynek az idom négyzetértéke, második mediálapotomé.

Fogja ugyanis közre az *AB* idomot az *AC* racionális és egy *AD* harmadik apotomé. Azt állítom, hogy a szakasz, melynek négyzetértéke az *AB* idom, második mediálapotomé.



Illeszkedjék ugyanis *AD*-hez *DG*. Ekkor *AG* és *GD* csak négyzetesen összemérhető racionálisok, sem *AG*, sem *GD* nem lineárisan összemérhető az adott *AC* racionálissal, és a teljes *AG* négyzetértéke egy vele összemérhető szakasz négyzetével nagyobb az illeszkedő *DG*-énél. Minthogy *AG* négyzetértéke egy vele összemérhető szakasz négyzetével nagyobb *GD*-énél, ha *DG* négyzetének negyedrészével egyenlő paralelogrammát illesztünk *AG*-hez úgy, hogy egy négyzet marad fönn, akkor *AG* összemérhető darabokra fog bomlani (X. 17.). Legyen hát *E* a *DG* felezőpontja (I. 10.) és illesszünk *AG*-hez egy *EG* négyzetével egyenlő paralelogrammát – legyen ez az *AF* és *FG* közötti – úgy, hogy egy négyzet maradjon fönn (VI. 28.). Húzzuk az *E*, *F*, illetve *G* pontokon át *AC*-vel párhuzamosan *EH*-t, *FI*-t, illetve *GK*-t (I. 31.). *AF* és *FG* tehát összemérhetők, tehát *AI* is összemérhető *FK*-val (VI. 1., X. 11.). Minthogy *AF* és *FG* lineárisan összemérhetők, *AG* lineárisan összemérhető *AF*-fel és *FG*-vel (X. 15.). *AG* racionális és lineárisan összemérhetetlen *AC*-vel, úgyhogy *AF* és *FG* is az (X. 13.). *AI* és *FK* tehát mediális. Másrészt, minthogy *DE* lineárisan összemérhető *EG*-vel, *DG* is lineárisan összemérhető *DE*-vel és *EG*-vel (X. 15.). *GD* racionális és lineárisan összemérhetetlen *AC*-vel, *DE* és *EG* is racionális tehát és lineárisan összemérhetetlen *AC*-vel, *DH* és *EK* tehát mediális. Minthogy *AG* és *GD* csak négyzetesen összemérhető, *AG* lineárisan összemérhetetlen *GD*-vel. *AG* lineárisan összemérhető *AF*-fel, *DG* pedig *EG*-vel, *AF* tehát lineárisan összemérhetetlen *EG*-vel (X. 13.). Amint viszont *AF* az *EG*-hez, úgy aránylik *AI* az *EK*-hoz (VI. 1.), *AI* tehát összemérhetetlen *EK*-val (X. 11.).

Szerkesszünk hát egy *AI*-vel egyenlő *LM* négyzetet, és vonjunk le belőle úgy egy *FK*-val egyenlő *NO* négyzetet, hogy az egyik szöge közös legyen *LM*-mel (II. 14.). Ekkor *LM* és *NO* ugyanazon átló mellett fekszenek (VI. 26.). Legyen *PR* egy átlójuk, és rajzoljuk meg az ábrát.

Minthogy az *AF* és *FG* közötti téglalap egyenlő *EG* négyzetével, *AF* úgy aránylik *EG*-hez, mint *EG* az *FG*-hez (VI. 17.). Amint viszont *AF* az *EG*-hez, úgy aránylik *AI* az *EK*-hoz, amint pedig *EG* az *FG*-hez, úgy *EK* az *FK*-hoz (VI. 1.), amint tehát *AI* az *EK*-hoz, úgy *EK* az *FK*-hoz (V. 11.), *AI*-nek és *FK*-nak tehát középarányosa *EK*. Másrészt az *LM*, *NO* négyzeteknek középarányosa *MN* (X. 54. L.) és *AI* egyenlő *LM*-mel, *FK* pedig *NO*-val, *EK* tehát egyenlő *MN*-nel. *MN* egyenlő *LO*-val (I. 43.), *EK* egyenlő *DH*-val, a teljes *DK* tehát egyenlő az *UVX* gnómón és *NO* összegével. *AK* egyenlő *LM* és *NO* összegével, a maradék *AB* tehát egyenlő *ST*-vel, azaz *LN* négyzetével, *LN* négyzetértéke tehát az *AB* idom.

Azt állítom, hogy *LN* második mediálapotomé.

Minthogy ugyanis megmutattuk, hogy *AI* és *FK* mediális és egyenlő *LP*, illetve *PN* négyzetével, *LP* és *PN* négyzete mediális, *LP* és *PN* tehát mediális. Minthogy *AI* összemérhető *FK*-val (VI. 1., X. 11.), *LP* négyzete is összemérhető *PN* négyzetével. Viszont, minthogy megmutattuk, hogy *AI* összemérhetetlen *EK*-val, *LM* is összemérhetetlen *MN*-nel, azaz *LP* négyzete az *LP* és *PN* közötti téglalappal, úgyhogy *LP* is összemérhetetlen *PN*-nel (X. 22. L., 11.), *LP* és *PN* tehát csak négyzetesen összemérhető mediálisok.

Azt is állítom, hogy mediális területet fognak közre.

Minthogy ugyanis megmutattuk, hogy *EK* mediális és egyenlő az *LP* és *PN* közötti téglalappal, az *LP* és *PN* közötti téglalap is mediális, úgyhogy *LP* és *PN* olyan, csak négyzetesen összemérhető mediálisok, melyek mediális téglalapot fognak közre, *LN* tehát második mediálapotomé; s négyzetértéke az *AB* idom.

A szakasz tehát, melynek négyzetértéke az *AB* idom, második mediálapotomé. Éppen ezt kellett megmutatni.

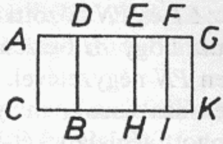
F.: X. 110.

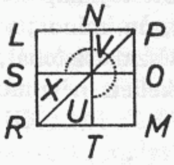
X. 94. Tétel

Ha egy idomot a racionális és egy negyedik apotomé fog közre, akkor a szakasz, melynek az idom négyzetértéke, minor.

Fogja közre ugyanis az *AB* idomot az *AC* racionális és egy *AD* negyedik apotomé. Azt állítom, hogy a szakasz, melynek négyzetértéke az *AB* idom, minor.

Illeszkedjék ugyanis *AD*-hez *DG*. Ekkor *AG* és *GD* csak négyzetesen összemérhető racionálisok, *AG* lineárisan összemérhető az adott *AC* racionálissal és a teljes *AG* négyzetértéke egy vele lineárisan összemérhetetlen szakasz négyzetével nagyobb az illeszkedő *DG*-énél. Minthogy *AG* négyzetértéke egy vele lineárisan összemérhetetlen szakasz négyzetével nagyobb *GD*-énél, ha *DG* négyzetének negyedrészével egyenlő paralelogrammát illesztünk *AG*-hez úgy, hogy egy négyzet marad fönn, akkor *AG* összemérhetetlen darabokra fog bomlani (X. 18.). Legyen hát *E* a *DG* felezőpontja (I. 10.), és illesszünk *AG*-hez egy *EG* négyzetével egyenlő paralelogrammát – legyen ez az *AF* és *FG* közötti – úgy, hogy egy négyzet maradjon fönn (VI. 28.).





AF tehát lineárisan összemérhetetlen *FG*-vel. Húzzuk *E*-n, *F*-en, illetve *G*-n át *AC*-vel és *BD*-vel párhuzamosan *EH*-t, *FI*-t, illetve *GK*-t (I. 31.). Minthogy *AG* racionális és lineárisan összemérhető *AC*-vel, a teljes *AK* is racionális (X. 19.). Másrészt, minthogy *DG* lineárisan összemérhetetlen *AC*-vel és mind a kettő racionális, *DK* mediális. Továbbá, minthogy *AF* lineárisan összemérhetetlen *FG*-vel, *AI* is összemérhetetlen *FK*-val (VI. 1., X. 11.). Szerkesszünk egy *AI*-vel egyenlő *LM* négyzetet, és vonjunk le belőle úgy egy *FK*-val egyenlő *NO* négyzetet, hogy az *LPM* szögük közös legyen (II. 14.). Ekkor az *LM*, *NO* négyzetek ugyanazon átló mellett fekszenek (VI. 26.). Legyen *PR* az átlójuk, és rajzoljuk meg az ábrát. Minthogy az *AF* és *FG* közötti téglalap egyenlő *EG* négyzetével, *AF* úgy aránylik *EG*-hez, mint *EG* az *FG*-hez (VI. 17.). Amint viszont *AF* az *EG*-hez, úgy aránylik *AI* az *EK*-hoz, amint pedig *EG* az *FG*-hez, úgy *EK* az *FK*-hoz (VI. 1.), *AI*-nek és *FK*-nak tehát középarányosa *EK*. Az *LM*, *NO* négyzeteknek középarányosa *MN* (X. 54. L.) és *AI* egyenlő *LM*-mel, *FK* pedig *NO*-val, *EK* tehát egyenlő *MN*-nel. *EK* egyenlő *DH*-val, *MN* egyenlő *LO*-val (I. 43.), a teljes *DK* tehát egyenlő az *UVX* gnómón és *NO* összegével. Minthogy a teljes *AK* egyenlő az *LM*, *NO* négyzetek összegével, s ebből *DK* egyenlő az *UVX* gnómón és az *NO* négyzet összegével, a maradék *AB* egyenlő *ST*-vel, azaz *LN* négyzetével, *LN* négyzetértéke tehát az *AB* idom.

Azt állítom, hogy *LN* irracionális, ún. minor.

Minthogy ugyanis *AK* racionális és egyenlő *LP* és *PN* négyzetösszegével, *LP* és *PN* négyzetösszege racionális. Másrészt, minthogy *DK* mediális és *DK* egyenlő az *LP* és *PN* közötti téglalap kétszeresével, az *LP* és *PN* közötti téglalap kétszerese mediális. Minthogy megmutattuk, hogy *AI* összemérhetetlen *FK*-val, *LP* négyzete is összemérhetetlen *PN* négyzetével. *LP* és *PN* tehát olyan négyzetesen összemérhetetlen szakaszok, melyek négyzetösszege racionális, az általuk közrefogott téglalap kétszerese pedig mediális, *LN* tehát irracionális (X. 76.), ún. minor; s az *AB* idom a négyzetértéke.

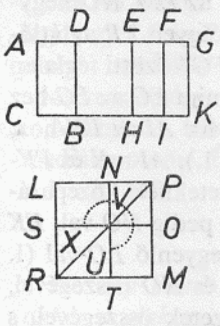
A szakasz tehát, melynek négyzetértéke az *AB* idom, minor. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: X. 108.; XIII. 11.

X. 95. Tétel

Ha egy idomot a racionális és egy ötödik apotomé fog közre, akkor a szakasz, melynek az idom négyzetértéke, négyzetértékben mediális mínusz racionális.

Fogja közre ugyanis az *AB* idomot az *AC* racionális és egy *AD* ötödik apotomé. Azt állítom, hogy a szakasz, melynek négyzetértéke az *AB* idom, négyzetértékben mediális mínusz racionális.



Illeszkedjék ugyanis *AD*-hez *DG*. Ekkor *AG* és *GD* csak négyzetesen összemérhető racionálisok, az illeszkedő *GD* lineárisan összemérhető az adott *AC* racionálissal és a teljes *AG* négyzetértéke egy vele összemérhetetlen szakasz négyzetével nagyobb az illeszkedő *DG*-énél. Ha tehát *DG* négyzetének negyedrészével egyenlő paralelogrammát illesztünk *AG*-hez úgy, hogy egy négyzet marad fönn, akkor *AG* összemérhetetlen darabokra fog bomlani (X. 18.). Legyen hát *E* a *DG* felezőpontja (I. 10.) és illesszünk *AG*-hez egy *EG* négyzetével egyenlő paralelogrammát – legyen ez az *AF* és *FG* közötti – úgy, hogy egy négyzet maradjon fönn (VI. 28.). *AF* tehát lineárisan összemérhetetlen *FG*-vel. Minthogy *AG* lineárisan összemérhetetlen *CA*-val és mind a kettő racionális, *AK* mediális. Másrészt, minthogy *DG* racionális és lineárisan összemérhető *AC*-vel, *DK* racionális (X. 19.). Szerkesszünk egy *AI*-vel egyenlő *LM* négyzetet, és vonjunk le belőle úgy egy *FK*-val egyenlő *NO* négyzetet, hogy az *LPM* szögük közös legyen (II. 14.). Ekkor az *LM*, *NO* négyzetek ugyanazon átló mellett fekszenek (VI. 26.). Legyen *PR* az átlójuk, és rajzoljuk meg az ábrát. Hasonlóképp mutatható meg, hogy *LN* négyzetértéke az *AB* idom.

Azt állítom, hogy *LN* négyzetértékben mediális mínusz racionális.

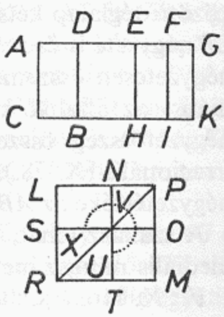
Minthogy ugyanis megmutattuk, hogy *AK* mediális és egyenlő *LP* és *PN* négyzetösszegével, *LP* és *PN* négyzetösszege mediális. Másrészt, minthogy *DK* racionális és egyenlő az *LP* és *PN* közötti téglalap kétszeresével, ez is racionális. S minthogy *AI* összemérhetetlen *FK*-val (VI. 1., X. 11.), *LP* négyzete is összemérhetetlen *PN* négyzetével. *LP* és *PN* tehát olyan négyzetesen összemérhetetlen szakaszok, melyek négyzetösszege mediális, az általuk közrefogott téglalap kétszerese pedig racionális, az *LN* maradék tehát irracionális (X. 77.), ún. négyzetértékben mediális mínusz racionális; s négyzetértéke az *AB* idom.

A szakasz tehát, melynek négyzetértéke az *AB* idom, négyzetértékben mediális mínusz racionális. Éppen ezt kellett megmutatni.

X. 96. Tétel

Ha egy idomot a racionális és egy hatodik apotomé fog közre, akkor a szakasz, melynek az idom négyzetértéke, négyzetértékben mediális mínusz mediális.

Fogja közre ugyanis az *AB* idomot az *AC* racionális és egy *AD* hatodik apotomé. Azt állítom, hogy a szakasz, melynek négyzetértéke az *AB* idom, négyzetértékben mediális mínusz mediális.



Illeszkedjék ugyanis *AD*-hez *DG*. Ekkor *AG* és *GD* csak négyzetesen összemérhető racionálisok, egyikőjük sem lineárisan összemérhető az adott *AC* racionálissal és a teljes *AG* négyzetértéke egy vele lineárisan összemérhetetlen szakasz négyzetével nagyobb *DG*-énél. Minthogy *AG* négyzetértéke egy vele lineárisan összemérhetetlen szakasz négyzetével nagyobb *GD*-énél, ha *DG* négyzetének negyedrészével egyenlő paralelogrammát illesztünk *AG*-hez úgy, hogy egy négyzet marad fönn, akkor *AG* összemérhetetlen darabokra fog bomlani (X. 18.). Legyen hát *E* a *DG* felezőpontja (I. 10.), és illesszünk *AG*-hez egy *EG* négyzetével egyenlő paralelogrammát – legyen ez az *AF* és *FG* közötti – úgy, hogy egy négyzet maradjon fönn (VI. 28.). *AF* tehát lineárisan összemérhetetlen *FG*-vel. Amint viszont *AF* az *FG*-hez, úgy aránylik *AI* az *FK*-hoz (VI. 1.), *AI* tehát összemérhetetlen *FK*-val (X. 11.). Minthogy *AG* és *AC* csak négyzetesen összemérhető racionálisok, *AK* mediális. Ismét, minthogy *AC* és *DG* racionálisok és lineárisan összemérhetetlenek, *DK* is mediális. Minthogy *AG* és *GD* csak négyzetesen összemérhetők, *AG* lineárisan összemérhetetlen *GD*-vel. Amint viszont *AG* a *GD*-hez, úgy aránylik *AK* a *KD*-hez (VI. 1.), *AK* tehát összemérhetetlen *KD*-vel (X. 11.). Szerkesszünk egy *AI*-vel egyenlő *LM* négyzetet, és vonjunk le belőle úgy egy *FK*-val egyenlő *NO*-t, hogy egy szögük közös legyen (II. 14.). Ekkor az *LM*, *NO* négyzetek ugyanazon átló mellett fekszenek (VI. 26.). Legyen *PR* az átlójuk, és rajzoljuk meg az ábrát. A föntebbiekhez hasonlóan mutatható meg, hogy *LN* négyzetértéke az *AB* idom.

Azt állítom, hogy *LN* négyzetértékben mediális mínusz mediális.

Minthogy ugyanis megmutattuk, hogy *AK* mediális és egyenlő *LP* és *PN* négyzetösszegével, *LP* és *PN* négyzetösszege mediális. Ismét minthogy megmutattuk, hogy *DK* mediális és egyenlő az *LP* és *PN* közötti téglalap kétszeresével, az *LP* és *PN* közötti téglalap kétszerese is mediális. S minthogy megmutattuk, hogy *AK* összemérhetetlen *DK*-val, *LP* és *PN* négyzetösszege is összemérhetetlen az *LP* és *PN* közötti téglalap kétszeresével. Minthogy *AI* összemérhetetlen *FK*-val, *LP* négyzete is összemérhetetlen *PN* négyzetével. *LP* és *PN* tehát olyan négyzetesen összemérhetetlen szakaszok, melyek négyzetösszege mediális, az általuk közrefogott téglalap kétszerese is mediális, és a négyzetösszeg összemérhetetlen a téglalap kétszeresével. *LN* tehát irracionális (X. 78.), ún. négyzetértékben mediális mínusz mediális; s négyzetértéke az *AB* idom.

A szakasz tehát, melynek négyzetértéke az idom, négyzetértékben mediális mínusz mediális. Éppen ezt kellett megmutatni.

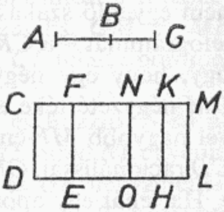
F.: X. 110.

X. 97. Tétel

Ha egy apotomé négyzetét a racionálishoz illesztjük, akkor a keletkező téglalap szélessége első apotomé lesz.

Legyen *AB* egy apotomé, *CD* a racionális, és illesszünk *CD*-hez egy *AB* négyzetével egyenlő *CF* szélességű *CE* téglalapot (I. 41., 44.). Azt állítom, hogy *CF* első apotomé.

Illeszkedjék ugyanis *AB*-hez *BG*. Ekkor *AG* és *GB* csak négyzetesen összemérhető racionálisok. Illesszünk *CD*-hez egy *AG* négyzetével egyenlő *CH* és egy *BG* négyzetével egyenlő *KL* téglalapot (ua.). Ekkor a teljes *CL* egyenlő *AG* és *GB* négyzetösszegével, s ebből *CE* egyenlő *AB* négyzetével, a maradék *FL* tehát egyenlő az *AG* és *GB* közötti téglalap kétszeresével (II. 7.). Legyen *N* az *FM* felezőpontja (I. 10.) és húzzuk meg *N*-en át *CD*-vel párhuzamosan *NO*-t (I. 31.). Ekkor *FO* és *LN* egyenlő az *AG* és *GB* közötti téglalappal. Minthogy *AG* és *GB* négyzetösszege racionális (X. 15., 12.) és *AG* és *GB* négyzetösszegével egyenlő *DM*, *DM* racionális. A *CD* racionálishoz illesztve *CM* a szélessége, *CM* tehát racionális és lineárisan összemérhető *CD*-vel (X. 20.). Másrészt, minthogy az *AG* és *GB* közötti téglalap kétszerese mediális és az *AG* és *GB* közötti téglalap kétszeresével egyenlő *FL*, *FL* mediális. A *CD* racionálishoz illesztve szélessége *FM*, *FM* tehát racionális és lineárisan összemérhetetlen *CD*-vel (X. 22.). Minthogy *AG* és *GB* négyzetösszege racionális, az *AG* és *GB* közötti téglalap kétszerese pedig mediális, *AG* és *GB* négyzetösszege összemérhetetlen az *AG* és *GB* közötti téglalap kétszeresével (X. 13.). *AG* és *GB* négyzetösszegével egyenlő *CL*, az *AG* és *GB* közötti téglalap kétszeresével egyenlő *FL*, *DM* tehát összemérhetetlen *FL*-lel. Amint viszont *DM* az *FL*-hez, úgy aránylik *CM* az *FM*-hez (VI. 1.), *CM* tehát lineárisan összemérhetetlen *FM*-mel (X. 11.). Mind a kettő racionális, *CM* és *FM* tehát csak négyzetesen összemérhető racionálisok, *CF* tehát apotomé.



Azt is állítom, hogy első.

Minthogy ugyanis *AG* és *GB* négyzetének középarányosa az *AG* és *GB* közötti téglalap (X. 54. L.), és *AG* négyzetével egyenlő *CH*, *BG* négyzetével egyenlő *KL*, az *AG* és *GB* közötti téglalappal pedig egyenlő

NL, CH-nak és KL-nek középarányosa NL, CH tehát úgy aránylik NL-hez, mint NL a KL-hez. Amint viszont CH az NL-hez, úgy aránylik CK az NM-hez, amint pedig NL a KL-hez, úgy NM a KM-hez (VI. 1.), a CK és KM közötti téglalap tehát egyenlő NM négyzetével (V. 11., VI. 17.), azaz FM négyzetének negyedrészével. Minthogy AG négyzete összemérhető GB négyzetével, CH is összemérhető KL-lel. Amint viszont CH a KL-hez, úgy aránylik CK a KM-hez (VI. 1.), CK tehát összemérhető KM-mel (X. 11.). Minthogy CM és MF két nem egyenlő szakasz, FM négyzetének negyedrészével egyenlő paralelogrammát – a CK és KM közötti téglalapot – illesztettünk CM-hez úgy, hogy egy négyzet marad fönn, és CK összemérhető KM-mel, CM négyzetértéke egy vele lineárisan összemérhető szakasz négyzetével nagyobb MF-énél (X. 17.). CM lineárisan összemérhető az adott CD racionálissal, CF tehát első apotomé.

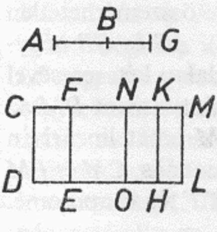
Ha tehát egy apotomé négyzetét a racionálishoz illesztjük, akkor a keletkező téglalap szélessége első apotomé lesz. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: X. 111., 111. K.; XIII. 6.

X. 98. Tétel

Ha egy első mediálapotomé négyzetét a racionálishoz illesztjük, akkor a keletkező téglalap szélessége második apotomé lesz.

Legyen AB egy első mediálapotomé, CD a racionális, és illesszünk CD-hez egy AB négyzetével egyenlő CF szélességű CE téglalapot (I. 41., 44.). Azt állítom, hogy CF második apotomé.



Illeszkedjék ugyanis AB-hez BG. Ekkor AG és GB olyan, csak négyzetesen összemérhető mediálisok, melyek racionális téglalapot fognak közre. Illesszünk CD-hez egy AG négyzetével egyenlő CK szélességű CH és egy GB négyzetével egyenlő KM szélességű KL téglalapot (ua.). Ekkor a teljes CL egyenlő AG és GB négyzetösszegével, tehát CL is mediális (X. 15., 23. K.). A CD racionálishoz illesztve szélessége CM, CM tehát racionális és lineárisan összemérhetetlen CD-vel (X. 22.). Minthogy CL egyenlő AG és GB négyzetösszegével és ebből

AB négyzete egyenlő CE-vel, a maradék, az AG és GB közötti téglalap kétszerese (II. 7.), egyenlő FL-lel. Az AG és GB közötti téglalap kétszerese racionális (X. 6., 12.), FL tehát racionális. Az FE racionálishoz illesztve szélessége FM, tehát FM is racionális és lineárisan összemérhető CD-vel (X. 20.). Minthogy AG és GB négyzetösszege, azaz CL, mediális és az AG és GB közötti téglalap kétszerese, azaz FL, racionális, CL összemérhetetlen FL-lel (X. 13.). Amint viszont CL az FL-hez, úgy aránylik CM az FM-hez (VI. 1.), CM tehát lineárisan összemérhetetlen FM-mel (X. 11.). Mind a kettő racionális, CM és MF tehát csak négyzetesen összemérhető racionálisok, CF tehát apotomé.

Azt is állítom, hogy második.

Legyen ugyanis N az FM felezőpontja (I. 10.) és húzzuk N-en át CD-vel párhuzamosan NO-t (I. 31.). Ekkor mind FO, mind NL egyenlő az AG és GB közötti téglalappal. Minthogy AG és GB négyzetének középarányosa az AG és GB közötti téglalap (X. 54. L.), AG négyzete egyenlő CH-val, az AG és GB közötti téglalap NL-lel, BG négyzete pedig KL-lel, így CH-nak és KL-nek középarányosa NL, amint tehát CH az NL-hez, úgy aránylik NL a KL-hez. Amint viszont CH az NL-hez, úgy aránylik CK az NM-hez, amint pedig NL a KL-hez, úgy NM az MK-hoz (VI. 1.), amint tehát CK az NM-hez, úgy NM a KM-hez (V. 11.), a CK és KM közötti téglalap tehát egyenlő NM négyzetével (VI. 17.), azaz FM négyzetének negyedrészével. [Minthogy AG négyzete összemérhető BG négyzetével, CH is összemérhető KL-lel, azaz CK a KM-mel (VI. 1., X. 11.).] Minthogy CM és MF két, nem egyenlő szakasz, FM négyzetének negyedrészével egyenlő téglalapot – a CK és KM közöttit – illesztettünk a nagyobb CM-hez úgy, hogy egy négyzet maradt fönn és CM összemérhető darabokra bomlik, CM négyzetértéke egy vele lineárisan összemérhető szakasz négyzetével nagyobb MF-énél (X. 17.). Az illeszkedő FM lineárisan összemérhető az adott CD racionálissal, CF tehát második apotomé.

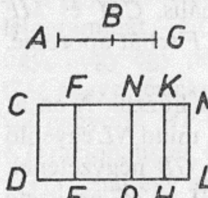
Ha tehát egy első mediálapotomé négyzetét a racionálishoz illesztjük, akkor a keletkező téglalap szélessége második apotomé lesz. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: X. 111. K.

X. 99. Tétel

Ha egy második mediálapotomé négyzetét a racionálishoz illesztjük, akkor a keletkező téglalap szélessége harmadik apotomé lesz.

Legyen *AB* egy második mediálapotomé, *CD* a racionális, és illesszünk *CD*-hez egy *AB* négyzetével egyenlő *CF* szélességű *CE* téglalapot (I. 41., 44.). Azt állítom, hogy *CF* harmadik apotomé.



Illeszkedjék ugyanis *AB*-hez *BG*. Ekkor *AG* és *GB* olyan, csak négyzetesen összemérhető mediálisok, melyek mediális téglalapot fognak közre. Illesszünk *CD*-hez egy *AG* négyzetével egyenlő *CK* szélességű *CH* és *KH*-hoz egy *BG* négyzetével egyenlő *KM* szélességű *KL* téglalapot (ua.). Ekkor a teljes *CL* egyenlő *AG* és *GB* négyzetösszegével [és *AG* és *GB* négyzetösszege mediális (X. 15., 23. K.)], tehát *CL* is mediális. A *CD* racionálishoz illesztve szélessége *CM*, *CM* tehát racionális és lineárisan összemérhetetlen *CD*-vel (X. 22.). Minthogy a teljes *CL* egyenlő *AG* és *GB* négyzetösszegével, s ebből *CE* egyenlő *AB* négyzetével, a maradék *LF* egyenlő az *AG* és *GB* közötti téglalap kétszeresével (II. 7.). Legyen *N* az *FM* felezőpontja (I. 10.), és húzzuk *CD*-vel párhuzamosan *NO*-t (I. 31.). Ekkor mind *FO*, mind *NL* egyenlő az *AG* és *GB* közötti téglalappal. Az *AG* és *GB* közötti téglalap mediális, tehát *FL* is mediális. Az *EF* racionálishoz illesztve szélessége *FM*, *FM* tehát racionális és lineárisan összemérhetetlen *CD*-vel (X. 22.). Minthogy *AG* és *GB* csak négyzetesen összemérhető, *AG* lineárisan összemérhetetlen *GB*-vel, tehát *AG* négyzete is összemérhetetlen az *AG* és *GB* közötti téglalappal (X. 22. L., 11.). *AG* négyzetével összemérhető *AG* és *GB* négyzetösszege (X. 15.), az *AG* és *GB* közötti téglalappal pedig összemérhető az *AG* és *GB* közötti téglalap kétszerese (X. 6.), *AG* és *GB* négyzetösszege tehát összemérhetetlen az *AG* és *GB* közötti téglalap kétszeresével (X. 13.). *AG* és *GB* négyzetösszegével egyenlő *CL*, az *AG* és *GB* közötti téglalap kétszeresével pedig *FL*, *CL* tehát összemérhetetlen *FL*-lel. Amint viszont *CL* az *FL*-hez, úgy aránylik *CM* az *FM*-hez (VI. 1.), *CM* tehát lineárisan összemérhetetlen *FM*-mel (X. 11.). Mind a kettő racionális, *CM* és *MF* tehát csak négyzetesen összemérhető racionálisok, *CF* tehát apotomé.

Azt is állítom, hogy harmadik.

Minthogy ugyanis *AG* négyzete összemérhető *GB* négyzetével, *CH* is összemérhető *KL*-lel, úgyhogy *CK* is *KM*-mel (ua.). Minthogy *AG* és *GB* négyzetének középarányosa az *AG* és *GB* közötti téglalap (X. 54. L.), *AG* négyzetével egyenlő *CH*, *GB* négyzetével egyenlő *KL*, az *AG* és *GB* közötti téglalappal pedig egyenlő *NL*, *CH*-nak és *KL*-nek középarányosa *NL*, amint tehát *CH* az *NL*-hez, úgy aránylik *NL* a *KL*-hez. Amint viszont *CH* az *NL*-hez, úgy aránylik *CK* az *NM*-hez, amint pedig *NL* a *KL*-hez, úgy *NM* a *KM*-hez (VI. 1.), amint tehát *CK* az *MN*-hez, úgy *MN* a *KM*-hez (V. 11.), a *CK* és *KM* közötti téglalap tehát egyenlő [*MN* négyzetével (V. 17.), azaz] *FM* négyzetének negyedrészével. Minthogy *CM* és *MF* két nem egyenlő szakasz, *FM* négyzetének negyedrészével egyenlő téglalapot illesztettünk *CM*-hez úgy, hogy egy négyzet maradt fönn és *CM* összemérhető darabokra bomlik, *CM* négyzetértéke egy vele összemérhető szakasz négyzetével nagyobb *MF*-énél (X. 17.). Sem *CM*, sem *MF* nem lineárisan összemérhető az adott *CD* racionálissal, *CF* tehát harmadik apotomé.

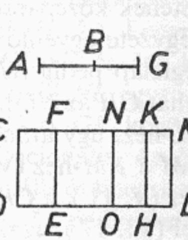
Ha tehát egy második mediálapotomé négyzetét a racionálishoz illesztjük, akkor a keletkező téglalap szélessége harmadik apotomé lesz. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: X. 111. K.

X. 100. Tétel

Ha egy minor négyzetét a racionálishoz illesztjük, akkor a keletkező téglalap szélessége negyedik apotomé lesz.

Legyen *AB* egy minor, *CD* a racionális, és illesszünk *CD*-hez egy *AB* négyzetével egyenlő *CF* szélességű *CE* téglalapot (I. 41., 44.). Azt állítom, hogy *CF* negyedik apotomé.



Illeszkedjék ugyanis *AB*-hez *BG*. Ekkor *AG* és *GB* olyan négyzetesen összemérhetetlen szakaszok, hogy *AG* és *GB* négyzetösszege racionális, az *AG* és *GB* közötti téglalap kétszerese pedig mediális. Illesszünk *CD*-hez egy *AG* négyzetével egyenlő *CK* szélességű *CH* és egy *BG* négyzetével egyenlő *KM* szélességű *KL* téglalapot (ua.). Ekkor a teljes

CL egyenlő *AG* és *GB* négyzetösszegével. *AG* és *GB* négyzetösszege racionális, tehát *CL* is racionális. A *CD* racionálishoz illesztve szélessége *CM*, *CM* tehát racionális és lineárisan összemérhető *CD*-vel (X. 20.). Minthogy a teljes *CL* egyenlő *AG* és *GB* négyzetösszegével, és ebből *CE* egyenlő *AB* négyzetével, a maradék *FL* egyenlő az *AG* és *GB* közötti téglalap kétszeresével (II. 7.). Legyen *N* az *FM* felezőpontja (I. 10.) és húzzuk *N*-en át *CD*-vel és *ML*-lel párhuzamosan *NO*-t (I. 31.). Ekkor mind *FO*, mind *NL* egyenlő az *AG* és *GB* közötti téglalappal. Minthogy az *AG* és *GB* közötti téglalap kétszerese mediális és egyenlő *FL*-lel, *FL* is mediális. Az *FE* racionálishoz illesztve szélessége *FM*, *FM* tehát racionális és lineárisan összemérhetetlen *CD*-vel (X. 22.). Minthogy *AG* és *GB* négyzetösszege racionális, az *AG* és *GB* közötti téglalap kétszerese pedig mediális, *AG* és *GB* négyzetösszege összemérhetetlen az *AG* és *GB* közötti téglalap kétszeresével (X. 13.). *CL* egyenlő *AG* és *GB* négyzetösszegével, az *AG* és *GB* közötti téglalap kétszeresével pedig egyenlő *FL*, *CL* tehát összemérhetetlen *FL*-lel. Amint viszont *CL* az *FL*-hez, úgy aránylik *CM* az *MF*-hez (VI. 1.), *CM* tehát lineárisan összemérhetetlen *MF*-fel (X. 11.). Mind a kettő racionális, *CM* és *MF* tehát csak négyzetesen összemérhető racionálisok, *CF* tehát apotomé.

Azt is állítom, hogy negyedik.

Minthogy ugyanis *AG* és *GB* négyzetesen összemérhetetlenek, *AG* négyzete is összemérhetetlen *GB* négyzetével. *AG* négyzetével egyenlő *CH*, *GB* négyzetével egyenlő *KL*, *CH* tehát összemérhetetlen *KL*-lel. Amint viszont *CH* a *KL*-hez, úgy aránylik *CK* a *KM*-hez, *CK* tehát lineárisan összemérhetetlen *KM*-mel (ua.). Minthogy *AG* és *GB* négyzetének középarányosa az *AG* és *GB* közötti téglalap (X. 54. L.), *AG* négyzete egyenlő *CH*-val, *GB* négyzete *KL*-lel, az *AG* és *GB* közötti téglalap pedig *NL*-lel, *CH*-nak és *KL*-nek középarányosa *NL*, amint tehát *CH* az *NL*-hez, úgy aránylik *NL* a *KL*-hez. Amint viszont *CH* az *NL*-hez, úgy aránylik *CK* az *NM*-hez, amint pedig *NL* a *KL*-hez, úgy *NM* a *KM*-hez (VI. 1.), amint tehát *CK* az *NM*-hez, úgy *MN* a *KM*-hez (V. 11.), a *CK* és *KM* közötti téglalap tehát egyenlő *MN* négyzetével (VI. 17.), azaz *FM* négyzetének negyedrészével. Minthogy *CM* és *MF* két, nem egyenlő szakasz, *MF* négyzetének negyedrészével egyenlő téglalapot – a *CK* és *KM* közöttit – illesztettünk *CM*-hez úgy, hogy egy négyzet maradt fönn és *CM* összemérhetetlen darabokra bomlik, *CM* négyzetértéke egy vele összemérhetetlen szakasz négyzetével nagyobb *MF*-énél (X. 18.). A teljes *CM* lineárisan összemérhető az adott *CD* racionálissal, *CF* tehát negyedik apotomé.

Ha tehát egy minor négyzetét... stb.

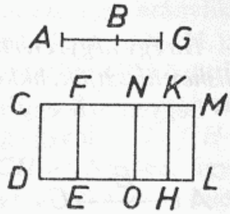
F.: X. 111. K.

X. 101. Tétel

Ha egy négyzetértékben mediális mínusz racionális négyzetét a racionálishoz illesztjük, akkor a keletkező téglalap szélessége ötödik apotomé.

Legyen *AB* egy négyzetértékben mediális mínusz racionális, *CD* a racionális, és illesszünk *CD*-hez egy *AB* négyzetével egyenlő *CF* szélességű *CE* téglalapot (I. 41., 44.). Azt állítom, hogy *CF* ötödik apotomé.

Illeszkedjék ugyanis *AB*-hez *BG*. Ekkor *AG* és *GB* olyan négyzetesen összemérhetetlen szakaszok, melyek négyzetösszege mediális, az általuk közrefogott téglalap kétszerese pedig racionális. Illesszünk *CD*-hez egy *AG* négyzetével egyenlő *CH* és egy *GB* négyzetével egyenlő *KL* téglalapot (ua.). Ekkor a teljes *CL* egyenlő *AG* és *GB* négyzetösszegével. *AG* és *GB* négyzetösszege mediális, tehát *CL* mediális. A *CD* racionálishoz illesztve szélessége *CM*, *CM* tehát racionális és összemérhetetlen *CD*-vel (X. 22.). Minthogy a teljes *CL* egyenlő *AG* és *GB* négyzetösszegével, s belőle *CE* egyenlő *AB* négyzetével, a maradék *FL* egyenlő az *AG* és *GB* közötti téglalap kétszeresével (II. 7.). Legyen *N* az *FM* felezőpontja (I. 10.) és húzzuk *N*-en át *CD*-vel és *ML*-lel párhuzamosan *NO*-t (I. 30–31.). Ekkor mind *FO*, mind *NL* egyenlő az *AG* és *GB* közötti téglalappal. Minthogy az *AG* és *GB* közötti téglalap kétszerese racionális és egyenlő *FL*-lel, *FL* racionális. Az *EF* racionálishoz illesztve szélessége *FM*, *FM* tehát racionális és lineárisan összemérhető *CD*-vel (X. 20.). Minthogy *CL* mediális, *FL* pedig racionális, *CL* összemérhetetlen *FL*-lel (X. 21., 13.). Amint viszont *CL* az *FL*-hez, úgy aránylik *CM* az *MF*-hez (VI. 1.), *CM* tehát lineárisan



összemérhetetlen *MF*-fel (X. 11.). Mind a kettő racionális, *CM* és *MF* tehát csak négyzetesen összemérhető racionálisok, *CF* tehát apotomé.

Azt is állítom, hogy ötödik.

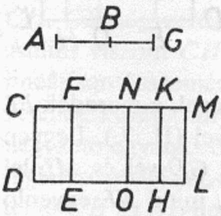
Hasonlóképp mutatható meg, hogy a *CK* és *KM* közötti téglalap egyenlő *NM* négyzetével, azaz *FM* négyzetének negyedrészével. Minthogy *AG* négyzete összemérhetetlen *GB* négyzetével, *AG* négyzete egyenlő *CH*-val és *GB* négyzete *KL*-lel, *CH* összemérhetetlen *KL*-lel. Amint viszont *CH* a *KL*-hez, úgy aránylik *CK* a *KM*-hez (VI. 1.), *CK* tehát lineárisan összemérhetetlen *KM*-mel (X. 11.). Minthogy *CM* és *MF* két, nem egyenlő szakasz, *FM* négyzetének negyedrészével egyenlő téglalapot illesztettünk *CM*-hez úgy, hogy egy négyzet marad fönn és *CM* összemérhetetlen darabokra bomlik, *CM* négyzetértéke egy vele összemérhetetlen szakasz négyzetével nagyobb *MF*-énél (X. 18.). Az illeszkedő *FM* összemérhető az adott *CD* racionálissal, *CF* tehát ötödik apotomé. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: X. 111. K.

X. 102. Tétel

Ha egy négyzetértékben mediális mínusz mediális négyzetét a racionálishoz illesztjük, akkor a keletkező téglalap szélessége hatodik apotomé.

Legyen *AB* egy négyzetértékben mediális mínusz mediális, *CD* a racionális, és illesszünk *CD*-hez egy *AB* négyzetével egyenlő *CF* szélességű *CE* téglalapot (I. 41., 44.). Azt állítom, hogy *CF* hatodik apotomé.



Illeszkedjék ugyanis *AB*-hez *BG*. Ekkor *AG* és *GB* olyan négyzetesen összemérhetetlen szakaszok, hogy a négyzetösszegük mediális, az *AG* és *GB* közötti téglalap kétszerese mediális, és *AG* és *GB* négyzetösszege összemérhetetlen az *AG* és *GB* közötti téglalap kétszeresével. Illesszünk *CD*-hez egy *AG* négyzetével egyenlő *CK* szélességű *CH* és egy *BG* négyzetével egyenlő *KL* téglalapot (ua.). Ekkor a teljes *CL* egyenlő *AG* és *GB* négyzetösszegével, tehát *CL* is mediális. A *CD* racionálishoz illesztve szélessége *CM*, *CM* tehát racionális és lineárisan összemérhetetlen *CD*-vel (X. 22.). Minthogy *CL* egyenlő *AG* és *GB* négyzetösszegével, s belőle *CE* egyenlő *AB* négyzetével, a maradék *FL* egyenlő az *AG* és *GB* közötti téglalap kétszeresével (II. 7.). Az *AG* és *GB* közötti téglalap kétszerese mediális, tehát *FL* is mediális. Az *FE* racionálishoz illesztve szélessége *FM*, *FM* tehát racionális és lineárisan összemérhetetlen *CD*-vel (X. 22.). Minthogy *AG* és *GB* négyzetösszege összemérhetetlen az *AG* és *GB* közötti téglalappal, és *AG* és *GB* négyzetösszegével egyenlő *CL*, az *AG* és *GB* közötti téglalap kétszeresével pedig *FL*, *CL* összemérhetetlen *FL*-lel. Amint viszont *CL* az *FL*-hez, úgy aránylik *CM* az *MF*-hez (VI.1.), *CM* tehát lineárisan összemérhetetlen *MF*-fel (X. 11.). Mind a kettő racionális, *CM* és *MF* tehát csak négyzetesen összemérhető racionálisok, *CF* tehát apotomé.

Azt is állítom, hogy hatodik.

Minthogy ugyanis *FL* egyenlő az *AG* és *GB* közötti téglalap kétszeresével, legyen hát *FM* felezőpontja *N* (I. 10.) és húzzuk *N*-en át *CD*-vel párhuzamosan *NO*-t (I. 31.). Ekkor mind *FO*, mind *NL* egyenlő az *AG* és *GB* közötti téglalappal. Minthogy *AG* és *GB* négyzetesen összemérhetetlenek, *AG* négyzete összemérhetetlen *GB* négyzetével. *AG* négyzetével egyenlő *CH*, *GB* négyzetével egyenlő *KL*, *CH* tehát összemérhetetlen *KL*-lel. Amint viszont *CH* *KL*-hez, úgy aránylik *CK* a *KM*-hez (VI. 1.), *CK* tehát összemérhetetlen *KM*-mel (X. 11.). Minthogy *AG* és *GB* négyzetének középarányosa az *AG* és *GB* közötti téglalap (X. 54. L.), *AG* négyzetével egyenlő *CH*, *GB* négyzetével egyenlő *KL*, az *AG* és *GB* közötti téglalappal pedig egyenlő *NL*, *CH*-nak és *KL*-nek középarányosa *NL*, amint tehát *CH* az *NL*-hez, úgy aránylik *NL* a *KL*-hez. És ugyanúgy *CM* négyzetértéke egy vele összemérhetetlen szakasz négyzetével nagyobb *MF*-énél, és egyikőjük sem összemérhető az adott *CD* racionálissal, *CF* tehát hatodik apotomé. Éppen ezt kellett megmutatni.

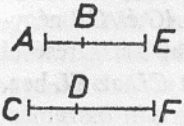
F.: X. 111. K.

X. 103. Tétel

Apotoméval lineárisan összemérhető szakasz apotomé, mégpedig ugyanannyiadik.

Legyen *AB* egy apotomé, és legyen *CD* lineárisan összemérhető *AB*-vel. Azt állítom, hogy *CD* is apotomé, mégpedig ugyanannyiadik, mint *AB*.

AB apotomé, illeszkedjék hát hozzá BE. Ekkor AE és EB csak négyzetesen összemérhető racionálisok. Legyen BE-nek DF-hez való aránya ugyanaz, mint AB-é CD-hez (VI.12.). Amint egy-egy tag, úgy aránylanak az összegek (V. 12.), AE tehát szintén úgy aránylik CF-hez, mint AB a CD-hez. AB lineárisan összemérhető CD-vel, tehát AE is összemérhető CF-fel, BE pedig DF-fel (X. 11.). AE és EB csak négyzetesen összemérhető racionálisok, tehát CF és FD is csak négyzetesen összemérhető racionálisok (X. 12–13.). [CD tehát apotomé.



Azt is állítom, hogy ugyanannyiadik, mint AB].

Mivel AE úgy aránylik CF-hez, mint BE a DF-hez (V. 11.), fölcserélve AE úgy aránylik EB-hez, mint CF a FD-hez (V. 16.). AE négyzetértéke egy vele vagy összemérhető, vagy összemérhetetlen szakasz négyzetével nagyobb EB-énél. Ha AE négyzetértéke egy vele összemérhető szakasz négyzetével nagyobb EB-énél, akkor CF négyzetértéke is egy vele összemérhető szakasz négyzetével nagyobb FD-énél (X. 14.). S ha AE lineárisan összemérhető az adott racionálissal, akkor CF is (X. 12.), ha EB, akkor DF is, ha pedig sem AE, sem EB, akkor sem CF, sem FD (X. 13.). Ha AE négyzetértéke egy vele összemérhetetlen szakasz négyzetével nagyobb [EB-énél], akkor CF négyzetértéke is egy vele összemérhetetlen szakasz négyzetével nagyobb FD-énél (X. 14.). Ha AE lineárisan összemérhető az adott racionálissal, akkor CF is, ha BE, akkor DF is, ha pedig sem AE, sem EB, akkor sem CF, sem FD.

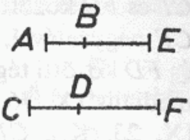
CD tehát apotomé, mégpedig ugyanannyiadik, mint AB. Éppen ezt kellett megmutatni.

X. 104. Tétel

Mediálapotoméval összemérhető szakasz mediálapotomé, mégpedig ugyanannyiadik.

Legyen AB egy mediálapotomé, és legyen CD lineárisan összemérhető AB-vel. Azt állítom, hogy CD mediálapotomé, mégpedig ugyanannyiadik, mint AB.

AB mediálapotomé, legyen hát a hozzá illeszkedő szakasz EB. Ekkor AE és EB csak négyzetesen összemérhető mediálisok. Arányuljék amint AB a CD-hez, úgy BE a DF-hez (VI. 12.). AE is összemérhető tehát CF-fel, BE pedig DF-fel (V. 12., X. 11.). AE és EB csak négyzetesen összemérhető mediálisok, tehát CF és FD is csak négyzetesen összemérhető mediálisok (X. 12–13., 23.), CD tehát mediálapotomé.



Azt is állítom, hogy ugyanannyiadik, mint AB.

Mivel amint AE az EB-hez, úgy aránylik CF az FD-hez (V. 11., 16.), amint viszont AE az EB-hez, úgy AE négyzete az AE és EB közötti téglalaphoz, amint pedig CF az FD-hez, úgy CF négyzete a CF és FD közötti téglalaphoz (X. 22. L.), amint tehát AE négyzete az AE és EB közötti téglalaphoz, úgy CF négyzete a CF és FD közötti téglalaphoz (V. 11.), és fölcserélve amint AE négyzete CF négyzetéhez, úgy az AE és EB közötti téglalap a CF és FD közötti téglalaphoz (V. 16.). AE négyzete összemérhető CF négyzetével, tehát az AE és EB közötti téglalap is összemérhető a CF és FD közötti téglalappal (X. 11.). Ha tehát az AE és EB közötti téglalap racionális, akkor a CF és FD közötti is racionális, ha pedig az AE és EB közötti téglalap mediális, akkor a CF és FD közötti is mediális (X. 23. K.).

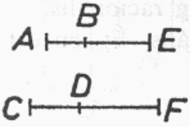
CD tehát mediálapotomé, mégpedig ugyannyiadik, mint AB. Éppen ezt kellett megmutatni.

X. 105. Tétel

Minorral összemérhető szakasz minor.

Legyen ugyanis AB egy minor és CD összemérhető AB-vel. Azt állítom, hogy CD is minor.

Járjunk el ugyanúgy. Minthogy AE és EB négyzetesen összemérhetetlenek, CF és FD is négyzetesen összemérhetetlenek (X. 13.). Mivel amint AE az EB-hez, úgy aránylik CF az FD-hez (V. 11–12., 16.), CF négyzete úgy aránylik FD négyzetéhez, mint AE négyzete EB négyzetéhez (VI. 22.). Összetéve tehát amint AE és EB négyzetösszege EB négyzetéhez, úgy CF és FD négyzetösszege FD négyzetéhez (V. 18.) [és fölcserélve (V.16.)]. BE négyzete viszont összemérhető DF négyzetével, tehát AE és EB négyzetösszege is összemérhető CF és FD négyzet-



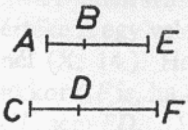
összegével (X. 11.). *AE* és *EB* négyzetösszege racionális, tehát *CF* és *FD* négyzetösszege is racionális (X. 12.). Ismét, mivel amint *AE* négyzete az *AE* és *EB* közötti téglalaphoz, úgy aránylik *CF* négyzete a *CF* és *FD* közötti téglalaphoz (X. 22. L.), és *AE* négyzete összemérhető *CF* négyzetével, az *AE* és *EB* közötti téglalap is összemérhető a *CF* és *FD* közötti téglalappal (V. 16., X. 11.). Az *AE* és *EB* közötti téglalap mediális (X. 76., D.), tehát a *CF* és *FD* közötti téglalap is mediális (X. 23. K.), *CF* és *FD* tehát olyan, négyzetesen összemérhetetlen szakaszok, melyek négyzetösszege racionális, az általuk közrefogott téglalap pedig mediális.

CD tehát minor. Éppen ezt kellett megmutatni.

X. 106. Tétel

Négyzetértékben mediális mínusz racionálissal összemérhető szakasz négyzetértékben mediális mínusz racionális.

Legyen *AB* egy négyzetértékben mediális mínusz racionális, és *CD* összemérhető *AB*-vel. Azt állítom, hogy *CD* is négyzetértékben mediális mínusz racionális.



Legyen ugyanis *BE* az *AB*-hez illeszkedő szakasz. Ekkor *AE* és *EB* olyan négyzetesen összemérhetetlen szakaszok, hogy *AE* és *EB* négyzetösszege mediális, az általuk közrefogott téglalap pedig racionális. Végezzük el ugyanazokat a lépéseket. Az előzőekhez hasonlóan mutatható meg, hogy *CF* és *FD* aránya ugyanaz, mint *AE*-é és *EB*-é, és összemérhető *AE* és *EB* négyzetösszege *CF* és *FD* négyzetösszegével, az *AE* és *EB* közötti téglalap pedig a *CF* és *FD* közöttivel, úgyhogy *CF* és *FD* is olyan, négyzetesen összemérhetetlen szakaszok, hogy *CF* és *FD* négyzetösszege mediális, az általuk közrefogott téglalap pedig racionális.

CD tehát négyzetértékben mediális mínusz racionális. Éppen ezt kellett megmutatni.

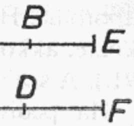
X. 107. Tétel

Négyzetértékben mediális mínusz mediálissal összemérhető szakasz maga is négyzetértékben mediális mínusz mediális.

Legyen *AB* egy négyzetértékben mediális mínusz mediális, és legyen

CD összemérhető *AB*-vel. Azt állítom, hogy *CD* is négyzetértékben mediális mínusz mediális.

Legyen ugyanis *BE* az *AB*-hez illeszkedő szakasz, és végezzük el ugyanazokat a lépéseket. Ekkor *AE* és *EB* olyan négyzetesen összemérhetetlen szakaszok, hogy mind a négyzetösszegük, mind az általuk közrefogott téglalap mediális, és a négyzetösszegük összemérhetetlen az általuk közrefogott téglalappal. S mint megmutattuk, *AE* és *EB* összemérhető *CF*-fel, illetve *FD*-vel, *AE* és *EB* négyzetösszege *CF* és *FD* négyzetösszegével, az *AE* és *EB* közötti téglalap pedig a *CF* és *FD* közöttivel, tehát *CF* és *FD* is olyan, négyzetesen összemérhetetlen szakaszok, hogy mind a négyzetösszegük, mind az általuk közrefogott téglalap mediális, és a négyzetösszegük összemérhetetlen az általuk közrefogott téglalappal.



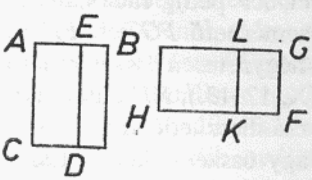
CD tehát négyzetértékben mediális mínusz mediális. Éppen ezt kellett megmutatni.

X. 108. Tétel

Ha egy racionálisból egy mediális területet vonunk ki, akkor a szakasz, melynek négyzetértéke a maradék, két irracionális egyike: vagy apotomé, vagy minor.

Vonjuk ki ugyanis a *BC* racionálisból a *BD* mediálist. Azt állítom, hogy a szakasz, melynek négyzetértéke a maradék *EC*, két irracionális egyike: vagy apotomé, vagy minor.

Vegyük ugyanis az *FG* racionálist, és illesszünk *FG*-hez egy *BC*-vel egyenlő *GH*, majd vonjunk ki ebből egy *DB*-vel egyenlő *GK* téglalapot (I. 44.). Ekkor a maradék *EC* egyenlő *LH*-val. Minthogy *BC* racionális, *BD* mediális, *BC* egyenlő *GH*-val és *BD* a *GK*-val, *GH* racionális, *GK* pedig mediális. Az *FG* racionálishoz illesztettük őket, tehát *FH* racionálisan és lineárisan összemérhető *FG*-vel (X. 20.), *FK* pedig racionális és lineárisan összemérhetetlen *FG*-vel (X. 22.) *FH* tehát lineárisan összemérhetetlen *FK*-val (X. 13.). *FH* és *FK* tehát csak négyzetesen



összemérhetők (X. 12.), *KH* tehát apotomé és *KF* a hozzá illeszkedő szakasz. Ekkor *HF* négyzetértéke vagy egy összemérhető szakasz négyzetével nagyobb *FK*-énál, vagy sem.

Legyen először egy összemérhető négyzetével nagyobb. A teljes *HF* lineárisan összemérhető az adott *FG* racionálissal, *KH* tehát első apotomé. Ha viszont egy idomot a racionális és egy első apotomé fog közre, akkor a szakasz, melynek az idom négyzetértéke, apotomé (X. 91.). A szakasz tehát, melynek négyzetértéke *LH*, azaz *EC*, apotomé.

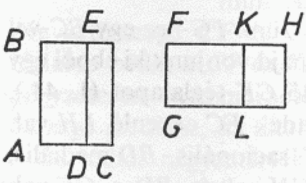
Ha pedig *HF* négyzetértéke egy vele összemérhetetlen szakasz négyzetével nagyobb *FK*-énál, akkor mivel a teljes *FH* lineárisan összemérhető az adott *FG* racionálissal, *KH* negyedik apotomé. Ha viszont egy idomot a racionális és egy negyedik apotomé fog közre, akkor a szakasz, melynek az idom négyzetértéke, minor (X. 94.). Éppen ezt kellett megmutatni.

X. 109. Tétel

Ha mediálisból racionális területet vonunk ki, másik két irracionálist kapunk: vagy első mediálapotomét, vagy négyzetértékben mediális mínusz racionálist.

Vonjuk ki ugyanis a *BC* mediálisból a *BD* racionálist. Azt állítom, hogy a szakasz, melynek négyzetértéke a maradék *EC*, két irracionális egyike: vagy első mediálapotomé, vagy négyzetértékben mediális mínusz racionális.

Vegyük ugyanis az *FG* racionálist, és illesszünk hozzá hasonlóképp téglalapokat. Ekkor az előbbiek szerint *FH* racionális és lineárisan összemérhetetlen *FG*-vel, *KF* pedig racionális és lineárisan összemérhető *FG*-vel, *FH* és *FK* tehát csak négyzetesen összemérhető racionálisok (X. 12–13.), *KH* tehát apotomé, és a hozzá illeszkedő szakasz *FK*.



HF négyzetértéke egy vele összemérhető vagy összemérhetetlen szakasz négyzetével nagyobb *FK*-énál.

Ha *HF* négyzetértéke egy vele összemérhető szakasz négyzetével nagyobb *FK*-énál, akkor mivel az illeszkedő *FK* lineárisan összemérhető az adott *FG* racionálissal, *KH* második apotomé. *FG* racionális, úgyhogy a szakasz, melynek négyzetértéke *LH*, azaz *EC*, első mediálapotomé (X. 92.).

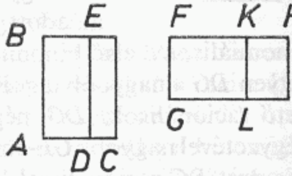
Ha pedig *HF* négyzetértéke egy összemérhetetlen szakasz négyzetértékével nagyobb *FK*-énál, akkor mivel az illeszkedő *FK* lineárisan összemérhető az adott *FG* racionálissal, *KH* ötödik apotomé, úgyhogy a szakasz, melynek négyzetértéke *EC*, négyzetértékben mediális mínusz racionális. Éppen ezt kellett megmutatni.

X. 110. Tétel

Ha mediálisból vele összemérhetetlen mediális területet vonunk ki, a maradék két irracionálist kapjuk: vagy második mediálapotomét, vagy négyzetértékben mediális mínusz mediálist.

Vonjunk ki ugyanis, miként az előző ábrákon, egy *BC* mediálisból egy vele összemérhetetlen *BD* mediálist. Azt állítom, hogy a szakasz, melynek négyzetértéke *EC*, két irracionális egyike: vagy második mediálapotomé, vagy négyzetértékben mediális mínusz mediális.

Minthogy ugyanis *BC* és *BD* mediális, és *BC* összemérhetetlen *BD*-vel, az előbbiek szerint *FH* és *FK* racionális és lineárisan összemérhetetlen *FG*-vel. Minthogy összemérhetetlen *BC* a *BD*-vel, azaz *GH* a *GK*-val, *HF* is összemérhetetlen *FK*-val (VI. 1., X. 11.), *FH* és *FK* tehát csak négyzetesen összemérhető racionálisok, *KH* tehát apotomé és *FK* a hozzá illeszkedő szakasz. *FH* négyzetértéke egy vele összemérhető vagy összemérhetetlen szakasz négyzetével nagyobb *FK*-énál.



Ha *FH* négyzetértéke egy vele összemérhető szakasz négyzetével nagyobb *FK*-énál, akkor mivel sem *FH*, sem *FK* nem lineárisan összemérhető az adott *FG* racionálissal, *KH* harmadik apotomé. *KL* racionális. A racionális és egy harmadik apotomé által közrefogott téglalap viszont irracionális, és a szakasz, melynek négyzetértéke, irracionális, mégpedig második mediálapotomé a neve (X. 93.), úgyhogy a szakasz, melynek négyzetértéke *LH*, azaz *EC*, második mediálapotomé.

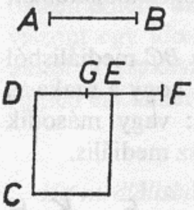
Ha pedig *FH* négyzetértéke egy vele lineárisan összemérhetetlen szakasz négyzetével nagyobb *FK*-énál, akkor mivel sem *HF*, sem *FK* nem lineárisan összemérhető *FG*-vel, *KH* hatodik apotomé. A szakasz viszont, melynek négyzetértéke egy, a racionális és egy hatodik apotomé által közrefogott téglalap, négyzetértékben mediális mínusz mediális (X. 96.). A szakasz tehát, melynek négyzetértéke *LH*, azaz *EC*, négyzetértékben mediális mínusz mediális. Éppen ezt kellett megmutatni.

X. 111. Tétel

Apotomé nem egyezik meg egy binomiálissal.

Legyen *AB* egy apotomé. Azt állítom, hogy *AB* nem egyezik meg semmilyen binomiálissal.

Tegyük föl ugyanis, hogy megegyezik. Vegyük a *DC* racionálist, és illesszünk *CD*-hez egy *AB* négyzetével egyenlő *DE* szélességű *CE* téglalapot (I. 44.). Minthogy *AB* apotomé, *DE* első apotomé (X. 97.). Legyen *EF* a hozzá illeszkedő szakasz. Ekkor *DF* és *FE* csak négyzetesen összemérhető racionálisok, *DF* négyzetértéke egy vele összemérhető szakasz négyzetével nagyobb *FE*-énél és *DF* lineárisan összemérhető az adott *DC* racionálissal. Másrészt, minthogy *AB* binomiális, *DE* első binomiális (X. 60.). Essék szét *G*-ben a tagjaira, és legyen *DG* a nagyobb tag. Ekkor *DG* és *GE* csak négyzetesen összemérhető racionálisok, *DG* négyzetértéke egy vele összemérhető szakasz négyzetével nagyobb *GE*-énél, és a nagyobb *DG* lineárisan összemérhető az adott *DC* racionálissal. *DF* is lineárisan összemérhető tehát *DG*-vel (X. 12.), tehát a maradék *GF* is lineárisan összemérhető *DF*-fel (X. 15.). [Minthogy *DF* összemérhető *GF*-fel és *DF* racionális, *GF* is racionális. Minthogy *DF* lineárisan összemérhető *GF*-fel és] *DF* lineárisan összemérhetetlen *EF*-fel, *FG* is lineárisan összemérhetetlen *EF*-fel (X. 13.). *GF* és *FE* tehát csak négyzetesen összemérhető racionálisok, *EG* tehát apotomé. Viszont racionális is. Ez nem lehetséges (X. 73.).



Apotomé tehát nem egyezik meg egy binomiálissal. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: X. 111. K.

Következmény

Az apotomé és az utána következő irracionálisok sem a mediálissal, sem egymással nem egyeznek meg.

Ha ugyanis egy mediális négyzetét illesztjük a racionálishoz, akkor a keletkező téglalap szélessége racionális és lineárisan összemérhetetlen azzal a szakasszal, amely mellé helyeztük (X. 22.), ha egy apotomé négyzetét illesztjük a racionálishoz, akkor a keletkező téglalap szélessége első apotomé (X. 97.), ha egy első mediálapotomé négyzetét illesztjük a racionálishoz, akkor a keletkező téglalap szélessége második apotomé (X. 98.), ha egy második mediálapotomé négyzetét illesztjük a racionálishoz, akkor a keletkező téglalap szélessége harmadik apotomé (X. 99.), ha egy minor négyzetét illesztjük a racionálishoz, akkor a keletkező téglalap szélessége negyedik apotomé (X. 100.), ha egy négyzetértékben mediális mínusz racionális négyzetét illesztjük a racionálishoz, akkor a keletkező téglalap szélessége ötödik apotomé (X. 101.), ha pedig egy négyzetértékben mediális mínusz mediális négyzetét illesztjük a racionálishoz, akkor a keletkező téglalap szélessége hatodik apotomé (X. 102.). Minthogy a mondott szélességek különböznek mind az elsőtől, mind egymástól – az elsőtől, mivel az racionális, egymástól, mivel ugyanannyiadikak –, nyilvánvaló, hogy maguk az irracionálisok is különböznek egymástól.

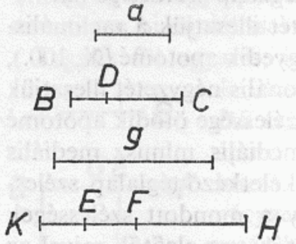
Minthogy megmutattuk, hogy apotomé nem egyezik meg binomiálissal (X. 111.), és ha az apotomé utáni irracionálisokat a racionálishoz illesztjük, akkor a keletkező téglalap szélessége annyiadik apotomé, ahányadik az illető irracionális a sorban, ha pedig a binomiális utániakat, akkor annyiadik binomiális, ahányadik az illető irracionális a sorban, különbözőek az apotomé utáni és különbözőek a binomiális utáni irracionálisok, úgyhogy összesen 13 tagú az irracionálisok sora:

mediális,
binomiális,
első bimediális,
második bimediális,
maior,
négyzetértékben racionális plusz mediális,
négyzetértékben két mediális összege,
apotomé,
első mediálapotomé,
második mediálapotomé,

minor,
négyzetértékben mediális mínusz racionális,
négyzetértékben mediális mínusz mediális.

X. 112. Tétel

*Ha egy racionális négyzetét binomiálishoz illesztjük, akkor a keletkező téglalap szélessége apotomé, s ennek tagjai összemérhetők a binomiális tagjaival és ugyanabban az arányban állnak, és a keletkező apotomé ugyanannyiadik, mint a binomiális.**



Legyen *a* egy racionális *BC* pedig egy binomiális. Ennek nagyobb tagja legyen *DC*, és legyen *a* négyzetével egyenlő a *BC* és *EF* közötti téglalap (I. 44.). Azt állítom, hogy *EF* apotomé, a tagjai összemérhetők *CD*-vel, illetve *DB*-vel és ugyanabban az arányban állnak, és *EF* ugyanannyiadik, mint *BC*.

Legyen ugyanis ismét *a* négyzetével egyenlő a *BD* és *g* közötti téglalap. Minthogy a *BC* és *EF* közötti téglalap egyenlő a *BD* és *g* közöttivel, *CB* úgy aránylik *BD*-hez, mint *g* az *EF*-hez (VI. 16.). *CB* nagyobb *BD*-nél, tehát *g* is nagyobb *EF*-nél (V. 16., 14.). Legyen *EH* egyenlő *g*-vel. Ekkor amint *CB* a *BD*-hez, úgy aránylik *HE* az *EF*-hez (V. 7., 11.), szétbontva tehát amint *CD* a *BD*-hez, úgy *HF* az *FE*-hez (V. 17.). Arányuljék amint *HF* az *FE*-hez, úgy *FK* a *KE*-hez (VI. 11. $HF–FE : FE = FE : KE$, V. 18.). Ekkor a teljes *HK* úgy aránylik a teljes *KF*-hez, mint *FK* a *KE*-hez, az előtagok összege ugyanis úgy aránylik az utótagok összegéhez, mint bármely előtag az utótagjához (V. 12.). Amint viszont *FK* a *KE*-hez, úgy aránylik *CD* a *DB*-hez (V. 11.), amint tehát *HK* a *KF*-hez, úgy *CD* a *DB*-hez (ua.). *CD* négyzete összemérhető *DB* négyzetével, tehát *HK* négyzete is összemérhető *KF* négyzetével (VI. 22., X. 11.). Amint *HK* négyzete *KF* négyzetéhez, úgy aránylik *HK* a *KE*-hez, minthogy e három szakasz, *HK*, *KF* és *KE* arányos (VI. 19. K.), *HK* tehát lineárisan összemérhető *KE*-vel, úgyhogy *HE* is lineárisan összemérhető *EK*-val (X. 15.). Minthogy *a* négyzete egyenlő az *EH* és *BD* közötti téglalappal és *a* négyzete racionális, az *EH* és *BD* közötti téglalap is racionális. A racionális

BD-hez illesztettük, *EH* tehát racionális és lineárisan összemérhető *BD*-vel (X. 20.), úgyhogy a vele összemérhető *EK* is racionális és lineárisan összemérhető *BD*-vel (X. 12.). Mivel amint *CD* a *DB*-hez, úgy aránylik *FK* a *KE*-hez, s *CD* és *DB* csak négyzetesen összemérhetők, *FK* és *KE* is csak négyzetesen összemérhetők (X. 11.). *KE* racionális, tehát *FK* is racionális. *FK* és *KE* tehát csak négyzetesen összemérhető racionálisok, *EF* tehát apotomé.

CD négyzetértéke egy vele összemérhető vagy összemérhetetlen szakasz négyzetével nagyobb *DB*-énél.

Ha *CD* négyzetértéke egy [vele] összemérhető szakasz négyzetével nagyobb *DB*-énél, akkor *FK* négyzetértéke is egy vele összemérhető szakasz négyzetével nagyobb *KE*-énél (X. 14.). Ha *CD* lineárisan összemérhető az adott racionálissal, akkor *FK* is, ha *BD*, akkor *KE* is, ha pedig sem *CD*, sem *DB*, akkor sem *FK*, sem *KE* (V. 16., X. 12–13.).

Ha pedig *CD* négyzetértéke egy vele összemérhetetlen szakasz négyzetével nagyobb *DB*-énél, akkor *FK* négyzetértéke is egy vele összemérhetetlen szakasz négyzetével nagyobb *KE*-énél (X. 14.). Ha *CD* lineárisan összemérhető az adott racionálissal, akkor *FK* is, ha *BD*, akkor *KE* is, ha pedig sem *CD*, sem *BD*, akkor sem *FK*, sem *KE*, úgyhogy *FE* apotomé, a tagjai, *FK* és *KE* összemérhetők a binomiális tagjaival, *CD*-vel, illetve *DB*-vel és ugyanabban az arányban állnak, és *FE* ugyanannyiadik, mint *BC*.

Éppen ezt kellett megmutatni.

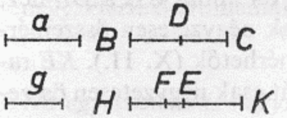
F.: X. 114.

X. 113. Tétel

Ha egy racionális négyzetét apotoméhoz illesztjük, akkor a keletkező téglalap szélessége binomiális, ennek tagjai összemérhetők az apotomé tagjaival és ugyanabban az arányban állnak, és a keletkező binomiális ugyanannyiadik, mint az apotomé.

Legyen *a* egy racionális *BD* pedig egy apotomé, és legyen *a* négyzetével egyenlő a *BD* és *KH* közötti téglalap (I. 44.), úgyhogy az *a* racionális négyzetének szélessége a *BD* apotoméhoz illesztve *KH*. Azt állítom, hogy *KH* binomiális, a tagjai összemérhetők *BD* tagjaival és ugyanabban az arányban állnak, és végül *KH* ugyanannyiadik, mint *BD*.

Legyen *DC* a *BD*-hez illeszkedő szakasz. Ekkor *BC* és *CD* csak négyzetesen összemérhető racionálisok. Legyen a *BC* és *g* közötti téglalap is egyenlő *a* négyzetével (ua.). *a* négyzete racionális, tehát a *BC* és *g* közötti téglalap is racionális. A *BC* racionális mellett fekszik, *g* tehát racionális és lineárisan összemérhető *BC*-vel (X. 20.). Minthogy a *BC* és *g* közötti téglalap egyenlő a *BD* és *KH* közöttivel, *CB* úgy aránylik *BD*-hez, mint *KH* a *g*-hez (VI. 16.). *BC* nagyobb *BD*-nél, tehát *KH* is nagyobb *g*-nél (V. 16., 14.). Legyen *KE* egyenlő *g*-vel. Ekkor *KE* lineárisan összemérhető *BC*-vel. Mivel amint *CB* a *BD*-hez, úgy aránylik *HK* a *KE*-hez, fölforgatva amint *BC* a *CD*-hez, úgy *KH* a *HE*-hez (V. 19. K.). Arányuljék amint *KH* a *HE*-hez, úgy *HF* az *FE*-hez (VI. 10.). Ekkor a maradék *KF* úgy aránylik *FH*-hoz, mint *KH* a *HE*-hez (V. 19.), azaz mint *BC* a *CD*-hez (V. 11.). *BC* és *CD* csak négyzetesen összemérhetők, tehát *KF* és *FH* is csak négyzetesen összemérhetők (X. 11., VI. 22.). Mivel amint *KH* a *HE*-hez, úgy aránylik *KF* az *FH*-hoz, és amint *KH* a *HE*-hez, úgy *HF* az *FE*-hez, amint tehát *KF* az *FH*-hoz, úgy *HF* az *FE*-hez (V. 11.), úgyhogy amint az első szakasz a harmadikhoz, úgy az első négyzete a második négyzetéhez (VI. 20. 2. K.), amint tehát *KF* az *FE*-hez, úgy *KF* négyzete *FH* négyzetéhez. *KF* négyzete összemérhető *FH* négyzetével – *KF* és *FH* ugyanis négyzetesen összemérhetők –, *KF* tehát lineárisan összemérhető *FE*-vel (X. 11.), úgyhogy *KE*-vel is lineárisan összemérhető *KF* (X. 15.). *KE* racionális és lineárisan összemérhető *BC*-vel, tehát *KF* is racionális és lineárisan összemérhető *BC*-vel (X. 12.). Mivel *BC* úgy aránylik *CD*-hez, mint *KF* az *FH*-hoz, fölcserélve *BC* úgy aránylik *KF*-hez, mint *DC* az *FH*-hoz (V. 16.). *BC* összemérhető *KF*-fel, tehát *FH* is lineárisan összemérhető *CD*-vel (X. 11.). *BC* és *CD* csak négyzetesen összemérhető racionálisok, tehát *KF* és *FH* is csak négyzetesen összemérhető racionálisok, *KH* tehát binomiális.



Ha *BC* négyzetértéke egy vele összemérhető szakasz négyzetével nagyobb *CD*-énél, akkor *KF* négyzetértéke is egy vele összemérhető szakasz négyzetével nagyobb *FH*-énál (X. 14.). Ha *BC* lineárisan összemérhető az adott racionálissal, akkor *KF* is, ha *CD* lineárisan összemérhető az adott racionálissal, akkor *FH* is, ha pedig sem *BC*, sem *CD*, akkor sem *KF*, sem *FH* (X. 12–13.).

Ha *BC* négyzetértéke egy vele összemérhetetlen szakasz négyzetével nagyobb *CD*-énél, akkor *KF* négyzetértéke is egy vele összemérhetetlen szakasz négyzetével nagyobb *FH*-énál (X. 14.). Ha *BC* lineárisan összemérhető az adott racionálissal, akkor *KF* is, ha *CD*, akkor *FH* is, ha pedig sem *BC*, sem *CD*, akkor sem *KF*, sem *FH* (X. 12–13.).

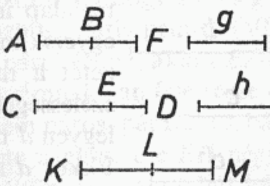
KH tehát binomiális, tagjai, *KF* és *FH* összemérhetők az apotomé tagjaival, *BC*-vel, illetve *CD*-vel és ugyanabban az arányban állnak, és végül *KH* ugyanannyiadik, mint *BC*. Éppen ezt kellett megmutatni.

X. 114. Tétel

Ha egy idomot egy apotomé és egy binomiális fog közre, és ennek tagjai összemérhetők az apotomé tagjaival és ugyanabban az arányban állnak, akkor a szakasz, melynek az idom négyzetértéke, racionális.

Fogja közre ugyanis az *AB* és *CD* közötti idomot az *AB* apotomé és a *CD* binomiális, ennek nagyobb tagja legyen *CE*, és legyenek a binomiális tagjai, *CE* és *ED*, összemérhetők az apotomé tagjaival, *AF*-fel és *FB*-vel és álljanak ugyanabban az arányban. Legyen a szakasz, melynek négyzetértéke az *AB* és *CD* közötti téglalap, *g*. Azt állítom, hogy *g* racionális.

Vegyük a *h* racionálist, és illesszünk *CD*-hez egy *h* négyzetével egyenlő *KL* szélességű téglalapot (I. 44.).



Ekkor *KL* apotomé, a tagjai – legyenek ezek *KM* és *ML* – összemérhetők a binomiális tagjaival, *CE*-vel, illetve *ED*-vel és ugyanabban az arányban állnak (X. 112.). *CE* és *ED* viszont összemérhetők *AF*-fel, illetve *FB*-vel, és ugyanabban az arányban állnak, amint tehát *AF* az *FB*-hez, úgy aránylik *KM* az *ML*-hez (V. 11.). Fölcserélve tehát amint *AF* a *KM*-hez, úgy *BF* az *LM*-hez (V. 16.), a maradék *AB* tehát úgy aránylik a maradék *KL*-hez, mint *AF* a *KM*-hez (V. 19.). *AF* összemérhető *KM*-mel (X. 12.), *AB* is összemérhető tehát *KL*-lel (X. 11.). Amint *AB* a *KL*-hez, úgy aránylik a *CD* és *AB* közötti téglalap a *CD* és *KL* közöttihez (VI. 1.), a *CD* és *AB* közötti téglalap tehát összemérhető a *CD* és *KL* közöttivel (X. 11.). A *CD* és *KL* közötti téglalap egyenlő *h* négyzetével, a *CD* és *AB* közötti téglalap tehát összemérhető *h* négyzetével. A CD és AB közötti téglalappal egyenlő g négyzete, g négyzete tehát összemérhető h négyzetével. h négyzete racionális, g négyzete is racionális tehát, g tehát racionális. S négyzetértéke a CD és AB közötti téglalap.

Ha tehát egy idomot egy apotomé és egy binomiális fog közre, és ennek tagjai összemérhetők az apotomé tagjaival és ugyanabban az arányban állnak, akkor a szakasz, melynek az idom négyzetértéke, racionális.

Következmény

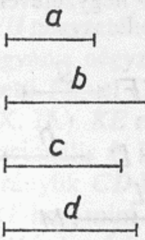
Ezáltal is nyilvánvaló lett számunkra, hogy irracionális szakaszok közrefoghatnak racionális idomot. Éppen ezt kellett megmutatni.

X. 115. Tétel

*Egy mediálisból végtelen sok irracionálist kapunk, és egyik sem egyezik meg semelyik korábbival.**

Legyen a egy mediális. Azt állítom, hogy a-ból végtelen sok irracionálist kapunk, és egyik sem egyezik meg semelyik korábbival.

Vegyük a b racionálist, és legyen a b és a közötti téglalappal egyenlő c négyzete (II. 14.). Ekkor c irracionális, mert irracionális (X. 21.) és racionális szakasz által közrefogott téglalap irracionális (X. 20.), és egyik korábbival sem egyezik meg, mert egyetlen korábbi irracionális négyzetét a racionálishoz illesztve sem kapunk mediális szélességet (X. 22., 60–65., 97–102., 111. K.). Ismét, legyen d négyzete egyenlő a b és c közötti téglalappal. Ekkor d négyzete irracionális, d tehát irracionális, és egyik korábbival sem egyezik meg, mert egyetlen korábbi irracionális négyzetét a racionálishoz illesztve sem kapjuk c-t szélességként. Ha ezt a sort a végtelenségig hasonlóképp folytatjuk, nyilvánvaló, hogy egy mediálisból végtelen sok irracionálist kapunk, és egyik sem egyezik meg semelyik korábbival. Éppen ezt kellett megmutatni.



X. 27. Függelék

*Mutassuk meg, hogy a négyzetekben az átló lineárisan összemérhetetlen az oldallal!**

Legyen $ABCD$ egy négyzet és AC egy átlója. Azt állítom, hogy CA lineárisan összemérhetetlen AB-vel.

Tegyük föl ugyanis, hogy összemérhető. Azt állítom, hogy ugyanaz a szám párosnak és páratlannak fog mutatkozni. Nyilvánvaló, hogy AC négyzete kétszerese AB négyzetének (I. 47.). Minthogy CA összemérhető AB-vel, CA úgy aránylik AB-hez, mint szám számhoz (X. 5.). Arányuljanak mint EF a g-hez, és legyenek EF és g a legkisebb számok, melyek ugyanabban az arányban állnak, mint ők (VII. 33.). Ekkor EF nem egység. Ha ugyanis EF egység, úgy aránylik g-hez, mint AC az AB-hez és AC nagyobb AB-nél, akkor EF is nagyobb a g számnál (V. 14.), ami ellentmondás. EF tehát nem egység, szám tehát. Mivel amint CA az AB-hez, úgy aránylik EF a g-hez, amint CA négyzete AB négyzetéhez, úgy aránylik EF négyzete g négyzetéhez (vö. VI. 20. K., VIII. 11.). CA négyzete kétszerese AB négyzetének, tehát EF négyzete is kétszerese g négyzetének, EF négyzete tehát páros, úgyhogy maga EF is páros, ha ugyanis páratlan lenne, akkor a négyzete is páratlan lenne, minthogy ha összeadunk valahány páratlan számot, melyek páratlan sokan vannak, akkor az összeg páratlan (IX. 23.), EF tehát páros. Felezzük meg H-ban. Minthogy EF és g a legkisebbek az ugyanezen arányú számok között, relatív prímek (VII. 22.). EF páros, g tehát páratlan. Ha ugyanis páros lenne, akkor EF-et és g-t osztaná a diád – hiszen minden páros számnak van fele része –, noha relatív prímek, ami lehetetlen. g tehát nem páros, páratlan tehát. Minthogy EF kétszerese EH-nak, EF négyzete négyszerese EH négyzetének. EF négyzete kétszerese g négyzetének, g négyzete tehát kétszerese EH négyzetének, g négyzete tehát páros. Ekkor a mondottak miatt g páros. Viszont páratlan is, ami lehetetlen. CA tehát nem lineárisan összemérhető AB-vel. Éppen ezt kellett megmutatni.