Tizenegyedik könyv

Definíciók

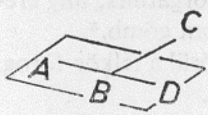
1. Test az, aminek hosszúsága, szélessége és magassága is van.
2. Test vége felület.
3. Egy egyenes merőleges egy síkra, ha valamennyi őt metsző síkbeli egyenesre merőleges.*
4. Két sík merőleges egymásra, ha az egyik síkban a síkok közös részére* bocsátott merőlegesek merőlegesek a másik síkra.
5. Ha egy szakasz külső végpontjából merőlegest bocsátunk egy síkra, és a kapott (metszés)pontot összekötjük a szakasz síkbeli végével, akkor a szakasznak a síkhoz való hajlata az összekötő és az eredeti szakasz által közrefogott szög.
6. Két sík hajlata az a hegyesszög, melyet a síkok közös részére ugyanabban a pontban az egyes síkokban állított merőlegesek fognak közre.
7. Azt mondjuk, hogy két sík hasonlóképp hajlik egymáshoz, mint másik kettő, ha a mondott hajlásszögek egyenlők egymással.
8. Síkok párhuzamosak, ha nem találkoznak.
9. Téridomok* hasonlók, ha ugyanannyi, (páronként) hasonló síkidom fogja őket közre.
10. Téridomok* egyenlők és hasonlók, ha ugyanannyi, (páronként) egyenlő nagyságú és hasonló síkidom fogja őket közre.
11. A térszög több mint két, egymást metsző és nem ugyanazon a felületen fekvő vonal egymáshoz való hajlata. Másképp: térszög az, amit több mint két, nem egy síkban fekvő közös csúcsú síkszög fog közre.

12. Gúla az olyan téridom, melyet egy síkból induló egy pontban találkozó síklapok fognak közre.
13. Hasáb az olyan síklapok által közrefogott téridom, melynek két szemközti lapja egyenlő (területű), hasonló és párhuzamos, a többi pedig paralelogramma.
14. Ha egy félkört rögzített átmérője körül addig forgatunk, míg eredeti helyzetét újra el nem éri, a közrefogott idom gömb.*
15. A gömb tengelye az a rögzített szakasz, mely körül a félkör forog.
16. A gömb középpontja ugyanaz, mint a félköré.
17. A gömbnek átmérője bármely a középponton át haladó és mindkétoldalt a gömb felszínén végződő szakasz.
18. Ha egy derékszögű háromszöget egyik derékszög melletti oldalát rögzítve addig forgatunk, míg eredeti helyzetét újra el nem éri, a közrefogott idom kúp. Ha a rögzített oldal egyenlő a körbeforgatott másik derékszög melletti oldallal, akkor a kúp derékszögű, ha kisebb, akkor tompaszögű, ha pedig nagyobb, akkor hegyesszögű.*
19. A kúp tengelye a rögzített szakasz, mely körül a háromszög forog.
20. Alapja pedig az a kör, melyet a körbeforgatott oldal súrol.
21. Ha egy téglalapot egyik derékszög melletti oldalát rögzítve addig forgatunk, míg eredeti helyzetét újra el nem éri, a közrefogott idom henger.
22. A henger tengelye a rögzített szakasz, mely körül a téglalap forog.
23. Alapjai pedig azok a körök, melyeket a két, egymással szemközt körbeforgatott oldal súrol.
24. Kúpok és hengerek hasonlók, ha tengelyeik és alapjaik átmérői arányosak.
25. Kocka a hat egyenlő négyzet által közrefogott téridom.
26. Oktaéder a nyolc egyenlő (területű), egyenlő oldalú háromszög által közrefogott téridom.
27. Ikozaéder a húsz egyenlő, egyenlő oldalú háromszög által közrefogott téridom.
28. Dodekaéder a tizenkettő egyenlő, egyenlő oldalú és szögű ötszög által közrefogott téridom.

XI. 1. Tétel

Nem lehetséges, hogy egy szakasz egy része az alapsíkban, más része pedig egy rá ferde síkban legyen.

Tegyük föl ugyanis, hogy az *ABC* szakasz egy része, *AB*, az alapsíkban, más része pedig, *BC*, egy arra ferde síkban van.



Az *AB* szakasznak van egy egyenes menti folytatása az alapsíkban. Legyen ez *BD*. Ekkor az *ABC*, *ABD* egyeneseknek közös része *AB*, ami nem lehetséges, minthogy ha *B* középponttal és *AB* sugárral egy kört rajzolunk, abban az átmérők különböző köríveket metszenek ki (I. 17. D.).

Nem lehetséges tehát, hogy egy szakasz egy része az alapsíkban, más része pedig egy arra ferde síkban legyen.

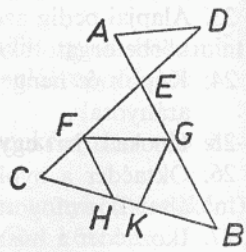
F.: XI. 2., 16.

XI. 2. Tétel

Ha két egyenes metszi egymást, akkor egy síkban fekszenek, és minden háromszög egy síkban fekszik.

Messe ugyanis két egyenes, *AB* és *CD* egymást az *E* pontban. Azt állítom, hogy *AB* és *CD* egy síkban fekszenek, és minden háromszög egy síkban fekszik.

Legyen *F* és *G* az *EC*, *EB* szakaszokon tetszőlegesen választott pont, kössük össze *CB*-t és *FG*-t, és húzzunk *FH* és *GK* metsző egyeneseket. Először is azt állítom, hogy az *ECB* háromszög egy síkban fekszik. Ha ugyanis az *ECB* háromszög *FHC* vagy *GBK* része az alapsíkban van, a maradék pedig egy másikban, akkor az *EC*, *EB* szakaszok közül is az egyiknek egy része az alapsíkban, más része pedig egy másikban van. Ha az *ECB* háromszög *FCBG* része fekszik az alapsíkban, a maradék pedig egy másikban, akkor mind az *EC*, mind az *EB* szakasz egy része az alapsíkban, más része pedig egy másikban van. Erről megmutattuk, hogy nem lehetséges (XI. 1.), az *ECB* háromszög tehát egy síkban fekszik. Amely síkban fekszik az *ECB* háromszög, abban fekszik *EC* és *EB* is, s



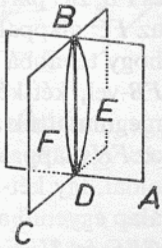
amelyben *EC* és *EB*, abban *AC* és *CD* is (XI. 1.). Az *AB*, *CD* egyenesek tehát egy síkban fekszenek, és minden háromszög egy síkban fekszik. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: XI. 6., 8., 17.

XI. 3. Tétel

Ha két sík metszi egymást, a közös részük egyenes.

Messe ugyanis egymást két sík, *AB* és *BC*, és legyen a *DB* vonal a közös részük. Azt állítom, hogy a *DB* vonal egyenes.



Tegyük föl ugyanis, hogy nem, és illesszünk *D*-re és *B*-re az *AB* síkban egy *DEB*, a *BC* síkban pedig egy *DFB* egyenest. Ekkor *DEB*-nek és *DFB*-nek ugyanazok a végpontjai, és nyilván területet fognak közre, ami nem lehetséges (9. Ax.). *DEB* és *DFB* tehát nem egyenesek. Hasonlóképp mutatható meg, hogy egyetlen más *D*-re és *B*-re illesztett vonal sem egyenes, kivéve az *AB* és *BC* sík *DC* közös részét.

Ha tehát két sík metszi egymást, a közös részük egyenes. Éppen ezt kellett megmutatni.

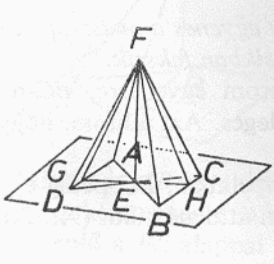
F.: XI. 5., 7., 13–14.

XI. 4. Tétel

Ha két metsző egyenesre a metszéspontjukban merőlegest állítunk, akkor ez a merőleges a két egyenes síkjára is merőleges.

Állítsunk ugyanis két, egymást metsző egyenesre, *AB*-re és *CD*-re, az *E* metszéspontjukban egy *EF* merőlegest. Azt állítom, hogy *EF* az *AB*-n és *CD*-n átmenő síkra is merőleges.

Messük ki az egymással egyenlő *AE*, *EB*, *CE*, *ED* szakaszokat,



húzzunk *E*-n át egy tetszőleges *GEH* egyenest, kössük össze *AD*-t és *CB*-t, és húzzuk meg a tetszőleges *F*-ből *FA*-t, *FG*-t, *FD*-t, *FC*-t, *FH*-t és *FB*-t. Minthogy e két-két szakasz, *AE*, *ED* és *CE*, *EB* páronként egyenlő és egyenlő szögeket fognak közre (I. 15.), az *AD* alap egyenlő a *CB* alappal és az *AED* háromszög egyenlő a *CEB* háromszöggel (I. 4.), úgyhogy a *DAE* szög is egyenlő az *EBC* szöggel. Az *AEG* szög egyenlő *BEH*-val (I. 15.), két háromszögnek tehát, *AGE*-nek és *BEH*-nak két-két szöge és egy-egy oldala, az egyenlő szögek melletti *AE* és *EB* páronként egyenlő, tehát a többi oldal is páronként egyenlő (I. 26.). *GE* tehát egyenlő *EH*-val, *AG* pedig *BH*-val. Minthogy *AE* egyenlő *EB*-vel, *FE* közös oldal és derékszögeket zár be velük, az *FA* alap egyenlő az *FB* alappal (I. 4.). Ugyanígy *FC* is egyenlő *FD*-vel. Minthogy *AD* egyenlő *CB*-vel, *FA* egyenlő *FB*-vel, két-két oldal, *FA*, *AD* és *FB*, *BC* páronként egyenlő. S megmutattuk, hogy az *FD* alap egyenlő az *FC* alappal, az *FAD* szög is egyenlő tehát az *FBC* szöggel. Minthogy továbbá megmutattuk, hogy *AG* egyenlő *BH*-val, és *FA* egyenlő *FB*-vel, két-két oldal, *FA*, *AG* és *FB*, *BH* páronként egyenlő. Mint megmutattuk az *FAG* szög egyenlő *FBH*-val, az *FG* alap tehát egyenlő az *FH* alappal (I. 4.). Mint megmutattuk *GE* egyenlő *EH*-val, *EF* közös oldal, így két-két oldal, *GE*, *EF* és *HE*, *EF* páronként egyenlő. Az *FG* alap egyenlő az *FH* alappal, a *GEF* szög tehát egyenlő *HEF*-fel (I. 8.), *GEF* és *HEF* tehát derékszögek (I. 10. D.). *FE* tehát merőleges az *E* ponton át haladó tetszőleges *GH* egyenesre. Hasonlóképp mutathatnánk meg, hogy *FE* bármely őt metsző és az alapsíkban fekvő egyenesre merőleges. Egy egyenes viszont merőleges egy síkra, ha valamennyi őt metsző síkbeli egyenesre merőleges (XI. 3. D.), *FE* tehát merőleges az alapsíkra. Az alapsík az *AB* és *CD* egyeneseken átmenő sík, *FE* tehát merőleges az *AB*-n és *CD*-n átmenő síkra.

Ha tehát két metsző egyenesre a metszéspontjukban merőlegest állítunk, akkor ez a merőleges a két egyenes síkjára is merőleges. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: XI. 5., 8–9., 11.; XIII. 15.

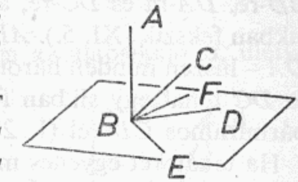
XI. 5. Tétel

Ha három, egy ponton átmenő egyenesre egy egyenes a metszéspontjukban merőleges, akkor a három egyenes egy síkban fekszik.

Legyen ugyanis valamely *AB* egyenes három egyenesre, *BC*-re, *BD*-re és *BE*-re a *B* metszéspontjukban merőleges. Azt állítom, hogy *BC*, *BD* és *BE* egy síkban fekszik.

Tegyük föl ugyanis, hogy *BD* és *BE* az alapsíkban, *BC* pedig egy ferde síkban fekszik. Vegyük az *AB*-n és *BC*-n átmenő síkot (XI. 2.).

Ennek és az alapsíknak a közös része egy egyenes lesz (XI. 3.). Legyen ez *BF*. Az *AB*-n és *BC*-n átmenő egy síkban fekszik tehát e három egyenes, *AB*, *BC* és *BF*. Minthogy *AB* merőleges *BD*-re és *BE*-re, a *BD*-n és *BE*-n átmenő síkra is merőleges (XI. 4.). A *BD*-n és *BE*-n átmenő sík az alapsík, úgyhogy *AB* valamennyi őt metsző alapsíkbeli egyenesre merőleges (XI. 3. D.). Az alapsíkbeli *BF* egyenes metszi, az *ABF* szög tehát derékszög. Feltétel szerint *ABC* is derékszög, *ABF* tehát egyenlő az *ABC* szöggel (4. P.), és egy síkban fekszenek (a szögszárak). Ez nem lehetséges (8. Ax.), a *BC* egyenes tehát nem egy ferde síkban fekszik, e három egyenes tehát, *BC*, *BD* és *BE* egy síkban fekszik.



Ha tehát három, egy ponton átmenő egyenesre egy egyenes a metszéspontjukban merőleges, akkor a három egyenes egy síkban fekszik. Éppen ezt kellett megmutatni.

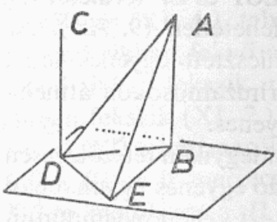
F.: XI. 6.

XI. 6. Tétel

Ha két egyenes merőleges ugyanarra a síkra, akkor az egyenesek párhuzamosak.

Legyen ugyanis két egyenes, *AB* és *CD* merőleges az alapsíkra. Azt állítom, hogy *AB* párhuzamos *CD*-vel.

Legyenek ugyanis az alapsíkkal való metszéspontjaik *B* és *D*, kössük össze *BD*-t, emeljünk az alapsíkban *BD*-re egy *DE* merőlegest (I. 11.), legyen *DE* egyenlő *AB*-vel (I. 3.), és kössük össze *BE*-t, *AE*-t és *AD*-t. Minthogy *AB* merőleges az alapsíkra, valamennyi őt metsző alapsíkbeli egyenesre merőleges. *AB* metszi az alapsíkbeli *BD*-t és *BE*-t, *ABD* és *ABE* tehát derékszög. Ugyanígy *CDB* és *CDE* is derékszög. Minthogy *AB* egyenlő *DE*-vel és *BD* közös oldal, *AB*, *BD* és *ED*, *DB* páronként egyenlő; s egyenlő szöget fognak közre, az *AD* alap tehát egyenlő a *BE* alappal (I. 4.). Minthogy *AB* egyenlő *DE*-vel és *AD* a



BE-vel, *AB*, *BE* és *ED*, *DA* páronként egyenlő; s *AE* közös alapjuk, az *ABE* szög tehát egyenlő az *EDA* szöggel (I. 8.). *ABE* derékszög, tehát *EDA* is derékszög, *ED* tehát merőleges *DA*-ra. *BD*-re és *DC*-re is merőleges, *ED* tehát merőleges három, egy ponton átmenő egyenesre, *BD*-re, *DA*-ra és *DC*-re, a három egyenes tehát, *BD*, *DA* és *DC* egy síkban fekszik (XI. 5.). *AB* abban a síkban fekszik, amelyikben *DB* és *DA* – hiszen minden háromszög egy síkban fekszik (XI. 2.) –, *AB*, *BD* és *DC* tehát egy síkban fekszik. *ABD* és *BDC* derékszög, *AB* tehát párhuzamos *CD*-vel (I. 28.).

Ha tehát két egyenes merőleges ugyanarra a síkra, akkor az egyenesek párhuzamosak. Éppen ezt kellett megmutatni.

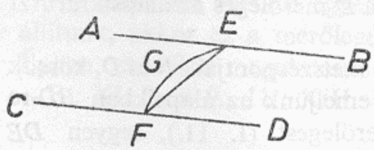
F.: XI. 9.; XII. 17.; XIII. 16–17.

XI. 7. Tétel

*Ha van két párhuzamos egyenes, és mindegyiken tetszőlegesen veszünk egy pontot, akkor a pontokra illeszkedő egyenes ugyanabban a síkban fekszik, mint a párhuzamosok.**

Legyen *AB* és *CD* két párhuzamos egyenes, és vegyünk mindegyiken tetszőlegesen egy-egy pontot, *E*-t, illetve *F*-et. Azt állítom, hogy az *E*, *F* pontokra illeszkedő egyenes ugyanabban a síkban fekszik, mint a párhuzamosok.

Tegyük föl ugyanis, hogy egy ferde síkban van, mint *EGF*, és fektessünk *EGF*-en át síkot. Ennek az alapsíkkal vett metszete egyenes lesz (XI. 3.), ez legyen *EF*. Ekkor két szakasz, *EGF* és *EF* területet fog közre, ami lehetetlen (9. Ax.). Az *E*-ből *F*-re illesztett egyenes tehát nem egy ferde síkban fekszik, az *AB*, *CD* párhuzamosokon átmenő síkban fekszik tehát az *E*-ből *F*-re illesztett egyenes.



Ha tehát van két párhuzamos egyenes, és mindegyiken tetszőlegesen veszünk egy pontot, akkor a pontokra illeszkedő egyenes ugyanabban a síkban fekszik, mint a párhuzamosok. Éppen ezt kellett megmutatni.

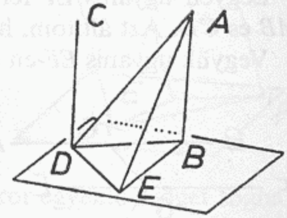
F.: XI. 8.; XII. 17.

XI. 8. Tétel

Ha van két párhuzamos egyenes, és az egyikük merőleges valamely síkra, akkor a másik is merőleges arra a síkra.

Legyen *AB* és *CD* két párhuzamos egyenes, és legyen az egyikük, *AB* merőleges az alapsíkra. Azt állítom, hogy a másik, *CD* is merőleges erre a síkra.

Legyen ugyanis *AB* és *CD* metszéspontja az alapsíkkal *B*, illetve *D*, és húzzuk meg *BD*-t. *AB*, *CD* és *BD* egy síkban fekszenek (XI. 7.). Emeljünk az alapsíkban *BD*-re egy *DE* merőlegest (I. 11.), legyen *DE* egyenlő *AB*-vel (I. 3.), és húzzuk meg *BE*-t, *AE*-t, *AD*-t. Minthogy *AB* merőleges az alapsíkra, valamennyi őt metsző alapsíkbeli egyenesre is merőleges, *ABD* és *ABE* tehát derékszög. Minthogy a párhuzamos *AB*-t és *CD*-t metszi a *BD* egyenes, az *ABD*, *CDB* szögek összege két derékszöggel egyenlő (I. 29.). *ABD* derékszög, tehát *CDB* is derékszög, *CD* tehát merőleges *BD*-re. Minthogy *AB* egyenlő *DE*-vel és *BD* közös oldal, két-két oldal, *AB*, *BD* és *ED*, *DB* páronként egyenlő; s az *ABD* szög egyenlő az *EDB* szöggel – derékszög ugyanis mind a kettő –, az *AD* alap egyenlő tehát a *BE* alappal (I. 4.). Minthogy *AB* egyenlő *DE*-vel, *BE* pedig *AD*-vel, két-két oldal, *AB*, *BE* és *ED*, *DA* páronként egyenlő; s *AE* közös alapjuk, az *ABE* szög tehát egyenlő az *EDA* szöggel (I. 8.). *ABE* derékszög, tehát *EDA* is derékszög, *ED* tehát merőleges *AD*-re. *DB*-re is merőleges, tehát a *BD*-n és *DA*-n átmenő síkra is merőleges (XI. 4.), tehát valamennyi őt metsző, és a *BD*-n és *DA*-n átmenő síkban fekvő egyenesre merőleges. *DC* a *BD*-n és *DA*-n átmenő síkban fekszik, minthogy *AB* és *BD* a *BD*-n és *DA*-n átmenő síkban fekszik (XI. 2.), és amelyik síkban *AB* és *BD*, abban fekszik *DC* is. *ED* tehát merőleges *DC*-re, úgyhogy *CD* is merőleges *DE*-re. *CD* a *BD*-re is merőleges, *CD* tehát két metsző egyenesre, *DE*-re és *DB*-re merőleges a *D* metszéspontjukban, úgyhogy *CD* a *DE*-n és *DB*-n átmenő síkra is merőleges (XI. 4.). A *DE*-n és *DB*-n átmenő sík az alapsík, *CD* tehát merőleges az alapsíkra.



Ha tehát van két párhuzamos egyenes, és az egyikük merőleges valamely síkra, akkor a másik is merőleges arra a síkra. Éppen ezt kellett megmutatni.

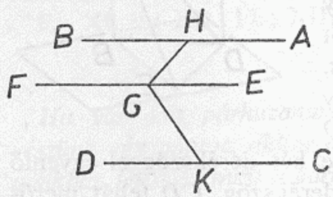
F.: XI. 9., 11–12., 18., 35.

XI. 9. Tétel

Az ugyanazzal az egyenessel párhuzamos és vele nem egy síkban fekvő egyenesek egymással is párhuzamosak.

Legyen ugyanis *EF*-fel párhuzamos a vele nem egy síkban fekvő *AB* és *CD*. Azt állítom, hogy *AB* párhuzamos *CD*-vel.

Vegyük ugyanis *EF*-en a tetszőleges *G* pontot, és emeljünk belőle az *EF*-en és *AB*-n átmenő síkban egy *GH*, az *FE*-n és *CD*-n átmenő síkban pedig egy *GK* merőlegest (I. 11.). Minthogy *EF* merőleges *GH*-ra és *GK*-ra, a *GH*-n és *GK*-n átmenő síkra is merőleges (XI. 4.). *EF* párhuzamos *AB*-vel, tehát *AB* is merőleges a *HG*-n és *GK*-n átmenő síkra (XI. 8.). Ugyanígy *CD* is merőleges a *HG*-n és *GK*-n átmenő síkra, *AB* és *CD* tehát mindketten merőlegesek a *HG*-n és *GK*-n átmenő síkra, ha viszont két egyenes merőleges ugyanarra a síkra, akkor az egyenesek párhuzamosak (XI. 6.), *AB* tehát párhuzamos *CD*-vel. Éppen ezt kellett megmutatni.



F.: XI. 10., 15., 38.; XII. 17.

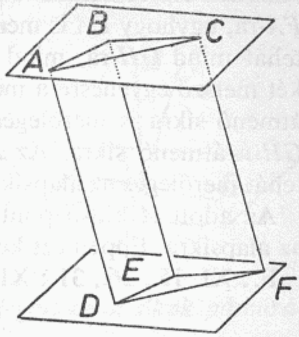
XI. 10. Tétel

Ha két, egymást metsző egyenes párhuzamos két, nem ugyanabban a síkban fekvő, egymást metsző egyenessel, akkor egyenlő szöget fognak közre.

Legyen ugyanis két, egymást metsző egyenes, *AB* és *BC* párhuzamos két, nem ugyanabban a síkban fekvő, egymást metsző egyenessel, *DE*-vel, illetve *EF*-fel. Azt állítom, hogy az *ABC* szög egyenlő *DEF*-fel.

Messük ugyanis le az egymással egyenlő *BA*, *BC*, *ED*, *EF* szakaszokat (I. 3.), és húzzuk meg *AD*-t, *CF*-et, *BE*-t, *AC*-t és *DF*-et. Minthogy *BA* egyenlő és párhuzamos *ED*-vel, *AD* is párhuzamos és egyenlő

BE-vel (I. 33.). Ugyanígy *CF* egyenlő és párhuzamos *BE*-vel, *AD* és *CF* tehát mindketten egyenlők és párhuzamosak *BE*-vel. Az ugyanazzal az egyenessel párhuzamos és vele nem egy síkban fekvő egyenesek viszont egymással is párhuzamosak (XI. 9.), *AD* tehát párhuzamos *CF*-fel, és egyenlő vele. *AC* és *DF* kötik össze őket, tehát *AC* is egyenlő és párhuzamos *DF*-fel (I. 33.). Minthogy két-két oldal, *AB*, *BC* és *DE*, *EF* páronként egyenlő, és az *AC* alap egyenlő a *DF* alappal, az *ABC* szög egyenlő a *DEF* szöggel (I. 8.).



Ha tehát két, egymást metsző egyenes párhuzamos két, nem ugyanabban a síkban fekvő, egymást metsző egyenessel, akkor egyenlő szöget fognak közre. Éppen ezt kellett megmutatni.

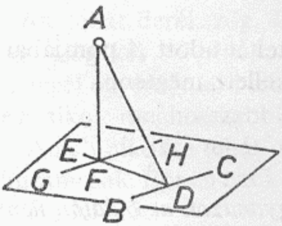
F.: XI. 24.; XII. 3.

XI. 11. Tétel

Bocsássunk adott síkra adott külső pontból merőlegest!

Legyen *A* az adott külső pont, és az alapsík az adott sík. Az *A* pontból az alapsíkra kell tehát merőlegest bocsátani.

Vegyünk ugyanis az alapsíkban egy tetszőleges *BC* egyenest, és bocsássunk az *A* pontból *BC*-re egy *AD* merőlegest (XI. 2., I. 12.). Ha *AD* az alapsíkra is merőleges, készen vagyunk a feladattal. Ha nem, emeljünk a *D* pontból az alapsíkban *BC*-re egy *DE* merőlegest (I. 11.), bocsássunk *A*-ból *DE*-re egy *AF* merőlegest (XI. 2., I. 12.), és húzzuk *F*-en át *BC*-vel párhuzamosan *GH*-t (I. 31.).



Minthogy *BC* mind *DA*-ra, mind *DE*-re merőleges, az *ED*-n és *DA*-n átmenő síkra is merőleges (XI. 4.). *GH* párhuzamos *BC*-vel, ha viszont van két párhuzamos egyenes, és az egyikük merőleges valamely síkra, akkor a másik is merőleges arra a síkra (XI. 8.), tehát

GH is merőleges az ED-n és DA-n átmenő síkra, így valamennyi őt metsző, és az ED-n és DA-n átmenő síkban fekvő egyenesre merőleges. Az ED-n és DA-n átmenő síkban fekvő AF metszi, GH tehát merőleges FA-ra, úgyhogy FA is merőleges HG-re. AF a DE-re is merőleges, AF tehát mind GH-ra, mind DE-re merőleges. Ha viszont egy egyenes két metsző egyenesre a metszéspontjukban merőleges, akkor a rajtuk átmenő síkra is merőleges (XI. 4.), FA tehát merőleges az ED-n és GH-n átmenő síkra. Az ED-n és GH-n átmenő sík az alapsík, AF tehát merőleges az alapsíkra.

Az adott A külső pontból tehát egy AF merőlegest bocsátottunk az alapsíkra. Éppen ezt kellett megtenni.

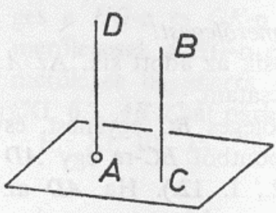
F.: XI. 15., 26., 31.; XII. 17.

XI. 12. Tétel

Állítsunk adott síkra adott pontjában merőlegest!

Legyen az alapsík az adott sík és A az adott pontja. Az A pontban az alapsíkra kell tehát merőlegest állítani.

Tekintsünk valamely B külső pontot, bocsássunk B-ből az alapsíkra egy BC merőlegest (XI. 11.), és húzzuk az A ponton át BC-vel párhuzamosan AD-t (XI. 2., I. 31.).



Minthogy AD és CB két párhuzamos egyenes, és az egyikük, BC merőleges az alapsíkra, a másik, AD is merőleges az alapsíkra (XI. 8.).

Az adott síkra tehát adott A pontjában egy AD merőlegest állítottunk. Éppen ezt kellett megtenni.

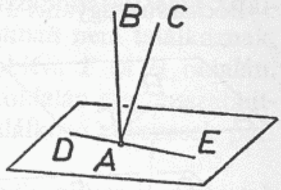
F.: XI. 23., 26.; XIII. 14.

XI. 13. Tétel

Ugyanarra a síkra ugyanabban a pontban ugyanazon az oldalon nem állítható két (különböző) merőleges.

Tegyük föl ugyanis, hogy ugyanabban az A pontban ugyanazon az oldalon az alapsíkra két egyenes, AB és AC merőleges. Fektessünk át BA-n és AC-n síkot (XI. 2.). Ennek az alapsíkkal vett metszete egy A-n átmenő egyenes lesz (XI. 3.). Ez legyen DAE. AB, AC és DAE

egy síkban fekszenek. Minthogy *CA* merőleges az alapra, valamennyi őt metsző alapsíkbeli egyenesre merőleges. Az alapsíkban fekvő *DAE* metszi, *CAE* tehát derékszög. Ugyanígy *BAE* is derékszög, *CAE* tehát egyenlő *BAE*-vel (4. P.). S egy síkban fekszenek, ami lehetetlen (8. Ax.).



Nem állítható tehát ugyanarra a síkra ugyanabban a pontban ugyanazon az oldalon két (különböző) merőleges. Éppen ezt kellett megmutatni.

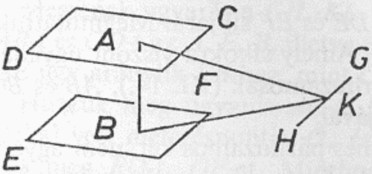
F.: XI. 19.

XI. 14. Tétel

Amely síkokra ugyanaz az egyenes merőleges, azon síkok párhuzamosak.

Legyen ugyanis valamely *AB* egyenes mind a *CD*, mind az *EF* síkra merőleges. Azt állítom, hogy a síkok párhuzamosak.

Ellenkező esetben ugyanis meghosszabbítva találkoznak. Találkozzanak: a közös részük egy egyenes lesz (XI. 3.). Legyen ez *GH*, vegyünk *GH*-n egy tetszőleges *K* pontot, és húzzuk meg *AK*-t, *BK*-t. Minthogy *AB* merőleges az *EF* síkra, az *EF* sík meghosszabbításában fekvő *BK* egyenesre is merőleges, *ABK* tehát derékszög. Ugyanígy *BAK* is derékszög. Így az *ABK* háromszög két szögének, *ABK*-nak és *BAK*-nak az összege két derékszöggel egyenlő, ami lehetetlen (I. 17.). Nem találkoznak tehát a *CD*, *EF* síkok meghosszabbításai, párhuzamosak tehát a *CD*, *EF* síkok.



Amely síkokra tehát ugyanaz az egyenes merőleges, azon síkok párhuzamosak. Éppen ezt kellett megmutatni.

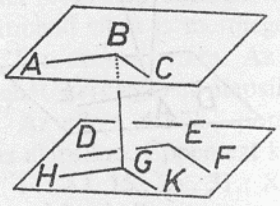
F.: XI. 15.

XI. 15. Tétel

Ha két, egymást metsző egyenes párhuzamos két, nem ugyanabban a síkban fekvő, egymást metsző egyenessel, akkor a rajtuk átmenő síkok párhuzamosak.

Legyen ugyanis két, egymást metsző egyenes, *AB* és *BC* párhuzamos két, nem ugyanabban a síkban fekvő, egymást metsző egyenessel, *DE*-vel, illetve *EF*-fel. Azt állítom, hogy az *AB*-n és *BC*-n, illetve *DE*-n és *EF*-en átmenő síkok nem találkoznak egymással.

Bocsássuk ugyanis a *B* pontból *DE* és *EF* síkjára a *BG* merőlegest (XI. 11.), mely messe a síkot a *G* pontban, és húzzuk a *G* ponton át párhuzamosan *ED*-vel *GH*-t, *EF*-fel pedig *GK*-t (I. 31.). Minthogy *BG* merőleges *DE* és *EF* síkjára, valamennyi őt metsző *DE* és *EF* síkjában fekvő egyenesre merőleges. A *DE* és *EF* síkjában fekvő *GH* és *GK* metszi, tehát mind *BGH*, mind *BGK* derékszög. Minthogy *BA* párhuzamos *GH*-val, a *GBA*, *BGH* szögek összege két derékszöggel egyenlő (I. 29.). *GBA* derékszög, tehát *GB* merőleges *BA*-ra. Ugyanígy *GB* a *BC*-re is merőleges. Minthogy a *GB* egyenes két, egymást metsző egyenesre, *BA*-ra és *BC*-re merőleges, *BA* és *BC* síkjára is merőleges (XI. 4.). [*BG* ugyanígy *GH* és *GK* síkjára is merőleges. *GH* és *GK* síkja *DE* és *EF* síkja, *BG* tehát merőleges *DE* és *EF* síkjára. Megmutattuk, hogy *AB* és *BC* síkjára is merőleges.] Amely síkokra viszont ugyanaz az egyenes merőleges, azon síkok párhuzamosak (XI. 14.), *AB* és *BC* síkja tehát párhuzamos *DE* és *EF* síkjával.

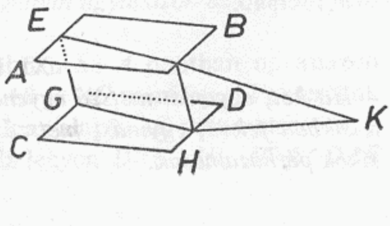


Ha tehát két, egymást metsző egyenes párhuzamos két, nem ugyanabban a síkban fekvő, egymást metsző egyenessel, akkor a rajtuk átmenő síkok párhuzamosak. Éppen ezt kellett megmutatni.

XI. 16. Tétel

Ha két párhuzamos síkot metsz egy sík, akkor a metszetek párhuzamosak.

Messen ugyanis az *EFGH* sík két párhuzamos síkot, *AB*-t és *CD*-t, és legyen *EF*, illetve *GH* a metszet (XI. 3.). Azt állítom, hogy *EF* párhuzamos *GH*-val.



Ellenkező esetben ugyanis *EF* és *GH* vagy *F* és *H*, vagy *E* és *G* oldalán találkozik. Hosszabbítsuk meg először őket F és H oldalán, és találkozzanak K-ban. Minthogy EFK az AB síkban fekszik, minden EFK-n levő pont az AB síkban fekszik (XI. 1.). K az EFK egyenesen levő pontok egyike, K tehát az AB síkban fekszik. Ugyanígy K a CD síkban is fekszik, az AB, CD síkok meghosszabbításai tehát találkoznak. A párhuzamossági feltétel miatt azonban nem találkoznak, EF és GH tehát nem találkozik meghosszabbítva F és H oldalán. Hasonlóképp mutathatnánk meg, hogy E és G oldalán meghosszabbítva sem találkoznak. Az egyik oldalon sem találkozó egyenesek párhuzamosak, EF tehát párhuzamos GH-val.

Ha tehát két párhuzamos síkot metsz egy sík, akkor a metszetek párhuzamosak. Éppen ezt kellett megmutatni.

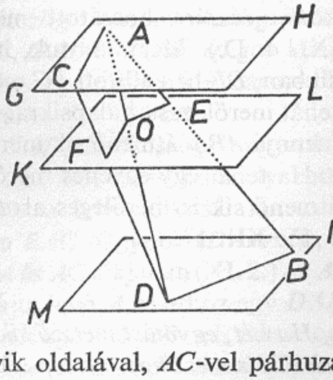
F.: XI. 17., 24.

XI. 17. Tétel

Ha két egyenest párhuzamos síkok metszenek, akkor ugyanazon arányban osztják őket.

Messenek ugyanis a GH, KL, MN párhuzamos síkok két egyenest, AB-t és CD-t az A, E, B, illetve C, F, D pontokban. Azt állítom, hogy AE úgy aránylik EB-hez, mint CF az FD-hez.

Húzzuk meg ugyanis AC-t, BD-t és AD-t, legyen AD-nek a KL síkkal vett metszéspontja O, és húzzuk meg EO-t, OF-et. Minthogy két párhuzamos síkot, KL-t és MN-et metsz az $EBDO$ sík (XI. 2.), a metszetek, EO és BD párhuzamosak (XI. 16.). Ugyanígy, minthogy két párhuzamos síkot, GH-t és KL-et metsz az $AOFC$ sík, a metszetek, AC és OF párhuzamosak. Minthogy az ABD háromszög egyik oldalával, BD-vel párhuzamos EO, AE úgy aránylik EB-hez, mint AO az OD-hez (VI. 2.). Ismét, minthogy az ADC háromszög egyik oldalával, AC-vel párhuzamos OF, AO úgy aránylik OD-hez, mint CF az FD-hez. Megmu-



tattuk, hogy amint *AO* az *OD*-hez, úgy aránylik *AE* az *EB*-hez, amint tehát *AE* az *EB*-hez, úgy *CF* az *FD*-hez (V. 11.).

Ha tehát két egyenest párhuzamos síkok metszenek, akkor ugyanazon arányban osztják őket. Éppen ezt kellett megmutatni.

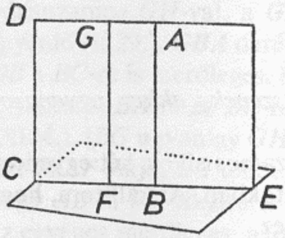
F.: XII. 4. L.

XI. 18. Tétel

Ha egy egyenes merőleges egy síkra, akkor valamennyi rajta átmenő sík is merőleges arra a síkra.

Legyen ugyanis valamely *AB* egyenes merőleges az alapsíkra. Azt állítom, hogy valamennyi *AB*-n átmenő sík is merőleges az alapsíkra.

Fektessünk át ugyanis *AB*-n egy *DE* síkot, legyen a *DE* sík és az alapsík metszete *CE* (XI. 3.), vegyünk *CE*-n egy tetszőleges *F* pontot, és emeljünk a *DE* síkban *CE*-re az *F* pontban egy *FG* merőlegest (I. 11.). Minthogy *AB* merőleges az alapsíkra, valamennyi őt metsző alapsíkbeli egyenesre merőleges, úgyhogy *CE*-re is merőleges, *ABF* tehát derékszög. *GFB* is derékszög, *AB* tehát párhuzamos *FG*-vel (I. 28.). *AB* merőleges az alapsíkra, tehát *FG* is merőleges az alapsíkra (XI. 8.). S két sík merőleges egymásra, ha az egyik síkban a síkok közös részére bocsátott merőlegesek merőlegesek a másik síkra (XI. 4. D.). Megmutattuk, hogy a síkok *CE* közös részére az egyik síkban, *DE*-ben állított *FG* merőleges merőleges az alapsíkra, a *DE* sík tehát merőleges az alapsíkra. Hasonlóképp mutatható meg, hogy valamennyi *AB*-n átmenő sík merőleges az alapsíkra.



Ha tehát egy egyenes merőleges egy síkra, akkor valamennyi rajta átmenő sík is merőleges arra a síkra. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: XII. 17.

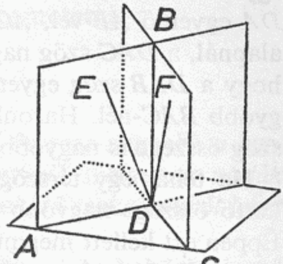
XI. 19. Tétel

Ha két, egymást metsző sík merőleges valamely síkra, akkor a közös részük is merőleges arra a síkra.

Legyen ugyanis két sík, *AB* és *BC* merőleges az alapsíkra, és legyen

BD a közös részük (XI. 3.). Azt állítom, hogy *BD* merőleges az alapsíkra.

Tegyük föl ugyanis hogy nem, és állítsunk az *AB* síkban az *AD* egyenesre a *D* pontban egy *DE*, a *BC* síkban pedig *CD*-re egy *DF* merőlegest (I. 11.). Minthogy az *AB* sík merőleges az alapsíkra és az *AD* közös részükre az *AB* síkban egy *DE* merőlegest emeltünk, *DE* merőleges az alapsíkra. Hasonlóképp mutathatnánk meg, hogy *DF* is merőleges az alapsíkra. Ugyanabban a *D* pontban tehát az alapsíkra két (különböző: XI. 4.) egyenes merőleges ugyanazon az oldalon. Ez nem lehetséges (XI. 13.). Nem állítható tehát az alapsíkra a *D* pontban más merőleges, csak az *AB* és *BC* sík közös része, *DB*.

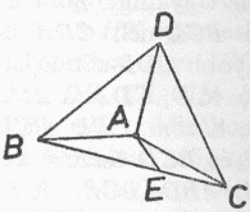


Ha tehát két, egymást metsző sík merőleges valamely síkra, akkor a közös részük is merőleges arra a síkra. Éppen ezt kellett megmutatni.

XI. 20. Tétel

Ha egy térszöget három síkszög fog közre, akkor bármely kettő összege nagyobb a harmadiknál, akárhogy választjuk is őket.

Fogja közre ugyanis az *A*-nál levő térszöget három síkszög, *BAC*, *CAD* és *DAB*. Azt állítom, hogy a *BAC*, *CAD* és *DAB* szögek közül bármely kettő összege nagyobb a harmadiknál, akárhogy választjuk is őket.



Ha a *BAC*, *CAD*, *DAB* szögek egyenlők egymással, nyilvánvaló, hogy bármely kettő összege nagyobb a harmadiknál. Ha nem egyenlők, legyen *BAC* nagyobb (*DAB*-nél), és szerkesszünk *BA* és *AC* síkjában (XI. 2.) az *AB* egyeneshez, a rajta levő *A* ponthoz egy *DAB*-vel egyenlő *BAE* szöget (I. 23.), legyen *AE* egyenlő *AD*-vel, messe egy *E*-n át húzott *BEC* egyenes az *AB*, *AC* egyeneseket a *B*, illetve *C* pontban, és kössük össze *DB*-t, *DC*-t. Minthogy *DA* egyenlő *AE*-vel és

AB közös oldal, két-két oldal egyenlő; s a *DAB* szög egyenlő a *BAE* szöggel, a *DB* alap tehát egyenlő a *BE* alappal (I. 4.). Minthogy *BD* és *DC* összege nagyobb *BC*-nél (I. 20.) s a *DB* tag, mint megmutattuk, egyenlő *BE*-vel, a maradék *DC* nagyobb a maradék *EC*-nél. Minthogy *DA* egyenlő *AE*-vel, *AC* közös oldal, és a *DC* alap nagyobb az *EC* alapnál, a *DAC* szög nagyobb az *EAC* szögnél (I. 25.). Megmutattuk, hogy a *DAB* szög egyenlő *BAE*-vel, *DAB* és *DAC* összege tehát nagyobb *BAC*-nél. Hasonlóképp mutathatnánk meg, hogy a többi két szög összege is nagyobb a harmadiknál.

Ha tehát egy térszöget három síkszög fog közre, akkor bármely kettő összege nagyobb a harmadiknál, akárhogy választjuk is őket. Éppen ezt kellett megmutatni.

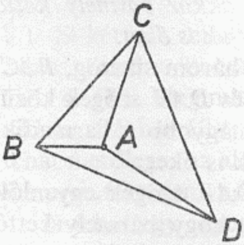
F.: XI. 21.

XI. 21. Tétel

Valamennyi térszöget összegben négy derékszögnél kisebb síkszögek fognak közre.

Fogja közre ugyanis az *A*-nál levő térszöget a *BAC*, *CAD* és *DAB* síkszög. Azt állítom, hogy *BAC*, *CAD* és *DAB* összege kisebb négy derékszögnél.

Vegyünk ugyanis *AB*, *AC* és *AD* mindegyikén egy tetszőleges *B*, *C*, illetve *D* pontot, és kössük össze *BC*-t, *CD*-t és *DB*-t. Minthogy a *B*-nél levő térszöget három síkszög, *CBA*, *ABD* és *CBD* fogja közre, bármely kettő összege nagyobb a harmadiknál (XI. 20.), *CBA* és *ABD* összege tehát nagyobb *CBD*-nél. Ugyanígy *BCA* és *ACD* összege nagyobb *BCD*-nél, *CDA* és *ADB* összege pedig nagyobb *CDB*-nél. E hat szög, *CBA*, *ABD*, *BCA*, *ACD*, *CDA* és *ADB* összege tehát nagyobb e három, *CBD*, *BCD* és *CDB* összegénél. E három szög, *CBD*, *BDC* és *BCD* összege két derékszöggel egyenlő (I. 32.), e hat szög, *CBA*, *ABD*, *BCA*, *ACD*, *CDA* és *ADB* összege nagyobb két derékszögnél. Minthogy az *ABC*, *ACD* és *ADB* háromszögek mindegyikének szögösszege két derékszöggel egyenlő, a három háromszög kilenc szöge, *CBA*, *ACB*, *BAC*, *ACD*, *CDA*, *CAD*, *ADB*, *DBA* és *BAD* együtt hat derékszöggel egyen-



lő. E hat tag, *ABC*, *BCA*, *ACD*, *CDA*, *ADB* és *DBA* összege nagyobb két derékszögnél, a maradék három szög tehát, *BAC*, *CAD* és *DAB*, mely közrefogja a térszöget, együtt kisebb négy derékszögnél.

Tehát valamennyi térszöget összegben négy derékszögnél kisebb síkszögek fognak közre. Éppen ezt kellett megmutatni.

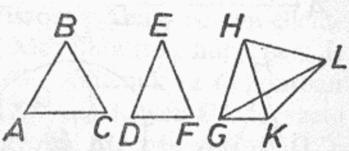
F.: XIII. 18.

XI. 22. Tétel

Ha van három síkszög, melyek közül kettő összege nagyobb a harmadiknál, akárhogy választjuk is őket, és egyenlő szakaszok zárják közre őket, akkor az egyenlő szakaszokat összekötő szakaszokból lehet háromszöget szerkeszteni.

Legyen *ABC*, *DEF* és *GHK* három síkszög, melyek közül kettő összege nagyobb a harmadiknál, akárhogy választjuk is őket, *ABC* meg *DEF* a *GHK*-nál, *DEF* meg *GHK* az *ABC*-nél, s végül *GHK* meg *ABC DEF*-nél, legyenek egyenlők az *AB*, *BC*, *DE*, *EF*, *GH* és *HK* szakaszok, és kössük össze *AC*-t, *DF*-et és *GK*-t. Azt állítom, hogy *AC*-vel, *DF*-fel, illetve *GK*-val egyenlő szakaszokból lehet háromszöget szerkeszteni, azaz hogy *AC*, *DF* és *GK* közül bármely kettő összege nagyobb a harmadiknál (I. 22.).

Ha az *ABC*, *DEF*, *GHK* szögek egyenlők egymással, nyilvánvaló, hogy *AC*, *DF* és *GK* egyenlő lévén, ehetséges *AC*-vel, *DF*-fel, illetve *GK*-val egyenlő szakaszokból háromszöget szerkeszteni (I. 1.). Ellenkező esetben legyenek nem egyenlők, szerkesszünk a *HK* egyeneshez, a rajta levő *H* ponthoz egy *ABC*-vel egyenlő *KHL* szöget (I. 23.), legyen *AB*, *BC*, *DE*, *EF*, *GH* és *HK* egyikével egyenlő *HL*, és kössük össze *KL*-t, *GL*-t. Minthogy két-két oldal, *AB*, *BC* és *KH*, *HL* egyenlő, s a *B*-nél levő szög egyenlő *KHL*-lel, az *AC* alap egyenlő a *KL* alappal (I. 4.). Minthogy *ABC* meg *GHK* nagyobb *DEF*-nél és *ABC* egyenlő a *KHL* szöggel, *GHL* nagyobb *DEF*-nél. Minthogy két-két oldal, *GH*, *HL* és *DE*, *EF* egyenlő, s a *GHL* szög nagyobb a *DEF* szögnél, a *GL* alap nagyobb a *DF* alapnál (I. 24.). *GK* meg *KL* nagyobb *GL*-nél (I. 20.), *GK* meg *KL* tehát annál nagyobb *DF*-nél. *KL* egyenlő *AC*-vel,



AC meg *GK* tehát nagyobb a harmadik szakasznál, *DF*-nél. Hasonlóképp mutathatnánk meg, hogy *AC* meg *DF* is nagyobb *GK*-nál, és végül *DF* meg *GK* *AC*-nél. Lehetséges tehát *AC*-vel, *DF*-fel, illetve *GK*-val egyenlő szakaszokból háromszöget szerkeszteni. Éppen ezt kellett megmutatni.

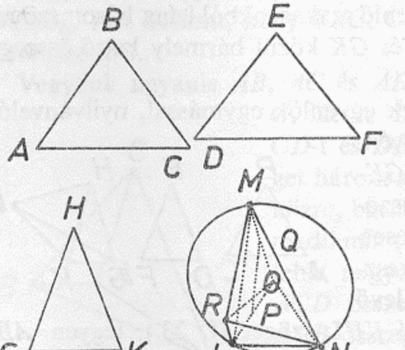
F.: XI. 23.

XI. 23. Tétel

Szerkesszünk három síkszögből, melyek közül kettő összege nagyobb a harmadiknál, akárhogy választjuk is őket, térszöget!

Szükséges, hogy a három szög összege négy derékszögnél kisebb legyen (XI. 21.).

Legyen a három adott síkszög, melyek közül kettő összege nagyobb a harmadiknál, akárhogy választjuk is őket, a három összege pedig kisebb négy derékszögnél, *ABC*, *DEF* és *GHK*. *ABC*-vel, *DEF*-fel, illetve *GHK*-val egyenlő szögekből kell tehát térszöget szerkeszteni.



Messünk le egyenlő *AB*, *BC*, *DE*, *EF*, *GH* és *HK* szakaszokat (I. 3.) és kössük össze *AC*-t, *DF*-et, *GK*-t. Ekkor lehetséges *AC*-vel, *DF*-fel, illetve *GK*-val egyenlő szakaszokból háromszöget szerkeszteni (XI. 22.). Szerkesszünk egy *LMN* háromszöget úgy, hogy *AC* egyenlő *LM*-mel, *DF* az *MN*-nel, s végül *GK* az *NL*-lel, írjunk az *LMN* háromszög köré egy *LMN* kört (IV. 5.), vegyük a középpontját, *O*-t, és kössük össze *LO*-t, *MO*-t, *NO*-t. Azt állítom, hogy *AB* nagyobb *LO*-nál. Ellenkező esetben ugyanis *AB* vagy egyenlő *LO*-val, vagy kisebb nála. Legyen először egyenlő. Minthogy *AB* egyenlő *LO*-val, másrészt *AB* egyenlő *BC*-vel és *OL* egyenlő *OM*-mel, két-két oldal, *AB*, *BC* és *LO*, *OM* páronként egyenlő; s feltétel szerint az *AC* alap egyenlő az *LM* alappal, az *ABC* szög tehát egyenlő az *LOM* szöggel (I. 8.). Ugyanígy a

DEF szög egyenlő *MON*-nel, s *GHK* az *NOL*-lel, e három szög, *ABC*, *DEF* és *GHK* összege tehát egyenlő e másik három, *LOM*, *MON* és *NOL* összegével. *LOM*, *MON* és *NOL* összege viszont négy derékszöggel egyenlő (I. 13.), tehát *ABC*, *DEF* és *GHK* összege is négy derékszöggel egyenlő. A feltétel szerint az összeg kisebb négy derékszögnél. Ez ellentmondás, *AB* tehát nem egyenlő *LO*-val. Azt állítom, hogy *AB* nem is kisebb *LO*-nál. Tegyük föl ugyanis, hogy az, és mérjünk föl egy *AB*-vel egyenlő *OP* és egy *BC*-vel egyenlő *OQ* szakaszt (I. 3.), és kössük össze *PQ*-t. Minthogy *AB* egyenlő *BC*-vel, *OP* is egyenlő *OQ*-val, úgyhogy a maradék *LP* is egyenlő *QM*-mel. *LM* tehát párhuzamos *PQ*-val (VI. 2.), és az *LMO* háromszög szögei egyenlők *PQO*-éivel (I. 29.), amint tehát *OL* az *LM*-hez, úgy aránylik *OP* a *PQ*-hoz (VI. 4.), fölcserélve tehát amint *LO* az *OP*-hez, úgy *LM* a *PQ*-hoz (V. 16.). *LO* nagyobb *OP*-nél, tehát *LM* is nagyobb *PQ*-nál (V. 14.). *LM* feltétel szerint egyenlő *AC*-vel, tehát *AC* is nagyobb *PQ*-nál. Minthogy két-két oldal, *AB*, *BC* és *PO*, *OQ* egyenlő, s az *AC* alap nagyobb a *PQ* alapnál, az *ABC* szög nagyobb a *POQ* szögnél (I. 25.). Hasonlóképp mutathatnánk meg, hogy a *DEF* szög nagyobb *MON*-nél, *GHK* pedig *NOL*-nél. *ABC*, *DEF* és *GHK* összege tehát nagyobb *LOM*, *MON* és *NOL* összegénél. *ABC*, *DEF* és *GHK* összege feltétel szerint kisebb négy derékszögnél, *LOM*, *MON* és *NOL* összege tehát annál kisebb négy derékszögnél. Viszont egyenlő is, ami ellentmondás. *AB* tehát nem kisebb *LO*-nál. Megmutattuk, hogy nem is egyenlő vele, nagyobb tehát *AB* az *LO*-nál. Állítsunk az *O* pontban az *LMN* kör síkjára egy *OR* merőlegest (XI. 12.), legyen *OR* négyzete azzal egyenlő, amivel *AB* négyzete nagyobb *LO* négyzeténél (L.), és kössük össze *RL*-t, *RM*-et, *RN*-et. Minthogy *RO* merőleges az *LMN* kör síkjára, *LO*, *MO* és *NO* mindegyikére is merőleges. Minthogy *LO* egyenlő *OM*-mel, s *OR* közös oldal és merőleges, az *RL* alap egyenlő az *RM* alappal (I. 4.). Ugyanígy *RN* egyenlő *RL*-lel és *RM*-mel, *RL*, *RM* és *RN* tehát egyenlők egymással. Minthogy feltétel szerint *OR* négyzete azzal egyenlő, amivel *AB* négyzete nagyobb *LO* négyzeténél, *AB* négyzete egyenlő *LO* és *OR* négyzetösszegével. Másrészt *LO* és *OR* négyzetösszegével egyenlő *LR* négyzete (I. 47.) – *LOR* ugyanis derékszög –, *AB* négyzete tehát egyenlő *RL* négyzetével, *AB* tehát egyenlő *RL*-lel. *AB*-vel egyenlő *BC*, *DE*, *EF*, *GH*, illetve

HK, *RL*-lel pedig egyenlő *RM* és *RN*, *AB*, *BC*, *DE*, *EF*, *GH* és *HK* tehát egyenlő *RL*, *RM* és *RN* bármelyikével. Minthogy két-két oldal, *LR*, *RM* és *AB*, *BC* egyenlő, s feltétel szerint az *LM* alap egyenlő az *AC* alappal, az *LRM* szög egyenlő az *ABC* szöggel (I. 8.). Ugyanígy az *MRN* szög egyenlő *DEF*-fel, *LRN* pedig *GHK*-val.

Három síkszögből tehát, *LRM*-ből, *MRN*-ből és *LRN*-ből, melyek egyenlők a három adott szöggel, *ABC*-vel, *DEF*-fel, illetve *GHK*-val, térszöget szerkesztettünk, az *R*-nél levőt, melyet *LRM*, *MRN* és *LRN* fog közre. Éppen ezt kellett megtenni.

F.: XI. 36.

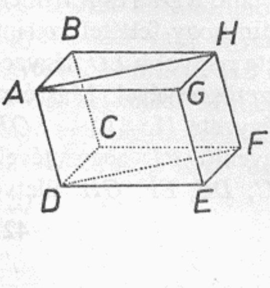
XI. 23. Lemma

Hogy hogyan lehet *OR* négyzetét azzal egyenlőnek venni, amivel nagyobb *AB* négyzete *LO* négyzeténél, így mutatjuk meg: Vegyük az *AB*, *LO* szakaszokat, legyen *AB* a nagyobb, írjunk fölé egy *ACB* félkört (I. 10.), illesszünk az *ACB* félkörbe egy, az *AB* átmérőnél nem nagyobb *LO*-val egyenlő *AC* szakaszt (IV. 1.), és húzzuk meg *CB*-t. Minthogy az *ACB* szög egy *ACB* félkörben fekszik, *ACB* derékszög (III. 31.). *AB* négyzete tehát egyenlő *AC* és *CB* négyzetösszegével (I. 47.), úgyhogy *AB* négyzete *CB* négyzetével nagyobb *AC* négyzeténél. *AC* egyenlő *LO*-val, *AB* négyzete tehát *CB* négyzetével nagyobb *LO* négyzeténél. Ha tehát *OR*-t *BC*-vel egyenlőnek vesszük (I. 3.), akkor *AB* négyzete *OR* négyzetével lesz nagyobb *LO* négyzeténél. Éppen ez volt a feladat.

XI. 24. Tétel

Ha egy téridomot (hat páronként) párhuzamos lap fog közre, akkor a szemközti lapok egybevágók és paralelogrammák.

Fogják közre ugyanis a *CDHG* téridomot a (páronként) párhuzamos *AC*, *GF*, *AH*, *DF*, *BF* és *AE* lapok. Azt állítom, hogy a szemközti lapok egybevágók és paralelogrammák.



Minthogy két párhuzamos síkot, *BG*-t és *CE*-t metsz az *AC* sík, a metszetek párhuzamosak (XI. 16.). *AB* tehát párhuzamos *DC*-vel. Ismét, minthogy két párhuzamos síkot, *BF*-et és *AE*-t metsz az *AC* sík, a metszetek párhuzamosak. *BC* tehát párhuzamos *AD*-vel. Megmutattuk, hogy *AB* is párhuzamos *DC*-vel, *AC* tehát paralelogramma. Hasonlóképp mutathatnánk meg, hogy *DF*, *FG*, *GB*, *BF* és *AE* is paralelogramma.

Húzzuk meg *AH*-t és *DF*-et. Minthogy *AB* párhuzamos *DC*-vel, *BH* pedig *CF*-fel, két, egymást metsző egyenes, *AB* és *BH* párhuzamos két, nem ugyanabban a síkban fekvő, egymást metsző egyenessel *DC*-vel és *CF*-fel, egyenlő szöget fognak tehát közre (XI. 10.), az *ABH* szög tehát egyenlő *DCF*-fel. Minthogy két-két oldal, *AB*, *BH* és *DC*, *CF* egyenlő (I. 34.), s az *ABH* szög egyenlő *DCF*-fel, az *AH* alap egyenlő a *DF* alappal, és az *ABH* háromszög egyenlő a *DCF* háromszöggel (I. 4.). *ABH*-nak kétszerese a *BG* paralelogramma, *DCF*-nek pedig kétszerese a *CE* paralelogramma (I. 34.), a *BG* paralelogramma tehát egyenlő a *CE* paralelogrammával. Hasonlóképp mutathatnánk meg, hogy *AC* is egyenlő *GF*-fel, *AE* pedig *BF*-fel.

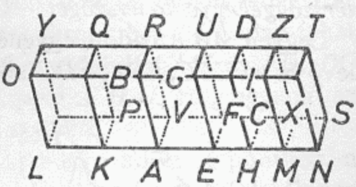
Ha tehát egy téridomot (hat páronként) párhuzamos lap fog közre, akkor a szemközti lapok egybevágók és paralelogrammák. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: XI. 25., 27–29., 31., 33.; XII. 8.

XI. 25. Tétel

Ha egy paralelepipedont egy (két) szemközti lappal párhuzamos síkkal metszünk, akkor amint az alaplapok, úgy aránylanak a téridomok.*

Messük el ugyanis az *ABCD* paralelepipedont a szemközti *RA*, *DH* lapokkal párhuzamos *FG* síkkal. Azt állítom, hogy amint az *AEFV* alaplap az *EHCF* alaplaphoz, úgy aránylik az *ABFU* téridom az *EGCD* téridomhoz.



Hosszabbítsuk meg ugyanis *AH*-t mindkétfelé, legyen *AK*, *KL* tetszőleges sok *AE*-vel egyenlő, *HM*, *MN* pedig tetszőleges sok *EH*-val egyenlő szakasz, s egészítsük ki az *LP*, *KV*, *HX*, *MS* paralelogrammákat és az *LQ*, *KR*, *DM*, *MT* téridomokat. Minthogy az *LK*, *KA*, *AE* szakaszok egyenlők egymással, az *LP*, *KV*, *AF* paralelogrammák egyenlők egymással, és *KO*, *KB*, *AG* is egymással, s végül *LY*, *KQ* és

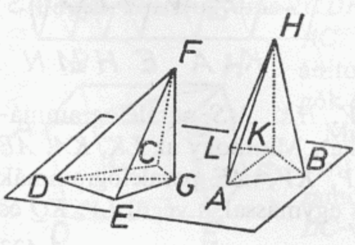
AR is egymással – szemközti lapok ugyanis (XI. 24.). Ugyanígy *EC*, *HX* és *MS* is egyenlők egymással, s *HG*, *HI* és *IN* egyenlők egymással, s végül *DH*, *MZ* és *NT*. Az *LQ*, *KR*, *AU* téridomoknak tehát három-három lapja egyenlő. E három lap viszont egyenlő a szemközti másik hárommal (XI. 24.), e három téridom tehát, *LQ*, *KR* és *AU* egyenlő egymással. Ugyanígy a másik három téridom, *ED*, *DM* és *MT* is egyenlő egymással, ahányszorosa tehát az *LF* alap az *AF* alapnak, annyiszorosa az *LU* téridom az *AU* téridomnak. Ugyanígy ahányszorosa az *NF* alap az *FH* alapnak, annyiszorosa az *NU* téridom a *HU* téridomnak. S ha az *LF* alap egyenlő az *NF* alappal, akkor az *LU* téridom is egyenlő az *NU* téridommal, s ha az *LF* alap nagyobb az *NF* alapnál, akkor az *LU* téridom is nagyobb az *NU* téridomnál, s ha kisebb, akkor kisebb. Van tehát négy mennyiség, két alap, *AF* és *FH*, s két téridom, *AU* és *UH*, vettük ugyanannyiszorosát mind az *AF* alapnak és az *AU* téridomnak – ti. az *LF* alapot és az *LU* téridomot –, mind a *HF* alapnak és a *HU* téridomnak – ti. az *NF* alapot és az *NU* téridomot –, és megmutattuk, hogy ha az *LF* alap nagyobb az *FN* alapnál, akkor az *LU* téridom is nagyobb *NU*-nál, s ha egyenlő, akkor egyenlő, s ha kisebb, akkor kisebb. Az *AU* téridom tehát úgy aránylik az *UH* téridomhoz, mint az *AF* alap az *FH* alaphoz. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: XI. 31–32., 34.

XI. 26. Tétel

Szerkesszünk adott egyeneshez, rajta levő adott ponthoz, adott térszöggel egyenlő térszöget!

Legyen *AB* az adott egyenes, *A* a rajta levő adott pont, a *D*-nél levő és az *EDC*, *EDF*, *FDC* síkszögek által közrefogott szög pedig az adott térszög. Az *AB* egyeneshez, a rajta levő adott ponthoz a *D*-nél levő térszöggel egyenlő térszöget kell tehát szerkeszteni.



Vegyünk *DF*-en egy tetszőleges *F* pontot, bocsássunk *F*-ből *ED* és *DC* síkjára egy *FG* merőlegest (XI. 11.), ennek a síkkal való metszéspontja legyen *G*, húzzuk meg *DG*-t, szerkesszünk az *AB* egyeneshez, a rajta levő *A* ponthoz egy *EDC*-vel egyenlő *BAL* és egy *EDG*-vel egyenlő *BAK* szöget (I. 23.), mérjünk föl egy *DG*-vel egyenlő *AK* szakaszt (I. 3.), állítsunk *BA* és *AL* síkjára *K*-ban egy *KH* merőlegest (XI. 12.), mérjünk rá egy *GF*-fel egyenlő *KH* szakaszt, és húzzuk meg *HA*-t. Azt állítom, hogy az *A*-nál levő, a *BAL*, *BAH*, *HAL* síkszögek által közrefogott térszög egyenlő a *D*-nél levő, az *EDC*, *EDF*, *FDC* szögek által közrefogott térszöggel.

Messünk le ugyanis egyenlő *AB*, *DE* szakaszokat (I. 3.), és húzzuk meg *HB*-t, *KB*-t, *FE*-t, *GE*-t. Minthogy *FG* merőleges az alapsíkra, valamennyi őt metsző és az alapsíkban fekvő egyenesre merőleges, *FGD* és *FGE* tehát derékszög. Ugyanígy *HKA* és *HKB* is derékszög. Minthogy két-két oldal, *KA*, *AB* és *GD*, *DE* páronként egyenlő, és egyenlő szöget zárnak be, a *KB* alap egyenlő a *GE* alappal (I. 4.). *KH* és *GF* is egyenlő, s egyenlő szöget zárnak be, tehát *HB* és *FE* is egyenlő (ua.). Ismét, minthogy két-két oldal, *AK*, *KH* és *DG*, *GF* egyenlő, s derékszöget fognak közre, az *AH* alap egyenlő az *FD* alappal. *AB* és *DE* is egyenlő, tehát két-két oldal, *HA*, *AB* és *DF*, *DE* egyenlő. S a *HB* alap egyenlő az *FE* alappal, a *BAH* szög tehát egyenlő az *EDF* szöggel (I. 8.). Ugyanígy a *HAL* szög is egyenlő *FDC*-vel [minthogy ha egyenlő *AL*, *DC* szakaszokat metszünk le, és meghúzzuk *KL*-t, *HL*-t, *GC*-t, *FC*-t, akkor minthogy a teljes *BAL* szög egyenlő a teljes *EDC*-vel és belőlük *BAK* feltétel szerint egyenlő *EDG*-vel, a maradék *KAL* egyenlő a maradék *GDC*-vel. Minthogy két-két oldal, *KA*, *AL* és *GD*, *DC* egyenlő, s egyenlő szöget zárnak be, a *KL* alap egyenlő a *GC* alappal. *KH* és *GF* is egyenlő, tehát két-két oldal, *LK*, *KH* és *CG*, *GF* egyenlő; s egyenlő szöget zárnak be, a *HL* alap tehát egyenlő az *FC* alappal. Minthogy két-két oldal *HA*, *AL* és *FD*, *DC* egyenlő, s a *HL* alap egyenlő az *FC* alappal, a *HAL* szög egyenlő az *FDC* szöggel]. A *BAL* és az *EDC* szög is egyenlő.

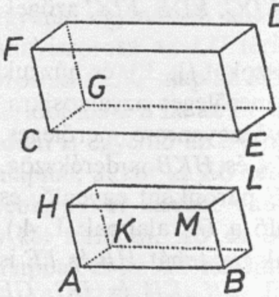
Az adott *AB* egyeneshez tehát, a rajta levő adott *A* ponthoz, a *D*-nél levő adott térszöggel egyenlő térszöget szerkesztettünk. Éppen ezt kellett megtenni.

F.: XI. 27.

XI. 27. Tétel

Emeljünk adott szakaszra adott paralelepipedonhoz hasonló és hasonlóan fekvő paralelepipedont!

Legyen AB az adott szakasz és CD az adott paralelepipedon. Az adott AB szakaszra az adott CD paralelepipedonhoz hasonló és hasonlóan fekvő paralelepipedont kell tehát emelni.



Szerkesszünk az AB egyeneshez, a rajta levő A ponthoz egy, a C-nél levővel egyenlő, a BAH, HAK, KAB síkszögek által közrefogott térszöget úgy, hogy a BAH szög egyenlő legyen ECF-fel, BAK az ECG-vel, KAH pedig GCF-fel (XI. 26.), és arányuljék amint EC a CG-hez, úgy BA az AK-hoz, amint pedig GC a CF-hez, úgy KA az AH-hoz (VI. 12.). Egyenlő sok tagon át tehát amint EC a CF-hez, úgy BA az AH-hoz (V. 22.). Egészítsük ki a HB paralelogrammát és az AL téridomot.

Minthogy BA úgy aránylik AK-hoz, mint EC a CG-hez, s így az egyenlő ECG, BAK szögek melletti oldalak arányosak, a GE paralelogramma hasonló a KB paralelogrammához. Ugyanígy a KH paralelogramma is hasonló a GF paralelogrammához, s végül FE HB-hez, a CD téridom három paralelogrammája tehát hasonló az AL téridom három paralelogrammájához. Az egyik három viszont egyenlő és hasonló a vele szemközti hárommal, a másik három pedig egyenlő és hasonló a vele szemközti hárommal (XI. 24.), a teljes CD téridom tehát hasonló a teljes AL téridomhoz.

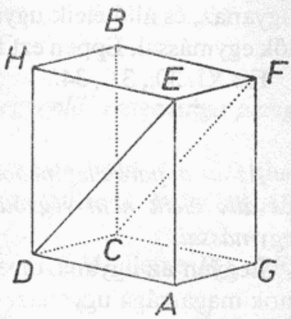
Az adott AB szakaszra tehát az adott CD paralelepipedonhoz hasonló és hasonlóan fekvő AL paralelepipedont emeltünk. Éppen ezt kellett megtenni.

XI. 28. Tétel

Ha egy sík egy paralelepipedont két szemközti lapjának átlója mentén metsz, akkor a sík felezi a téridomot.

Messe ugyanis a $CDEF$ sík az AB paralelepipedont két szemközti lapjának átlója, CF és DE mentén. Azt állítom, hogy a $CDEF$ sík felezi az AB téridomot.

Minthogy ugyanis a CGF háromszög egyenlő a CFB háromszöggel, ADE pedig DEH-val (I. 34.), és a CA paralelogramma egyenlő EB-vel – hiszen szemköztiek –, GE pedig CH-val (XI. 24.), a két háromszög, CGF és ADE, és három paralelogramma, GE, AC és CE által közrefogott hasáb is egyenlő a CFB és DEH háromszögek és a CH, BE, CE paralelogrammák által közrefogott hasábbal, hiszen ugyanannyi és (páronként) egyenlő nagyságú lap fogja őket közre, úgyhogy a $CDEF$ sík felezi az AB téridomot mint egészet. Éppen ezt kellett megmutatni.

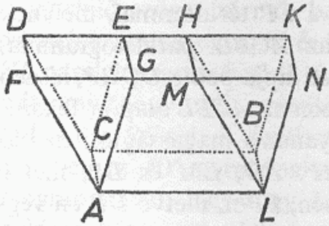


F.: XI. 39.; XII. 4. L., 8.

XI. 29. Tétel

Azok a paralelepipedonok, melyek alapja és magassága ugyanaz, és álló éleik ugyanazokon az egyeneseken végződnek, egyenlők egymással.

Legyen az ugyanazon AB alapon fekvő CM és CN paralelepipedonok magassága ugyanaz, és végződjenek AF, AG, LM és LN, illetve CD, CE, BH és BK éleik ugyanazon az egyenesen, FN-en, illetve DK-n. Azt állítom, hogy a CM téridom egyenlő a CN téridommal.



Minthogy CH és CK paralelogramma, CB egyenlő DH-val és EK-val (I. 34.), úgyhogy DH is egyenlő EK-val. Vonjuk le a közös EH-t, ekkor a maradék DE egyenlő a maradék HK-val, úgyhogy a DCE háromszög is egyenlő a HBK háromszöggel (I. 8. és 4.), a DG paralelogramma pedig a HN paralelogrammával (I. 34., 29., 4.). Ugyanígy az AFG háromszög is egyenlő az MLN háromszöggel. A CF paralelogramma is egyenlő a BM paralelogrammával, CG pedig BN-nel – hiszen szemköztiek (XI. 24.) –, tehát a két háromszög, AFG és DCE, és három paralelogramma, AD, DG és CG által közrefogott hasáb egyenlő az MLN és HBK háromszögek és a BM, HN és BN paralelogrammák által közrefogott hasábbal. Adjuk hozzájuk azt a téridomot, melynek alapja az AB paralelogramma, szemközti lapja pedig $GEHM$. Ekkor a teljes CM téridom egyenlő a teljes CN téridommal.

Azok a paralelepipedonok tehát, melyek alapja és magassága ugyanaz, és álló éleik ugyanazokon az egyeneseken végződnek, egyenlők egymással. Éppen ezt kellett megmutatni.

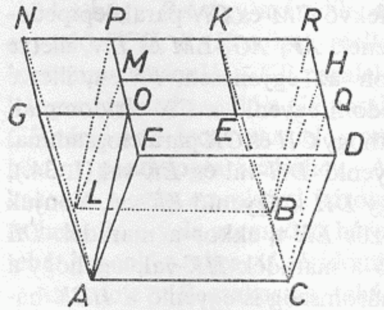
F.: XI. 30., 31., 34.

XI. 30. Tétel

Azok a paralelepipedonok, melyek alapja és magassága ugyanaz, és álló éleik nem végződnek ugyanazokon az egyeneseken, egyenlők egymással.

Legyen az ugyanazon AB alapon fekvő CM és CN paralelepipedonok magassága ugyanaz, és ne végződjenek AF, AG, LM és LN, illetve CD, CE, BH és BK éleik ugyanazon az egyenesen. Azt állítom, hogy a CM téridom egyenlő a CN téridommal.

Hosszabbítsuk meg ugyanis NK-t és DH-t, találkozzanak egymással R-ben, hosszabbítsuk meg FM-et és GE-t P-ig, illetve Q-ig, és húzzuk meg AO-t, LP-t, CQ-t és BR-t. Ekkor a CM téridom, melynek alapja az $ACBL$ paralelogramma, szemközti lapja pedig $FDHM$, egyenlő a CP téridommal, melynek alapja az $ACBL$ paralelogramma, szemközti lapja pedig $OQRP$, hiszen ugyanazon az $ACBL$ alapon fekszenek, ugyanaz a magasságuk, és álló éleik, AF, AO, LM és LP, illetve CD, CQ, BH és BR ugyanazon az egyenesen, FP-n, illetve DR-en végződnek (XI. 29.). Másrészt a CP téridom, melynek alapja az $ACBL$ paralelogramma, szemközti lapja pedig $OQRP$, egyenlő a CN téridommal, melynek alapja az $ACBL$ paralelogramma, szemközti lapja pedig $GEKN$, hiszen ismét ugyanazon az $ACBL$ alapon fekszenek, ugyanaz a magasságuk, és álló éleik, AG, AO, CE és CQ, illetve



LN, *LP*, *BK* és *BR* ugyanazon az egyenesen, *GQ*-n, illetve *NR*-en végződnek, úgyhogy a *CM* téridom is egyenlő a *CN* téridommal.

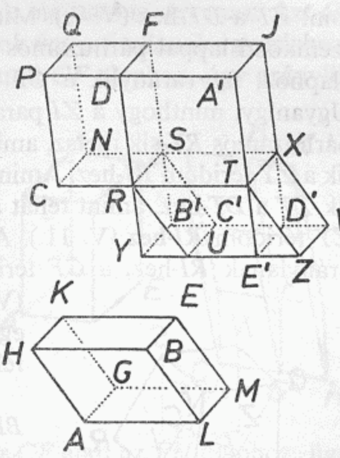
Azok a paralelepipedonok tehát, melyek alapja és magassága ugyanaz, és álló éleik nem végződnek ugyanazokon az egyeneseken, egyenlők egymással. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: XI. 31., 34.

XI. 31. Tétel

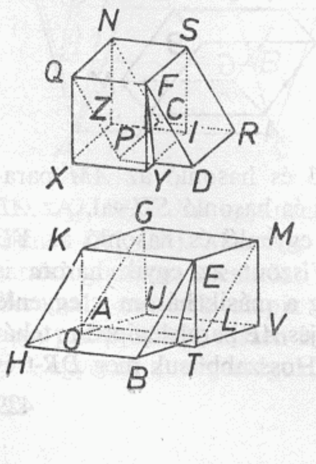
Azok a paralelepipedonok, melyek alapja egyenlő, magassága pedig ugyanaz, egyenlők egymással.

Feküdjenek az *AE*, *CF* paralelepipedonok az egyenlő *AB*, *CD* alapokon, és legyen ugyanaz a magasságuk. Azt állítom, hogy az *AE* téridom egyenlő a *CF* téridommal.



Legyenek először az álló élek, *HK*, *BE*, *AG* és *LM*, illetve *PQ*, *DF*, *CO* és *RS* merőlegesek az *AB*, illetve a *CD* alapra, legyen *RT* a *CR* egyenes menti meghosszabbítása, szerkesszünk az *RT* egyeneshez, a rajta levő *R* ponthoz egy *ALB*-vel egyenlő *TRU* szöget (I. 23.), mérjünk föl egy *AL*-lel egyenlő *RT* és egy *LB*-vel egyenlő *RU* szakaszt (I. 3.), és egészítsük ki az *RX* alapot és az *YU* téridomot. Minthogy kétkét oldal, *TR*, *RU* és *AL*, *LB* egyenlő, és egyenlő szöget zárnak be, az *RX* paralelogramma egyenlő és hasonló a *HL* paralelogrammával (I. 4., 34.). Ismét, minthogy *AL* egyenlő *RT*-vel, *LM* pedig *RS*-sel, és derékszöget zárnak be, az *RY* paralelogramma egyenlő és hasonló az *AM* paralelogrammával. Ugyanígy *LE* is egyenlő és hasonló *SU*-val. Az *AE* téridom három paralelogrammája tehát egyenlő és hasonló az *YU* téridom három paralelogrammájával. Viszont az egyik három is egyenlő a vele szemközti hárommal, meg a másik három is egyenlő a vele szemközti hárommal (XI. 24.), a teljes *AE* paralelepipedon tehát egyenlő a teljes *YU* paralelepipedonnal. Hosszabbítsuk meg *DR*-t és

XU-t, találkozzanak egymással *Z*-ben, húzzuk *T*-n át *DZ*-vel párhuzamosan *A'TE'*-t (I. 31.), hosszabbítsuk meg *PD*-t *A'*-ig, és egészítsük ki a *ZY*, *RI* téridomokat. Ekkor a *ZY* téridom, melynek alapja az *RY* paralelogramma, szemközti lapja pedig *ZD'*, egyenlő az *YU* téridommal, melynek alapja az *RY* paralelogramma, szemközti lapja pedig *UV*, hiszen ugyanazon az *RY* alapon fekszenek, ugyanaz a magasságuk, és álló éleik, *RZ*, *RU*, *TE'* és *TX*, illetve *SB'*, *SC'*, *YD'* és *YV* ugyanazon az egyenesen, *ZX*-en, illetve *B'V*-n végződnek (XI. 29.). Az *YU* téridom viszont egyenlő *AE*-vel, tehát az *YZ* téridom is egyenlő az *AE* téridommal. Minthogy az *RUXT* paralelogramma egyenlő a *ZT* paralelogrammával – hiszen ugyanazon az *RT* alapon és ugyanazon *RT*, *ZX* párhuzamosok között fekszenek (I. 35.), és *RUXT* egyenlő *CD*-vel, minthogy *AB*-vel is, a *ZT* paralelogramma is egyenlő *CD*-vel. *DT* egy másik síkidom, a *CD* alap tehát úgy aránylik *DT*-hez, mint *ZT* a *DT*-hez (V. 7.). Minthogy a *CI* paralelepipedont egy (két) szemközti lappal párhuzamos *RF* sík metsz, amint a *CD* alap a *DT* alaphoz, úgy aránylik a *CF* téridom az *RI* téridomhoz (XI. 25.). Ugyanígy, minthogy a *ZI* paralelepipedont egy szemközti oldalakkal párhuzamos *RY* sík metsz, amint a *ZT* alap a *TD* alaphoz, úgy aránylik a *ZY* téridom *RI*-hez. Amint viszont a *CD* alap *DT*-hez, úgy aránylik *ZT* a *DT*-hez, amint tehát a *CF* téridom az *RI* téridomhoz, úgy a *ZY* téridom *RI*-hez (V. 11.). A *CF* és *ZY* téridomok tehát ugyanúgy aránylanak *RI*-hez, a *CF* téridom tehát egyenlő a *ZY* téridommal (V. 9.). *ZY* viszont, mint megmutattuk, egyenlő *AE*-vel, *AE* is egyenlő tehát *CF*-fel. [Éppen ezt kellett megmutatni.]



Ne legyenek most az álló élek, *AG*, *HK*, *BE* és *LM*, illetve *CN*, *PQ*, *DF* és *RS* merőlegesek az *AB*, illetve *CD* alapra. Ismét azt állítom, hogy az *AE* téridom egyenlő a *CF* téridommal. Bocsássuk ugyanis az alapsíkra a *K*, *E*, *G* és *M*, illetve *Q*, *F*, *N* és *S* pontból a *KO*, *ET*, *GU* és *MV*, illetve *QX*, *FY*, *NZ* és *SI* merőlegeseket (XI. 11.), ezeknek a síkkal való metszéspontja legyen *O*, *T*, *U* és *V*, illetve *X*, *Y*, *Z* és *I*, és húzzuk meg az OT, OU, UV és TV, illetve XY, XZ, ZI és IY szakaszokat. Ekkor a KV téridom egyenlő a QI téridommal, hiszen az egyenlő KM, QS alapokon fekszenek, ugyanaz a magasságuk, és álló éleik merőlegesek az alapra. A KV téridom viszont egyenlő az AE téridommal, QI pedig CF-fel – hiszen alapjuk és magasságuk ugyanaz, és álló éleik nem végződnek ugyanazokon az egyeneseken (XI. 30.) –, az AE téridom is egyenlő tehát a CF téridommal.

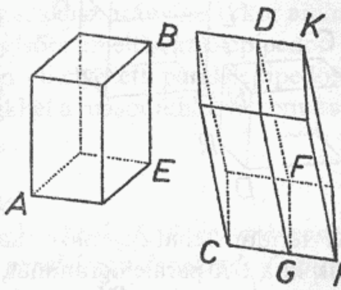
Azok a paralelepipedonok tehát, melyek alapja egyenlő, magassága pedig ugyanaz, egyenlők egymással. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: XI. 32., 34., 36., 39.

XI. 32. Tétel

Azok a paralelepipedonok, melyek magassága ugyanaz, úgy aránylanak egymáshoz, mint az alapjaik.

Legyen az AB, CD paralelepipedonok magassága ugyanaz. Azt állítom, hogy az AB, CD paralelepipedonok úgy aránylanak egymáshoz, mint az alapjaik, azaz amint az AE alap a CF alaphoz, úgy aránylik az AB téridom a CD téridomhoz.



Illesszünk ugyanis FG-hez egy AE-vel egyenlő FH paralelogrammát (I. 44.), és egészítsük ki az FH alapú, CD-vel azonos magasságú GK paralelepipedont. Ekkor az AB téridom egyenlő a GK téridommal, hiszen az egyenlő AE, FH alapokon fekszenek és ugyanaz a magasságuk (XI. 31.). Minthogy a CK paralelepipedont metszi a lapokkal szemközti párhuzamos DG sík, amint a CF alap az FH alaphoz, úgy aránylik a CD téridom a DH téridomhoz (XI. 25.). Az FH alap viszont egyenlő az AE alappal, a GK téridom pedig az AB téridommal, amint tehát az AE alap a CF alaphoz, úgy aránylik az AB téridom a CD téridomhoz (V. 7. és 11.).

Azok a paralelepipedonok tehát, melyek magassága ugyanaz, úgy aránylanak egymáshoz, mint az alapjaik. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: XI. 33., 34.; XII. 4. L., 10.

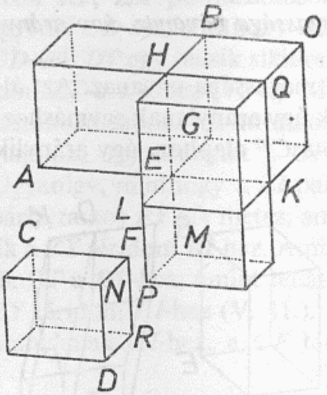
XI. 33. Tétel

Hasonló paralelepipedonok egymással a megfelelő éleikhez viszonyítva háromszoros arányban (V. 10. D.) *állnak.*

Legyenek *AB* és *CD* hasonló paralelepipedonok, és feleljen meg *AE* a *CF*-nek. Azt állítom, hogy az *AB* téridomnak a *CD* téridomhoz való aránya háromszorosa *AE CF*-hez való arányának.

Legyen *AE*, *GE*, illetve *HE* egyenes menti meghosszabbítása *EK*, *EL*, illetve *EM*, mérjünk föl egy *CF*-fel egyenlő *EK*, egy *FN*-nel egyenlő *EL*, s végül egy *FR*-rel egyenlő *EM* szakaszt (I. 3.), és egészítsük ki a *KL* paralelogrammát és a *KP* téridomot.

Minthogy két-két oldal, *KE*, *EL* és *CF*, *FN* egyenlő, és a *KEL* szög egyenlő a *CFN* szöggel – hiszen az *AEG* szög egyenlő *CFN*-nel az *AB*, *CD* téridomok hasonlósága miatt – (I. 15.), a *KL* paralelogramma egyenlő és hasonló a *CN* paralelogrammával (I. 4., 34.). Ugyanígy a *KM* paralelogramma is egyenlő és hasonló *CR*-rel, *EP* pedig *DF*-fel. A *KP* és a *CD* téridomnak tehát három-három paralelogrammája páronként egyenlő és hasonló. Viszont az egyik három is egyenlő és hasonló a vele szemközti hárommal, meg a másik három is egyenlő és hasonló a vele szemközti hárommal (XI. 24.), a teljes *KP* téridom tehát egyenlő és hasonló a teljes *CD* téridommal. Egészítsük ki a *GK* paralelogrammát, majd a *GK*, illetve *KL* alapú és *AB*-vel azonos magasságú *EO* és *LQ* téridomot. Minthogy az *AB*, *CD* téridomok hasonlósága miatt *AE* úgy aránylik *CF*-hez, mint *EG* az *FN*-hez és *EH* az *FR*-hez, s *CF* egyenlő *EK*-val, *FN* az *EL*-lel, *FR* pedig *EM*-mel, *AE* úgy aránylik *EK*-hoz, mint *GE* az *EL*-hez és *HE* az *EM*-hez (V. 7., 11.). Amint viszont *AE* az *EK*-hoz, úgy aránylik az *AG* paralelogramma a *GK* paralelogrammához, amint *GE* az *EL*-hez, úgy *GK* a *KL*-hez, amint pedig *HE* az *EM*-hez, úgy *QE* a *KM*-hez (VI. 1.), amint tehát az *AG* paralelogramma *GK*-hoz, úgy *GK* a *KL*-hez és *QE* a *KM*-hez (V. 11.). Amint viszont *AG* a *GK*-hoz, úgy az *AB* téridom az *EO* tér-



idomhoz, amint *GK* a *KL*-hez, úgy az *OE* téridom a *QL* téridomhoz, amint pedig *QE* a *KM*-hez, úgy a *QL* téridom a *KP* téridomhoz (XI. 32.), amint tehát az *AB* téridom *EO*-hoz, úgy *EO* a *QL*-hez és *QL* a *KP*-hez. Ha viszont négy mennyiség folytonosan arányos, akkor az első a negyedikkel a másodikhoz viszonyítva háromszoros arányban áll, az *AB* téridomnak *KP*-hez való aránya tehát háromszorosa *AB*-nek *EO*-hoz való arányának. Amint viszont *AB* az *EO*-hoz, úgy aránylik az *AG* paralelogramma *GK*-hoz és az *AE* szakasz *EK*-hoz, úgyhogy az *AB* téridomnak *KP*-hez való aránya háromszorosa *AE*-nek *EK*-hoz való arányának. A *KP* téridom egyenlő a *CD* téridommal, az *EK* szakasz *CF*-fel, az *AB* téridomnak a *CD* téridomhoz való aránya tehát háromszorosa a megfelelő oldalak, *AE* és *CF* arányának. Hasonló paralelepipedonok tehát egymással a megfelelő oldalaikhoz viszonyítva háromszoros arányban állnak. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: XI. 37.; XII. 8.

Következmény

Ebből már nyilvánvaló, hogy ha négy szakasz arányos, akkor amint az első a negyedikhez, úgy aránylik az elsőre emelt paralelepipedon a másodikra emelt hasonló és hasonlóan elhelyezett paralelepipedonhoz, minthogy az első szakasz a negyedikkel a másodikhoz viszonyítva háromszoros arányban áll.

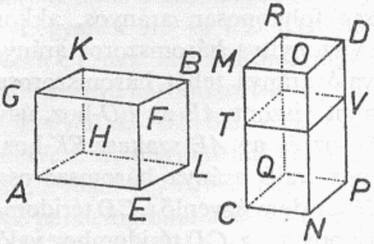
XI. 34. Tétel

Az egyenlő (térfogatú) paralelepipedonoknak fordítva arányosak az alapjaik a magassággal; s amely paralelepipedonoknak fordítva arányosak az alapjaik a magassággal, azok egyenlők.

Legyenek *AB* és *CD* egyenlő paralelepipedonok. Azt állítom, hogy az *AB*, *CD* paralelepipedonoknak fordítva arányosak az alapjaik a magassággal: amint az *EH* alap az *NQ* alaphoz, úgy aránylik a *CD* téridom magassága az *AB* téridom magasságához.

Legyenek ugyanis először az álló élek, *AG*, *EF*, *LB* és *HK*, illetve *CM*, *NO*, *PD* és *QR* merőlegesek az alapjukra. Azt állítom, hogy amint az *EH* alap az *NQ* alaphoz, úgy aránylik *CM* az *AG*-hez.

Ha az *EH* alap egyenlő az *NQ* alappal és az *AB* téridom egyenlő a CD téridommal, akkor CM is egyenlő AG-vel, hiszen a megegyező magasságú paralelepipedonok úgy aránylanak egymáshoz, mint az alapjaik (XI. 32.). [Ha ugyanis – noha az EH, NQ alapok egyenlők – az AG és a CM magasság nem lenne egyenlő, akkor az AB téridom sem lenne egyenlő CD-vel. Feltétel szerint egyenlő vele, nem igaz tehát hogy a CM magasság nem egyenlő az AG magassággal: egyenlő tehát vele.] Ekkor amint az EH alap az NQ alaphoz, úgy aránylik CM az AG-hez, és nyilvánvaló, hogy az AB, CD paralelepipedonoknak fordítva arányosak az alapjaik a magassággal.



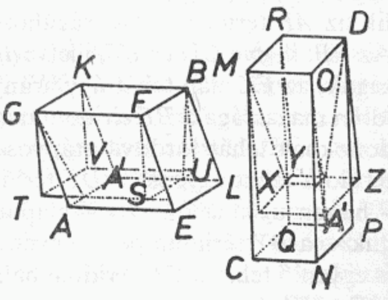
Ne legyen most egyenlő az EH alap az NQ alappal, hanem legyen nagyobb EH. Az AB téridom egyenlő a CD téridommal, CM tehát nagyobb AG-nél. [Ellenkező esetben ugyanis az AB, CD téridomok ismét nem lennének egyenlők, feltétel szerint viszont egyenlők.] Mérjünk föl egy AG-vel egyenlő CT szakaszt (I. 3.), és egészítsük ki az NQ alapú, CT magasságú VC paralelepipedont. Minthogy az AB téridom egyenlő a CD téridommal, CV egy további mennyiség, és egyenlő mennyiségeknek ugyanahhoz a mennyiséghez való aránya ugyanaz (V. 7.), az AB téridom úgy aránylik a CV téridomhoz, mint a CD téridom a CV téridomhoz. Amint viszont az AB téridom a CV téridomhoz, úgy aránylik az EH alap az NQ alaphoz – hiszen egyenlő magasságú az AB és a CV téridom – (XI. 32.), amint pedig a CD téridom a CV téridomhoz, úgy az MQ alap a TQ alaphoz és CM a CT-hez (VI. 1.), amint tehát az EH alap az NQ alaphoz, úgy MC a CT-hez (V. 11.). CT egyenlő AG-vel, amint tehát az EH alap az NQ alaphoz, úgy aránylik MC az AG-hez. Az AB, CD téridomoknak tehát fordítva arányosak az alapjaik a magassággal.

Megfordítva, legyenek most az AB, CD paralelepipedonok alapjai fordítva arányosak a magassággal: arányuljék amint az EH alap az NQ alaphoz, úgy a CD téridom magassága az AB téridom magasságához. Azt állítom, hogy az AB téridom egyenlő a CD téridommal.

Legyenek az álló élek ismét merőlegesek az alapjukra. Ha az EH

alap egyenlő az NQ alappal és a CD téridom magassága úgy aránylik az AB téridom magasságához, mint az EH alap az NQ alaphoz, akkor a CD téridom magassága is egyenlő az AB téridom magasságával. Az egyenlő alapokon fekvő és azonos magasságú paralelepipedonok viszont egyenlők (XI. 31.), az AB téridom tehát egyenlő a CD téridommal.

Ne legyen most egyenlő az EH alap az NQ alappal, hanem legyen nagyobb EH. Ekkor a CD téridom magassága nagyobb az AB téridom magasságánál, azaz CM az AG-nél. Mérjünk ismét föl egy AG-vel egyenlő CT szakaszt, és hasonlóképp egészítsük ki a CV téridomot. Minthogy MC úgy aránylik AG-hez, mint az EH alap az NQ alaphoz és AG egyenlő CT-vel, CM úgy aránylik CT-hez, mint az EH alap az NQ alaphoz. Amint viszont az EH alap az NQ alaphoz, úgy aránylik az AB téridom a CV téridomhoz – egyenlő magasságú ugyanis az AB és a CV téridom – (XI. 32.), amint pedig CM a CT-hez, úgy az MQ alap a QT alaphoz (VI. 1.) és a CD téridom a CV téridomhoz, amint tehát az AB téridom a CV téridomhoz, úgy a CD téridom a CV téridomhoz (V. 11.), AB-nek és CD-nek CV-hez való aránya tehát ugyanaz, az AB téridom tehát egyenlő a CD téridommal (V. 9.). [Éppen ezt kellett megmutatni.]



Ne legyenek most az álló élek, FE, BL, GA és HK, illetve ON, DP, MC és RQ merőlegesek az alapjukra, bocsássunk EH, illetve NQ síkjára az F, G, B és K, illetve O, M, D és R pontból merőlegeseket (XI. 11.), ezeknek a síkokkal való metszéspontjai legyenek S, T, U és V, illetve X, Y, Z és A', és egészítsük ki az FV, OZ téridomokat. Azt állítom, hogy ha az AB, CD téridomok egyenlők, akkor az alapok ezesetben is fordítva arányosak a magassággal: amint az EH alap az NQ alaphoz, úgy aránylik a CD téridom magassága az AB téridom magasságához.

Minthogy az AB téridom egyenlő a CD téridommal, AB viszont egyenlő BT-vel – hiszen ugyanazon az FK alapon fekszenek és ugyanaz a magasságuk –, és a *CD* téridom egyenlő *DY*-nal – hiszen ismét ugyanazon az alapon fekszenek, *RO*-n, és ugyanaz a magasságuk (XI. 29–30.) – a *BT* téridom is egyenlő tehát a *DY* téridommal. Az *FK* alap tehát úgy aránylik az *OR* alaphoz, mint a *DY* téridom magassága a *BT* téridom magasságához. Az *FK* alap egyenlő az *EH* alappal, az *OR* alap pedig az *NQ* alappal, az *EH* alap tehát úgy aránylik az *NQ* alaphoz, mint a *DY* téridom magassága a *BT* téridom magasságához. A *DY*, illetve *BT* és *DC*, illetve *BA* téridomoknak ugyanaz a magasságuk, az *EH* alap tehát úgy aránylik az *NQ* alaphoz, mint a *DC* téridom magassága az *AB* téridom magasságához. Az *AB*, *CD* paralelepipedonoknak tehát fordítva arányosak az alapjaik a magassággal.

Megfordítva, legyenek most az *AB*, *CD* paralelepipedonok alapjai fordítva arányosak a magassággal: arányuljék amint az *EH* alap az *NQ* alaphoz, úgy a *CD* téridom magassága az *AB* téridom magasságához. Azt állítom, hogy az *AB* téridom egyenlő a *CD* téridommal.

Ha ugyanis elvégezzük ugyanazokat a lépéseket, mint az előbb, akkor minthogy a *CD* téridom magassága úgy aránylik az *AB* téridom magasságához, mint az *EH* alap az *NQ* alaphoz és az *EH* alap egyenlő az *FK* alappal, *NQ* pedig *OR*-rel, a *CD* téridom magassága úgy aránylik az *AB* téridom magasságához, mint az *FK* alap az *OR* alaphoz. Az *AB*, illetve *CD* és *BT*, illetve *DY* téridomoknak ugyanaz a magasságuk, az *FK* alap tehát úgy aránylik az *OR* alaphoz, mint a *DY* téridom magassága a *BT* téridom magasságához, a *BT*, *DY* paralelepipedonoknak tehát fordítva arányosak az alapjaik a magassággal, a *BT* téridom tehát egyenlő a *DY* téridommal. *BT* viszont egyenlő *BA*-val – hiszen ugyanazon az *FK* alapon fekszenek és ugyanaz a magasságuk –, a *DY* téridom pedig egyenlő a *DC* téridommal, az *AB* téridom is egyenlő tehát a *CD* téridommal. Éppen ezt kellett megmutatni.

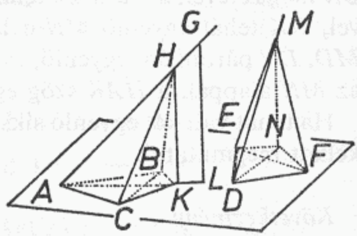
F.: XII. 9.

XI. 35. Tétel

Ha van két egyenlő síkszög, veszünk egy-egy, a csúcsukon átmenő olyan nem síkbeli egyenest, mely páronként egyenlő szögeket zár be az eredeti szögek száraival, a nem síkbeli egyeneseken veszünk egy-egy tetszőleges pontot, azokból merőlegeseket bocsátunk az eredeti szögek síkjaira, és a síkokkal való metszéspontokból egyeneseket húzunk az *eredeti szögek csúcsaiba, akkor ezek az egyenesek egyenlő szögeket zárnak be a nem síkbeli egyenesekkel.*

Legyen *BAC* és *EDF* két egyenlő síkszög, vegyünk egy-egy, *A*-n és *D*-n átmenő, olyan nem síkbeli egyenest, *AG*-t és *DM*-et, mely páronként egyenlő szögeket, *MDE*-t és *GAB*-t, illetve *MDF*-et és *GAC*-t, zár be (XI. 26.), vegyünk *AG*-n és *DM*-en egy-egy tetszőleges pontot, *G*-t és *M*-et, bocsássunk *G*-ből és *M*-ből egy *GL*, illetve *MN* merőlegest *BAC*, illetve *EDF* síkjára (XI. 11.), ezeknek a síkokkal való metszéspontjai legyenek *N* és *L*, és húzzuk meg *LA*-t és *ND*-t. Azt állítom, hogy a *GAL* szög egyenlő az *MDN* szöggel.

Mérjünk föl egy *DM*-mel egyenlő *AH* szakaszt (I. 3.), és húzzunk a *H* ponton át *GL*-lel egy *HK* párhuzamost (I. 31.). *GL* merőleges *BAC* síkjára, *HK* is merőleges tehát *BAC* síkjára (XI. 8.). Bocsássuk a *K*, *N* pontokból az *AB*, *AC*, *DF*, *DE* egyenesekre a *KC*, *NF*, *KB*, *NE* merőlegeseket (I. 12.) és húzzuk meg *HC*-t, *CB*-t, *MF*-et, *FE*-t. Minthogy *HA* négyzete egyenlő *HK* meg *KA* négyzetével, *KA* négyzete pedig egyenlő *KC* és *CA* négyzetösszegével (I. 47.), *HA* négyzete egyenlő *HK*, *KC* és *CA* négyzetösszegével. *HK* és *KC* négyzetösszegével egyenlő *HC* négyzete, *HA* négyzete tehát egyenlő *HC* és *CA* négyzetösszegével, *HCA* tehát derékszög (I. 48.). Ugyanígy *DFM* is derékszög, az *ACH* szög tehát egyenlő *DFM*-mel. A *HAC* szög egyenlő *MDF*-fel, így *MDF* és *HAC* két olyan háromszög, melyben két-két szög páronként egyenlő és egy-egy oldal, az egyenlő szögek egyikével szemközti *HA* és *MD* egyenlő, a többi oldal is páronként egyenlő tehát (I. 26.), *AC* tehát egyenlő *DF*-fel. Hasonlóképp mutathatnánk meg, hogy *AB* és *DE* is egyenlő. Minthogy *AC* egyenlő *DF*-fel, *AB* pedig *DE*-vel, két-két oldal, *CA*, *AB* és *FD*, *DE* egyenlő. A *CAB* szög is egyenlő az *FDE* szöggel, a *BC* alap tehát egyenlő az *EF* alappal, és a két háromszög egyenlő és a többi szög is páronként (I. 4.), az *ACB* szög tehát egyenlő a *DFE* szöggel. Az *ACK* derékszög is egyenlő a *DFN* derékszöggel, a maradék *BCK* is egyenlő tehát a maradék *EFN*-



nel. Ugyanígy a *CBK* szög is egyenlő *FEN*-nel, így *BCK* és *EFN* két olyan háromszög, melyben két-két szög páronként egyenlő és egy-egy oldal, az egyenlő szögek melletti *BC* és *EF* egyenlő, a többi oldal is páronként egyenlő tehát (I. 26.), *CK* tehát egyenlő *FN*-nel. *AC* is egyenlő *DF*-fel, így két-két oldal, *AC*, *CK* és *DF*, *FN* egyenlő; s derékszöget zárnak be, az *AK* alap tehát egyenlő a *DN* alappal (I. 4.). Minthogy *AH* egyenlő *DM*-mel, *AH* négyzete is egyenlő *DM* négyzetével. *AH* négyzetével viszont egyenlő *AK* és *KH* négyzetösszege – hiszen *AKH* derékszög –, *DM* négyzetével pedig egyenlő *DN* és *NM* négyzetösszege – hiszen *DNM* derékszög –, *AK* és *KH* négyzetösszege tehát egyenlő *DN* és *NM* négyzetösszegével. Ebből *AK* négyzete egyenlő *DN* négyzetével, a maradék tehát, *KH* négyzete, egyenlő *NM* négyzetével, *HK* tehát egyenlő *MN*-nel. Minthogy két-két oldal, *HA*, *AK* és *MD*, *DN* páronként egyenlő, és megmutattuk hogy a *HK* alap egyenlő az *MN* alappal, a *HAK* szög egyenlő az *MDN* szöggel.

Ha tehát van két egyenlő síkszög... és így tovább a tétel. Éppen ezt kellett megmutatni.

Következmény

Ebből már nyilvánvaló, hogy ha van két egyenlő síkszög, és veszünk a csúcsaikból induló olyan egyenlő, nem síkbeli szakaszokat, melyek páronként egyenlő szögeket zárnak be az eredeti szögek száraival, akkor a szakaszok végpontjából az eredeti szögek síkjára bocsátott merőlegesek egyenlők. Éppen ezt kellett megmutatni.

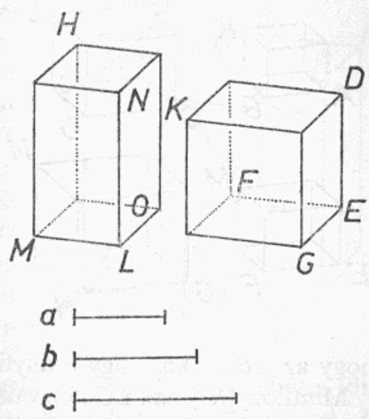
F.: XI. 36.

XI. 36. Tétel

Ha három szakasz arányos, akkor a három szakaszból szerkesztett paralelepipedon egyenlő a középső szakaszra emelt egyenlő oldalú és az előbbivel egyenlő szögű paralelepipedonnal.

Legyen *a*, *b* és *c* három arányos szakasz: amint *a* a *b*-hez, úgy *b* a *c*-hez. Azt állítom, hogy az *a*-ból, *b*-ből és *c*-ből szerkesztett téridom egyenlő a *b*-re emelt egyenlő oldalú és az előbbivel egyenlő szögű téridommal.

Vegyünk egy *E*-nél fekvő térszöget, melyet *DEG*, *GEF* és *FED* fog közre, mérjünk föl *b*-vel egyenlő *DE*, *GE* és *EF* szakaszokat (I. 3.), és egészítsük ki az *EK* paralelepipedont. Mérjünk föl egy *a*-val egyenlő *LM* szakaszt, szerkesszünk az *LM* egyeneshez, a rajta levő *L* ponthoz egy, az *E*-nél fekvővel egyenlő térszöget, melyet *NLO*, *OLM* és *MLN* fog közre (XI. 26.), s mérjünk föl egy *b*-vel egyenlő *LO* és egy *c*-vel egyenlő *LN* szakaszt. Minthogy *a* úgy aránylik *b*-hez, mint *b* a *c*-hez és *a* egyenlő *LM*-mel, *b* *LO*-val és *ED*-vel, *c* pedig *LN*-nel, *LM* úgy aránylik *EF*-hez, mint *DE* az *LN*-hez (V. 7.). Az egyenlő *NLM*, *DEF* szögek melletti oldalak fordítva arányosak, az *MN* paralelogramma tehát egyenlő a *DF* paralelogrammával (VI. 14.). Minthogy két egyenes vonalú síkszög, *DEF* és *NLM* egyenlő, *LO* és *EG* a csúcsaikból induló olyan, egymással egyenlő, nem síkbeli szakaszok, melyek páronként egyenlő szögeket zárnak be az eredeti szögek száraival, a *G* és *O* pontból *NLM*, illetve *DEF* síkjára bocsátott merőlegesek egyenlők egymással (XI. 35. K.), úgyhogy az *LH* és az *EK* téridom magassága ugyanaz. Az egyenlő alapokon fekvő azonos magasságú paralelepipedonok viszont egyenlők egymással (XI. 31.), a *HL* téridom tehát egyenlő az *EK* téridommal. *LH* az *a*-ból, *b*-ből és *c*-ből szerkesztett, *EK* pedig a *b*-re emelt téridom, az *a*-ból, *b*-ből és *c*-ből szerkesztett paralelepipedon tehát egyenlő a *b*-re emelt egyenlő oldalú és az előbbivel egyenlő szögű téridommal. Éppen ezt kellett megmutatni.

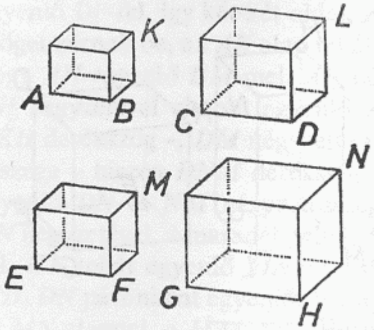


XI. 37. Tétel

Ha négy szakasz arányos, akkor a rájuk emelt hasonló és hasonlóan elhelyezett paralelepipedonok is arányosak; s ha a négy szakaszra emelt hasonló és hasonlóan elhelyezett paralelepipedonok arányosak, akkor maguk a szakaszok is arányosak.

Legyen *AB*, *CD*, *EF* és *GH* négy arányos szakasz: amint *AB* a *CD*-hez, úgy *EF* a *GH*-hoz, s emeljük az *AB*, *CD*, *EF*, *GH* szakaszokra a hasonló és hasonlóan fekvő *KA*, *LC*, *ME*, *NG* paralelepipedonokat. Azt állítom, hogy *KA* úgy aránylik *LC*-hez, mint *ME* az *NG*-hez.

Minthogy ugyanis a *KA* paralelepipedon hasonló *LC*-hez, *KA*-nak *LC*-hez való aránya háromszorosa *AB*-nek *CD*-hez való arányának (XI. 33.). Ugyanígy *ME*-nek *NG*-hez való aránya is háromszorosa *EF*-nek *GH*-hoz való arányának. *AB* úgy aránylik *CD*-hez, mint *EF* a *GH*-hoz, *AK* tehát úgy aránylik *LC*-hez, mint *ME* az *NG*-hez (V. 22., 11.).



Arányuljék most az *AK* téridom úgy az *LC* téridomhoz, mint az *ME* téridom *NG*-hez. Azt állítom, hogy az *AB* szakasz úgy aránylik *CD*-hez, mint *EF* a *GH*-hoz.

Minthogy *KA*-nak *LC*-hez való aránya ismét háromszorosa *AB*-nek *CD*-hez való arányának, és *ME*-nek *NG*-hez való aránya is háromszorosa *EF*-nek *GH*-hoz való arányának, és *KA* úgy aránylik *LC*-hez, mint *ME* az *NG*-hez, *AB* úgy aránylik *CD*-hez, mint *EF* a *GH*-hoz.

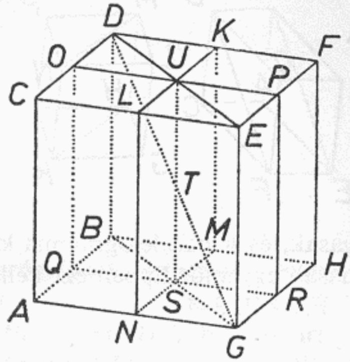
Ha tehát négy szakasz arányos... és így tovább a tétel. Éppen ezt kellett megmutatni.

XI. 38. Tétel

Ha egy kocka két szemközti lapjának oldalait megfelezzük és az osztáspontokon síkokat fektetünk át, akkor a síkok metszete és a kocka átlója felezi egymást.*

Felezzük meg ugyanis az *AF* kocka két szemközti lapjának, *CF*-nek és *AH*-nak az oldalait a *K*, *L*, *M*, *N*, *O*, *Q*, *P* és *R* pontokban, fektessük át az osztáspontokon a *KN* és *OR* síkot, a síkok metszete legyen *US* (XI. 3.) és az *AF* kocka átlója *DG*. Azt állítom, hogy *UT* egyenlő *TS*-sel, *DT* pedig *TG*-vel.

Húzzuk meg ugyanis *DU*-t, *UE*-t, *BS*-et és *SG*-t. Minthogy *DO* párhuzamos *PE*-vel, a *DOU*, *UPE* váltószögek egyenlők egymással (I. 29.). Minthogy *DO* egyenlő *PE*-vel, *OU* pedig *UP*-vel, és egyenlő szöget fognak közre, a *DU* alap egyenlő az *UE* alappal, a *DOU* háromszög egyenlő a *PUE* háromszöggel, és a többi szög is páronként egyenlő (I. 4.), egyenlő tehát az *OUD* szög a *PUE* szöggel. Ezért *DUE* egyenes (I. 14.). Ugyanígy *BSG* is egyenes és *BS* egyenlő *SG*-vel. Minthogy *CA* párhuzamos és egyenlő *DB*-vel és *CA* az *EG*-vel is egyenlő és párhuzamos (I. 34.), *DB* egyenlő és párhuzamos *EG*-vel (XI. 9.). A *DE* és a *BG* szakasz köti össze őket, *DE* tehát párhuzamos *BG*-vel (I. 33.), az *EDT* szög tehát egyenlő *BGT*-vel – hiszen váltószögek (XI. 7., I. 29.) –, *DTU* pedig egyenlő *GTS*-sel (I. 15.). *DTU* és *GTS* tehát két olyan háromszög, melynek két-két szöge páronként egyenlő, és egy-egy oldala, az egyenlő szögek egyikével szemközti *DU* és *GS* egyenlő – hiszen fele részei *DE*-nek és *BG*-nek –, tehát a többi oldal is páronként egyenlő (I. 26.). *DT* tehát egyenlő *TG*-vel, *UT* pedig *TS*-sel.



Ha tehát egy kocka két szemközti lapjának oldalait megfelezzük és az osztáspontokon síkokat fektetünk át, akkor a síkok metszete és a kocka átlója felezik egymást. Éppen ezt kellett megmutatni.

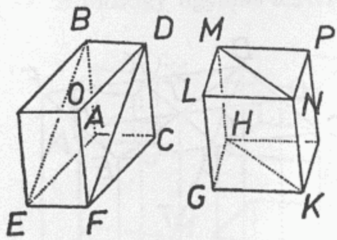
F.: XIII. 17.

XI. 39. Tétel

Ha van két (háromoldalú) hasáb, az egyik egy paralelogrammáján fekszik, a másik egy háromszögén, így egyenlő magasak, és a paralelogramma kétszerese a háromszögnek, akkor a két hasáb egyenlő.

Legyen *ABCDEF* és *GHKLMN* két hasáb, az egyik feküdjék az *AF* paralelogrammán, a másik a *GHK* háromszögön, legyenek egyenlő magasak, és legyen az *AF* paralelogramma kétszerese a *GHK* háromszögnek. Azt állítom, hogy az *ABCDEF* hasáb egyenlő a *GHKLMN* hasábbal.

Egészítsük ki ugyanis az *AO*, *GP* téridomokat. Minthogy az *AF* paralelogramma kétszerese a *GHK* háromszögnek és a *HK* paralelogramma is kétszerese a *GHK* háromszögnek (I. 34.), az *AF* paralelográmma egyenlő a *HK* paralelogrammával. Az egyenlő alapokon fekvő és azonos magasságú paralelepipedonok viszont egyenlők egymással (XI. 31.), az *AO* téridom tehát egyenlő a *GP* téridommal. Az *AO* téridomnak fele része az *ABCDEF* hasáb, a *GP* téridomnak fele része a *GHKLMN* hasáb, az *ABCDEF* hasáb tehát egyenlő a *GHKLMN* hasábbal.



Ha tehát van két hasáb, az egyik egy paralelogrammáján fekszik, a másik egy háromszögén, így egyenlő magasak, és a paralelogramma kétszerese a háromszögnek, akkor a két hasáb egyenlő. Éppen ezt kellett megmutatni.

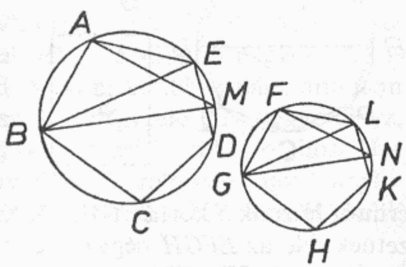
F.: XII. 3–4.

Tizenkettedik könyv

XII. 1. Tétel

A körökbe írt hasonló sokszögek úgy aránylanak egymáshoz, mint az átmérők négyzetei.

Legyenek *ABC* és *FGH* körök, *ABCDE* és *FGHKL* beléjük írt hasonló sokszögek, és legyenek a körök átmérői *BM* és *GN*. Azt állítom, hogy az *ABCDE* sokszög úgy aránylik az *FGHKL* sokszöghöz, mint *BM* négyzete *GN* négyzetéhez.



Húzzuk meg ugyanis *BE*-t, *AM*-et, *GL*-t és *FN*-t. Minthogy az *ABCDEF* sokszög hasonló az *FGHKL* sokszöghöz, a *BAE* szög egyenlő *GFL*-lel, és *BA* úgy aránylik *AE*-hez, mint *GF* az *FL*-hez. Így *BAE* és *GFL* két olyan háromszög, melynek egy-egy szöge, *BAE* és *GFL* egyenlő és az egyenlő szögek melletti oldalaik arányosak, az *ABE* háromszög szögei tehát egyenlők *FGL* szögeivel (VI. 6.). Az *AEB* szög tehát egyenlő az *FLG* szöggel. *AEB* viszont egyenlő *AMB*-vel – hiszen ugyanazon az íven nyugszanak –, *FLG* pedig *FNG*-vel (III. 27.), *AMB* is egyenlő tehát *FNG*-vel. A *BAM* derékszög is egyenlő a *GFN* derékszöggel (III. 31.), tehát a két fönnmaradó szög is egyenlő (I. 32.). Egyenlők tehát az *ABM* háromszög szögei *FGN* szögeivel, *BM* tehát úgy aránylik *GN*-hez, mint *BA* a *GF*-hez (VI. 4.). *BM*-nek *GN*-hez való arányának kétszerese *BM* négyzetének *GN* négyzetéhez való aránya, *BA*-nak *GF*-hez való arányának kétszerese az *ABCDE* sokszögnek az *FGHKL* sokszöghöz való aránya (VI. 20.), az *ABCDEF* sokszög tehát úgy aránylik az *FGHKL* sokszöghöz, mint *BM* négyzete *GN* négyzetéhez (V. 22., 11.).

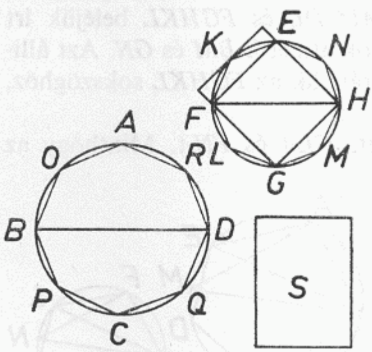
A körökbe írt hasonló sokszögek tehát úgy aránylanak egymáshoz, mint az átmérők négyzetei. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: XII. 2., 11.

XII. 2. Tétel

*A körök (területei) úgy aránylanak egymáshoz, mint az átmérőik négyzetei.**

Legyenek *ABCD* és *EFGH* körök, *BD* és *FH* átmérőik. Azt állítom, hogy az *ABCD* kör úgy aránylik az *EFGH* körhöz, mint *BD* négyzete *FH* négyzetéhez.



Ha ugyanis az *ABCD* kör nem úgy aránylik az *EFGH* körhöz, mint *BD* négyzete *FH* négyzetéhez, akkor *BD* négyzete úgy aránylik *FH* négyzetéhez, mint az *ABCD* kör valamely, az *EFGH* körnél kisebb vagy nagyobb idomhoz. Legyen ez először a kisebb *S* idom. Írjunk be az *EFGH* körbe egy *EFGH* négyzetet (IV. 6.). A beírt négyzet nagyobb, mint az *EFGH* kör fele, mert ha az *E*, *F*, *G* és *H* ponton át érintőt húzunk a körhöz (III. 16. K.), akkor a nyert kör köré írt négyzetnek fele az *EFGH* négyzet, és a körülírt négyzetnél kisebb a kör, úgyhogy a beírt *EFGH* négyzet nagyobb az *EFGH* kör felénél. Felezzük meg az *EF*, *FG*, *GH*, *HE* íveket a *K*, *L*, *M*, *N* pontokban (III. 30.), és húzzuk meg az *EK*, *KF*, *FL*, *LG*, *GM*, *MH*, *HN*, *NE* szakaszokat. Ekkor az *EKF*, *FLG*, *GMH*, *HNE* háromszögek mindegyike nagyobb a megfelelő körszelet felénél, mert ha a *K*, *L*, *M* és *N* ponton át érintőt húzunk a körhöz és kiegészítjük az *EF*, *FG*, *GH*, *HE* szakaszokon fekvő paralelogrammákat, akkor az *EKF*, *FLG*, *GMH*, *HNE* háromszögek mindegyike fele a megfelelő paralelogrammának (I. 41.), a megfelelő körszelet viszont kisebb a paralelogrammánál, úgyhogy az *EKF*, *FLG*, *GMH*, *HNE* háromszögek mindegyike nagyobb a megfelelő körszelet felénél. Ha a nyert íveket megfelezzük, az osztáspontokat összekötjük és mindig így tovább, akkor egyszer olyan körszeletek maradnak, melyek összege kisebb annál a különbségnél, mellyel az *EFGH* kör nagyobb az *S* idomnál. Megmutattuk ugyanis a tizedik könyv első tételében, hogy ha adva van két nem egyenlő mennyiség, és a nagyobból levonunk a felénél többet, és a maradékból a felénél többet, és így tovább, akkor egy olyan mennyiség fog maradni, mely kisebb az adott mennyiségek kisebbikénél. Maradjon hát: legyen az *EFGH* körnek az *EK*, *KF*, *FL*, *LG*, *GM*, *MH*, *HN*, *NE* szakaszon fekvő szeleteinek az összege kisebb annál a többletnél, mellyel az *EFGH* kör nagyobb az *S* idomnál. A maradék *EKFLGMHN* sokszög tehát nagyobb az *S* idomnál. Írjunk az *ABCD* körbe egy, az *EKFLGMHN* sokszöghöz hasonló *AOBPCQDR* sokszöget. Ekkor az *AOBPCQDR* sokszög úgy aránylik az *EKFLGMHN* sokszöghöz, mint *BD* négyzete *FH* négyzetéhez (XII. 1.). *BD* négyzete viszont úgy aránylik *FH* négyzetéhez, mint az *ABCD* kör az *S* idomhoz, az *ABCD* kör tehát úgy az *S* idomhoz, mint az *AOBPCQDR* sokszög az *EKFLGMHN* sokszöghöz (V. 11.), fölcserélve tehát amint az *ABCD* kör a benne levő sokszöghöz, úgy az *S* idom az *EKFLGMHN* sokszöghöz (V. 16.). Az *ABCD* kör nagyobb a beleírt sokszögnél, az *S* idom is nagyobb tehát az *EKFLGMHN* sokszögnél (V. 14.). Viszont kisebb is nála, ami nem lehetséges. Nem aránylik tehát úgy *BD* négyzete *FH* négyzetéhez, mint *ABCD* kör valamely, az *EFGH* körnél kisebb idomhoz. Hasonlóképp mutathatnánk meg, hogy *FH* négyzete nem úgy aránylik *BD* négyzetéhez, mint az *EFGH* kör valamely, az *ABCD* körnél kisebb idomhoz.

Azt állítom, hogy *BD* négyzete nem úgy aránylik *FH* négyzetéhez, mint az *ABCD* kör valamely, az *EFGH* körnél nagyobb idomhoz.

Tegyük föl ugyanis, hogy mint a nagyobb *S* idomhoz. Fordítva tehát amint *FH* négyzete *DB* négyzetéhez, úgy aránylik az *S* idom az *ABCD* körhöz (V. 7. K.). Amint viszont az *S* idom az *ABCD* körhöz, úgy aránylik az *EFGH* kör valamely, az *ABCD* körnél kisebb idomhoz (L.), amint tehát *FH* négyzete *BD* négyzetéhez, úgy az *EFGH* kör valamely, az *ABCD* körnél kisebb idomhoz. Erről megmutattuk, hogy nem lehetséges, *BD* négyzete tehát nem úgy aránylik *FH* négyzetéhez, mint az *ABCD* kör valamely, az *EFGH* körnél nagyobb idomhoz. Megmutattuk azt is, hogy kisebbhez sem, *BD* négyzete tehát úgy aránylik *FH* négyzetéhez, mint az *ABCD* kör az *EFGH* körhöz.

A körök tehát úgy aránylanak egymáshoz, mint az átmérőik négyzetei. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: XII. 11.

XII. 2. Lemma

Azt állítom, hogy ha az *S* idom nagyobb az *EFGH* körnél, akkor az *S* idom úgy aránylik az *ABCD* körhöz, mint az *EFGH* kör valamely, az *ABCD* körnél kisebb idomhoz.

Arányuljék ugyanis amint az *S* idom az *ABCD* körhöz, úgy az *EFGH* kör a *T* idomhoz. Azt állítom, hogy a *T* idom kisebb az *ABCD* körnél. Minthogy ugyanis az *S* idom úgy aránylik az *ABCD* körhöz, mint az *EFGH* kör a *T* idomhoz, fölcserélve az *S* idom úgy aránylik az *EFGH* körhöz, mint az *ABCD* kör a *T* idomhoz (V. 16.). Az *S* idom nagyobb az *EFGH* körnél, tehát az *ABCD* kör is nagyobb a *T* idomnál (V. 14.), úgyhogy az *S* idom úgy aránylik az *ABCD* körhöz, mint az *EFGH* kör valamely, az *ABCD* körnél kisebb idomhoz. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: XII. 2., 5., 11., 12., 18.

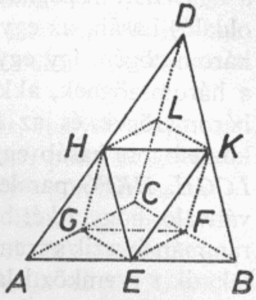
XII. 3. Tétel

Minden háromszög alapú gúla szétesik két egyenlő, egymáshoz és a teljes gúlához hasonló háromszög alapú gúlára és két egyenlő hasábra. A két hasáb összege nagyobb a teljes gúla felénél.

Vegyünk egy gúlát, melynek alapja az *ABC* háromszög, csúcsa pedig a *D* pont. Azt állítom, hogy az *ABCD* gúla szétesik két, egymással egyenlő és a teljes gúlához hasonló háromszög alapú gúlára és két egyenlő hasábra, s hogy a két hasáb összege nagyobb a teljes gúla felénél.

Felezzük ugyanis meg az *AB*, *BC*, *CA*, *AD*, *DB*, *DC* szakaszokat az *E*, *F*, *G*, *H*, *K*, illetve *L* pontban (I. 10.), és húzzuk meg a *HE*, *EG*, *GH*, *HK*, *KL*, *LH*, *KF* és *FG* szakaszokat. Minthogy *AE* egyenlő *EB*-vel, *AH* pedig *DH*-val, *EH* párhuzamos *DB*-vel (VI. 2.). Ugyanígy

HK is párhuzamos *AB*-vel. *HEBK* tehát paralelogramma, *HK* tehát egyenlő *EB*-vel (I. 34.). *EB* egyenlő *EA*-val, tehát *AE* egyenlő *HK*-val. *AH* egyenlő *HD*-vel, tehát két-két oldal, *EA*, *AH* és *KH*, *HD* páronként egyenlő, és az *EAH* szög egyenlő a *KHD* szöggel (I. 29.), az *EH* alap tehát egyenlő a *KD* alappal (I. 4.), az *AEH* háromszög tehát egyenlő és hasonló a *HKD* háromszöggel. Ugyanígy az *AHG* háromszög is egyenlő és hasonló a *HLD* háromszöggel. Minthogy két, egymást metsző egyenes, *EH* és *HG* párhuzamos két, nem ugyanabban a síkban fekvő, egymást metsző egyenessel, *KD*-vel és *DL*-lel, egyenlő szöget zárnak be (XI. 10.), az *EHG* szög tehát egyenlő a *KDL* szöggel.



Minthogy két-két oldal, *EH*, *HG* és *KD*, *DL* páronként egyenlő, és az *EHG* szög egyenlő a *KDL* szöggel, az *EG* alap egyenlő a *KL* alappal, az *EHG* háromszög tehát egyenlő és hasonló a *KDL* háromszöggel (I. 4.). Ugyanígy az *AEG* háromszög is egyenlő és hasonló a *HKL* háromszöggel. A gúla tehát, melynek alapja az *AEG* háromszög s csúcsa a *H* pont, egyenlő és hasonló azzal a gúlával, melynek alapja a *HKL* háromszög s csúcsa a *D* pont. Minthogy *HK* párhuzamos az *ADB* háromszög egyik oldalával, *AB*-vel, az *ADB* háromszög szögei egyenlők *DHK* szögeivel (I. 29.), és az oldalaik arányosak (VI. 4.), az *ADB* háromszög tehát hasonló a *DHK* háromszöghöz. Ugyanígy a *DBC* háromszög is hasonló *DKL*-hez, *ADC* pedig *DLH*-hoz. Minthogy két, egymást metsző egyenes, *BA* és *AC* párhuzamos két, nem ugyanabban a síkban fekvő, egymást metsző egyenessel, *KH*-val és *HL*-lel, egyenlő szöget zárnak be, a *BAC* szög tehát egyenlő *KHL*-lel. *BA* úgy aránylik *AC*-hez, mint *KH* *HL*-hez (V. 16.), az *ABC* háromszög tehát hasonló a *HKL* háromszöghöz (VI. 6.). Az a gúla tehát, melynek alapja az *ABC* háromszög s csúcsa a *D* pont, hasonló ahhoz a gúlához, melynek alapja a *HKL* háromszög s csúcsa a *D* pont. Arról a gúláról viszont, melynek alapja a *HKL* háromszög s csúcsa a *D* pont, megmutattuk, hogy hasonló ahhoz a gúlához, melynek alapja az *AEG* háromszög s csúcsa a *H* pont [úgyhogy az a gúla, melynek alapja az *ABC* háromszög s csúcsa a *D* pont, hasonló ahhoz a gúlához, melynek alapja az *AEG* háromszög s csúcsa a *H* pont (vö. VI. 21.)]. Az *AEGH* és a *HKLD* gúla tehát hasonló a teljes *ABCD* gúlához.

Minthogy *BF* egyenlő *FC*-vel, az *EBFG* paralelogramma kétszerese a *GFC* háromszögnek (I. 41. és 36.). Minthogy ha van két (háromoldalú) hasáb, az egyik egy paralelogrammáján fekszik, a másik egy háromszögén, így egyenlő magasak, és a paralelogramma kétszerese a háromszögnek, akkor a két hasáb egyenlő (XI. 39.), a *BKF*, *EHG* háromszögek és az *EBFG*, *EBKH*, *HKFG* paralelogrammák által közrefogott hasáb egyenlő a *GFC*, *HKL* háromszögek és a *KFCL*, *LCGH*, *HKFG* paralelogrammák által közrefogott hasábbal. S nyilvánvaló, hogy a két hasáb bármelyike – amelyik az *EBFG* paralelogrammán fekszik s szemközti éle *HK*, meg amelyik a *GFC* háromszögön fekszik s szemközti lapja a *HKL*, háromszög – nagyobb a két gúla bármelyikénél – melyek alapja az *AEG*, illetve *HKL* háromszög s csúcsa a *H*, illetve *D* pont –, minthogy ha meghúzzuk az *EF* és *EK* szakaszt, akkor az a hasáb, mely az *EBFG* paralelogrammán fekszik s szemközti éle *HK*, nagyobb annál a gúlánál, melynek alapja az *EBF* háromszög s csúcsa a *K* pont, e gúla viszont, melynek alapja az *EBF* háromszög s csúcsa a *K* pont, egyenlő azzal a gúlával, melynek alapja az *AEG* háromszög s csúcsa a *H* pont – hiszen egyenlő és hasonló lapok fogják őket közre –; úgyhogy az a hasáb, mely az *EBFG* paralelogrammán fekszik s szemközti éle *HK*, nagyobb annál a gúlánál, melynek alapja az *AEG* háromszög s csúcsa a *H* pont. A hasáb viszont, mely az *EBFG* paralelogrammán fekszik s szemközti éle *HK*, egyenlő azzal a hasábbal, melynek alapja a *GFC* háromszög s szemközti lapja a *HKL* háromszög, a gúla pedig, melynek alapja az *AEG* háromszög s csúcsa a *H* pont, egyenlő azzal a gúlával, melynek alapja a *HKL* háromszög s csúcsa a *D* pont. A mondott két hasáb összege tehát nagyobb a mondott két gúla – melyek alapja az *AEG*, illetve a *HKL* háromszög s csúcsa a *H*, illetve *D* pont – összegénél.

A teljes gúla tehát, melynek alapja a *ABC* háromszög s csúcsa a *D* pont, szétesik két, egymással egyenlő [és a teljes gúlához hasonló] gúlára és két egyenlő hasábra; s a két hasáb összege nagyobb a teljes gúla felénél. Éppen ezt kellett megmutatni.

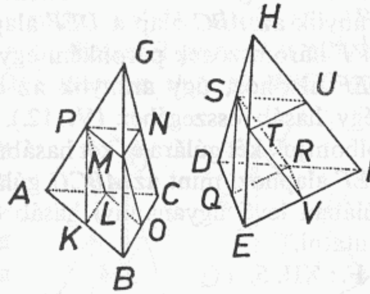
F.: XII. 4–5.

XII. 4. Tétel

Ha van két azonos magasságú háromszög alapú gúla, és mindegyiket fölbontjuk két, egymással egyenlő és a teljes gúlához hasonló gúlára és két egyenlő hasábra [és a keletkezett gúlákat ugyanígy és így tovább], akkor az egyik gúla alapja úgy aránylik a másik gúla alapjához, mint az egyik gúlában levő valahány hasáb összege a másik gúlában levő ugyanannyi hasáb összegéhez.

Vegyünk ugyanis két azonos magasságú gúlát, melyek alapja az ABC, illetve DEF háromszög s csúcsa a G, illetve H pont, és bontsuk föl mindegyiket két, egymással egyenlő és a teljes gúlához hasonló gúlára és két egyenlő hasábra [a keletkezett gúlákat ugyanígy fölbontottaknak kell gondolni, és így tovább] (XII. 3.). Azt állítom, hogy az ABC alap úgy aránylik a DEF alaphoz, mint az $ABCG$ gúlában levő valahány hasáb összege a $DEFH$ gúlában levő ugyanannyi hasáb összegéhez.

Minthogy ugyanis BO egyenlő OC-vel és AL az LC-vel, LO párhuzamos AB-vel (VI. 2.) és az ABC háromszög hasonló az LOC háromszöghöz (I. 29., VI. 4.). Ugyanígy a DEF háromszög is hasonló az RVF háromszöghöz. Minthogy BC kétszerese CO-nak és EF az FV-nek, BC úgy aránylik CO-hoz, mint EF az FV-hez. ABC és LCO a BC, illetve CO szakaszra emelt hasonló és hasonlóan fekvő sokszögek, DEF és RVF pedig az EF, illetve FV szakaszra emelt hasonló és hasonlóan fekvő sokszögek, az ABC háromszög tehát úgy aránylik az LOC háromszöghöz, mint a DEF háromszög az RVF háromszöghöz (VI. 22.); fölcserélve tehát amint az ABC háromszög a DEF háromszöghöz, úgy LOC az RVF-hez (V. 16.). Amint viszont az LOC háromszög az RVF háromszöghöz, úgy az a hasáb, melynek alapja az LOC háromszög s szemközti lapja PMN, ahhoz a hasábhoz, melynek alapja az RVF háromszög s szemközti lapja STU (L.), amint tehát az ABC háromszög a DEF háromszöghöz, úgy az a hasáb,



melynek alapja az *LOC* háromszög s szemközti lapja *PMN*, ahhoz a hasábhoz, melynek alapja az *RVF* háromszög s szemközti lapja *STU* (V. 11.). Amint viszont a mondott hasábok aránylanak egymáshoz, úgy aránylik az a hasáb, mely a *KBOL* paralelogrammán fekszik s szemközti éle *PM*, ahhoz a hasábhoz, mely a *QEVR* paralelogrammán fekszik s szemközti éle *ST* (vö. XII. 3., V. 7.), ugyanígy aránylik tehát annak a két hasábnak az összege, mely a *KBOL* paralelogrammán fekszik s szemközti éle *PM* és amelynek alapja *LOC* s szemközti lapja *PMN*, annak a két hasábnak az összegéhez, mely *QEVR*-en fekszik s szemközti éle *ST* és amelynek alapja az *RVF* háromszög s szemközti lapja *STU* (V. 12.). Amint tehát az *ABC* alap a *DEF* alaphoz, úgy a mondott két hasáb összege a mondott másik két hasáb összegéhez (V. 11.).

Hasonlóképp, ha a *PMNG* és az *STUH* gúlát fölbontjuk két hasábra és két gúlára, akkor a *PMN* alap úgy aránylik az *STU* alaphoz, mint a *PMNG* gúlában levő két hasáb összege az *STUH* gúlában levő két hasáb összegéhez. Amint viszont a *PMN* alap az *STU* alaphoz, úgy aránylik az *ABC* alap a *DEF* alaphoz, hiszen a *PMN*, *STU* és *LOC*, *RVF* háromszögek páronként egyenlőek. Amint tehát az *ABC* alap a *DEF* alaphoz, úgy aránylik az egyik négy hasáb összege a másik négy hasáb összegéhez (V. 12.). Hasonlóképp, ha a nyert gúlákat fölbontjuk két gúlára és két hasábra, akkor az *ABC* alap úgy aránylik a *DEF* alaphoz, mint az *ABCG* gúlában levő hasábok összege a *DEFH* gúlában levő ugyanannyi hasáb összegéhez. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: XII. 5.

XII. 4. Lemma

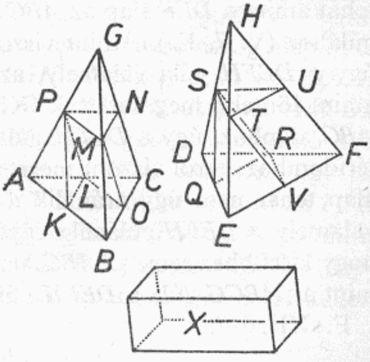
Azt pedig, hogy az *LOC* háromszög úgy aránylik az *RVF* háromszöghöz, mint az a hasáb, melynek alapja az *LOC* háromszög s szemközti lapja *PMN*, ahhoz a hasábhoz, melynek alapja *RVF* s szemközti lapja *STU*, így kell megmutatni:

Képzeljük el, hogy ugyanezen az ábrán a *G*, illetve *H* pontból merőlegest bocsátottunk az *ABC*, illetve a *DEF* síkra (XI.11.). Ezek nyilván egyenlők, mert a gúlák feltétel szerint egyenlő magasságúak. Minthogy két egyenest, *GC*-t és a *G*-ből bocsátott merőlegest, a párhuzamos *ABC*, *PMN* síkok metszenek, az egyeneseket ugyanolyan arányban osztják (XI. 17.). *GC*-t az *N* pontban felezi a *PMN* sík, a *G*-ből az *ABC* síkra bocsátott merőlegest is felezi tehát a *PMN* sík. Ugyanígy a *H*-ból a *DEF* síkra bocsátott merőlegest is felezi az *STU* sík. A *G*, illetve *H* pontból az *ABC*, illetve *DEF* síkra bocsátott merőlegesek egyenlők, tehát a *PMN*, illetve *STU* háromszögtől *ABC*-ig, illetve *DEF*-ig vezető merőlegesek is egyenlők. A hasábok tehát, melyek alapja az *LOC*, illetve az *RVF* háromszög s szemközti lapja *PMN*, illetve *STU*, egyenlő magasságúak, úgyhogy a mondott hasábokból kiegészített paralelepipedonok is egyenlő magasságúak, és úgy aránylanak egymáshoz, mint az alapjaik (XI. 32.), tehát a fele részek is, a mondott hasábok (XI. 28.), úgy aránylanak egymáshoz, mint az *LOC* alap az *RVF* alaphoz. Éppen ezt kellett megmutatni.

XII. 5. Tétel

Az azonos magasságú háromszög alapú gúlák úgy aránylanak egymáshoz, mint az alapjuk.

Vegyünk két azonos magasságú gúlát, melyek alapja az *ABC*, illetve a *DEF* háromszög s csúcsa a *G*, illetve *H* pont. Azt állítom, hogy az *ABC* alap úgy aránylik a *DEF* alaphoz, mint az *ABCG* gúla a *DEFH* gúlához.



Ha ugyanis az *ABC* alap nem úgy aránylik a *DEF* alaphoz, mint az *ABCG* gúla a *DEFH* gúlához, akkor az *ABC* alap úgy aránylik a *DEF* alaphoz, mint az *ABCG* gúla valamely, a *DEFH* gúlánál kisebb vagy nagyobb téridomhoz. Legyen ez először a kisebb *X* idom. Bontsuk föl a *DEFH* gúlát két, egymással egyenlő és a teljes gúlához hasonló gúlára és két egyenlő hasábra. Ekkor a két hasáb összege nagyobb a teljes gúla felénél (XII. 3.). A fölbontás során keletkezett gúlákat ismét bontsuk föl, és így tovább, míg olyan gúlák nem maradnak a *DEFH* gúlából, melyek összege kisebb annál a különbségnél, mellyel a *DEFH* gúla nagyobb az *X* téridomnál (X. 1.). Maradjanak meg így egyszerűség kedvéért a *DQRS*, *STUH* gúlák. A maradék tehát, a *DEFH* gúlában levő hasábok összege nagyobb az *X* téridomnál. Bontsuk föl az *ABCG* gúlát is hasonlóképp, ugyanannyi tagra. Ekkor az *ABC* alap úgy aránylik a *DEF* alaphoz, mint az *ABCG* gúlabeli hasábok összege a *DEFH* gúlabeli hasábok összegéhez (XII. 4.). Amint viszont az *ABC* alap a *DEF* alaphoz, úgy az *ABCG* gúla az *X* téridomhoz, amint tehát az *ABCG* gúla az *X* téridomhoz, úgy az *ABCG* gúlabeli hasábok összege a *DEFH* gúlabeli hasábok összegéhez (V. 11.), fölcserélve tehát amint az *ABCG* gúla a benne levő hasábok összegéhez, úgy az *X* téridom a *DEFH* gúlabeli hasábok összegéhez (V. 16.). Az *ABCG* gúla nagyobb a benne levő hasábok összegénél, az *X* téridom is nagyobb tehát a *DEFH* gúlabeli hasábok összegénél (V. 14.). Viszont kisebb is, ami nem lehetséges. Az *ABC* alap tehát nem úgy aránylik a *DEF* alaphoz, mint az *ABCG* gúla valamely, a *DEFH* gúlánál kisebb téridomhoz. Hasonlóképp mutathatnánk meg, hogy a *DEF* alap sem úgy aránylik az *ABC* alaphoz, mint a *DEFH* gúla valamely, az *ABCG* gúlánál kisebb téridomhoz.

Azt állítom, hogy az *ABC* alap nem is úgy aránylik a *DEF* alaphoz, mint az *ABCG* gúla valamely, a *DEFH* gúlánál nagyobb téridomhoz.

Tegyük föl ugyanis, hogy mint a nagyobb *X* idomhoz. Megfordítva tehát amint a *DEF* alap az *ABC* alaphoz, úgy az *X* téridom az *ABCG* gúlához (V. 7. K.). Amint viszont az *X* téridom az *ABCG* gúlához, úgy a *DEFH* gúla valamely, az *ABCG* gúlánál kisebb téridomhoz, amint föntebb megmutattuk (XII. 2. L.); amint tehát a *DEF* alap az *ABC* alaphoz, úgy a *DEFH* gúla valamely, az *ABCG* gúlánál kisebb téridomhoz; erről viszont megmutattuk, hogy ellentmondás. Az *ABC* alap tehát nem úgy aránylik a *DEF* alaphoz, mint az *ABCG* gúla valamely, a *DEFH* gúlánál nagyobb téridomhoz. Megmutattuk azt is, hogy kisebbhez sem, az *ABC* alap tehát úgy aránylik a *DEF* alaphoz, mint az *ABCG* gúla a *DEFH* gúlához. Éppen ezt kellett megmutatni.

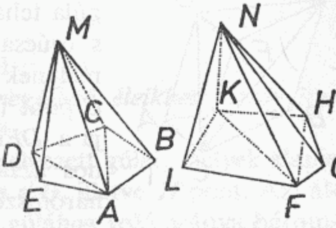
F.: XII. 6–7.

XII. 6. Tétel

Az azonos magasságú sokszög alapú gúlák úgy aránylanak egymáshoz, mint az alapjuk.

Vegyünk két azonos magasságú gúlát, melyek alapja az *ABCDE*, illetve az *FGHKL* sokszög, s csúcsa az *M*, illetve *N* pont. Azt állítom, hogy az *ABCDE* alap úgy aránylik az *FGHKL* alaphoz, mint az *ABCDEM* gúla az *FGHKLN* gúlához.

Húzzuk meg ugyanis az *AC*, *AD*, *FH*, *FK* szakaszokat. Minthogy *ABCM* és *ACDM* két egyenlő magasságú háromszög alapú gúla, úgy aránylanak egymáshoz, mint az alapjaik (XII. 5.), az *ABC* alap tehát úgy aránylik az *ACD* alaphoz, mint az *ABCM* gúla az *ACDM* gúlához. Összetéve tehát amint az *ABCD* alap az *ACD* alaphoz, úgy az *ABCDM* gúla az *ACDM* gúlához (V. 18.). Amint viszont az *ACD* alap az *ADE* alaphoz, úgy az *ACDM* gúla az *ADEM* gúlához (XII. 5.), egyenlő sok tagon át tehát amint az *ABCD* alap az *ADE* alaphoz, úgy az *ABCDM* gúla az *ADEM* gúlához (V. 22.). Ismét összetéve, amint az *ABCDE* alap az *ADE* alaphoz, úgy az *ABCDEM* gúla az *ADEM* gúlához. Hasonlóképp mutatható meg az is, hogy amint az *FGHKL* alap az *FGH* alaphoz, úgy az *FGHKLN* gúla az *FGHN* gúlához. Minthogy *ADEM* és *FGHN* két egyenlő magasságú háromszög alapú gúla, az *ADE* alap úgy aránylik az *FGH* alaphoz, mint az *ADEM* gúla az *FGHN* gúlához. Amint viszont az *ADE* alap az *ABCDE* alaphoz, úgy az *ADEM* gúla az *ABCDEM* gúlához, egyenlő sok tagon át tehát amint az *ABCDE* alap az *FGH* alaphoz, úgy az *ABCDEM* gúla az *FGHN* gúlához (V. 7. K.). Amint viszont az *FGH* alap az *FGHKL* alaphoz, úgy az *FGHN* gúla az *FGHKLN* gúlához, egyenlő sok tagon át tehát amint az *ABCDE* alap az *FGHKL* alaphoz, úgy az *ABCDEM* gúla az *FGHKLN* gúlához. Éppen ezt kellett megmutatni.



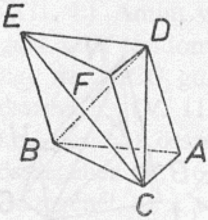
F.: XII. 11.

XII. 7. Tétel

*Minden háromszög alapú hasáb szétesik három, egymással egyenlő háromszög alapú gúlára.**

Vegyünk egy hasábot, melynek alapja az *ABC* háromszög s szemközti lapja *DEF*. Azt állítom, hogy az *ABCDEF* hasáb szétesik három, egymással egyenlő háromszög alapú gúlára.

Húzzuk meg ugyanis a *BD*, *EC*, *CD* szakaszokat. Minthogy *ABED* paralelogramma és *BD* átlója, az *ABD* háromszög egyenlő az *EBD* háromszöggel (I. 34.), a gúla tehát, melynek alapja az *ABD* háromszög s csúcsa a *C* pont, egyenlő azzal a gúlával, melynek alapja a *DEB* háromszög s csúcsa a *C* pont (XII. 5.). A gúla viszont, melynek alapja a *DEB* háromszög s csúcsa a *C* pont, azonos azzal a gúlával, melynek alapja az *EBC* háromszög s csúcsa a *D* pont, hiszen ugyanazok a lapok fogják őket közre. Az a gúla tehát, melynek alapja az *ABD* háromszög s csúcsa a *C* pont, egyenlő azzal a gúlával, melynek alapja az *EBC* háromszög s csúcsa a *D* pont. Ismét, minthogy *FCBE* paralelogramma és *CE* átlója, a *CEF* háromszög egyenlő a *CBE* háromszöggel, a gúla tehát, melynek alapja a *BCE* háromszög s csúcsa a *D* pont, egyenlő azzal a gúlával, melynek alapja az *ECF* háromszög s csúcsa a *D* pont. Arról a gúláról, melynek alapja a *BCE* háromszög s csúcsa a *D* pont, megmutattuk, hogy egyenlő azzal a gúlával, melynek alapja az *ABD* háromszög s csúcsa a *C* pont, az a gúla tehát, melynek alapja a *CEF* háromszög s csúcsa a *D* pont, egyenlő azzal a gúlával, melynek alapja az *ABD* háromszög s csúcsa a *C* pont. Az *ABCDEF* hasáb tehát szétesik három, egymással egyenlő háromszög alapú gúlára.



Minthogy az a gúla, melynek alapja az *ABD* háromszög s csúcsa a *C* pont, azonos azzal a gúlával, melynek alapja a *CAB* háromszög s csúcsa a *D* pont – hiszen ugyanazok a lapok fogják őket közre –, és megmutattuk, hogy az a gúla, melynek alapja az *ABC* háromszög s csúcsa a *C* pont, harmadrésze a hasábnak, melynek alapja az *ABC* háromszög s szemközti lapja *DEF*, az a gúla is, melynek alapja az *ABC* háromszög s csúcsa a *D* pont, harmadrésze a hasábnak, melynek alapja az *ABC* háromszög s szemközti lapja *DEF*.

F.: XII. 8.

Következmény

Ebből már nyilvánvaló, hogy minden gúla harmadrésze az ugyanazon az alapon fekvő egyenlő magasságú hasábnak [minthogy ha a gúla alapja valamilyen más sokszög, akkor ilyen a szemközti lap is, és a gúla fölbomlik olyan gúlákra, melyek alap- és fedőlapja háromszög]. Éppen ezt kellett megmutatni.

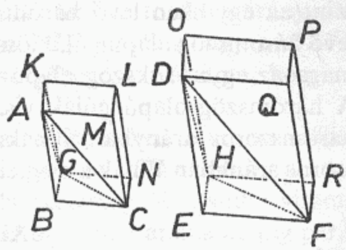
F.: XII. 10.

XII. 8. Tétel

Hasonló háromszög alapú gúlák a megfelelő éleikhez viszonyítva háromszoros arányban (V. 10. D.) *állnak.*

Vegyünk két hasonló és hasonlóan elhelyezett gúlát, melyek alapja az *ABC*, illetve *DEF* háromszög s csúcsa a *G*, illetve *H* pont. Azt állítom, hogy az *ABCG* gúlának a *DEFH* gúlához való aránya háromszorosa *BC*-nek *EF*-hez való arányának.

Egészítsük ki ugyanis a *BGML*, *EHQP* paralelepipedonokat. Minthogy az *ABCG* gúla hasonló a *DEFH* gúlához, az *ABC* szög egyenlő a *DEF* szöggel, *GBC* a *HEF*-fel, *ABG* pedig *DEH*-val, és *AB* úgy aránylik *DE*-hez, mint *BC* az *EF*-hez és *BG* az *EH*-hoz. Minthogy *AB* úgy aránylik *DE*-hez, mint *BC* az *EF*-hez, így az egyenlő szögek melletti oldalak arányosak, a *BM* paralelogramma hasonló az *EQ* paralelogrammához (I. 34.). Ugyanígy a *BN* paralelogramma hasonló *ER*-hez, *BK* pedig *EO*-hoz. Hasonló tehát három-három paralelogramma, *MB*, *BK* és *BN*, illetve *EQ*, *EO* és *ER*. *MB*, *BK* és *BN* egyenlő és hasonló a vele szemközti hárommal, *EQ*, *EO* és *ER* pedig egyenlő és hasonló a vele szemközti hárommal (XI. 24.), a *BGML* és az *EHQP* téridomot tehát ugyanannyi, (páronként) hasonló lap fogja közre, a *BGML* téridom tehát hasonló az *EHQP* téridomhoz. A hasonló paralelepipedonok viszont a megfelelő éleikhez viszonyítva háromszoros arányban állnak (XI. 33.), a *BGML* téridomnak az *EHQP* téridomhoz való aránya tehát a háromszorosa a megfelelő



élek, *BC* és *EF* arányának. Amint viszont a *BGML* téridom az *EHQP* téridomhoz, úgy aránylik az *ABCG* gúla a *DEFH* gúlához, minthogy a gúla hatodrésze a paralelepipedonnak, mivel a hasáb, mely fele a paralelepipedonnak (XI. 28.), háromszorosa a gúlának (XII. 7., V. 15.). Az *ABCG* gúlának a *DEFH* gúlához való aránya tehát háromszorosa *BC*-nek *EF*-hez való arányának (V. 11.). Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: XII. 9., 12.

Következmény

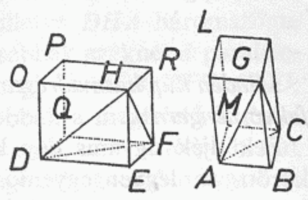
Ebből már nyilvánvaló, hogy a sokszög alapú hasonló gúlák is a megfelelő éleikhez viszonyítva háromszoros arányban állnak. Ha ugyanis fölbontjuk őket a bennük levő háromszög alapú gúlákra, akkor – mivel az alapok hasonló sokszögek lévén hasonló, ugyanolyan sok és a teljes sokszögekével megegyező arányú háromszögekre esnek szét (VI. 20.) – az egyikben levő valamelyik háromszög alapú gúla úgy aránylik a másikban levő megfelelő háromszög alapú gúlához, mint az egyikben levő háromszög alapú gúlák összege a másikban levő háromszög alapú gúlák összegéhez (XII. 5., V. 11–12.), azaz mint maga az egyik sokszög alapú gúla a másik sokszög alapú gúlához. A háromszög alapú gúlák viszont a megfelelő éleikhez viszonyítva háromszoros arányban állnak, tehát a sokszög alapúak is háromszoros arányban állnak a megfelelő éleikhez viszonyítva.

XII. 9. Tétel

Az egyenlő háromszög alapú gúláknak fordítva arányos az alapjuk a magassággal; s amely háromszög alapú gúláknak fordítva arányosak az alapjaik a magassággal, azok egyenlők.

Vegyünk ugyanis két egyenlő gúlát, melyek alapja az *ABC*, illetve a *DEF* háromszög s csúcsa a *G*, illetve *H* pont. Azt állítom, hogy az *ABCG*, *DEFH* gúláknak fordítva arányosak az alapjaik a magassággal: amint az *ABC* alap a *DEF* alaphoz, úgy aránylik a *DEFH* gúla magassága az *ABCG* gúla magasságához.

Egészítsük ki ugyanis a *BGML*, *EHQP* paralelepipedonokat. Minthogy az *ABCG* gúla egyenlő a *DEFH* gúlával és az *ABCG* gúlának hatszorosa a *BGML* téridom, a *DEFH* gúlának pedig az *EHQP* téridom (vö. XII. 8.), a *BGML* téridom egyenlő az *EHQP* téridommal. Az egyenlő paralelepipedonoknak viszont fordítva arányosak az alapjaik a magassággal (XI. 34.), a *BM* alap tehát úgy aránylik az *EQ* alaphoz, mint az *EHQP* téridom magassága a *BGML* téridom magasságához. Amint viszont a *BM* alap az *EQ* alaphoz, úgy aránylik az *ABC* háromszög a *DEF* háromszöghöz (I. 34., V. 15.), amint tehát az *ABC* háromszög a *DEF* háromszöghöz, úgy az *EHQP* téridom magassága a *BGML* téridom magasságához (V. 11.). Az *EHQP* téridom magassága ugyanaz, mint a *DEFH* gúla magassága, a *BGML* téridom magassága pedig ugyanaz, mint az *ABCG* gúla magassága, az *ABC* alap tehát úgy aránylik a *DEF* alaphoz, mint a *DEFH* gúla magassága az *ABCG* gúla magasságához. Az *ABCG*, *DEFH* gúláknak tehát fordítva arányosak az alapjaik a magassággal.



Legyenek most az *ABCG*, *DEFH* gúlák alapjai fordítva arányosak a magassággal: amint az *ABC* alap a *DEF* alaphoz, úgy a *DEFH* gúla magassága az *ABCG* gúla magasságához. Azt állítom, hogy az *ABCG* gúla egyenlő a *DEFH* gúlával.

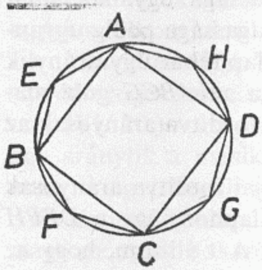
Ha ugyanis elvégezzük ugyanazokat a lépéseket, mint az előbb, akkor minthogy az *ABC* alap úgy aránylik a *DEF* alaphoz, mint a *DEFH* gúla magassága az *ABCG* gúla magasságához, amint viszont az *ABC* alap a *DEF* alaphoz, úgy a *BM* paralelogramma az *EQ* paralelogrammához, a *BM* paralelogramma úgy aránylik az *EQ* paralelogrammához, mint a *DEFH* gúla magassága az *ABCG* gúla magasságához. A *DEFH* gúla magassága ugyanaz, mint az *EHQP* paralelepipedon magassága, az *ABCG* gúla magassága pedig ugyanaz, mint a *BGML* paralelepipedon magassága, a *BM* alap tehát úgy aránylik az *EQ* alaphoz, mint az *EHQP* paralelepipedon magassága a *BGML* paralelepipedon magasságához. Amely paralelepipedonoknak viszont fordítva arányosak az alapjaik a magassággal, azok egyenlők (XI. 34.), a *BGML* paralelepipedon tehát egyenlő az *EHQP* paralelepipedonnal. *BGML*-nek hatodrésze az *ABCG* gúla, *EHQP*-nek hatodrésze a *DEFH* gúla, az *ABCG* gúla tehát egyenlő a *DEFH* gúlával.

Az egyenlő háromszög alapú gúláknak tehát fordítva arányosak az alapjaik a magassággal; s amely háromszög alapú gúláknak fordítva arányosak az alapjaik a magassággal, azok egyenlők. Éppen ezt kellett megmutatni.

XII. 10. Tétel

Minden kúp harmadrésze az egyenlő magasságú és ugyanazon alapon fekvő hengernek.

Feküdjék ugyanis egy kúp és egy henger ugyanazon az *ABCD* körön, és legyen egyenlő a magasságuk. Azt állítom, hogy a kúp harmadrésze a hengernek, azaz hogy a henger háromszorosa a kúpnak.



Ha ugyanis a henger nem háromszorosa a kúpnak, akkor a henger a kúp háromszorosánál vagy nagyobb, vagy kisebb. Legyen először nagyobb a háromszorosánál. Írjunk az *ABCD* körbe egy *ABCD* négyzetet (IV. 6.). Ekkor az *ABCD* négyzet nagyobb az *ABCD* kör felénél (vö. XII. 2.). Emeljünk az *ABCD* négyzetre egy, a hengerrel egyenlő magasságú hasábot. Ez a hasáb nagyobb, mint a henger fele, minthogy ha az *ABCD* kör köré is négyzetet írunk (IV. 7.), akkor az *ABCD* körbe írt négyzet fele a köréírt négyzetnek, és a rájuk emelt hasábok egyenlő magasságú paralelepipedonok. Az azonos magasságú paralelepipedonok viszont úgy aránylanak egymáshoz, mint az alapjaik (XI. 32.), az *ABCD* négyzetre emelt hasáb tehát fele az *ABCD* kör köré írt négyzetre emelt hasábnak. A henger kisebb az *ABCD* kör köré írt négyzetre emelt hasábnál, az *ABCD* négyzetre emelt, a hengerrel egyenlő magasságú hasáb tehát nagyobb a henger felénél. Felezzük meg az *AB*, *BC*, *CD*, *DA* íveket az *E*, *F*, *G*, *H* pontokban (III. 30.), és húzzuk meg az *AE*, *EB*, *BF*, *FC*, *CG*, *GD*, *DH*, *HA* szakaszokat. Ekkor az *AEB*, *BFC*, *CGD*, *DHA* háromszögek mindegyike nagyobb az *ABCD* kör megfelelő szeletének felénél, mint föntebb (XII. 2.) megmutattuk. Emeljünk az *AEB*, *BFC*, *CGD*, *DHA* háromszögek mindegyikére a hengerrel egyenlő magasságú hasábot. Ezen hasábok mindegyike nagyobb a megfelelő hengerszelet felénél, minthogy ha az *E*, *F*, *G* és *H* ponton át párhuzamost húzunk *AB*-vel, *BC*-vel, *CD*-vel, illetve *DA*-val (I. 31.), kiegészítjük az *AB*, *BC*, *CD*, illetve *DA* melletti paralelogrammát és a hengerrel egyenlő magasságú paralelepipedont emelünk rájuk, akkor ezeknek a paralelepipedonoknak fele az *AEB*, *BFC*, *CGA*, illetve *DHA* háromszögre emelt hasáb (XI. 28.). A hengerszeletek kisebbek ezeknél a paralelepipedonoknál (III. 3., I. 29., III. 16.), úgyhogy az *AEB*, *BFC*, *CGD*, *DHA* háromszögekre emelt hasábok nagyobbak a megfelelő hengerszelet felénél. Ha a nyert íveket megfelezzük, az osztáspontokat összekötjük, mindegyik háromszögre a hengerrel egyenlő magasságú hasábot emelünk és mindig így tovább, akkor egyszer olyan hengerszeletek maradnak, melyek összege kisebb annál a különbségnél, mellyel a henger nagyobb a kúp háromszorosánál (X. 1.). Maradjanak hát, és legyenek e szeletek az *AE*, *EB*, *BF*, *FC*, *CG*, *GD*, *DH*, *HA* szakaszokból kaphatóak. Ekkor a maradék hasáb, melynek alapja az *AEBFCGDH* sokszög és magassága ugyanaz, mint a hengeré, nagyobb a kúp háromszorosánál. Az a hasáb viszont, melynek alapja az *AEBFCGDH* sokszög és magassága ugyanaz, mint a hengeré, háromszorosa annak a gúlának, melynek alapja az *AEBFCGDH* sokszög és a csúcsa ugyanaz, mint a kúpé (XII. 7. K.), a gúla tehát, melynek alapja az *AEBFCGDH* sokszög s csúcsa ugyanaz, mint a kúpé, nagyobb a kúpnál, melynek alapja az *ABCD* kör. Viszont kisebb is nála – hiszen az tartalmazza, ami ellentmondás. A henger tehát nem nagyobb a kúp háromszorosánál.

Azt állítom, hogy a henger nem is kisebb a kúp háromszorosánál.

Tegyük föl ugyanis, hogy a henger kisebb a kúp háromszorosánál. Megfordítva tehát a kúp nagyobb a henger harmadrészénél. Írjunk az *ABCD* körbe egy *ABCD* négyzetet. Az *ABCD* négyzet nagyobb az *ABCD* kör felénél. Emeljünk az *ABCD* négyzetre egy, a kúppal azonos csúcsú gúlát. Ez a gúla nagyobb a kúp felénél, mivel mint föntebb megmutattuk, ha a kör köré négyzetet írunk, akkor az *ABCD* négyzet fele a kör köré írt négyzetnek, és ha a négyzetekre a kúppal egyenlő magasságú paralelepipedonokat emelünk – hasáboknak is nevezhetjük őket –, akkor az *ABCD* négyzetre emelt paralelepipedon fele a kör köré írt négyzetre emelt paralelepipedonnak, hiszen úgy aránylanak egymáshoz, mint az alapjaik, úgyhogy a harmadrészeik is

(V. 15.), az *ABCD* négyzeten fekvő gúla tehát fele a kör köré írt négyzetre emelt gúlának. A kör köré írt négyzetre emelt gúla nagyobb a kúpnál – hiszen tartalmazza azt –, az a gúla tehát, melynek alapja az *ABCD* négyzet s csúcsa ugyanaz, mint a kúpé, nagyobb a kúp felénél. Felezzük meg az *AB*, *BC*, *CD*, *DA* íveket az *E*, *F*, *G*, *H* pontokban, és húzzuk meg az *AE*, *EB*, *BF*, *FC*, *CG*, *GD*, *DH*, *HA* szakaszokat. Ekkor az *AEB*, *BFC*, *CGD*, *DHA* háromszögek mindegyike nagyobb az *ABCD* kör megfelelő szeletének a felénél. Emeljünk az *AEB*, *BFC*, *CGD*, *DHA* háromszögek mindegyikére a kúppal azonos csúcsú gúlát. Ezen gúlák mindegyike ugyanúgy nagyobb a megfelelő kúpszelet felénél. Ha a nyert íveket megfelezzük, az osztáspontokat összekötjük, mindegyik háromszögre a kúppal azonos csúcsú gúlát emelünk, és mindig így tovább, akkor a kúpnak egyszer olyan szeletei maradnak, melyek összege kisebb annál a különbségnél, mellyel a kúp nagyobb a henger harmadrészénél. Maradjanak hát, és legyenek e szeletek az *AE*, *EB*, *BF*, *FC*, *CG*, *GD*, *DH*, *HA* szakaszokból kaphatók. Ekkor a maradék gúla, melynek alapja az *AEBFCGDH* sokszög s csúcsa ugyanaz, mint a kúpé, nagyobb a henger harmadrészénél. Az a gúla viszont, melynek alapja az *AEBFCGDH* sokszög s csúcsa ugyanaz, mint a kúpnak, harmadrésze annak a hasábnak, melynek alapja az *AEBFCGDHA* sokszög s magassága ugyanaz, mint a hengeré, a hasáb tehát, melynek alapja az *AEBFCGDHA* sokszög s magassága ugyanaz, mint a hengeré, nagyobb a hengernél, melynek alapja az *ABCD* kör. Viszont kisebb is nála – hiszen az tartalmazza –, ami ellentmondás. A henger tehát nem kisebb a kúp háromszorosánál. Megmutattuk, hogy nem is nagyobb a háromszorosánál, a henger tehát háromszorosa a kúpnak, úgyhogy a kúp harmadrésze a hengernek.

Minden kúp harmadrésze tehát az ugyanazon az alapon fekvő egyenlő magasságú hengernek. Éppen ezt kellett megmutatni.

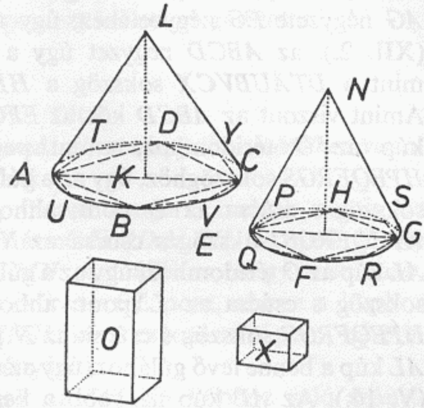
F.: XII. 11–12., 14.

XII. 11. Tétel

Az azonos magasságú kúpok és hengerek úgy aránylanak egymáshoz, mint az alapjuk.

Vegyünk két azonos magasságú kúpot, illetve hengert, melyek alapjai az *ABCD* és *EFGH* körök, tengelyei *KL* és *MN*, az alapok átmérői pedig *AC* és *EG*. Azt állítom, hogy az *ABCD* kör úgy aránylik az *EFGH* körhöz, mint az *AL* kúp az *EN* kúphoz.

Ellenkező esetben ugyanis az *ABCD* kör úgy aránylik az *EFGH* körhöz, mint az *AL* kúp valamely, az *EN* kúpnál kisebb vagy nagyobb téridomhoz. Legyen ez először a kisebb *O* idom, és legyen az *Y* téridom egyenlő azzal a mennyiséggel, amivel az *O* téridom kisebb az *EN* kúpnál. Ekkor az *EN* kúp egyenlő az *O* és az *Y* téridom összegével. Írjunk az *EFGH* körbe egy *EFGH* négyzetet (IV. 6.). A négyzet tehát nagyobb a kör felénél (vö. XII. 2.). Emeljünk az *EFGH* négyzetre egy, a kúppal egyenlő magasságú gúlát. Ez a gúla tehát nagyobb a kúp felénél, minthogy ha a kör köré négyzetet írunk (IV. 7.) és rá egy, a kúppal egyenlő magasságú gúlát emelünk, akkor a beírt gúla fele a körülírtnak – hiszen úgy aránylanak egymáshoz, mint az alapjaik (XII. 6.) –, és a kúp kisebb a körülírt gúlánál. Felezzük meg az *EF*, *FG*, *GH*, *HE* íveket a *P*, *Q*, *R*, *S* pontokban (III. 30.), és húzzuk meg a *HP*, *PE*, *EQ*, *QF*, *FR*, *RG*, *GS*, *SH* szakaszkat. A *HPE*, *EQF*, *FRG*, *GSH* háromszögek mindegyike nagyobb a megfelelő körszelet felénél. Emeljünk a *HPE*, *EQF*, *FRG*, *GSH* háromszögek mindegyikére egy, a kúppal egyenlő magasságú gúlát. Ezeknek a gúláknak mindegyike nagyobb a kúp megfelelő szeletének felénél. Ha a nyert íveket megfelezzük, az osztáspontokat összekötjük, mindegyik háromszögre a kúppal egyenlő magasságú gúlát emelünk és mindig így tovább, akkor a kúpnak egyszer olyan szeletei maradnak, melyek összege kisebb az *Y* téridomnál (X. 1.). Maradjanak hát, és legyenek e szeletek a *HPE*, *EQF*, *FRG*, *GSH* háromszögeken fekvők. Ekkor a maradék gúla, melynek alapja a *HPEQFRGS* sokszög s magassága ugyanaz, mint



a kúpé, nagyobb az *O* téridomnál. Írjunk be az *ABCD* körbe egy, a *HPEQFRGS* sokszöghöz hasonló és hasonlóan fekvő *DTAUBVCX* sokszöget és emeljünk rá egy, a kúppal egyenlő magasságú gúlát. Minthogy *AC* négyzete úgy aránylik *EG* négyzetéhez, mint a *DTAUBVCX* sokszög a *HPEQFRGS* sokszöghöz (XII. 1.) és amint *AG* négyzete *EG* négyzetéhez, úgy az *ABCD* kör az *EFGH* körhöz (XII. 2.), az *ABCD* négyzet úgy a aránylik az *EFGH* négyzethez, mint a *DTAUBVCX* sokszög a *HPEQFRGS* sokszöghöz (V. 11.). Amint viszont az *ABCD* kör az *EFGH* körhöz, úgy aránylik az *AL* kúp az *O* téridomhoz, amint pedig a *DTAUBVCX* sokszög a *HPEQFRGS* sokszöghöz, úgy az a gúla, melynek alapja a *DTAUBVCX* sokszög s csúcsa az *L* pont, ahhoz a gúlához, melynek alapja a *HPEQFRGS* sokszög s csúcsa az *N* pont (XII. 6.), amint tehát az *AL* kúp az *O* téridomhoz, úgy az a gúla, melynek alapja a *DTAUBVCX* sokszög s csúcsa az *L* pont, ahhoz a gúlához, melynek alapja a *HPEQFRGS* sokszög s csúcsa az *N* pont. Fölcserélve tehát amint az *AL* kúp a benne levő gúlához, úgy az *O* téridom az *EN* kúpbeli gúlához (V. 16.). Az *AL* kúp nagyobb a benne levő gúlánál, az *O* idom is nagyobb tehát az *EN* kúpbeli gúlánál (V. 14.). Viszont kisebb is nála, ami ellentmondás. Az *ABCD* kör tehát nem úgy aránylik az *EFGH* körhöz, mint az *AL* kúp valamely, az *EN* kúpnál kisebb téridomhoz. Hasonlóképp mutatható meg az is, hogy az *EFGH* kör nem úgy aránylik az *ABCD* körhöz, mint az *EN* kúp valamely, az *AL* kúpnál kisebb téridomhoz.

Azt állítom, hogy az *ABCD* kör nem is úgy aránylik az *EFGH* körhöz, mint az *AL* kúp valamely, az *EN* kúpnál nagyobb téridomhoz.

Tegyük föl ugyanis, hogy mint egy nagyobb *O* idomhoz. Megfordítva tehát amint az *EFGH* kör az *ABCD* körhöz, úgy az *O* téridom az *AL* kúphoz (V. 7. K.). Amint viszont az *O* téridom az *AL* kúphoz, úgy az *EN* kúp valamely, az *AL* kúpnál kisebb téridomhoz (XII. 2. L.); amint tehát az *EFGH* kör az *ABCD* körhöz, úgy az *EN* kúp valamely, az *AL* kúpnál kisebb téridomhoz, amiről megmutattuk, hogy nem lehetséges. Az *ABCD* kör tehát nem úgy aránylik az *EFGH* körhöz, mint az *AL* kúp valamely, az *EN* kúpnál nagyobb téridomhoz. Megmutattuk azt is, hogy mint kisebbhez sem, az *ABCD* kör tehát úgy aránylik az *EFGH* körhöz, mint az *AL* kúp az *EN* kúphoz.

Amint viszont a kúpok, úgy aránylanak a hengerek egymáshoz, hiszen háromszorosai azoknak (XII. 10., V. 15.), amint tehát az *ABCD* kör az *EFGH* körhöz, úgy aránylanak a rajtuk fekvő [a kúpokkal] egyenlő magasságú hengerek.

Az azonos magasságú kúpok és hengerek tehát úgy aránylanak egymáshoz, mint az alapjaik. Éppen ezt kellett megmutatni.

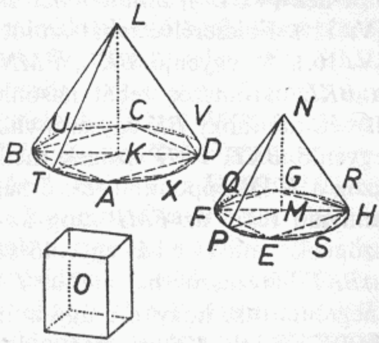
F.: XII. 13–15.

XII. 12. Tétel

Hasonló kúpok és hengerek egymással az alapjaik átmérőihez viszonyítva háromszoros arányban állnak.

Vegyünk két hasonló kúpot, illetve hengert, melyek alapja az *ABCD* és az *EFGH* kör, az alapok átmérői *BD* és *FH*, a kúpok, illetve hengerek tengelye pedig *KL* és *MN*. Azt állítom, hogy a kúpnak, melynek alapja az *ABCD* kör s csúcsa az *L* pont, ahhoz a kúphoz való aránya, melynek alapja az *EFGH* kör s csúcsa az *N* pont, háromszorosa *BD*-nek *FH*-hoz való arányának.

Ha ugyanis az *ABCDL* kúpnak az *EFGHN* kúphoz való aránya nem háromszorosa *BD*-nek *FH*-hoz való arányának, akkor ennek az aránynak az *ABCDL* kúpnak valamely, az *EFGHN* kúpnál kisebb vagy nagyobb téridomhoz való aránya lesz háromszorosa. E téridom legyen először egy kisebb *O*. Írjunk az *EFGH* körbe egy *EFGH* négyzetet (IV. 6.). Az *EFGH* négyzet nagyobb a kör felénél (vö. XII. 2.). Emeljünk az *EFGH* négyzetre egy, a kúppal azonos csúcsú gúlát. Ez a gúla nagyobb a kúp felénél. Felezzük meg az *EF*, *FG*, *GH*, *HE* íveket a *P*, *Q*, *R*, *S* pontokban (III. 30.), és húzzuk meg az *EP*, *PF*, *FQ*, *QG*, *GR*, *RH*, *HS*, *SE* szakaszokat. Az *EPF*, *FQG*, *GRH*, *HSE* háromszögek mindegyike nagyobb az *EFGH* kör megfelelő szeletének felénél. Emeljünk az



EPF, *FQG*, *GRH*, *HSE* háromszögek mindegyikére egy, a kúppal azonos csúcsú gúlát. Ezen gúlák mindegyike nagyobb a kúp megfelelő szeletének felénél. Ha a nyert íveket megfelezzük, az osztáspontokat összekötjük, mindegyik háromszögre a kúppal azonos csúcsú gúlát emelünk és mindig így tovább, akkor a kúpnak egyszer olyan szeletei maradnak, melyek összege kisebb annál a különbségnél, mellyel az *EFGHN* kúp nagyobb az *O* téridomnál (X. 1.). Maradjanak így meg az *EP*, *PF*, *FQ*, *QG*, *GR*, *RH*, *HS*, *SE* szakaszokból kapható szeletek. Ekkor a maradék gúla, melynek alapja az *EPFQGRHS* sokszög s csúcsa az *N* pont, nagyobb az *O* téridomnál. Írjunk az *ABCD* körbe egy, az *EPFQGRHS* sokszöghöz hasonló és hasonlóan fekvő *ATBUCVDX* sokszöget, és emeljünk az *ATBUCVDX* sokszögre egy, a kúppal azonos csúcsú sokszöget. Az *ATBUCVDX* sokszögön fekvő *L* csúcsú gúlát közrefogó háromszögek egyike legyen *LBT*, az *EPFQGRHS* sokszögön fekvő *N* csúcsú gúlát közrefogó háromszögek egyike pedig legyen *NFP*, és húzzuk meg a *KT*, *MP* szakaszokat. Minthogy az *ABCDL* kúp hasonló az *EFGHN* kúphoz, *BD* úgy aránylik *FH*-hoz, mint a *KL* tengely az *MN* tengelyhez. Amint viszont *BD* az *FH*-hoz, úgy aránylik *BK* az *FM*-hez (V. 15.), amint tehát *BK* az *FM*-hez, úgy *KL* az *MN*-hez (V. 11.). Fölcserélve tehát amint *BK* a *KL*-hez, úgy *FM* az *MN*-hez (V. 16.). Az egyenlő *BKL*, *FMN* szögek melletti oldalak arányosak, a *BKL* háromszög tehát hasonló az *FMN* háromszöghöz (VI. 6.). Ismét, minthogy *BK* úgy aránylik *KT*-hez, mint *FM* az *MP*-hez és az egyenlő *BKT*, *FMP* szögek mellett – hiszen ahányad része a *BKT* szög a *K* középpontnál fekvő négy derékszögnek (I. 15. K.), ugyanannyiad része az *FMP* szög az *M* középpontnál levő négy derékszögnek – mivel tehát egyenlő szögek mellett az oldalak arányosak, a *BKT* háromszög hasonló az *FMP* háromszöghöz. Ismét, minthogy megmutattuk, hogy *BK* úgy aránylik *KL*-hez, mint *FM* az *MN*-hez és *BK* egyenlő *KT*-vel, *FM* pedig *PM*-mel, *TK* úgy aránylik *KL*-hez, mint *PM* az *MN*-hez (V. 7.). Az egyenlő *TKL*, *PMN* szögek – derékszögek – melletti oldalak arányosak, az *LKT* háromszög tehát hasonló az *NMP* háromszöghöz. Minthogy az *LKB* és az *NMF* háromszög hasonlósága miatt *LB* úgy aránylik *BK*-hoz, mint *NF* az *FM*-hez, a *BKT* és az *FMP* háromszög hasonlósága miatt pedig *KB* úgy *BT*-hez, mint MF az FP-hez, egyenlő sok tagon át LB úgy aránylik BT-hez, mint NF az FP-hez (V. 22.). Ismét, minthogy az LTK és az NPM háromszög hasonlósága miatt LT úgy aránylik TK-hoz, mint NP a PM-hez, a TKB és a PMF háromszög hasonlósága miatt pedig KT úgy TB-hez, mint MP a PF-hez, egyenlő sok tagon át LT úgy aránylik TB-hez, mint NP a PF-hez. Megmutattuk, hogy amint TB a BL-hez, úgy PF az FN-hez, egyenlő sok tagon át tehát amint TL az LB-hez, úgy PN az NF-hez. Az LTB, NPF háromszögeknek tehát arányosak az oldalaik, az LTB és az NPF háromszögnek tehát egyenlők a szögeik (VI. 5.), úgyhogy hasonlók is. A BKT háromszögön fekvő L csúcsú gúla is hasonló tehát az FMP háromszögön fekvő N csúcsú gúlához, hiszen ugyanannyi (páronként) hasonló lap fogja őket közre. Hasonló háromszög alapú gúlák viszont a megfelelő éleikhez viszonyítva háromszoros arányban állnak (XII. 8.), a $BKTL$ gúlának az $FMPN$ gúlához való aránya tehát háromszorosa BK-nak FM-hez való arányának. Hasonlóképp, ha összekötjük az A, X, D, V, C, U pontokat a K, az E, S, H, R, G, Q pontokat pedig az M középponttal, és mindegyik háromszögre az illető kúppal azonos csúcsú gúlát emelünk, akkor megmutatható, hogy bármely két megfelelő gúla aránya háromszorosa a megfelelő élek, BK és FM, azaz BD és FH (V. 15.) arányának. Az előtagok összege viszont úgy aránylik az utótagok összegéhez, mint bármelyik előtag az utótagjához (V. 12.), a teljes gúla tehát, melynek alapja az $ATBUCVDX$ sokszög s csúcsa az L pont, úgy aránylik a másik teljes gulához, melynek alapja az $EPFQGRHS$ sokszög s csúcsa az N pont, mint a $BKTL$ gúla az $FMPN$ gúlához, úgyhogy az $ATBUCVDX$-en fekvő L csúcsú gúlának az $EPFQGRHS$-en fekvő N csúcsú gúlához való aránya háromszorosa BD-nek FH-hoz való arányának. Feltétel szerint annak a kúpnak, melynek alapja az $ABCD$ kör s csúcsa az L pont, az O téridomhoz való aránya háromszorosa BD és FH arányának, a kúp tehát, melynek alapja az $ABCD$ kör s csúcsa L, úgy aránylik az Q téridomhoz, mint az $ATBUCVDX$ sokszögön fekvő L csúcsú gúla az $EPFQGRHS$ sokszögön fekvő N csúcsú gúlához. Fölcserélve tehát a kúp, melynek alapja az $ABCD$ kör s csúcsa L, úgy aránylik a benne levő az $ATBUCVDX$ sokszögön fekvő L csúcsú gúlához, mint az O téridom az $EPFQGRHS$ sokszögön fekvő N csúcsú gúlához (V. 16.). A mondott kúp nagyobb a benne levő gúlánál – hiszen tartalmazza azt –, az *O* téridom is nagyobb tehát *EPFQGRHS* sokszögön fekvő *N* csúcsú gúlánál (V. 14.). Viszont kisebb is nála, ami ellentmondás. Az *ABCD* körön fekvő *L* csúcsú kúpnak tehát nem valamely, az *EFGH* körön fekvő *N* csúcsú kúpnál kisebb téridomhoz való aránya háromszorosa *BD*-nek *FH*-hoz való arányának. Hasonlóképp mutatható meg, hogy az *EFGHN* kúpnak sem valamely, az *ABCDL* kúpnál kisebb téridomhoz való aránya háromszorosa *FH*-nak *BD*-hez való arányának.

Azt állítom, hogy az *ABCDL* kúpnak nem is valamely, az *EFGHN* kúpnál nagyobb téridomhoz való aránya háromszorosa *BD*-nek *FH*-hoz való arányának.

Tegyük föl ugyanis, hogy mint egy nagyobb *O* idomhoz. Megfordítva tehát az *O* téridomnak az *ABCDL* kúphoz való aránya háromszorosa *FH* és *BD* arányának (V. 7. K.). Amint viszont az *O* téridom az *ABCDL* kúphoz, úgy aránylik az *EFGHN* kúp valamely, az *ABCDL* kúpnál kisebb téridomhoz (XII. 2. L.). Az *EFGHN* kúpnak valamely, az *ABCDL* kúpnál kisebb téridomhoz való aránya tehát háromszorosa *FH* és *BD* arányának. Erről megmutattuk, hogy nem lehetséges, az *ABCDL* kúpnak tehát nem valamely, az *EFGHN* kúpnál nagyobb téridomhoz való aránya háromszorosa *BD* és *FH* arányának. Megmutattuk, hogy nem is egy nagyobbhoz való, az *ABCDL* kúpnak tehát az *EFGHN* kúphoz való aránya háromszorosa *BD*-nek *FH*-hoz való arányának.

A hengerek úgy aránylanak, mint a kúpok, hiszen a kúppal azonos alapon fekvő és azzal egyenlő magasságú henger háromszorosa a kúpnak (XII. 10.), a hengerek aránya is háromszorosa tehát *BD* és *FH* arányának.

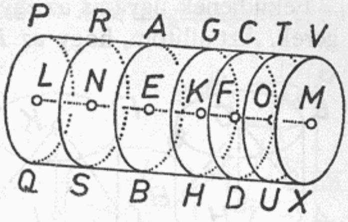
Hasonló kúpok és hengerek tehát egymással az alapjaik átmérőihez viszonyítva háromszoros arányban állnak. Éppen ezt kellett megmutatni.

XII. 13. Tétel

Ha egy hengert a szemközti lapokkal párhuzamos síkkal metszünk, akkor a nyert hengerek úgy aránylanak egymáshoz, mint a tengelyeik.

Messük el ugyanis az *AD* hengert a szemközti *AB*, *CD* lapokkal párhuzamos *GH* síkkal, és legyen a *GH* sík és a tengely metszéspontja *K*. Azt állítom, hogy a *BG* henger úgy aránylik a *GD* hengerhez, mint az *EK* tengely a *KF* tengelyhez.

Hosszabbítsuk meg ugyanis az *EF* tengelyt mindkétfelé, az *L*, illetve az *M* pont felé, mérjünk föl tetszőleges sok, az *EK* tengellyel egyenlő *EN*, *NL* és tetszőleges sok, *FK*-val egyenlő *FO*, *OM* szakaszt (I. 3.), és gondoljunk el az *LM* tengely körül egy *PX* hengert, melynek alap- és fedőlapja a *PQ* és a *VX* kör. Fektessünk az *N*, *O* pontokon át *AB*-vel, *CD*-vel és a *PX* henger alaplapjaival párhuzamos síkokat (I. 31., XI. 15.). Ezek messék ki az *N*, illetve *O* középpont körüli *RS* és *TU* kört. Minthogy az *LN*, *NE*, *EK* tengelyek egyenlők egymással, a *QR*, *RB*, *BG* hengerek úgy aránylanak egymáshoz, mint az alapjaik (XII. 11.). Az alapjaik egyenlők, tehát a *QR*, *RB*, *BG* hengerek is egyenlők. Minthogy az *LN*, *NE*, *EK* tengelyek egyenlők egymással, a *QR*, *RB*, *BG* hengerek egyenlők egymással, és a tengelyek meg a hengerek száma egyenlő, a *QG* henger annyiszorosa a *GB* hengernek, mint a *KL* tengely az *EK* tengelynek. Ugyanígy az *XG* henger annyiszorosa a *GD* hengernek, mint az *MK* tengely a *KF* tengelynek. Ha a *KL* tengely egyenlő a *KM* tengellyel, akkor a *QG* henger is egyenlő a *GX* hengerrel, ha az egyik tengely nagyobb a másik tengelynél, akkor az egyik henger is nagyobb a másik hengernél, s ha kisebb, akkor kisebb. Van tehát négy mennyiség, az *EK*, *KF* tengelyek és a *BG*, *GD* hengerek, ugyanannyiszorosát vettük az *EK* tengelynek és a *BG* hengernek – az *LK* tengelyt és a *QG* hengert –, illetve a *KF* tengelynek és a *GD* hengernek – a *KM* tengelyt és a *GX* hengert –, és megmutattuk, hogy ha a *KL* tengely nagyobb a *KM* tengelynél, akkor a *QG* henger is nagyobb a *GX* tengelynél, ha egyenlő, egyenlő, s ha kisebb, kisebb. Az *EK* tengely tehát úgy aránylik a *KF* tengelyhez, mint a *BG* henger a *GD* hengerhez. Éppen ezt kellett megmutatni.

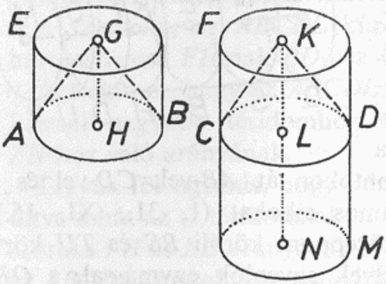


F.: XII. 14–15.

XII. 14. Tétel

Az egyenlő alapokon fekvő kúpok és hengerek úgy aránylanak egymáshoz, mint a magasságaik.

Feküdjenek ugyanis az egyenlő *AB*, *CD* körökön az *EB*, *FD* hengerek. Azt állítom, hogy az *EB* henger úgy aránylik az *FD* hengerhez, mint a *GH* tengely a *KL* tengelyhez.



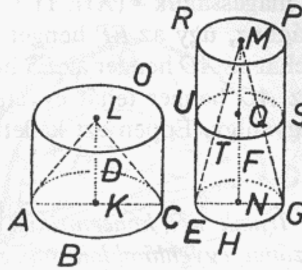
Hosszabbítsuk meg ugyanis a *KL* tengelyt az *N* pontig, mérjünk föl egy *GH*-val egyenlő *LN* szakaszt (I. 3.) és gondoljunk az *LN* tengely köré egy *CM* hengert. Minthogy az *EB* és a *CM* henger magassága ugyanaz, úgy aránylanak egymáshoz, mint az alapjaik (XII. 11.). Az alapok egyenlők egymással, az *EB* és a *CM* henger is egyenlő tehát (V. 14.). Minthogy az *FM* hengert metszi a szemközti lapokkal párhuzamos *CD* sík, a *CM* henger úgy aránylik az *FD* hengerhez, mint az *LN* tengely a *KL* tengelyhez (XII. 13.). A *CM* henger egyenlő az *EB* hengerrel, az *LN* tengely pedig a *GH* tengellyel, az *EB* henger tehát úgy aránylik az *FD* hengerhez, mint a *GH* tengely a *KL* tengelyhez (V. 7.). Amint viszont az *EB* henger az *FD* hengerhez, úgy aránylik az *ABG* kúp a *CDK* kúphoz (XII. 10., V. 15.), amint tehát a *GH* tengely a *KL* tengelyhez, úgy az *ABG* kúp a *CDK* kúphoz (V. 11.) és az *EB* henger az *FD* hengerhez. Éppen ezt kellett megmutatni.

XII. 15. Tétel

Az egyenlő kúpoknak és hengereknek fordítva arányos az alapjuk a magassággal; s amely kúpoknak és hengereknek fordítva arányos az alapja a magassággal, azok egyenlőek.

Vegyünk két egyenlő kúpot, illetve hengert, melyek alapjai az *ABCD*, *EFGH* körök, azok átmérői *AC* és *EG*, tengelyeik *KL* és *MN* – ezek egyúttal magasságai is a kúpoknak, illetve hengereknek –, és egészítsük ki az *AO* és az *EP* hengert. Azt állítom, hogy az *AO* és az *EP* hengernek fordítva arányos az alapjuk a magassággal: amint az *ABCD* alap az *EFGH* alaphoz, úgy az *MN* magasság a *KL* magassághoz.

Az *LK* magasság ugyanis vagy egyenlő az *MN* magassággal, vagy nem. Legyen először egyenlő. Az *AO* henger is egyenlő az *EP* hengerrel (XII. 10.), s az azonos magasságú kúpok és hengerek úgy aránylanak egymáshoz, mint az alapjaik (XII. 11.), az *ABCD* alap tehát egyenlő az *EFGH* alappal (V. 14.), úgyhogy fordítva is arányosak: amint az *ABCD* alap az *EFGH* alaphoz, úgy az *MN* magasság a *KL* magassághoz. Ne legyen most egyenlő az *LK* magasság *MN*-nel, hanem legyen nagyobb *MN*. Vonjunk le az *MN* magasságból egy *KL*-lel egyenlő *QN* szakaszt (I. 3.). Messük el az *EP* hengert egy, a *Q* ponton át az *EFGH* és az *RP* kör síkjával párhuzamosan fektetett *TUS* síkkal (I. 31., XI. 15.), és tekintsük az *EFGH* körön fekvő *NQ* magasságú *ES* hengert. Minthogy az *AO* henger egyenlő az *EP* hengerrel, az *AO* henger úgy aránylik az *ES* hengerhez, mint az *EP* henger az *ES* hengerhez (V. 7.). Amint viszont az *AO* henger az *ES* hengerhez, úgy az *ABCD* alap az *EFGH* alaphoz – hiszen ugyanaz az *AO* és az *ES* henger magassága (XII. 11.) –, amint pedig az *EP* henger az *ES* hengerhez, úgy az *MN* magasság a *QN* magassághoz – hiszen az *EP* hengert a szemközti lapokkal párhuzamos sík metszi (XII. 13., V. 18.), amint tehát az *ABCD* alap az *EFGH* alaphoz, úgy az *MN* magasság a *QN* magassághoz (V. 11.). A *QN* magasság egyenlő a *KL* magassággal, amint tehát az *ABCD* alap az *EFGH* alaphoz, úgy aránylik az *MN* magasság a *KL* magassághoz (V. 7.). Az *AO*, *EP* hengereknek tehát fordítva arányosak az alapjaik a magassággal.



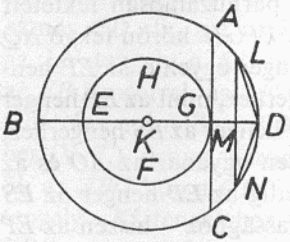
Legyenek most az *AO*, *EP* hengerek alapjai fordítva arányosak a magassággal: amint az *ABCD* alap az *EFGH* alaphoz, úgy az *MN* magasság a *KL* magassághoz. Azt állítom, hogy az *AO* henger egyenlő az *EP* hengerrel.

Ha ugyanis elvégezzük ugyanazokat a lépéseket, mint az előbb, akkor minthogy az *ABCD* alap úgy aránylik az *EFGH* alaphoz, mint az MN magasság a KL magassághoz és a KL magasság egyenlő a QN magassággal, az $ABCD$ alap úgy aránylik az $EFGH$ alaphoz, mint az MN magasság a QN magassághoz. Amint viszont az $ABCD$ alap az $EFGH$ alaphoz, úgy az AO henger az ES hengerhez – hiszen ugyanaz a magasságuk – (XII. 11.), amint pedig az MN magasság a QN magassághoz, úgy az EP henger az ES hengerhez (XII. 13., V. 18.), amint tehát az AO henger az ES hengerhez, úgy az EP henger ES-hez (V. 11.), az AO henger tehát egyenlő az EP hengerrel (V. 9.). Kúpok esetén ugyanígy. Éppen ezt kellett megmutatni.

XII. 16. Tétel

Írjunk két koncentrikus kör nagyobbikába egy olyan páros oldalszámú, egyenlő oldalú sokszöget, mely diszjunkt a kisebb körtől!

Legyen a közös K középpontú adott két kör $ABCD$ és $EFGH$. A nagyobb $ABCD$ körbe tehát egy olyan páros oldalszámú, egyenlő oldalú sokszöget kell beírni, mely diszjunkt az $EFGH$ körtől.



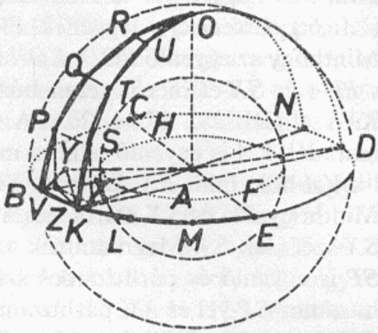
Húzzunk a K középponton át egy BKD egyenest, húzzuk a G pontból a BD egyenesre merőlegesen GA-t (I. 11.), és hosszabbítsuk meg C-ig. Ekkor AC érinti az $EFGH$ kört (III. 16. K.). Ha a BAD ívet megfelezzük (III. 30.), a felét megfelezzük és mindig így tovább, akkor egyszer egy AD-nél kisebb ívet kapunk (X. 1.). Kapjuk meg így az LD ívet, bocsássunk L-ből BD-re egy LM merőlegest (I. 12.), húzzuk meg N-ig, s kössük össze LD-t és DN-t. Ekkor LD egyenlő DN-nel (III. 3., I. 4.). Minthogy LN párhuzamos AC-vel (I. 28.) és AC érinti az $EFGH$ kört, LN nem érinti az $EFGH$ kört, LD és DN tehát annál kevésbé érinti az $EFGH$ kört. Ha mármost az $ABCD$ körre összefüggően LD-vel egyenlő szakaszokat illesztünk (IV. 1.), akkor az $ABCD$ körbe olyan páros oldalszámú, egyenlő oldalú sokszöget írunk, mely diszjunkt a kisebb körtől, $EFGH$-tól. Éppen ezt kellett megtenni.

F.: XII. 17.

XII. 17. Tétel

Írjunk két koncentrikus gömb nagyobbikába olyan poliédert, mely diszjunkt a kisebb gömb felületétől!

Gondoljunk el két, közös *A* középpontú gömböt. A nagyobbik gömbbe tehát olyan poliédert kell írni, mely diszjunkt a kisebb gömb felületétől.



Messük a gömböket egy, a középponton átmenő síkkal. Ekkor a metszetek körök, minthogy a gömb egy félkörnek rögzített átmérője körüli forgatásakor keletkezik, úgyhogy bármilyen helyzetűnek vesszük a félkört, a rajta átfektetett sík a gömb felületét körben metszi.* Nyilvánvaló az is, hogy e kör maximális, minthogy a gömb átmérője, mely nyilván mind a félkörnek, mind a körnek átmérője, nagyobb a kör vagy a gömb bármely húrjánál (XI. 2., III. 15.). Legyen tehát a nagyobb gömbbeli metszet a *BCDE* kör, a kisebb gömbbeli az *FGH* kör, húzzuk meg két, egymásra merőleges átmérőjüket, *BD*-t és *CE*-t (I. 11.), írjunk két koncentrikus kör, *BCDE* és *FGH* nagyobbikába, *BCDE*-be egy olyan páros oldalszámú, egyenlő oldalú sokszöget, mely diszjunkt a kisebb körtől, *FGH*-tól (XII. 16.), ennek a *BE* negyedbeli oldalai legyenek *BK*, *KL*, *LM* és *ME*, húzzuk meg *KA*-t és hosszabbítsuk meg *N*-ig, emeljünk az *A* pontban a *BCDE* kör síkjára egy *AO* merőlegest (XI. 12.), a gömb felületével való metszete legyen *O* és fektessünk *AO*-n és *BD*-n, illetve *KN*-en át síkot (XI. 2.). Ezek a mondottak miatt a gömbfelületet maximális körökben metszik. Messék, s a *BD*, illetve *KN* átmérőn fekvő félköreik legyenek *BOD*, illetve *KON*. Minthogy *OA* merőleges a *BCDE* kör síkjára, valamennyi *OA*-n átmenő sík merőleges a *BCDE* kör síkjára (XI. 18.), úgyhogy a *BOD*, *KON* félkörök is merőlegesek a *BCDE* kör síkjára. Minthogy a *BED*, a *BOD* és a *KON* félkörök egyenlők – hiszen az egyenlő *BD*, *KN* átmérőkön fekszenek –, a *BE*, *BO*, *KO* negyedek is egyenlők egymással. Ahány sokszögoldal van tehát a *BE* negyedkörben, annyi, a *BK*, *KL*, *LM* és *ME* szakaszokkal egyenlő oldal fér a *BO* és a *KO* negyedbe is (III. 28.). Írjuk be ezeket, legyenek a *BP*, *PQ*, *QR*, *RO*, *KS*, *ST*, *TU* és *UO* szakaszok, húzzuk meg *SP*-t, *TQ*-t és *UR*-t, és bocsássunk a *P* és *S* pontból a *BCDE* kör síkjára merőlegeseket (XI. 11.). Ezek a síkok metszeteire, *BD*-re, illetve *KN*-re fognak esni, minthogy *BOD* és *KON* síkja is merőleges a *BCDE* kör síkjára (XI. 6.). Essenek, s legyenek *PV*, illetve *SX*, és húzzuk meg *XV*-t. Minthogy az egyenlő *BOD*, *KON* félkörökben *BP* és *KS* egyenlő húrok, s *PV*-t és *SX*-et merőlegesen húztuk, *PV* egyenlő *SX*-szel, *BV* pedig *KX*-szel (III. 28., 27., I. 26.). A teljes *BA* egyenlő a teljes *KA*-val, a maradék *VA* is egyenlő tehát a maradék *XA*-val, *BV* tehát úgy aránylik *VA*-hoz, mint *KX XA*-hoz, *XV* tehát párhuzamos *KB*-vel (VI. 2.). Minthogy *PV* és *SX* merőleges a *BCDE* kör síkjára, *PV* párhuzamos *SX*-szel (XI. 6.). Megmutattuk azt is, hogy egyenlő vele, tehát *XV* és *SP* is egyenlő és párhuzamos szakaszok (I. 33.). Minthogy *XV* párhuzamos *SP*-vel és *XV* párhuzamos *KB*-vel, *SP* is párhuzamos *KB*-vel (XI. 9.). *BP* és *KS* kötik össze őket, a *KBPS* négyszög tehát síkbeli, minthogy ha van két párhuzamos egyenes, és mindegyiken tetszőlegesen veszünk egy pontot, akkor a pontokra illeszkedő egyenes ugyanabban a síkban fekszik, mint a párhuzamosok (XI. 7.). Ugyanígy az *SPQT* és a *TQRU* négyszög is síkbeli. Az *URO* háromszög is síkbeli (XI. 2.), ha tehát tekintjük a *P*, *S*, *Q*, *T*, *R*, *U* pontokat *A*-val összekötő szakaszokat, akkor a *BO* és a *KO* ív között egy poliéder áll elő, mely gúlákból tevődik össze, s ezek alapjai a *KBPS*, *SPQT*, *TQRU* négyszögek, illetve az *URO* háromszög, csúcsa pedig az *A* pont. Ha pedig a *KL*, *LM*, *ME* oldalak mindegyikére is elvégezzük ugyanazt a szerkesztést, mint *BK*-ra meg a többi három negyedkörre is [és a másik félgömbre], akkor egy, a gömbbe beírt poliéder áll elő, mely gúlákból tevődik össze, s ezek alapjai a mondott négyszögek, az *URO* háromszög, illetve a nekik megfelelők, csúcsa pedig az *A* pont.

Azt állítom, hogy a mondott poliéder nem érinti a kisebb gömb felületét, melyen az *FGH* kör fekszik.

Bocsássunk az *A* pontból a *KBPS* négyszög síkjára egy *AY* merőlegest (XI. 11.), a síkkal való metszéspontja legyen *Y*, és húzzuk meg *YB*-t, *YK*-t. Minthogy *AY* merőleges a *KBPS* négyszög síkjára, valamennyi őt metsző és a négyszög síkjában fekvő egyenesre merőleges,

AY tehát merőleges BY-ra és YK-ra. Minthogy AB egyenlő AK-val, AB négyzete is egyenlő AK négyzetével. AB négyzetével egyenlő AY és YB négyzetösszege – hiszen az Y-nál levő szög derékszög – (I. 47.), AK négyzetével pedig egyenlő AY és YK négyzetösszege, AY és YB négyzetösszege tehát egyenlő AY és YK négyzetösszegével. Vonjuk le a közös AY négyzetet, ekkor a maradék BY négyzet egyenlő a maradék YK négyzettel, BY tehát egyenlő YK-val. Hasonlóképp mutathatnánk meg, hogy az Y-t P-vel és S-sel összekötő szakaszok is egyenlőek BY-nal és YK-val. Az Y középpontú és az YB, YK távolságok egyikével rajzolt kör tehát a P és az S ponton is átmegy, $KBPS$ tehát húrnégyszög.

Minthogy KB nagyobb XV-nél és XV egyenlő SP-vel, KB nagyobb SP-nél. KB egyenlő KS-sel és BP-vel, tehát KS és BP is nagyobb SP-nél. Minthogy $KBPS$ húrnégyszög, KB, BP és KS egyenlő és PS kisebb náluk, és BY a (négyszög köré írt) kör sugara, KB négyzete több mint kétszerese BY négyzetének (I. 8., 25., II. 12.). Bocsássunk K-ból BV-re egy KZ** merőlegest (I. 12.). Minthogy BD kisebb DZ kétszeresénél és a DB és BZ közötti téglalap úgy aránylik a DZ és ZB közöttihez, mint BD a DZ-hez (VI. 1.) – szerkesszük meg a BZ oldalú négyzetet (I. 46.) és egészítsük ki a ZD-n fekvő paralelogrammát –, a DB és BZ közötti téglalap is kisebb a DZ és ZB közötti téglalap kétszeresénél. Húzzuk meg KD-t! A DB és BZ közötti téglalap egyenlő BK négyzetével, a DZ és ZB közötti téglalap pedig egyenlő KZ négyzetével (III. 31., VI. 8. K., 17.), KB négyzete tehát kisebb KZ négyzetének kétszeresénél. Másrészt KB négyzete nagyobb BY négyzetének kétszeresénél, KZ négyzete tehát nagyobb BY négyzeténél. Minthogy BA egyenlő KA-val, BA négyzete egyenlő AK négyzetével. BA négyzetével egyenlő BY és YA négyzetösszege, KA négyzetével pedig egyenlő KZ és ZA négyzetösszege (I. 47.), BY és YA négyzetösszege tehát egyenlő KZ és ZA négyzetösszegével. Ezek közül KZ négyzete nagyobb BY négyzeténél, a maradék ZA négyzet tehát kisebb YA négyzeténél, AY tehát nagyobb AZ-nél, annál inkább nagyobb tehát AY az AG-nél. AY-t a poliéder egyik lapjára bocsátottuk, AG-t pedig a kisebb gömb felületére, úgyhogy a poliéder diszjunkt a kisebb gömb felületétől.

Olyan poliédert írtunk tehát két koncentrikus gömb nagyobbikába, mely diszjunkt a kisebb gömb felületétől. Éppen ezt kellett megtenni.

F.: XII. 18.

Következmény

Ha a másik gömbbe is beírunk egy, a *BCDE* gömbbelihez hasonló poliédert, akkor a *BCDE* gömbbeli poliédernek a másik gömbbe írt poliéderhez való aránya háromszorosa a *BCDE* gömb átmérőjének a másik gömb átmérőjéhez való arányának. Ha ugyanis a poliédereket fölbontjuk az egyenlő számú, egymásnak megfelelő gúlákra, akkor hasonló gúlákat kapunk. A hasonló gúlák aránya viszont háromszorosa a megfelelő élek arányának (XII. 8. K.), a *KBPS* négyszögön fekvő *A* csúcspontú gúlának a másik gömbbeli megfelelő gúlához való aránya tehát háromszorosa a megfelelő élek, azaz az *A* középpontú gömb *AB* sugara és a másik gömb sugara arányának. Hasonlóképp az *A* középpontú minden egyes gúlának a másik gömbbeli megfelelő gúlához való aránya háromszorosa *AB* és a másik gömb sugara arányának. Az előtagok összege úgy aránylik az utótagok összegéhez, mint bármely előtag az utótagjához (V. 12.), úgyhogy az *A* középpontú gömbben levő teljes poliédernek a másik gömbben levő teljes poliéderhez való aránya háromszorosa *AB* és a másik gömb sugara arányának (V. 11.), azaz a *BD* átmérő és a másik gömb átmérője arányának (V. 15.). Éppen ezt kellett megmutatni.

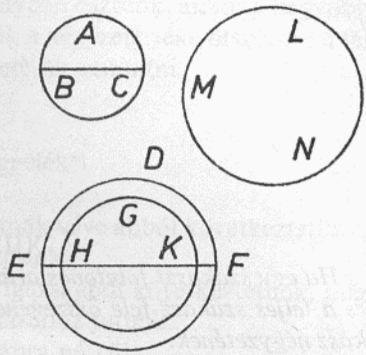
F.: XII. 18.

XII. 18. Tétel

A gömbök az átmérőikhez viszonyítva háromszoros arányban állnak egymással.

Tekintsük az *ABC*, *DEF* gömböket és *BC*, *EF* átmérőiket. Azt állítom, hogy az *ABC* gömbnek a *DEF* gömbhöz való aránya háromszorosa *BC* és *EF* arányának.

Ha ugyanis az *ABC* gömbnek a *DEF* gömbhöz való aránya nem háromszorosa *BC* és *EF* arányának, akkor az *ABC* gömbnek valamely *DEF*-nél kisebb vagy nagyobb gömbhöz való aránya háromszorosa *BC* és *EF* arányának. Legyen ez először egy kisebb *GHK* gömb, tekintsük *DEF*-et és *GHK*-t koncentrikus gömbökként, írjunk a nagyobb gömbbe, *DEF*-be egy a kisebb gömb, *GHK* felületétől diszjunkt poliédert (XII. 17.), és írjunk az *ABC* gömbbe is egy, a *DEF* gömbbeli poliéderhez hasonló poliédert. Ekkor az *ABC*-beli poliédernek a *DEF*-beli poliéderhez való aránya háromszorosa *BC* és *EF* arányának (XII. 17. K.). Az *ABC* gömbnek a *GHK* gömbhöz való aránya is háromszorosa *BC* és *EF* arányának, az *ABC* gömb tehát úgy aránylik a *GHK* gömbhöz, mint az *ABC* gömbbeli poliéder a *DEF* gömbbeli poliéderhez (V. 11.), fölcserélve tehát amint az *ABC* gömb a beleírt poliéderhez, úgy a *GHK* gömb a *DEF* gömbbe írt poliéderhez (V. 16.). Az *ABC* gömb nagyobb a beleírt poliédernél, a *GHK* gömb is nagyobb tehát a *DEF* gömbbe írt poliédernél (V. 14.). Viszont kisebb is nála, hiszen az tartalmazza. Az *ABC* gömbnek tehát nem valamely *DEF*-nél kisebb gömbhöz való aránya háromszorosa a *BC* és *EF* átmérők arányának. Hasonlóképp mutatható meg, hogy a *DEF* gömbnek sem valamely *ABC*-nél kisebb gömbhöz való aránya háromszorosa *EF* és *BC* arányának.



Azt állítom, hogy az *ABC* gömbnek nem is valamely, a *DEF* gömbnél nagyobb gömbhöz való aránya háromszorosa *BC* és *EF* arányának.

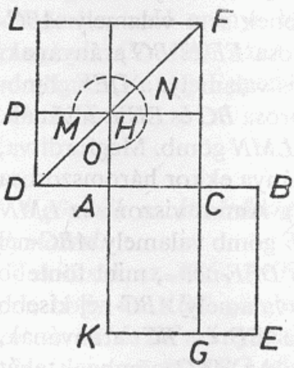
Tegyük föl ugyanis, hogy ilyen a nagyobb *LMN* gömb. Megfordítva, az *LMN* gömbnek az *ABC* gömbhöz való aránya ekkor háromszorosa az *EF* és a *BC* átmérő arányának (V. 7. K.). Amint viszont az *LMN* gömb az *ABC* gömbhöz, úgy aránylik a *DEF* gömb valamely *ABC*-nél kisebb gömbhöz – minthogy *LMN* nagyobb *DEF*-nél –, mint föntebb (XII. 2. L.) megmutattuk. A *DEF* gömbnek valamely *ABC*-nél kisebb gömbhöz való aránya tehát háromszorosa *EF* és *BC* arányának, amiről megmutattuk, hogy nem lehetséges. Az *ABC* gömbnek tehát nem valamely *DEF*-nél nagyobb gömbhöz való aránya háromszorosa *BC* és *EF* arányának. Megmutattuk, hogy nem is egy kisebbhez való aránya, az *ABC* gömbnek tehát a *DEF* gömbhöz való aránya háromszorosa *BC* és *EF* arányának. Éppen ezt kellett megmutatni.

Tizenharmadik könyv

XIII. 1. Tétel

Ha egy szakaszt folytonos arányban osztunk, akkor a nagyobb darab és a teljes szakasz fele összegének a négyzetértéke ötszöröse a fél szakasz négyzetének.

Osszuk föl ugyanis az *AB* szakaszt folytonos arányban a *C* pontban (VI. 30.), legyen *AC* a nagyobb darab, *AD* az *AC* egyenes menti meghosszabbítása, és mérjünk rá egy *AB* felével egyenlő *AD* szakaszt (I. 10.). Azt állítom, hogy *CD* négyzete ötszöröse *DA* négyzetének.



Szerkesszük meg ugyanis az *AB* és a *DC* szakaszra az *AE*, illetve *DF* négyzetet (I. 46.), rajzoljuk meg a *DF* négyzetben az ábrát, és hosszabbítsuk meg *FC*-t *G*-ig. Minthogy *AB*-t *C* folytonos arányban osztja, az *AB* és *BC* közötti téglalap egyenlő *AC* négyzetével (VI. 17.). Az *AB* és *BC* közötti téglalap *CE*, *AC* négyzete pedig *FH*, *CE* tehát egyenlő *FH*-val. Minthogy *BA* kétszerese *AD*-nek és *BA* egyenlő *KA*-val, *AD* pedig *AH*-val, *KA* kétszerese *AH*-nak. Amint viszont *KA* az *AH*-hoz, úgy aránylik *CK* a *CH*-hoz (VI. 1.), *CK* tehát kétszerese *CH*-nak. *LH* meg *HC* is kétszerese *CH*-nak (I. 43.), *KC* tehát egyenlő *LH* meg *HC*-vel. Megmutattuk, hogy *CE* egyenlő *HF*-fel, a teljes *AE* négyzet tehát egyenlő az *MNO* gnómónnal. Minthogy *BA* kétszerese *AD*-nek, *BA* négyzete négyszerese

AD négyzetének (II. 4.), azaz *AE* négyszerese *DH*-nak. *AE* egyenlő az *MNO* gnómónnal, az *MNO* gnómón is négyszerese tehát *AP*-nek, a teljes *DF* ötszöröse tehát *AP*-nek. *DF* a *DC* négyzete, *AP* a *DA* négyzete, *CD* négyzete tehát ötszöröse *DA* négyzetének.

Ha tehát egy szakaszt folytonos arányban osztunk, akkor a nagyobb darab és a teljes szakasz fele összegének a négyzetértéke ötszöröse a fél szakasz négyzetének. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: XIII. 6., 11.

XIII. 8. Függelék*

Mi az analízis és mi a szintézis?

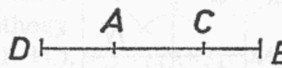
Analízis az, ha az állítást bizonyítottnak véve abból következtetünk, míg valamely elfogadott igazsághoz jutunk.

Szintézis az, ha ebből az elfogadott igazságból következtetünk, míg az állítás teljességéhez vagy megragadásához jutunk.

Az első tétel analízise és szintézise ábra nélkül:

Ossza *C* az *AB* szakaszt folytonos arányban, legyen *AC* a nagyobb darab, és mérjünk föl egy *AB* felével egyenlő *AD* szakaszt. Azt állítom, hogy *CD* négyzete ötszöröse *AD* négyzetének.

Minthogy ugyanis *CD* négyzete ötszöröse *DA* négyzetének és *CD* négyzete egyenlő *CA* és *AD* négyzeteinek és a *CA* és *AD* közötti téglalap kétszeresének az összegével (II. 4.), *CA* és *AD* négyzeteinek és a *CA* és *AD* közötti téglalap kétszeresének az összege ötszöröse *AD* négyzetének. Fölbontva tehát, *CA* négyzetének és a *CA* és *AD* közötti téglalap kétszeresének az összege négyszerese *AD* négyzetének. A *CA* és *AD* közötti téglalap kétszeresével viszont egyenlő a *BA* és *AC* közötti téglalap – hiszen *BA* kétszerese *AD*-nek –, *AC* négyzetével pedig egyenlő az *AB* és *BC* közötti téglalap – hiszen *AB*-t folytonos arányban osztottuk föl – (VI. 17.), a *BA* és *AC* meg az *AB* és *BC* közötti téglalap összege tehát négyszerese *AD* négyzetének. A *BA* és *AC* meg az *AB* és *BC* közötti téglalap összege viszont *AB* négyzete (II. 2.), *AB* négyzete tehát négyszerese *AD* négyzetének. Valóban az, hiszen *AB* kétszerese *AD*-nek.



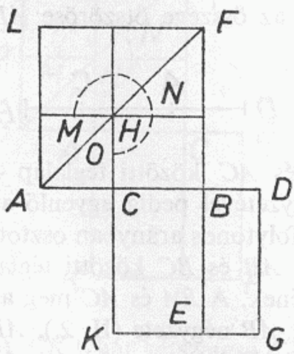
Szintézis

Minthogy *AB* négyzete négyszerese *AD* négyzetének és *BA* négyzete a *BA* és *AC* meg az *AB* és *BC* közötti téglalap összege, a *BA* és *AC* meg az *AB* és *BC* közötti téglalap összege négyszerese *AD* négyzetének. A *BA* és *AC* közötti téglalap viszont egyenlő a *DA* és *AC* közötti téglalap kétszeresével, az *AB* és *BC* közötti téglalap pedig egyenlő *AC* négyzetével, *AC* négyzetének és a *DA* és *AC* közötti téglalap kétszeresének az összege tehát négyszerese *DA* négyzetének, úgyhogy *DA* és *AC* négyzeteinek és a *DA* és *AC* közötti téglalap kétszeresének az összege ötszöröse *DA* négyzetének. *DA* és *AC* négyzeteinek és a *DA* és *AC* közötti téglalap kétszeresének az összege *CD* négyzete, *CD* négyzete tehát ötszöröse *DA* négyzetének. Éppen ezt kellett megmutatni.

XIII. 2. Tétel

Ha egy szakasz négyzetértéke ötszöröse valamely darabjáénak, akkor a mondott darab kétszeresét folytonos arányban osztva a nagyobb darab épp az eredeti szakasz másik része.

Legyen ugyanis az *AB* szakasz négyzetértéke ötszöröse az *AC* darabjáénak, és legyen *AC* kétszerese *CD*. Azt állítom, hogy *CD*-t folytonos arányban osztva a nagyobb darab *CB*.

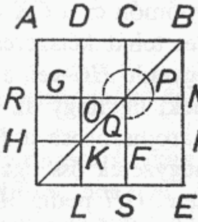


Szerkesszük meg ugyanis az *AB* és a *CD* szakaszra az *AF*, illetve a *CG* négyzetet (I. 46.), rajzoljuk meg az *AF* négyzetben az ábrát, és legyen *BE* a meghosszabbítás. Minthogy *BA* négyzete ötszöröse *AC* négyzetének, *AF* ötszöröse *AH*-nak, az *MNO* gnómón tehát négyszerese *AH*-nak. Minthogy *DC* kétszerese *CA*-nak, négyszerese *DC* négyzete *CA* négyzetének (II. 4.), azaz *CG* az *AH*-nak. Az *MNO* gnómónról is megmutattuk, hogy négyszerese *AH*-nak, az *MNO* gnómón tehát egyenlő *CG*-vel. Minthogy *DC* kétszerese *CA*-nak és *DC* egyenlő *CK*-val, *AC* pedig *CH*-val, [*KC* is kétszerese *CH*-nak,] *KB* is kétszerese tehát *BH*-nak (VI. 1.). *LH* és *HB* összege is kétszerese *HB*-nek (I. 43.), *KB* tehát egyenlő *LH* meg *HB*-vel. Megmutattuk azt is, hogy a teljes *MNO* gnómón egyenlő a teljes *CH* négyzettel, a maradék *HF* tehát egyenlő *BG*-vel. *BG* a *CD* és *DB* közötti téglalap – hiszen *CD* egyenlő *DG*-vel –, *HF* pedig *CB* négyzete, a *CD* és *DG* közötti téglalap tehát egyenlő *CB* négyzetével, *DC* tehát úgy aránylik *CB*-hez, mint *CB* a *BD*-hez. *DC* nagyobb *CB*-nél, tehát *CB* is nagyobb *BD*-nél (V. 14.). A *CD* szakaszt folytonos arányban osztva a nagyobb darab tehát *CB*. Éppen ezt kellett megmutatni.

XIII. 3. Tétel

Ha egy szakaszt folytonos arányban osztunk, akkor a kisebb darab és a nagyobb darab fele összegének a négyzetértéke ötszöröse a nagyobb szakasz fele négyzetének.

Osszunk föl ugyanis valamely *AB* szakaszt folytonos arányban a *C* pontban (VI. 30.), legyen *AC* a nagyobb darab és *AC* felezőpontja *D* (I. 10.). Azt állítom, hogy *BD* négyzete ötszöröse *DC* négyzetének.



Szerkesszük meg ugyanis *AB*-re az *AE* négyzetet (I. 46.), és rajzoljuk meg ezt a kettőzött ábrát. Minthogy *AC* kétszerese *DC*-nek, *AC* négyzete négyszerese *DC* négyzetének, azaz *RS* az *FG*-nek (II. 4.). Minthogy az *AB* és *BC* közötti téglalap egyenlő *AC* négyzetével (VI. 17.) és az *AB* és *BC* közötti téglalap *CE*, *CE* egyenlő *RS*-sel. *RS* négyszerese *FG*-nek, tehát *CE* is négyszerese *FG*-nek. Továbbá, minthogy *AD* egyenlő *DC*-vel, *HK* is egyenlő *KF*-fel (I. 34.), úgyhogy a *GF* négyzet is egyenlő a *HL* négyzettel. *GK* tehát egyenlő *KL*-lel, azaz *MN* az *NE*-vel, úgyhogy *MF* is egyenlő *FE*-vel (I. 36.). *MF* egyenlő *CG*-vel (I. 43.), tehát *CG* is egyenlő *FE*-vel. Adjuk hozzá mindkettőhöz *CN*-t, így az *OPQ* gnómón egyenlő *CE*-vel. Megmutattuk, hogy *CE* négyszerese *GF*-nek, tehát az *OPQ* gnómón is négyszerese az *FG* négyzetnek, az *OPQ* gnómón és az *FG* négyzet összege tehát ötszöröse *FG*-nek. Az *OPQ* gnómón és az *FG* négyzet összege *DN*. *DN* a *DB* négyzete, *GF* pedig *DC* négyzete, *DB* négyzete tehát ötszöröse *DC* négyzetének. Éppen ezt kellett megmutatni.

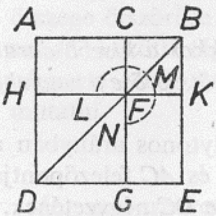
F.: XIII. 16.

XIII. 4. Tétel

Ha egy szakaszt folytonos arányban osztunk, akkor a teljes szakasz és a kisebb darab négyzetösszege háromszorosa a nagyobb darab négyzetének.

Legyen *AB* egy szakasz, osszuk föl folytonos arányban a *C* pontban, és legyen *AC* a nagyobb darab. Azt állítom, hogy *AB* és *BC* négyzetösszege háromszorosa *CA* négyzetének.

Szerkesszük meg ugyanis *AB*-re az *ADEB* négyzetet (I. 46.), és rajzoljuk meg az ábrát. Minthogy *C* folytonos arányban osztja *AB*-t és *AC* a nagyobb darab, az *AB* és *BC* közötti téglalap egyenlő *AC* négyzetével (VI. 17.). Az *AB* és *BC* közötti téglalap *AK*, *AC* négyzete pedig *HG*, *AK* tehát egyenlő *HG*-vel. Minthogy *AF* egyenlő *FE*-vel (I. 43.), ha mindkettőhöz hozzáadjuk *CK*-t, akkor a teljes *AK* egyenlő a teljes *CE*-vel, *AK* meg *CE* tehát kétszerese *AK*-nak. *AK* meg *CE* az *LMN* gnómón és a *CK* négyzet összege, az *LMN* gnómón meg a *CK* négyzet tehát kétszerese *AK*-nak. Viszont megmutattuk azt is, hogy *AK* egyenlő *HG*-vel, az *LMN* gnómón meg [a *CK* négyzet kétszerese *HG*-nek, úgyhogy az *LMN* gnómón meg] a *CK*, *HG* négyzetek összege háromszorosa a *HG* négyzetnek. Az *LMN* gnómón meg a *CK*, *HG* négyzetek összege a teljes *AE* meg *CK*, melyek *AB*, illetve *BC* négyzete, *GH* pedig *AC* négyzete, *AB* és *BC* négyzetösszege tehát négyszerese *AC* négyzetének. Éppen ezt kellett megmutatni.



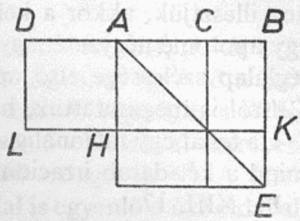
F.: XIII. 17.

XIII. 5. Tétel

Ha egy szakaszt folytonos arányban osztunk és hozzáadunk egy, a nagyobb darabbal egyenlő szakaszt, akkor a teljes szakasz folytonos arányban osztatik, mégpedig az eredeti szakasz a nagyobb darabja.

Osszuk föl ugyanis az *AB* szakaszt folytonos arányban a *C* pontban (VI. 30.), legyen *AC* a nagyobb darab és *AC*-vel egyenlő *AD*. Azt állítom, hogy *A* folytonos arányban osztja a *DB* szakaszt és a nagyobb darab az eredeti *AB* szakasz.

Szerkesszük meg ugyanis *AB*-re az *AE* négyzetet (I. 46.), és rajzoljuk meg az ábrát. Minthogy *C* folytonos arányban osztja *AB*-t, az *AB* és *BC* közötti téglalap egyenlő *AC* négyzetével (VI. 17.). Az *AB* és *BC* közötti téglalap *CE*, *AC* négyzete pedig *CH*, *CE* tehát egyenlő *HC*-vel. *CE*-vel viszont egyenlő *HE* (I. 43.), *HC*-vel pedig egyenlő *DH* (I. 36.), *DH* tehát egyenlő *HE*-vel. Adjuk hozzá mindkettőhöz *HB*-t. A teljes *DK* tehát egyenlő a teljes *AE*-vel. *DK* a *BD* és *DA* közötti téglalap – hiszen *AD* egyenlő *DL*-lel –, *AE* pedig *AB* négyzete, a *BD* és *DA* közötti téglalap tehát egyenlő *AB* négyzetével, *DB* tehát úgy aránylik *BA*-hoz, mint *BA* az *AD*-hez (VI. 17.). *DB* nagyobb *BA*-nál, tehát *BA* is nagyobb *AD*-nél (V. 14.).



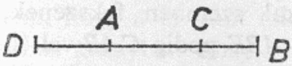
A tehát folytonos arányban osztja *DB*-t, és *AB* a nagyobb darab. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: XIII. 17.

XIII. 6. Tétel

*Ha egy racionális szakaszt folytonos arányban osztunk, akkor mind a két darab irracionális, úgynevezett apotomé.**

Legyen *AB* egy racionális szakasz, osszuk föl folytonos arányban a *C* pontban és legyen *AC* a nagyobb darab. Azt állítom, hogy *AC* és *CB* is irracionális, úgynevezett apotomé.



Hosszabbítsuk meg ugyanis *BA*-t, és mérjünk rá egy *BA* felével (I. 10.) egyenlő *AD* szakaszt. Minthogy *C* folytonos arányban osztja *AB*-t, és a nagyobb darabhoz hozzáadtuk *AD*-t, ami fele *AB*-nek, *CD* négyzete ötszöröse *DA* négyzetének (XIII. 1.), *CD* négyzete tehát úgy aránylik *DA* négyzetéhez, mint szám számhoz, *CD* négyzete tehát összemérhető *DA* négyzetével (X. 6.). *DA* négyzete racionális – hiszen *DA* racionális, mivel fele a racionális *AB*-nek –, tehát *CD* négyzete is racionális, tehát *CD* is racionális. Minthogy *CD* négyzete nem úgy aránylik *DA* négyzetéhez, mint négyzetszám négyzetszámhoz (VIII. 24.), *CD* lineárisan összemérhetetlen *DA*-val (X. 9.), *CD* és *DA* tehát csak négyzetesen összemérhető racionálisok, *AC* tehát apotomé (X. 73.). Ismét, minthogy *AB*-t folytonos arányban osztottuk föl és *AC* a nagyobb darab, az *AB* és *BC* közötti téglalap egyenlő *AC* négyzetével (VI. 17.), ha tehát az *AC* apotomé négyzetét az *AB* racionálishoz illesztjük, akkor a keletkező téglalap szélessége *BC*. Ha viszont egy apotomé négyzetét egy racionálishoz illesztjük, akkor a keletkező téglalap szélessége első apotomé (X. 97.), *CB* tehát első apotomé. *CA*-ról is megmutattuk, hogy apotomé.

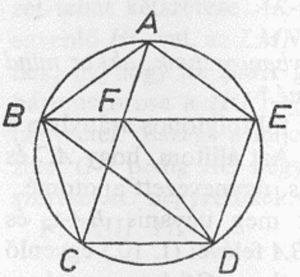
Ha tehát egy racionális szakaszt folytonos arányban osztunk, akkor mind a két darab irracionális, úgynevezett apotomé.

F.: XIII. 17.

XIII. 7. Tétel

Ha egy egyenlő oldalú ötszög három akár egymás melletti, akár nem egymás melletti szöge egyenlő, akkor az ötszög egyenlő szögű.

Legyen ugyanis az *ABCDE* egyenlő oldalú ötszögnek először három egymás melletti szöge, az *A*-nál, a *B*-nél és a *C*-nél levő egyenlő egymással. Azt állítom, hogy az *ABCDE* ötszög egyenlő szögű.



Húzzuk meg ugyanis *AC*-t, *BE*-t és *FD*-t. Minthogy két-két oldal, *CB*, *BA* és *BA*, *AE* páronként egyenlő, és a *CBA* szög egyenlő a *BAE* szöggel, az *AC* alap egyenlő a *BE* alappal, az *ABC* háromszög egyenlő az *ABE* háromszöggel, és a többi szög is páronként egyenlő, amelyek az egyenlő oldalakkal szemben fekszenek, *BCA* a *BEA*-val, *ABE* pedig *CAB*-vel (I. 4.), úgyhogy az *AF* oldal is egyenlő a *BF* oldallal (I. 6.). Megmutattuk azt is, hogy a teljes *AC* egyenlő a teljes *BE*-vel, tehát a maradék *FC* is egyenlő a maradék *FE*-vel. *CD* egyenlő *DE*-vel, tehát két-két oldal, *FC*, *CD* és *FE*, *ED* egyenlő; s az alapjuk, *FD*, közös, az *FCD* szög tehát egyenlő az *FED* szöggel (I. 8.). Megmutattuk, hogy a *BCA* szög egyenlő *AEB*-vel, a teljes *BCD* szög tehát egyenlő a teljes *AED* szöggel. *BCD* viszont feltétel szerint egyenlő az *A*-nál és a *B*-nél levő szöggel, *AED* is egyenlő tehát az *A*-nál és a *B*-nél levő szöggel. Hasonlóképp mutathatnánk meg, hogy a *CDE* szög is egyenlő az *A*-nál, a *B*-nél és a *C*-nél levő szöggel, az *ABCDE* ötszög tehát egyenlő szögű.

Ne egymás melletti szögek legyenek most egyenlők, hanem legyenek egyenlők az *A*-nál, *C*-nél, illetve *D*-nél levő szögek. Azt állítom, hogy az *ABCDE* ötszög ekkor is egyenlő szögű.

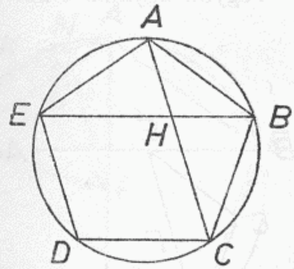
Húzzuk meg ugyanis *BD*-t. Minthogy két-két oldal, *BA*, *AE* és *BC*, *CD* egyenlő és egyenlő szöget zárnak be, a *BE* alap egyenlő a *BD* alappal, az *ABE* háromszög egyenlő a *BCD* háromszöggel, és a többi szög is páronként egyenlő, amelyek az egyenlő oldalakkal szemben fekszenek, az *AEB* szög tehát egyenlő a *CDB* szöggel (I. 4.). A *BED* szög egyenlő a *BDE* szöggel, hiszen a *BE* oldal is egyenlő a *BD* oldallal (I. 6.), tehát a teljes *AED* szög egyenlő a teljes *CDE* szöggel. *CDE* viszont feltétel szerint egyenlő az *A*-nál és a *C*-nél levő szöggel, *AED* is egyenlő tehát az *A*-nál és a *C*-nél levő szöggel. Ugyanígy *ABC* is egyenlő az *A*-nál, a *C*-nél és a *D*-nél levő szöggel. Egyenlő szögű tehát az *ABCDE* ötszög. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: XIII. 17.

XIII. 8. Tétel

Ha egy egyenlő oldalú és egyenlő szögű ötszög két szomszédos szöggel szemközti átlóit meghúzzuk, akkor azok folytonos arányban osztják egymást, és a nagyobb darabjaik egyenlők az ötszög oldalával.

Húzzuk meg ugyanis az *ABCDE* egyenlő oldalú és egyenlő szögű ötszög két szomszédos szöggel szemközti átlóit, *AC*-t és *BE*-t, és ezek messék egymást a *H* pontban. Azt állítom, hogy a *H* pont mind a kettőt folytonos arányban osztja, és a nagyobb darabjaik egyenlők az ötszög oldalával.



Írjunk ugyanis az *ABCDE* ötszög köré egy *ABCDE* kört (IV. 14.). Minthogy két-két oldal, *EA*, *AB* és *AB*, *BC* egyenlő és egyenlő szögeket zárnak be, a *BE* alap egyenlő az *AC* alappal, az *ABE* háromszög egyenlő az *ABC* háromszöggel, és a többi szög is páronként egyenlő, amelyek az egyenlő oldalakkal szemben fekszenek (I. 4.), a *BAC* szög tehát egyenlő *ABE*-vel,* az *AHE* szög tehát kétszerese *BAH*-nak (I. 32.). Az *EAC* szög is kétszerese *BAC*-nek, minthogy az *EDC* ív is kétszerese a *CB* ívnek (III. 28., 27.), a *HAE* szög tehát egyenlő az *AHE* szöggel, úgyhogy a *HE* szakasz is egyenlő *EA*-val (I. 6.), azaz *AB*-vel. S minthogy *BA* egyenlő *AE*-vel, az *ABE* szög is egyenlő *AEB*-vel (I. 5.). *ABE*-ről viszont megmutattuk, hogy egyenlő *BAH*-val, tehát a *BEA* szög is egyenlő *BAH*-val. Az *ABE* és az *ABH* háromszögnek közös az *ABE* szöge, tehát a fönnmaradt szögek, *BAE* és *AHB* is egyenlők (I. 32.), az *ABE* háromszög szögei tehát egyenlők az *ABH* háromszög szögeivel. *EB* tehát úgy aránylik *BA*-hoz, mint *AB* a *BH*-hoz (VI. 4.). *BA* egyenlő *EH*-val, *BE* tehát úgy aránylik *EH*-hoz, mint *EH* a *HB*-hez (V. 7., 11.). *BE* nagyobb *EH*-nál, *EH* is nagyobb tehát *HB*-nél (V. 14.). *BE*-t tehát folytonos arányban osztja *H*, és a nagyobb darab, *CH*, egyenlő az ötszög oldalával. Éppen ezt kellett megmutatni.

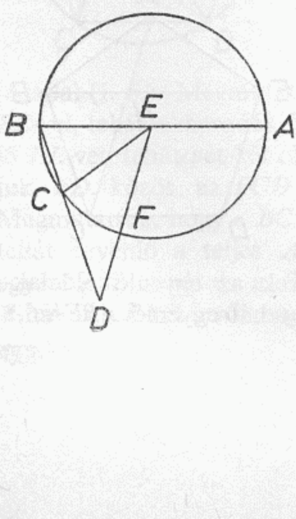
F.: XIII. 11.

XIII. 9. Tétel

Ha az ugyanabba a körbe írt hatszög és tízszög oldalát összeadjuk, akkor a teljes szakasz folytonos arányban osztott, és a nagyobb darabja a hatszög oldala.

Legyen *ABC* egy kör, az *ABC* körbe beírt tízszög oldala legyen *BC* (IV. 11., III. 30.), a hatszögé pedig *CD* (IV. 15.), és ezek feküdjenek egy egyenesen. Azt állítom, hogy a teljes *BD* szakasz folytonos arányban osztott, és a nagyobb darabja *CD*.

Vegyük ugyanis a kör *E* középpontját (III. 1.), húzzuk meg *EB*-t, *EC*-t és *ED*-t, és hosszabbítsuk meg *BE*-t *A*-ig. Minthogy *BC* az egyenlő oldalú tízszög oldala, az *ACB* ív ötszöröse a *BC* ívnek (III. 28.), az *AC* ív tehát négyszerese a *CB* ívnek. Amint viszont az *AC* ív a *CB* ívhez, úgy aránylik az *AEC* szög a *CEB* szöghöz (VI. 33.), az *AEC* szög tehát négyszerese a *CEB* szögnek. Minthogy az *EBC* szög egyenlő az *ECB* szöggel (I. 5.), az *AEC* szög kétszerese az *ECB* szögnek (I. 32.). Minthogy az *EC* szakasz egyenlő



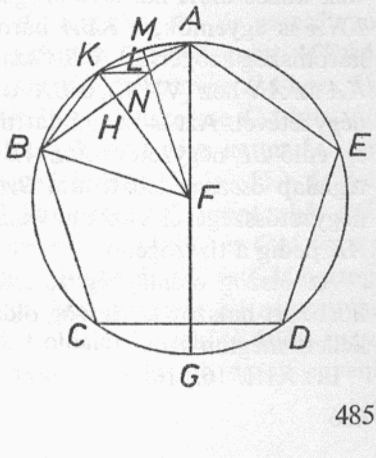
CD-vel – hiszen mind a kettő egyenlő az *ABC* körbe beírt hatszög oldalával (IV. 15. K.) –, a *CED* szög is egyenlő a *CDE* szöggel (I. 5.), az *ECB* szög tehát kétszerese az *EDC* szögnek (I. 32.). Megmutattuk, hogy *ECB*-nek kétszerese az *AEC* szög, *AEC* tehát négyszerese az *EDC* szögnek. Megmutattuk, hogy *BEC*-nek is négyszerese az *AEC* szög, *EDC* tehát egyenlő a *BEC* szöggel. Két háromszögnek, *BEC*-nek és *BED*-nek közös az *EBD* szöge, tehát a fönnmaradt szögek, *BED* és *ECB* is egyenlők (I. 32.), az *EBD* háromszög szögei tehát egyenlők az *EBC* háromszög szögeivel. *DB* tehát úgy aránylik *BE*-hez, mint *EB* a *BC*-hez (VI. 4.). *EB* egyenlő *CD*-vel, *BD* tehát úgy aránylik *DC*-hez, mint *DC* a *CB*-hez (V. 7., 11.). *BD* nagyobb *DC*-nél, *DC* is nagyobb tehát *CB*-nél (V. 14.). A *BD* szakasz tehát folytonos arányban osztott [*C*-ben], és a nagyobb darabja *DC*. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: XIII. 16., 18.

XIII. 10. Tétel

Ha egy körbe egyenlő oldalú ötszöget írunk, akkor az ötszög oldala négyzetértékben egyenlő az ugyanabba a körbe írt hatszög és tízszög oldalának összegével.

Legyen *ABCDE* egy kör, és írjunk az *ABCDE* körbe egy egyenlő oldalú ötszöget (IV. 11.). Azt állítom, hogy az *ABCDE* ötszög oldala négyzetértékben egyenlő az *ABCDE* körbe írt hatszög és tízszög oldalának (négyzet) összegével.



Vegyük ugyanis a kör *F* középpontját (III. 1.), húzzuk meg *AF*-et és hosszabbítsuk meg a *G* pontig, húzzuk meg *FB*-t, bocsássunk *F*-ből *AB*-re egy *FH* merőlegest (I. 12.) és hosszabbítsuk meg *K*-ig, húzzuk meg *AK*-t és *KB*-t, bocsássunk ismét *F*-ből *AK*-ra egy *FL* merőlegest és hosszabbítsuk meg *M*-ig, és húzzuk meg *KN*-t. Minthogy az *ABCG* ív egyenlő az *AEDG* ívvel, s ezekből az *ABC* ív egyenlő *AED*-vel, a maradék *CG* ív egyenlő a maradék *GD* ívvel. *CD* az ötszög oldala, *CG* tehát a tízszög oldala. Minthogy *FA* egyenlő *FB*-vel és *FH* merőleges, az *AFK* szög egyenlő *KFB*-vel (I. 5., 32.), úgyhogy az *AK* ív is egyenlő a *KB* ívvel (III. 26.), az *AB* ív tehát kétszerese a *BK* ívnek, az *AK* szakasz tehát a tízszög oldala. Ugyanígy az *AK* ív is kétszerese a *KM* ívnek. Minthogy az *AB* ív kétszerese a *BK* ívnek és a *CD* ív egyenlő az *AB* ívvel, a *CD* ív is kétszerese a *BK* ívnek. A *CD* ív a *CG* ívnek is kétszerese, a *CG* ív tehát egyenlő a *BK* ívvel. A *BK* ív viszont kétszerese a *KM* ívnek – hiszen *KA* is az –, a *CG* ív is kétszerese tehát a *KM* ívnek. A *CB* ív is kétszerese a *BK* ívnek, a *CB* ív ugyanis egyenlő a *BA* ívvel. A teljes *GB* ív is kétszerese tehát a *BM* ívnek, úgyhogy a *GFB* szög is kétszerese a *BFM* szögnek (VI. 33.). A *GFB* szög az *FAB* szögnek is kétszerese – hiszen az *FAB* szög egyenlő az *ABF* szöggel – (I. 32.), a *BFN* szög is egyenlő tehát az *FAB* szöggel. Két háromszögnek, *ABF*-nek és *BFN*-nek közös az *ABF* szöge, tehát a fönnmaradt szögek, *AFB* és *BNF* is egyenlők (I. 32.), az *ABF* háromszög szögei tehát egyenlők a *BFN* háromszög szögeivel. Az *AB* szakasz tehát úgy aránylik *BF*-hez, mint *FB* a *BN*-hez (VI. 4.), az *AB* és *BN* közötti téglalap tehát egyenlő *BF* négyzetével (VI. 17.). Ismét, minthogy *AL* egyenlő *LK*-val és *LN* merőleges és közös oldal, a *KN* alap egyenlő az *AN* alappal (I. 4.) és az *LKN* szög egyenlő az *LAN* szöggel. Az *LAN* szög viszont egyenlő a *KBN* szöggel (III. 29., I. 5.), az *LKN* szög is egyenlő tehát a *KBN* szöggel. Két háromszögnek, *AKB*-nek és *AKN*-nek közös az *A*-nál levő szöge, tehát a fönnmaradt szögek, *AKB* és *KNA* is egyenlők, a *KBA* háromszög szögei tehát egyenlők a *KNA* háromszög szögeivel. A *BA* szakasz tehát úgy aránylik *AK*-hoz, mint *KA* az *AN*-hez (VI. 4.), a *BA* és *AN* közötti téglalap tehát egyenlő *AK* négyzetével. Azt is megmutattuk, hogy az *AB* és *BN* közötti téglalap egyenlő *BF* négyzetével, az *AB* és *BN* közötti és a *BA* és *AN* közötti téglalap összege tehát, ami *BA* négyzete (II. 2.), egyenlő *BF* és *AK* négyzetösszegével. S *BA* az ötszög oldala, *BF* a hatszögé (IV. 15. K.), *AK* pedig a tízszögé.

Az ötszög oldala négyzetértékben tehát egyenlő az ugyanabba a körbe írt hatszög és tízszög oldalának (négyzet)összegével. Éppen ezt kellett megmutatni.

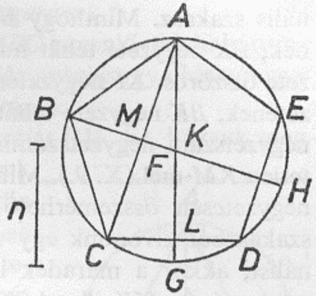
F.: XIII. 16., 18.

XIII. 11. Tétel

*Ha egy racionális átmérőjű körbe egyenlő oldalú ötszöget írunk, akkor az ötszög oldala irracionális, úgynevezett minor.**

Írjunk be ugyanis a racionális átmérőjű *ABCDE* körbe egy *ABCDE* egyenlő oldalú ötszöget (IV. 11.). Azt állítom, hogy az [*ABCDE*] ötszög oldala irracionális, úgynevezett minor.

Vegyük ugyanis a kör *F* középpontját (III. 1.), húzzuk meg *AF*-et és *FB*-t, és hosszabbítsuk meg a *G*, illetve *H* pontig, húzzuk meg *AC*-t, és legyen *FK* negyedrésze *AF*-nek (I. 10.). *AF* racionális, tehát *FK* is racionális (X. 6.). *BF* is racionális, a teljes *BK* is racionális tehát (X. 15.). Minthogy az *ACG* ív egyenlő az *ADG* ívvel, s ezekből az *ABC* ív egyenlő az *AED* ívvel (III. 28.), a maradék *CG* ív egyenlő a maradék *GD* ívvel. Ha meghúzzuk *AD*-t, akkor az adódik, hogy az *L*-nél



levő szögek derékszögek (III. 27., I. 32.) és *CD* kétszerese *CL*-nek (I. 26.). Ugyanígy az *M*-nél levő szögek is derékszögek, és *AC* kétszerese *CM*-nek. Minthogy tehát az *ALC* szög egyenlő az *AMF* szöggel, és két háromszögnek, *ACL*-nek és *AMF*-nek közös az *LAC* szöge, a fönnmaradt szögek, *ACL* és *MFA* egyenlők (I. 32.), az *ACL* háromszög szögei tehát egyenlők az *AMF* háromszög szögeivel, *LC* tehát úgy aránylik *CA*-hoz, mint *MF* az *FA*-hoz (VI. 4.), és az előtagok kétszeresét véve *LC* kétszerese úgy aránylik *CA*-hoz, mint *MF* kétszerese *FA*-hoz (V. 24.). Amint viszont *MF* kétszerese *FA*-hoz, úgy *MF* az *FA* feléhez (V. 15.), amint tehát *LC* kétszerese *CA*-hoz, úgy *MF* az *FA* feléhez (V. 11.), és az utótagok felét véve amint *LC* kétszerese *CA* feléhez, úgy *MF* az *FA* negyedrészéhez (V. 16., 15.). *LC* kétszerese *DC*, *CA* fele *CM*, *FA* negyedrésze pedig *FK*, amint tehát *DC* a *CM*-hez, úgy *MF* az *FK*-hoz, és összetéve amint *DC* és *CM* összege *CM*-hez, úgy *MK* a *KF*-hez (V. 18.), amint tehát *DC* és *CM* összegének a négyzete *CM* négyzetéhez, úgy *MK* négyzete *KF* négyzetéhez (VI. 22.). S minthogy ha az ötszög két oldalát összekötő átlót, vagyis *AC*-t, folytonos arányban osztjuk, akkor a nagyobb darab egyenlő az ötszög oldalával, azaz DC-vel (XIII. 8.), és a nagyobb darab és a teljes szakasz fele összegének a négyzetértéke ötszöröse a teljes szakasz fele négyzetének (XIII. 1.), és a teljes AC szakasz fele CM, DC és CM összegének a négyzete ötszöröse CM négyzetének. Megmutattuk viszont, hogy MK négyzete úgy aránylik KF négyzetéhez, mint DC és CM összegének a négyzete CM négyzetéhez, MK négyzete tehát ötszöröse KF négyzetének. KF négyzete racionális, hiszen az átmérő racionális (X. 6., 12.), MK négyzete is racionális tehát, MK tehát racionális szakasz. Minthogy BF négyszerese FK-nak, BK ötszöröse KF-nek, BK négyzete tehát huszonötszöröse KF négyzetének. MK négyzete ötszöröse KF négyzetének, BK négyzete tehát ötszöröse KM négyzetének, BK négyzete tehát nem úgy aránylik KM négyzetéhez, mint négyzetszám négyzetszámhoz (VIII. 24.), BK lineárisan összemérhetetlen KM-mel (X. 9.). Mind a kettő racionális, BK és KM tehát csak négyzetesen összemérhető racionálisok. Ha viszont egy racionális szakaszból kivonunk egy vele csak négyzetesen összemérhető racionálist, akkor a maradék irracionális, apotomé (X. 73.). MB tehát apotomé és MK illeszkedik hozzá. Azt is állítom, hogy negyedik. Legyen n négyzete egyenlő azzal, amivel BK négyzete nagyobb KM négyzeténél (X. 14. L.). BK négyzetértéke tehát n-ével nagyobb KM-énél. Minthogy KF összemérhető FB-vel, összetéve KB összemérhető FB-vel (X. 15.). BF összemérhető BH-val, BK is összemérhető tehát BH-val (X. 12.). Minthogy BK négyzete ötszöröse KM négyzetének, BK négyzete úgy aránylik KM négyzetéhez, mint öt az egyhez, fölforgatva tehát BK négyzete úgy aránylik n négyzetéhez, mint öt a négyhez (V. 19. K.), és nem mint négyzetszám négyzetszámhoz (VIII. 24.), BK tehát (lineárisan) összemérhetetlen n-nel (X. 9.), BK négyzetértéke tehát egy vele összemérhetetlen szakasz négyzetével nagyobb KM-énél. Minthogy tehát a teljes BK szakasz négyzetértéke egy vele összemérhetetlen szakasz négyzetével nagyobb a hozzá illeszkedő KM-énél, és a teljes BK összemérhető az adott racionálissal, BH-val, MB negyedik apotomé. A racionális és negyedik apotomé által közrefogott téglalap viszont irracionális, és a szakasz, melynek négyzetértéke, irracionális, mégpedig minor a neve (X. 94.). A HB és BM közötti téglalap AB négyzetértéke, mivel ha meghúzzuk AH-t, akkor az ABH háromszög szögei egyenlők az ABM háromszög szögeivel (III. 31., VI. 8.), és *HB* úgy aránylik *BA*-hoz, mint *AB BM*-hez (VI. 4., 17.).

Az ötszög *AB* oldala tehát irracionális, úgynevezett minor. Éppen ezt kellett megmutatni.

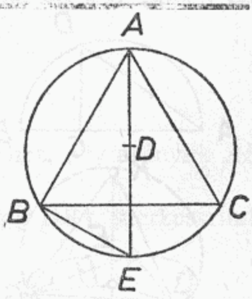
F.: XIII. 16.

XIII. 12. Tétel

*Ha egy körbe egyenlő oldalú háromszöget írunk, akkor a háromszög oldala négyzetértékben háromszorosa a kör sugarának.**

Legyen *ABC* egy kör, és írjunk bele egy *ABC* egyenlő oldalú háromszöget (IV. 2.). Azt állítom, hogy az *ABC* háromszög egy oldala négyzetértékben háromszorosa az *ABC* kör sugarának.

Vegyük ugyanis az *ABC* kör *D* középpontját (III. 1.), húzzuk meg *AD*-t, és hosszabbítsuk meg *E*-ig, és húzzuk meg *BE*-t. Minthogy az *ABC* háromszög egyenlő oldalú, a *BEC* ív harmadrésze az *ABC* kör kerületének (III. 28.). A *BE* ív tehát hatodrésze a kör kerületének, *BE* tehát a (beírt) hatszög oldala, így egyenlő a *DE* sugárral (IV. 15. K.). Minthogy *AE* kétszerese *DE*-nek, *AE* négyzete négyszerese *ED* négyzetének (vö. VI. 22.), azaz *BE* négyzetének. *AE* négyzete egyenlő *AB* és *BE* négyzetösszegével (III. 31., I. 47.), *AB* és *BE* négyzetösszege tehát négyszerese *BE* négyzetének, szétbontva tehát *AB* négyzete háromszorosa *BE* négyzetének. *BE* egyenlő *DE*-vel, *AB* négyzete tehát háromszorosa *DE* négyzetének.



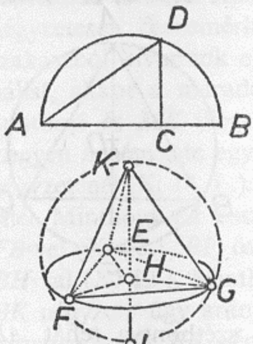
A háromszög oldala tehát négyzetértékben háromszorosa a [kör] sugarának. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: XIII. 13.

XIII. 13. Tétel

*Szerkesszünk (szabályos) gúlát, vegyük körül adott gömbbel, és mutassuk meg, hogy a gömb átmérője négyzetértékben másfélszerese a gúla élének.**

Vegyük az adott gömb *AB* átmérőjét, osszuk föl úgy a *C* pontban, hogy *AC* kétszerese legyen *CB*-nek (VI. 9.), írjunk *AB* fölé egy *ADB* félkört, emeljünk a *C* pontban *AB*-re egy *CD* merőlegest (I. 11.), húzzuk meg *DA*-t, vegyünk egy *DC*-vel egyenlő sugarú *EFG* kört, írjunk az *EFG* körbe egy *EFG* egyenlő oldalú háromszöget (IV. 2.), vegyük a kör *H* középpontját, húzzuk meg *EH*-t, *HF*-et és *HG*-t, emeljünk a *H* pontban az *EFG* kör síkjára egy *HK* merőlegest (XI. 12.), vonjunk le a *HK* félegyenesből egy *AC*-vel egyenlő *HK* szakaszt (I. 3.), és húzzuk meg *KE*-t, *KF*-et és *KG*-t. Minthogy *KH* merőleges az *EFG* kör síkjára, valamennyi őt metsző és az *EFG* kör síkjában levő egyenesre merőleges. *HE*, *HF* és *HG* mindegyike metszi, *HK* tehát merőleges *HE*, *HF* és *HG* mindegyikére. Minthogy *AC* egyenlő *HK*-val, *CD* pedig *HE*-vel, és derékszögeket zárnak be, a *DA* alap egyenlő a *KE* alappal (I. 4.). Ugyanígy *KF* és *KG* is egyenlő *DA*-val, e három szakasz tehát, *KE*, *KF* és *KG* egyenlő egymással. Minthogy *AC* kétszerese *CB*-nek, *AB* háromszorosa *BC*-nek. Amint viszont *AB* a *BC*-hez, úgy aránylik *AD* négyzete *DC* négyzetéhez, amint alant megmutatjuk (L.). *AD* négyzete tehát háromszorosa *DC* négyzetének. *FE* négyzete *EH* négyzetének szintén háromszorosa (XIII. 12.) és *DC* egyenlő *EH*-val, *DA* is egyenlő tehát *EF*-fel. Megmutattuk, hogy *DA* egyenlő *KE*, *KF* és *KG* mindegyikével, egyenlő tehát *EF*, *FG* és *GE* mindegyike *KE*, *KF* és *KG* mindegyikével, e négy háromszög tehát, *EFG*, *KEF*, *KFG* és *KEG* egyenlő oldalú. Gúlát szerkesztettünk tehát négy egyenlő oldalú háromszögből, melynek alapja az *EFG* háromszög, csúcsa pedig a *K* pont.



Még körül kell venni az adott gömbbel, és megmutatni, hogy a gömb átmérője négyzetértékben másfélszerese a gúla élének.

Legyen ugyanis *KH* egyenes menti meghosszabbítása *HL*, és mérjünk rá egy *CB*-vel egyenlő *HL* szakaszt (I. 3.). Minthogy *AC* úgy aránylik *CD*-hez, mint *CD* a *CB*-hez (VI. 8. K.) és *AC* egyenlő *KH*-val, *CD* a *HE*-vel, *CB* pedig *HL*-lel, *KH* úgy aránylik *HE*-hez, mint *EH* a *HL*-hez (V. 7., 11.), a *KH* és *HL* közötti téglalap tehát egyenlő *EH* négyzetével (VI. 17.). *KHE* és *EHL* derékszögek, a *KL* fölé írt félkör tehát az *E* ponton is átmegy. Ha tehát a félkört a rögzített *KL* körül addig forgatjuk, míg eredeti helyzetét újra el nem éri (XI. 14. D.), akkor az *F* és a *G* ponton is átmegy, és a gúlát körülvettük az adott gömbbel. A gömb *KL* átmérője ugyanis egyenlő az adott gömb *AB* átmérőjével, minthogy *KH* egyenlő *AC*-vel, *HL* pedig *CB*-vel.

Azt állítom, hogy a gömb átmérője négyzetértékben másfélszerese a gúla élének.

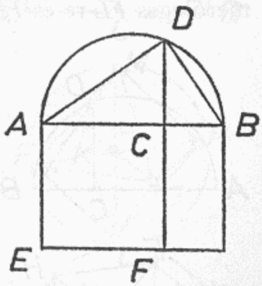
Minthogy ugyanis *AC* kétszerese *CB*-nek, *AB* háromszorosa *BC*-nek, fölforgatva tehát *BA* másfélszerese *AC*-nek. Amint viszont *BA* az *AC*-hez, úgy aránylik *BA* négyzete *AD* négyzetéhez (VI. 8. K., 20. 2. K.), *BA* négyzete is másfélszerese tehát *AD* négyzetének. S *BA* az adott gömb átmérője, *AD* pedig egyenlő a gúla élével. A gömb átmérője tehát (négyzetértékben) másfélszerese a gúla élének. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: XIII. 18.

XIII. 13. Lemma

Azt kell megmutatni, hogy amint *AB* a *BC*-hez, úgy aránylik *AD* négyzete *DC* négyzetéhez.

Vegyük ugyanis a félkör ábráját, húzzuk meg *DB*-t, szerkesszünk *AC*-re egy *EC* négyzetet (I. 46.), és egészítsük ki az *FB* paralelogrammát. Minthogy a *DAB* és *DAC* háromszögek szögeinek egyenlősége (III. 31., I. 32.) miatt *BA* úgy aránylik *AD*-hez, mint *DA* az *AC*-hez (VI. 4.), a *BA* és *AC* közötti téglalap egyenlő *AD* négyzetével. Minthogy *AB* úgy aránylik *BC*-hez, mint *EB* a *BF*-hez (VI. 1.), és *EB* a *BA* és *AC* közötti téglalap – hiszen *EA* egyenlő *AC*-vel –, *BF* pedig az *AC* és *CB* közötti téglalap, *AB* úgy aránylik *BC*-hez, mint a *BA* és *AC* közötti téglalap az *AC* és *CB* közötti téglalaphoz. A *BA* és *AC* közötti téglalap egyenlő *AD* négyzetével, az *AC* és *CB* közötti pedig egyenlő *DC* négyzetével – hiszen a *DC* merőleges középarányosa az alap darabjainak, *AC*-nek és *CB*-nek, *ADB* derékszög volta miatt (VI. 8.



K.) – amint tehát *AB* a *BC*-hez, úgy aránylik *AD* négyzete *DC* négyzetéhez. Éppen ezt kellett megmutatni.

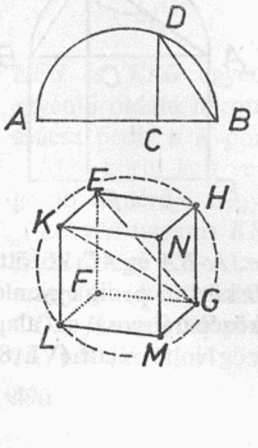
XIII. 15. Tétel

*Szerkesszünk kockát, vegyük körül a gömbbel, amellyel a gúlát is, és mutassuk meg, hogy a gömb átmérője négyzetértékben háromszorosa a kocka élének.**

Vegyük az adott gömb *AB* átmérőjét, osszuk föl úgy a *C* pontban, hogy *AC* kétszerese legyen *CB*-nek (VI. 9.), írjunk *AB* fölé egy *ADB* félkört, emeljünk a *C* pontban *AB*-re egy *CD* merőlegest (I. 11.), húzzuk meg *DB*-t, vegyünk egy *DB*-vel egyenlő oldalú *EFGH* négyzetet (I. 46.), emeljünk az *E*, *F*, *G* és *H* pontban merőlegeseket az *EFGH* négyzet síkjára (XI. 12.), vonjunk le az *EK*, *FL*, *GM* és *HN* félegyenesek mindegyikéből egy *EF*, *FG*, *GH* és *HE* egyikével egyenlő *EK*, *FL*, *GM*, illetve *HN* szakaszt (I. 3.), és húzzuk meg *KL*-t, *LM*-et, *MN*-t és *NK*-t. Szerkesztettünk tehát egy hat egyenlő négyzet által közrefogott *FN* kockát.

Még körül kell venni az adott gömbbel, és megmutatni, hogy a gömb átmérője négyzetértékben háromszorosa a kocka élének.

Húzzuk meg ugyanis *KG*-t és *EG*-t. Minthogy *KEG* derékszög – mivel *KE* is merőleges az *EG* síkra és nyilván az *EG* egyenesre is –, a *KG* fölé írt félkör az *E* ponton is átmegy (III. 31.). Ismét, minthogy *GF* merőleges *FL*-re és *FE*-re, az *FK* síkra is merőleges (XI. 4.), úgyhogy ha meghúzzuk *FK*-t, akkor *GF* az *FK*-ra is merőleges lesz, és ezért a *GK* fölé írt félkör *F*-en is átmegy. Ugyanígy a kocka többi csúcsán is átmegy. Ha tehát a félkört a rögzített *KG* körül addig forgatjuk, míg eredeti helyzetét újra el nem éri, akkor a kockát gömbbel vettük körül. Azt állítom, hogy az adottal. Minthogy ugyanis *GF* egyenlő *FE*-vel és az *F*-nél levő szög derékszög, *EG* négyzete kétszerese *EF* négyzetének (I. 47.). *EF* egyenlő *EK*-val, *EG* négyzete tehát kétszerese *EK* négyzetének, úgyhogy *GE* és *EK* négyzetösszege, azaz *GK* négyzete, háromszorosa



EK négyzetének. S minthogy *AB* háromszorosa *BC*-nek és amint *AB* a *BC*-hez, úgy aránylik *AB* négyzete *BD* négyzetéhez (VI. 8. K., 19. K.), *AB* négyzete háromszorosa *BD* négyzetének. Megmutattuk, hogy *GK* négyzete szintén háromszorosa *KE* négyzetének; és *KE* egyenlő *DB*-vel, *KG* is egyenlő tehát *AB*-vel. *AB* az adott gömb átmérője, *KG* is egyenlő tehát az adott gömb átmérőjével.

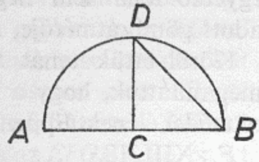
Körülvettük tehát a kockát az adott gömbbel, és egyúttal megmutattuk, hogy a gömb átmérője négyzetértékben háromszorosa a kocka élének. Éppen ezt kellett megmutatni.

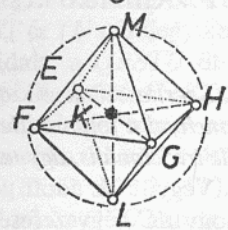
F.: XIII. 17–18.

XIII. 14. Tétel

*Szerkesszünk (szabályos) oktaédert, vegyük körül a gömbbel, amellyel az előző testeket is, és mutassuk meg, hogy a gömb átmérője négyzetértékben kétszerese az oktaéder élének.**

Vegyük az adott gömb *AB* átmérőjét, felezzük meg a *C* pontban (I. 10.), írjunk *AB* fölé egy *ADB* félkört, emeljünk *C*-ben *AB*-re egy *CD* merőlegest (I. 11.), húzzuk meg *DB*-t, vegyünk egy *EFGH* négyzetet, melynek minden oldala egyenlő *DB*-vel (I. 46.), húzzuk meg *HF*-et és *EG*-t, emeljünk a *K* pontban az *EFGH* négyzet síkjára egy *KL* merőlegest (XI. 12.), ennek a sík másik oldalán való meghosszabbítása legyen *KM*, vonjunk le a *KL* és a *KM* félegyenesből egy *EK*, *FK*, *GK* és *HK* egyikével egyenlő *KL*, illetve *KM* szakaszt (I. 3.), és húzzuk meg az *LE*, *LF*, *LG*, *LH*, *ME*, *MF*, *MG*, *MH* szakaszokat. Minthogy *KE* egyenlő *KH*-val (IV. 9.) és *EKH* derékszög, *HE* négyzete kétszerese *EK* négyzetének (I. 47.). Ismét, minthogy *LK* egyenlő *KE*-vel és *LKE* derékszög, *EL* négyzete kétszerese *EK* négyzetének. Megmutattuk, hogy *HE* négyzete is kétszerese *EK* négyzetének, *LE* négyzete tehát egyenlő *EH* négyzetével, *LE* tehát egyenlő *EH*-val. Ugyanígy *LH* is egyenlő *HE*-vel, az *LEH* háromszög tehát egyenlő oldalú. Hasonlóképp mutathatnánk meg, hogy az összes többi háromszög is, melyek-





nek alapjai az *EFGH* négyzet oldalai, csúcsai pedig az *L*, *M* pontok, egyenlő oldalú. Nyolc egyenlő oldalú háromszög által közrefogott oktaédert szerkesztettünk tehát.

Még körül kell venni az adott gömbbel, és megmutatni, hogy a gömb átmérője négyzetértékben kétszerese az oktaéder élének.

Minthogy *LK*, *KM* és *KE* egyenlő egymással, az *LM* fölé írt félkör *E*-n is átmegy. S ugyanígy, ha a félkört a rögzített *LM* körül addig forgatjuk, míg eredeti helyzetét újra el nem éri, akkor az *F*, a *G* és a *H* ponton is átmegy, és az oktaédert gömbbel vettük körül. Azt állítom, hogy az adottal. Minthogy ugyanis *LK* egyenlő *KM*-mel, *KE* közös oldal, és egyenlő szögeket zárnak be, az *LE* alap egyenlő az *EM* alappal (I. 4.). S minthogy *LEM* derékszög – hiszen fékörbeli (III. 31.) –, *LM* négyzete kétszerese *LE* négyzetének (I. 47.). Ismét, minthogy *AC* egyenlő *CB*-vel, *AB* kétszerese *BC*-nek. Amint viszont *AB* a *BC*-hez, úgy aránylik *AB* négyzete *BD* négyzetéhez (VI. 8. K., 19. K.), *AB* négyzete tehát kétszerese *BD* négyzetének. Megmutattuk, hogy *LM* négyzete kétszerese *LE* négyzetének, és *DB* négyzete egyenlő *LE* négyzetével – hiszen *EH*-t *DB*-vel egyenlőnek vettük –, *AB* négyzete is egyenlő tehát *LM* négyzetével, *AB* tehát egyenlő *LM*-mel. *AB* az adott gömb átmérője, *LM* tehát egyenlő az adott gömb átmérőjével.

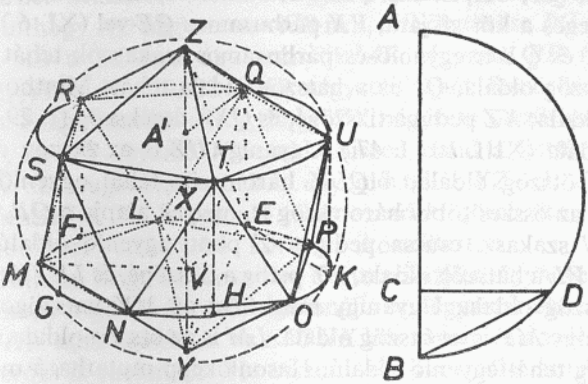
Körülvettük tehát az oktaédert az adott gömbbel, és egyúttal megmutattuk, hogy a gömb átmérője négyzetértékben kétszerese az oktaéder élének. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: XIII. 18.

XIII. 16. Tétel

*Szerkesszünk (szabályos) ikozaédert, vegyük körül a gömbbel, amellyel a fönt említett testeket is, és mutassuk meg, hogy az ikozaéder éle irracionális, úgynevezett minor.**

Vegyük az adott gömb *AB* átmérőjét, osszuk föl úgy a *C* pontban, hogy *AC* négyszerese legyen *CB*-nek (VI. 9.), írjunk *AB* fölé egy *ADB* félkört, emeljünk *C*-ben *AB*-re egy *CD* merőlegest (I. 11.), húzzuk meg *DB*-t, vegyünk egy *EFGHK* kört, melynek sugara egyenlő *DB*-vel, írjunk az *EFGHK* körbe egy egyenlő oldalú és egyenlő szögű *EFGHK* ötszöget (IV. 11.), felezzük meg az *EF*, *FG*, *GH*, *HK* és *KE* íveket az *L*, *M*, *N*, *O*, illetve *P* pontban (III. 30.), és húzzuk meg az *LM*, *MN*, *NO*, *OP*, *PL*, *EP* szakaszokat. Ekkor az *LMNOP* ötszög is egyenlő oldalú, és *EP* a tízszög oldala. Emeljük a *E*, *F*, *G*, *H* és *K* pontban a kör síkjára az *EFGHK* kör sugarával egyenlő *EQ*, *FR*, *GS*, *HT*, illetve *KU*



merőlegeseket (XI. 12., I. 3.), és húzzuk meg a *QR*, *RS*, *ST*, *TU*, *UQ*, *QL*, *LR*, *RM*, *MS*, *SN*, *NT*, *TO*, *OU*, *UP*, *PQ* szakaszokat. Minthogy *EQ* és *KU* merőleges ugyanarra a síkra, *EQ* párhuzamos *KU*-val (XI. 6.). Egyenlő is vele, az egyenlő és párhuzamos szakaszokat ugyanazon az oldalon összekötő szakaszok viszont egyenlők és párhuzamosak (I. 33.), *QU* tehát egyenlő és párhuzamos *EK*-val. *EK* az egyenlő oldalú ötszög oldala, tehát *QU* is az *EFGHK* körbe írt egyenlő oldalú ötszög oldala. Ugyanígy *QR*, *RS*, *ST* és *TU* mindegyike is az *EFGHK* körbe írt egyenlő oldalú ötszög oldala, a *QRSTU* ötszög tehát egyenlő oldalú. Minthogy *QE* a hatszög oldala (IV. 15. K.), *EP* pedig a tízszögé, és *QEP* derékszög, *QP* az ötszög oldala, hiszen az ötszög oldala négyzetértékben egyenlő az ugyanabba a körbe írt hatszög és tízszög oldalának (négyzet)összegével (XIII. 10., I. 47.). Ugyanígy *PU* is az ötszög oldala. *QU* is az ötszög oldala, a *QPU* háromszög tehát egyenlő oldalú. Ugyanígy *QLR*, *RMS*, *SNT* és *TOU* mindegyike egyenlő oldalú háromszög. Minthogy megmutattuk, hogy *QL* és *QP* az ötszög oldala, és *LP* is az ötszög oldala, a *QLP* háromszög egyenlő oldalú. Ugyanígy az *LRM*, *MSN*, *NTO*, *OUP* háromszögek mindegyike is egyenlő oldalú. Vegyük az *EFGHK* kör *V* középpontját

(III. 1.), emeljünk V-ben a kör síkjára egy VZ merőlegest (XI. 12.), legyen VY a másik oldalon való meghosszabbítása, vonjunk le belőle egy VX hatszögoldalt és VY, XZ tízszögoldalakat (I. 3.), és húzzuk meg a QZ, QX, UZ, EV, LV, LY, YM szakaszokat. Minthogy VX és QE merőleges a kör síkjára, VX párhuzamos QE-vel (XI. 6.). Egyenlők is, EV és QX is egyenlő és párhuzamos szakaszok tehát (I. 33.). EV a hatszög oldala, QX is a hatszög oldala tehát. Minthogy QX a hatszög oldala, XZ pedig a tízszögé, és QXZ derékszög (I. 29.), QZ az ötszög oldala (XIII. 10., I. 47.). Ugyanígy UZ is az ötszög oldala.** QU is az ötszög oldala, a QUZ háromszög tehát egyenlő oldalú. Ugyanígy az összes többi háromszög is, melyek alapja a QR, RS, ST, illetve TU szakasz, csúcsa pedig a Z pont, egyenlő oldalú. Ismét, minthogy VL a hatszög oldala, VY pedig a tízszögé, és LVY derékszög, LY az ötszög oldala. Ugyanígy meghúzva az MV hatszögoldalt azt kapjuk, hogy MY is az ötszög oldala. LM is az ötszög oldala, az LMY háromszög tehát egyenlő oldalú. Hasonlóképp mutatható meg, hogy az összes többi háromszög is, melyek alapja MN, NO, OP, illetve PL csúcsa pedig az Y pont, egyenlő oldalú. Húsz egyenlő oldalú háromszög által közrefogott ikozaédert szerkesztettünk tehát.

Még körül kell venni az adott gömbbel, és megmutatni, hogy az ikozaéder éle irracionális, úgynevezett minor.

Minthogy ugyanis VX a hatszög oldala, XZ pedig a tízszögé, X folytonos arányban osztja VZ-t, és a nagyobb darabja VX (XIII. 9.), ZV tehát úgy aránylik VX-hez, mint VX az XZ-hez. VX egyenlő VE-vel, XZ pedig VY-nal, ZV tehát úgy aránylik VE-hez, mint EV VY-hoz (V. 7., 11.). ZVE és EVY derékszög, ha tehát meghúzzuk az EZ szakaszt, akkor az YEZ, VEZ háromszögek hasonlósága (VI. 6., 4., V. 16.) miatt YEZ derékszög. Ugyanígy minthogy ZV úgy aránylik VX-hez, mint VX az XZ-hez és ZV egyenlő YX-szel, VX pedig XQ-val, YX úgy aránylik XQ-hoz, mint QX az XZ-hez, és ezért ismét ha meghúzzuk QY-t, akkor a Q-nál levő szög derékszög. Az YZ fölé írt félkör tehát Q-n is átmegy, és ha a félkört a rögzített YZ körül addig forgatjuk, míg eredeti helyzetét újra el nem éri, akkor Q-n és az ikozaéder többi csúcsán is átmegy, és körülvettük gömbbel az ikozaédert. Azt állítom, hogy az adottal. Legyen ugyanis VX felezőpontja A' (I. 10.). Minthogy a VZ szakaszt X folytonos arányban osztja, és ZX a kisebb darabja, ZX-nek és a nagyobb darab felének, XA'-nek az összegének a négyzetértéke ötszöröse a nagyobb darab felének a négyzetének (XIII. 3.), ZA' négyzete tehát ötszöröse $A'X$ négyzetének. ZA-nak kétszerese ZY, AX-nek kétszerese VX, ZY négyzete tehát ötszöröse XV négyzetének. Minthogy AC négyszerese CB-nek, AB ötszöröse BC-nek. Amint viszont AB a BC-hez, úgy aránylik AB négyzete BD négyzetéhez (III. 31., VI. 8. K., 19. K.), AB négyzete tehát ötszöröse BD négyzetének. Megmutattuk azt is, hogy ZY négyzete ötszöröse VX négyzetének, és DB egyenlő VX-szel – hiszen mind a kettő egyenlő az $EFGHK$ kör sugarával –, AB is egyenlő tehát YZ-vel. AB az adott gömb átmérője, YZ is egyenlő tehát az adott gömb átmérőjével. Az adott gömbbel vettük tehát körül az ikozaédert.

Azt állítom, hogy az ikozaéder éle irracionális, úgynevezett minor. Minthogy a gömb átmérője racionális és négyzetértékben ötszöröse az $EFGHK$ kör sugarának, az $EFGHK$ kör sugara racionális, úgyhogy az átmérője is racionális. Ha viszont egy racionális átmérőjű körbe egyenlő oldalú ötszöget írunk, akkor az ötszög oldala irracionális, úgynevezett minor (XIII. 11.). Az $EFGHK$ ötszög oldala az ikozaéder éle, az ikozaéder éle tehát irracionális, úgynevezett minor.

F.: XIII. 18.

Következmény

Ebből már nyilvánvaló, hogy a gömb átmérője négyzetértékben ötszöröse annak a körnek a sugarának, amelyre az ikozaédert emeltük, és hogy a gömb átmérője az ugyanebbe a körbe írt hatszög egy meg a tízszög két oldalának az összege. Éppen ezt kellett megmutatni.

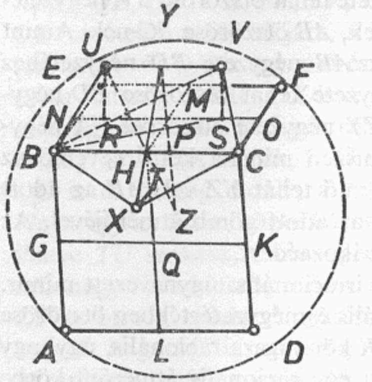
F.: XIII. 18.

XIII. 17. Tétel

*Szerkesszünk (szabályos) dodekaédert, vegyük körül a gömbbel, amellyel a fönt említett testeket is, és mutassuk meg, hogy a dodekaéder éle irracionális, úgynevezett apotomé.**

Vegyük a fönt említett kocka két, egymásra merőleges lapját, $ABCD$-t és $CBEF$-et (XIII. 15.), felezzük meg az AB, BC, CD, DA, EF, EB, FC oldalak mindegyikét a G, H, K, L, M, N, illetve O pontban (I. 10.), húzzuk meg GK-t, HL-t, MH-t és NO-t, ossza NP-t, PO-t és

HQ-t folytonos arányban az *R*, az *S*, illetve a *T* pont (VI. 30.), legyenek *RP*, *PS* és *TQ* a nagyobb darabjaik, emeljük a kocka lapjaira a kocka külső oldalán az *RU*, *SV*, *TX* merőlegeseket (XI. 12.), vegyük őket *RP*-vel, *PS*-sel, illetve *TQ*-val egyenlőnek (I. 3.), és húzzuk meg az *UB*, *BX*, *XC*, *CV*, *VU* szakaszokat. Azt állítom, hogy az *UBXCV* ötszög egyenlő oldalú, egy síkban fekszik és egyenlő szögű. Húzzuk meg ugyanis *RB*-t, *SB*-t és *VB*-t. Minthogy *R* folytonos arányban osztja *NP*-t és *RP* a nagyobb darabja, *PN* és *NR* négyzetösszege háromszorosa *RP* négyzetének (XIII. 4.). *PN* egyenlő *NB*-vel, *PR* pedig *RU*-val, *BN* és *NR* négyzetösszege tehát háromszorosa *RU* négyzetének. *BN* és *NR* négyzetösszegével egyenlő *BR* négyzete (I. 47.), *BR* négyzete tehát háromszorosa *RU* négyzetének, úgyhogy *BR* és *RU* négyzetösszege négyszerese *RU* négyzetének. *BR* és *RU* négyzetösszegével egyenlő *BU* négyzete (I. 47.), *BU* négyzete tehát négyszerese *UR* négyzetének *BU* tehát kétszerese *RU*-nak (vö. VI. 22.). *VU* is kétszerese *UR*-nek, minthogy *SR* is kétszerese *PR*-nek, azaz *RU*-nak (XI. 6., I. 33.), *BU* tehát egyenlő *UV*-vel. Hasonlóképp mutatható meg, hogy *BX*, *XC* és *CV* mindegyike egyenlő *BU*-val és *UV*-vel. A *BUVCX* ötszög tehát egyenlő oldalú. Azt állítom, hogy egy síkban fekszik. Húzzuk meg ugyanis a *P* pontból *RU*-val és *SV*-vel párhuzamosan a kocka külső oldalán *PY*-t (I. 31., 30.), és kössük össze *YH*-t, *HX*-et. Azt állítom, hogy *YHX* egyenes. Minthogy ugyanis *T* folytonos arányban osztja *HQ*-t és a nagyobb darabja *QT*, *HQ* úgy aránylik *QT*-hez, mint *QT* a *TH*-hoz. *HQ* egyenlő *HP*-vel, *QT* pedig *TX*-szel és *PY*-nal, *HP* tehát úgy aránylik *PY*-hoz, mint *XT* a *TH*-hoz. *HP* párhuzamos *TX*-szel, mert mind a kettő merőleges a *BD* síkra (XI. 6.), *TH* pedig *PY*-nal, mert mind a kettő merőleges a *BF* síkra. Ha viszont két háromszöget – *YPH*-t és *HTX*-et –, melynek két-két oldala arányos, úgy illesztünk egy csúcsnál össze, hogy a megfelelő oldalaik párhuzamosak is, akkor



a fönnmaradó oldalak egy egyenesen fekszenek (VI. 32.), *YH* és *HX* tehát egy egyenesen fekszik. Minden egyenes egy síkban fekszik (XI. 1.), az *UBXCV* ötszög tehát egy síkban fekszik (XI. 2., 7.).

Azt állítom, hogy egyenlő szögű.

Minthogy ugyanis *R* folytonos arányban osztja az *NP* szakaszt, a nagyobb darab *PR*, és *PR* egyenlő *PS*-sel, *P* folytonos arányban osztja *NS*-t és *NP* a nagyobb darabja (XIII. 5.), *NS* és *SP* négyzetösszege tehát háromszorosa *NP* négyzetének (XIII. 4.). *NP* egyenlő *NB*-vel, *PS* pedig *SV*-vel, *NS* és *SV* négyzetösszege tehát háromszorosa *NB* négyzetének, úgyhogy *VS*, *SN* és *NB* négyzetösszege négyszerese *NB* négyzetének. *SN* és *NB* négyzetösszegével egyenlő *SB* négyzete (I. 47.), *BS* és *SV* négyzetösszege tehát, azaz *BV* négyzete – hiszen *VSB* derékszög –, négyszerese *NB* négyzetének, *VB* tehát kétszerese *BN*-nek (vö. VI. 22.). *BC* is kétszerese *BN*-nek, *BV* tehát egyenlő *BC*-vel. Minthogy két-két oldal, *BU*, *UV* és *BX*, *XC* egyenlő, és a *BV* alap egyenlő a *BC* alappal, a *BUV* szög egyenlő a *BXC* szöggel (I. 8.). Hasonlóképp mutatható meg, hogy *UVC* és *BXC* is egyenlő szögek, a *BXC*, *BUV*, *UVC* szögek tehát egyenlők egymással. Ha viszont egy egyenlő oldalú ötszög három szöge egyenlő egymással, akkor az ötszög egyenlő szögű (XIII. 7.), a *BUVCX* ötszög tehát egyenlő szögű. Azt is megmutattuk, hogy egyenlő oldalú, a *BUVCX* ötszög tehát egyenlő oldalú és egyenlő szögű, és a kocka egyik élén, *BC*-n fekszik. Ha tehát a kocka mind a tizenkét élére elvégezzük ugyanezt a szerkesztést, akkor egy tizenkét egyenlő oldalú és egyenlő szögű ötszög által közrefogott testet kapunk, s ennek a neve dodekaéder.

Még körül kell venni az adott gömbbel, és megmutatni, hogy a dodekaéder éle irracionális, úgynevezett apotomé.

Legyen ugyanis *YZ* az *YP* meghosszabbítása. *PZ* találkozik a kocka átlójával, és felezik egymást, hiszen megmutattuk ezt a tizenegyedik könyv utolsó előtti tételében (XI. 38.). Messék egymást *Z*-ben. Ekkor *Z* a kockát körülvevő gömb középpontja és *ZP* a kocka élének fele. Húzzuk meg *UZ*-t. Minthogy *P* folytonos arányban osztja az *NS* szakaszt és *NP* a nagyobb darabja, *NS* és *SP* négyzetösszege háromszorosa *NP* négyzetének (XIII. 4.). *NS* egyenlő *YZ*-vel, minthogy *NP* is egyenlő *PZ*-vel, *YP* pedig *PS*-sel, és *PS* egyenlő *YU*-val, minthogy *RP*-vel is egyenlő. *ZY* és *YU* négyzetösszege tehát háromszorosa

NP négyzetének. *ZY* és *YU* négyzetösszegével viszont egyenlő *UZ* négyzete (I. 47.), *UZ* négyzete tehát háromszorosa *NP* négyzetének. A kockát körülvevő gömb sugara is háromszorosa négyzetértékben a kocka éle felének. Föntebb megmutattuk ugyanis, hogyan kell kockát szerkeszteni, gömbbel körülvenni és megmutatni, hogy a gömb átmérője négyzetértékben háromszorosa a kocka élének (XIII. 15.). Amint viszont az egészek, úgy a fele részek: *NP* fele része a kocka élének, *UZ* tehát egyenlő a kockát körülvevő gömb sugarával. *Z* a kockát körülvevő gömb középpontja, az *U* pont tehát a gömb felületén fekszik. Hasonlóképp mutathatnánk meg, hogy a dodekaéder összes többi (tér)szöge is a gömb felületén nyugszik. Körülvettük tehát a dodekaédert az adott gömbbel.

Azt állítom, hogy a dodekaéder éle irracionális, úgynevezett apotomé.

Minthogy ugyanis *NP*-t folytonos arányban osztva a nagyobb darab *RP*, *PO*-t folytonos arányban osztva pedig a nagyobb darab *PS*, a teljes *NO*-t folytonos arányban osztva a nagyobb darab *RS*: minthogy *NP* úgy aránylik *PR*-hez, mint *PR* az *RN*-hez, így a kétszereseik is, a részek aránya ugyanis ugyanaz, mint az ugyanannyiszorosaiké (V. 15.), *NO* tehát úgy aránylik *RS*-hez, mint *RS* az *NR* és *SO* összegéhez. *NO* nagyobb *RS*-nél, *RS* is nagyobb tehát *NR* és *SO* összegénél (V. 14.). *NO* tehát folytonos arányban osztott, és a nagyobb darabja *RS*. *RS* egyenlő *UV*-vel, ha tehát *NO*-t folytonos arányban osztjuk, akkor a nagyobb darab *UV*. Minthogy a gömb átmérője racionális és négyzetértékben háromszorosa a kocka élének (XIII. 15.), *NO*, mint kockaél, racionális. Ha viszont egy racionális szakaszt folytonos arányban osztunk, akkor mind a két darab irracionális, apotomé (XIII. 6.).

Az *UV* szakasz tehát, mely éle a dodekaédernek, irracionális, apotomé.

F.: XIII. 18.

Következmény

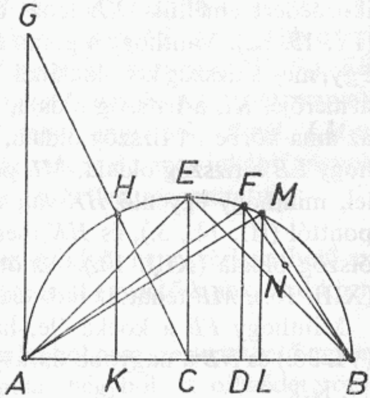
Ebből már nyilvánvaló, hogy a kocka élét folytonos arányban osztva a nagyobb darab a dodekaéder éle. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: XIII. 18.

XIII. 18. Tétel

*Állítsuk elő az öt test élét, és hasonlítsuk össze egymással!**

Vegyük az adott gömb *AB* átmérőjét, osszuk föl *C*-ben úgy, hogy *AC* egyenlő legyen *CB*-vel, *D*-ben pedig úgy, hogy *AD* kétszerese legyen *DB*-nek (VI. 9.), írjunk *AB* fölé egy *AEB* félkört, emeljünk *C*-ben és *D*-ben *AB*-re egy *CE*, illetve *DF* merőlegest (I. 11.), és húzzuk meg *AF*-et, *FB*-t és *EB*-t. Minthogy *AD* kétszerese *DB*-nek, *AB* háromszorosa *BD*-nek. Fölforgatva tehát *BA* másfélszerese *AD*-nek. Amint viszont *BA* az *AD*-hez, úgy aránylik *BA* négyzete *AF* négyzetéhez – hiszen egyenlők az *AFB* háromszög szögei az *AFD* háromszög szögeivel (III. 31., VI. 8. K., 19. K.) –, *BA* négyzete tehát másfélszerese *AF* négyzetének. A gömb átmérője a gúla élének négyzetértékben szintén másfélszerese (XIII. 13.), és *AB* a gömb átmérője, *AF* tehát egyenlő a gúla élével.



Ismét, minthogy *AD* kétszerese *DB*-nek, *AB* háromszorosa *BD*-nek. Amint viszont *AB* a *BD*-hez, úgy aránylik *AB* négyzete *BF* négyzetéhez, *AB* négyzete tehát háromszorosa *BF* négyzetének. A gömb átmérője négyzetértékben szintén háromszorosa a kocka élének (XIII. 15.), és *AB* a gömb átmérője, *BF* tehát a kocka éle.

Minthogy *AC* egyenlő *CB*-vel, *AB* kétszerese *BC*-nek. Amint viszont *AB* a *BC*-hez, úgy aránylik *AB* négyzete *BE* négyzetéhez, *AB* négyzete tehát kétszerese *BE* négyzetének. A gömb átmérője négyzetértékben szintén kétszerese az oktaéder élének (XIII. 14.), és *AB* az adott gömb átmérője, *BE* tehát az oktaéder éle.

Emeljünk most az *A* pontban az *AB* egyenesre egy *AG* merőlegest, mérjük rá az *AB*-vel egyenlő *AG* szakaszt, húzzuk meg *GC*-t, és bocsássuk *H*-ból *AB*-re a *HK* merőlegest (I. 12.). Minthogy *GA* kétszerese *AC*-nek – hiszen *GA* egyenlő *AB*-vel – és *GA* úgy aránylik *AC*-hez, mint *HK* a *KC*-hez (VI. 4.), *HK* kétszerese *KC*-nek. *HK* négyzete tehát négyszerese *KC* négyzetének (vö. VI. 22.), *HK* és *KC* négyzetösszege tehát, ami *HC* négyzete (I. 47.), ötszöröse *KC* négyzetének. *HC* egyenlő *CB*-vel, *BC* négyzete tehát ötszöröse *CK* négyzetének. Minthogy *AB* kétszerese *CB*-nek és ezekből *AD* kétszerese *DB*-nek, a maradék *BD* kétszerese a maradék *DC*-nek (V. 19.). *BC* tehát háromszorosa *CD*-nek, *BC* négyzete tehát kilencszerese *CD* négyzetének. *BC* négyzete ötszöröse *CK* négyzetének, *CK* négyzete tehát nagyobb *CD* négyzeténél, *CK* tehát nagyobb *CD*-nél. Mérjük föl a *CK*-val egyenlő *CL*-t, emeljük *L*-ben *AB*-re az *LM* merőlegest, és húzzuk meg *MB*-t. Minthogy *BC* négyzete ötszöröse *CK* négyzetének, és *BC*-nek kétszerese *AB*, *CK*-nak pedig kétszerese *KL*, *AB* négyzete ötszöröse *KL* négyzetének. A gömb átmérője négyzetértékben szintén ötszöröse azon kör sugarának, melyre az ikozaédert emeltük (XIII. 16. K.), és *AB* a gömb átmérője, *KL* tehát annak a körnek a sugara, melyre az ikozaédert emeltük, *KL* tehát a mondott körbe írt hatszög oldala (IV. 15. K.). Minthogy a gömb átmérője a mondott körbe írt hatszög egy, meg a tízszög két oldalának az összege (XIII. 16. K.) és *AB* a gömb átmérője, *KL* a hatszög oldala, *AK* pedig egyenlő *LB*-vel, *AK* és *LB* az ama körbe írt tízszög oldala, melyre az ikozaédert emeltük. Minthogy *LB* a tízszög oldala, *ML* pedig a hatszögé – hiszen egyenlő *KL*-lel, minthogy egyenlő *HK*-val, mert egyenlő távol vannak a középponttól (III. 14., 3.), és *HK* meg *KL* is kétszerese *KC*-nek –, *MB* az ötszög oldala (XIII. 10.). Az ötszög oldala viszont az ikozaéder éle (XIII. 16.), *MB* tehát az ikozaéder éle.

Minthogy *FB* a kocka éle, ha *N*-ben folytonos arányban osztjuk (VI. 30.) és *NB* a nagyobb darabja, akkor *NB* a dodekaéder éle (XIII. 17. K.).

Minthogy megmutattuk, hogy a gömb átmérője az *AF* gúlaélnek négyzetértékben másfélszerese, a *BE* oktaéderélnek négyzetértékben kétszerese, az *FB* kockaélnek pedig négyzetértékben háromszorosa, amiből a gömb átmérője négyzetértékben hat egység, abból a gúla éle négy, az oktaéder éle három, a kocka éle pedig két egység. A gúla éle tehát négyzetértékben az oktaéder élének négyharmada, a kocka élének kétszerese, az oktaéder éle pedig a kockáénak másfélszerese. A három test említett élei tehát – ti. a gúláé, az oktaéderé és a kockáé – racionális arányban állnak egymással. A többi kettő viszont, ti. az íkozaéderé és a dodekaéderé, sem egymással (X. 6., 105., 11. K.), sem az előbb említettekkel nem áll racionális arányban, hiszen irracionálisok, az egyik minor (XIII. 16.), a másik apotomé (XIII. 17.).

Hogy az *MB* ikozaéderél nagyobb az *NB* dodekaéderélnél, így mutatható meg:

Minthogy az *FDB* háromszög szögei egyenlők az *FAB* háromszög szögeivel, *DB* úgy aránylik *BF*-hez, mint *BF* a *BA*-hoz (VI. 8.). Minthogy három szakasz arányos, az első úgy aránylik a harmadikhoz, mint az első négyzete a második négyzetéhez (VI. 20. 2. K.), *DB* tehát úgy aránylik *BA*-hoz, mint *DB* négyzete *BF* négyzetéhez, megfordítva tehát *AB* úgy aránylik *BD*-hez, mint *FB* négyzete *BD* négyzetéhez (V. 7. K.). *AB* háromszorosa *BD*-nek, *FB* négyzete is háromszorosa tehát *BD* négyzetének. *AD* négyzete négyszerese *DB* négyzetének – hiszen *AD* kétszerese *DB*-nek –, *AD* négyzete tehát nagyobb *FB* négyzeténél, *AD* tehát nagyobb *FB*-nél, még inkább nagyobb tehát *AL* az *FB*-nél. *AL*-t folytonos arányban osztva *KL* a nagyobb darab, minthogy *LK* a hatszög oldala, *KA* pedig a tízszögé (XIII. 9.), *FB*-t folytonos arányban osztva *NB* a nagyobb darab, *KL* tehát nagyobb *NB*-nél. *KL* egyenlő *LM*-mel, *LM* tehát nagyobb *NB*-nél. *LM*-nél nagyobb *MB* (I. 19.), *MB* tehát, az ikozaéder éle, még inkább nagyobb *NB*-nél, a dodekaéder élénél. Éppen ezt kellett megmutatni.

Azt állítom, hogy az említett öt testen kívül nem szerkeszthető más egyenlő oldalú, egyenlő szögű és egymással egyenlő lapok által közrefogott test.

Két háromszögből vagy egyáltalán lapból nem szerkeszthető ugyanis térszög. Három háromszögből a gúla, négyből az oktaéder, ötből pedig az ikozaéder térszöge szerkeszthető. Hat, egy ponthoz (mint közös csúcshoz) szerkesztett egyenlő oldalú és egyenlő szögű háromszögből nem lesz térszög, hiszen mivel az egyenlő oldalú háromszög egy szöge kétharmad derékszög, a hat négy derékszöggel egyenlő, ami nem lehetséges, mert valamennyi térszöget összegben négy derékszögnél kisebb szögek fognak közre (XI. 21.). Ugyanígy hatnál több (ilyen) síkszögből sem szerkeszthető térszög. Három négyzet a kocka térszögét fogja közre. Négyből nem lehet, mert ismét négy derékszög az összeg. Az egyenlő oldalú és egyenlő szögű ötszögekből: háromból a dodekaéder térszöge szerkeszthető, négyből viszont nem lehet, hiszen mivel az egyenlő oldalú ötszög egy szöge egy egész egyötöd derékszög, a négy nagyobb négy derékszögnél, ami nem lehetséges. Ugyanezen ellentmondás miatt más sokszögek sem fognak közre térszöget. Éppen ezt kellett megmutatni.

XIII. 18. Lemma

Hogy pedig az egyenlő oldalú és egyenlő szögű ötszög egy szöge egy egész egyötöd derékszög, azt így kell megmutatni:

Legyen ugyanis *ABCDE* egy egyenlő oldalú és egyenlő szögű ötszög, írjunk köré egy *ABCDE* kört (IV. 14.), vegyük az *F* középpontját, és húzzuk meg az *FA*, *FB*, *FC*, *FD*, *FE* szakaszokat. Ezek felezik az ötszög *A*-nál, *B*-nél, *C*-nél, *D*-nél, illetve *E*-nél levő szögét (I. 8.). Minthogy az *F*-nél levő öt szög összege négy derékszöggel egyenlő (vö. I. 15. K.) és egyenlők, az egyikük, pl. *AFB*, egyötöd híján egy derékszög. A másik kettő, *FAB* és *ABF* összege tehát egy egész egyötöd derékszög (I. 32.). *FAB* egyenlő *FBC*-vel, az ötszög teljes *ABC* szöge tehát egy egész egyötöd derékszög. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: XIII. 18.

A rövidítések feloldása, jelmagyarázat és útmutató a kereséshez

D. jelentése: definíció (például: III. 6. D. a harmadik könyv 6. definíciója); a definíciók helyéről l. a Fordítói jegyzeteket, az 509. oldalon.

P. jelentése: posztulátum (például: 5. P. az ötödik posztulátum); posztulátumok csak az I. könyvben fordulnak elő.

Ax. jelentése: axióma (például: 6. Ax. a hatodik axióma); axiómák csak az I. könyvben fordulnak elő.

L. jelentése: lemma (például X. 54. L. a X. 54. Tétel előtti lemma; X. 29. 2. L. a X. 29. Tétel előtti második lemma; a többi — VI., XI – XIII. — könyvben a lemmák az illető tétel *után* állnak).

K. jelentése: következmény (például: I. 15. K. az I. 15. Tételből folyó következmény, VI. 20. 2. K. a VI. 20. Tételből adódó második következmény).

F. jelentése: felhasználás (például a II. 6. Tétel utáni II. 11; III. 36.; X. 28. 1 – 2. L. felsorolás azt jelenti, hogy a II. 6. Tétel felhasználtatik ezeknek a tételeknek, ill. lemmáknak a bizonyításában); a felhasználásokra nézve l. még a Fordítói jegyzeteket, az 510. oldalon.

* jelentése: az állításhoz vagy kifejezéshez fordítói jegyzet tartozik (ha egy tételhez több megjegyzés is fűződik, akkor szerepel a ** jel is). Ha a csillag számmal való hivatkozás után áll (például: II. 9.*), akkor ez magát a jegyzetet jelöli.

( )
⟨ ⟩ jelentésüket l. a Fordítói jegyzetekben, az 509. oldalon.
[ ]

A tételszámozás rendjéről és a definíciók elhelyezéséről, valamint a rendhagyó esetekről l. a Fordítói jegyzeteket, az 509. oldalon.

Fordítói jegyzetek

Az Elemek hagyományozása. A mű a görög világban igen kedvelt felsőoktatási tankönyv volt, annyira, hogy a korábban írt hasonló tárgyú könyveket ki is szorította a használatból. Érthető, hogy időnként némileg átdolgozott kiadásai jelentek meg. Tudjuk, hogy 60 körül (?) Hérón, 370 körül pedig alexandriai Theón gondozott egy-egy új kiadást. A fönnmaradt görög kéziratok mind 700 után íródtak, és a Theón-kiadás szövegét tartalmazzák, kivéve egyetlenegyet, mely egy személyhez nem köthető előző változatot tartalmaz. Az Euklidész szövegén végrehajtott módosítások között nyilván vannak, amelyek matematikai szempontból javítottak rajta, de gyakran megtörtént, hogy Euklidész által joggal triviálisnak tartott állítások bizonyítását pótolták pl. lemmák formájában. Több kommentár is született, de görögül Proklosznak (412–485) az első könyvhöz írt kommentárján kívül csupán névtelen, a kéziratlapok szélére írt magyarázatok (szkholionok) maradtak fönn.

A rómaiak nem tanúsítottak nagy érdeklődést és tehetséget a matematika iránt. A korábbi időkből az Elemek fordításának csupán néhány részlete ismert. Fönnmaradt még egy rövid töredék, mely esetleg Marcus Terentius Varrótól (i. e. 116–27) származik. Az ókor vége felé, 505 körül, Anicius Manlius Severinus Boethius (480 k.–524) készített egy latin fordítást, azonban ebből is csak töredékek maradtak ránk (az első öt könyv definíciói, az első négy könyv tételei, és I. 1–3. bizonyítása, illetve szerkesztése). Ennél több valószínűleg már a IX–X. században sem volt meg a fordításból.

Behatóan foglalkoztak viszont a görög matematikusok munkáival, köztük az Elemekkel is, a (szír és) arab tudósok. Először Haddzsádzs fordította le 810 körül, majd még ugyanebben a században készült (szírből?) egy másik fordítás, melyet Szábit ibn Kurra (megh. 901) dolgozott át. Az arabok az Elemekhez írt görög kommentárokat is lefordították, és ezeket fölhasználva maguk is magyarázták a művet. Papposznak (300 k.) a X. könyvhöz írt kommentárja csak arab fordításban (X. század első negyede) maradt fönn, s megőrzött Hérón, Szimplikiosz (VI. század első fele) és egy bizonyos Aganis vagy Agafius (=? Agapiosz) kommentárjából néhány gondolatot an-Nairízié (megh. 922 k.), melynek arabul csak az első hat könyvre vonatkozó részei maradtak fönn.

Boethius elveszett Geometriáját aurillaci Gerbert bencés szerzetes, a későbbi II. Szilveszter pápa († 1003)* igyekezett pótolni. Írása az európai tudománynak abban a korszakában a legmagasabb színvonalú volt. Forrásul — műve ránk maradt első fejezetei alapján ítélve — valószínűleg csak az akkor rendelkezésre álló latin nyelvű munkák szolgáltak, noha Gerbert 967—970 között Spanyolországban járt, és arab tudósoktól is tanult. A XII. században viszont már nagyon sokat merítettek az európaiak arab forrásokból, s az említett különböző arab Elemek-fordításokból legalább három latin átültetés készült: bathi Adelardé, cremonai Gherardóé, és karinthiai Hermanné. Gherardo többek között an-Nairízi — latinosan Anaritius — kommentárját is lefordította, s az első tíz könyvre vonatkozó részek fönn is maradtak. Novarai Campano a XIII. század közepén Adelard szövege alapján készítette el a maga átdolgozását, s az övé terjedt el a következő századokban a legjobban, az Elemek első nyomtatott kiadása (Velence, 1482) is ezt tartalmazza. A XV. században a görög szöveg ismerete is kezdett szélesebb körűvé válni, s nemsokára nyomtatásban is megjelent (Velence, 1505) Bartholomeo Zamberti (1472—megh. 1539 után) immár eredetiből készült fordítása. Magát a görög szöveget először Melanchthon egyik barátja, Simon Grynaeus (1493—1541) adta ki (Basel, 1533), aki 1521—22 körül járt és tanított Budán is. Az Elemeket nyilván Magyarországon is ismerték a középkorban, ha nem is sokan. Tudni lehet pl., hogy a Boethius-fordítás törmelékeinek egyik kézirata a XV. században a domonkosok budai kolostoráé volt. A mű (legalábbis a könnyebben emészthető részek) a legtöbb egyetemen tananyag volt. Rendkívüli elterjedtségét mutatja, hogy — még ha talán túlzás is az a közkeletű állítás, hogy a Biblia után a második legtöbb kiadást érte meg — 150 év alatt, 1482-től 1632-ig, több mint 150-szer adták ki, a latinon és arabon (1594) kívül beleértve a német (1532 stb.), olasz (1543), francia (1564), angol (1570), spanyol (1576), kínai (1595) és holland (1606) nyelvű fordításokat és átdolgozásokat is. Magyarul először Apáczai Csere János, a gyulafehérvári református kollégium tanára szólaltatott meg néhány részletet Euklidészből 1655-ben megjelent Enciklopédiájában. E mű

* Ő küldte Szt. Istvánnak a koronát.

geometriai részének forrása egy párizsi egyetemi tanár latin nyelvű tankönyve volt. Apáczai írása valószínűleg nem vitte sokkal előbbre a geometria ügyét hazánkban.

Az 1599-ben megjelent nemzetközi érvényű jezsuita tanügyi szabályzat is előírta — az 1548 óta kialakult gyakorlatnak megfelelően — az Elemek tanulmányozását az akadémiák hallgatói számára. 1581-ben Báthory István lengyel király és erdélyi fejedelem egyetemet alapított Kolozsvárott, de az a jezsuiták többszöri kiűzése miatt nem működött folyamatosan. Pázmány Péter 1635-ben megalapította a nagyszombati egyetemet. Magyarországon itt jelent meg az első geometriai tárgyú könyv, egy szögfüggvény-táblázat* (1694). Különben a hazai egyetemeken és akadémiákon külföldi tankönyveket használtak. Tosch Károly (1687—1737), aki Nagyszombatban is adott elő matematikát, grazi tartózkodása idején (1730) adta ki rövid kivonatát Euklidészből. Az első hazai geometriai tankönyv a kolozsvári jezsuita akadémia kiadásában jelent meg. Jánosi Miklós** (1700—1741) rendezte sajtó alá 1737-ben J. Gooden (1670—1730) angol jezsuita trigonometriai tankönyvét (Liège, 1704), mely függelékben a szükséges elemi geometriai tudnivalókat is közölte Euklidész nyomán.*** A következő évben ismét Grazban jelenik meg magyar vonatkozású geometria-tankönyv, Ignace Gaston Pardies (1636—1673) francia jezsuitáé. E mű eredetileg franciául íródott (megj. Párizs, 1671), de a szerző halála után lefordították latin (Jena, 1684, 1685 és 1693), holland (1690) és angol (1746) nyelvre is. A grazi latin kiadás gondozója Faludi Ferenc (1704—1779) volt, aki nálunk magyar nyelvű költeményei révén ismert, és 1746—47-ben a Pázmány alapította egyetemen is professzorkodott. Ugyanezt a művet 1749-ben a kolozsvári akadémia is kiadta, Pongrácz Istvánnak, a hasonnevű kassai vértanú rendtársának a gondozásában. Négy évvel később a kassai egyetem is megjelentetett geometria-tankönyvet, André Tacquet (1612—1660) S. J. joggal kedvelt, legalább tíz kiadást° megért munkáját, mely az Elemek első négy könyvét tartalmazza kisebb módosításokkal és gondolatébresztően összeállított magyarázatokkal. Még 1746-ban Cörver Elek, a pesti piarista akadémia tanára is írt tankönyvet, mely az Elemekből csak a szerkesztési feladatokat tartalmazza, valamint pl. területszámításokat. Makó Pál (1724—1793) S. J.

* 6′-enként közli a sin, tg és secans függvény értékét 10^{-5} pontossággal. A háromszög-számítások elméleti indoklásában természetesen Euklidész tételeire hivatkozik.

** Ő készítette az akadémia csillagvizsgálójának első terveit.

*** Egy másik függelék: hétjegyű függvénytábla (sin, tg, lg sin, lg tg, lg stb.).

° Az első: Antwerpen, 1654.

1763-óta Bécsben tanított, tankönyvei is itt jelentek meg (1764-től), de ezeket Nagyszombatban is használták. A Pázmány-Egyetem Budára költözése után, 1777-ben, ő lett a bölcsészeti kar igazgatója, s a következő évben Budán is megjelent két matematika-tankönyve. A század legjelentősebb magyar matematikusa, Segner János András (1704–1777) már 1732-ben elhagyta az országot, Németországban jelentek meg könyvei, előbb latinul, majd – fia fordításában – németül is. Az ő előszavával jelent meg először (1773-ban) a legtöbbször kinyomtatott német Elemek-fordítás. Ebben a korban a geometria-tankönyvek már egyre jobban elszakadtak az antik előképtől.

Magyarra először Brassai Sámuel (1797–1897) fordította le az Elemeket (1865)*, másodszor Baumgartner Alajos (1865–1930), de csak az első hat könyvet (Középisk. Mat. Lapok, 1903–05).

Jelen fordítás a kiváló dán filológus, J. L. Heiberg (1854–1928)** által gondozott görög szöveg (Lipcse, 1883–88) újabb lenyomata (uo. 1969–77) alapján készült.

Az ábrák nem a görög kiadás, hanem a Clemens Thaer német fordításában (Lipcse, 1933–37) levők alapján készültek, így elmaradtak az általa nem hiteleseknek tartott tételek és lemmák ábrái.

Nem tartalmazza a fordítás azon részeket (kettő kivételével), melyeket Heiberg a kötetek végén, függelékként helyezett el, mert későbbi betoldásoknak ítélte őket. Ezek túlnyomórészt egy-egy tétel másfajta bizonyítását adják.

A tételek a számozás sorrendjében követik egymást, a definíciók pedig az illető könyv elején vannak, kivéve a XIII. 15–14. tételeket (492–94. o.), a X. könyv definícióinak második (325. o.) és harmadik (363. o.) csoportját, továbbá a X. 27. (400. o.) és XIII. 8. (477. o.) számú függelékeket.

A fordításban három fajta zárójelet alkalmaztam. Ami szögletes zárójelben van, az a görög kéziratokban ugyanott áll, de Euklidész utáni betoldásnak ítélhető. Hegyes zárójelek között olyan szavak állnak, melyek a kéziratokban nincsenek ott, de föltételezhető, hogy Euklidész szándéka szerint ott kellene állniuk. Végül minden, ami kerek zárójelben áll, csupán a könnyebb megértést segítő fordítói kiegészítés vagy magyarázat, mint pl. a korábbi tételekre számmal való hivatkozások. Maga Euklidész a fölhasznált tétel szövegét szokta idézni, csak X. 10. L.-ben, XII. 2.-ben és XIII.

* Ami a szomszéd népeket illeti, pl. az első lengyel fordítás 1807-ben jelent meg (I–VI., XI–XII. könyv).

** Ugyancsak ő adta ki pl. Arkhimédész, Apollóniosz és Ptolemaiosz műveit, de az általa igen becsült Kierkegaard műveinek kritikai kiadásában is részt vállalt.

17.-ben utal a tétel helyére. Szintén fordítói kiegészítés, hogy a posztulátumok, axiómák és tételek után F. jelzi az Elemek-beli fölhasználásukat (a 44. o.-on idézett olasz munka nyomán, néhány módosítással). Ezekből a legegyszerűbb állításoknál csupán válogatást adunk.

Euklidész a bizonyítás után többnyire megismétli a tételt. Ezt az ismétlést az V–XI. könyvben lerövidítettem. A többi helyen (X–XI. könyv) az eredeti szöveg is rövidít.

A jegyzetekben dőlt betűkkel szedett szavak címszavak a mutatóban.

I. 1. D. Vö. a 8. axiómával.

I. 4. D. Egyenes vonal: a továbbiakban a görögben röviden csak „egyenes" (eutheia), de ez a szó bármilyen összefüggő lineáris alakzatot jelölhet, s így gyakran „szakasz"-nak fordítom. Euklidész csak különösen fontos esetben írja körül a szakasz (2. P., I. 1. és 10.) és a félegyenes (I. 22.) fogalmát. E definíció értelme homályos; Proklosz szerint az, amit Arkhimédész posztulál egyik művében, ti. hogy a két pontot összekötő vonalak közül az egyenes a legrövidebb.

I. 7. D. Síkfelület: a továbbiakban röviden csak „sík". A definíció Proklosz szerint szintén a minimalitásra utal.

I. 9. D. Görög felfogás szerint szöget különböző görbék is közrezárhatnak, mint pl. III. 7. D. értelmében.

I. 18. D. A hegyes zárójelben levő szavak csak Prokloszn ál olvashatók. A 18. D. után a kódexekben a III. 6. D. is ott áll.

I. 19. D. A ‚*sokszög*' jelentésű szavak közül az Elemekben régies a „sokoldalú", újabb az „egyenes vonalú", és úgy látszik, még későbbi réteghez tartozik a „sokszögű" (polygónon) kifejezés. Szintén elavult a „háromoldalú", de a „négyoldalú" megmaradt, mert „négyszögű" (tetragónon) jelentése ‚négyzet'-té szűkült.

I. 22. D. Lásd a 26. o.-t. A *paralelogramma* csak I. 34.-ben bukkan föl.

4. P. A geometria Hilbert-féle fölépítése I. 4.-et axiómának veszi, s ekkor a 4. P. könnyen bizonyítható (mint azt Proklosz is teszi). Az Elemekben viszont 4. P.-ra már itt szükség van ahhoz, hogy értelmes legyen az 5. P.-ban a „két derékszögnél kisebb" kifejezés, és a továbbiakban ahhoz, hogy a derékszög (R) a szögmérés alapja lehessen (nemcsak a $2R = 180°$ esetben): pl. $\frac{1}{2}\ R = 45°$ (II. 9.), $\frac{2}{3}\ R = 60°$ (IV. 15.), $1\frac{1}{5}\ R = 108°$ (XIII. 18. és XIII. 18. L.).

4. Ax. Ez után a legtöbb kódexben még egy axióma áll: „Ha nem egyenlőkből egyenlőket veszünk el, a maradékok nem egyenlők.", és az 5. P. az utolsó axiómaként szerepel (lásd a 27. o. lábjegyzetét).

9. Ax. Más szóval az 1–2. P.-beli egyenesek unicitását mondja ki.

I. 1. A szerkesztési feladatok a kérdéses alakzat egzisztenciáját is hivatva vannak biztosítani.

I. 2. *G* értelemszerűen éppen *BF* és a *CGH* kör metszéspontja.

I. 3. Adott szakasznak tetszőleges félegyenesre való fölmérhetőségét biztosítja. Néhány I. 3.-at használó tételben (pl. I. 5., 9., 11., 16., 18., 20.) elég lenne helyette a 3. P., a fogalmazás azonban erre a tételre utal. Másrészt, külön bizonyítás nélkül használja térbeli általánosítását is (XI. 6.).

I. 4.* Az *egyenlő* (iszosz) szó a görögben nemcsak szakaszok és szögek, hanem területek és térfogatok egyenlőségének jelölésére is használatos. Az egybevágóság fogalmát – a *hasonlóság* bevezetése után – az „egyenlő és hasonló" kifejezés írja körül, így átalakítva idézi I. 4.-et XII. 3.-ban. Ez a szóhasználat föltételezi azt a tételt, hogy hasonló síkidomok és testek pontosan akkor egyenlő (mértékű)ek, ha a megfelelő szakaszok egyenlők. Euklidész talán a 7. és 8. Ax.-ból találta ezt könnyen levezethetőnek. Négyzetekre már I. 48.-ban használja. A VI. 22. L. valószínűleg még Theón előtti betoldás.

** E tétel csupán a 7. Ax.-ba implikált mozgatás (méghozzá ellenkező körüljárású háromszögek esetében térbeli mozgatás) segítségével igazolható. Ha a mozgathatóságot pontosan meg akarnánk határozni vagy el akarnánk kerülni, akkor föl kellene vennünk az I. 3. és 23.-beli alakzatok egzisztenciáját és I. 4.-et kongruencia-axiómákként, amint azt Hilbert tette. I. 5. bizonyításában láthatólag Euklidész is tartózkodik a mozgatástól.

I. 7. Szó szerint „sokkal nagyobb" – mindig ezt a kifejezést találjuk, ha a *tranzitivitás*ból következik egy egyenlőtlenség.

I. 11. Euklidész itt nem használja a „*merőleges*" (kathetosz) szót: annak eredeti jelentése „lebocsátott".

I. 13. Vagyis adjuk a $\widehat{CBE} = \widehat{CBA} + \widehat{ABE}$ egyenlet mindkét oldalához hozzá $\widehat{EBD}$-t.

I. 15. K. Némely kódexben tetszőleges sok egyenesre mondatik ki az állítás. Ez kell XIII. 18. L.-ben.

I. 24. Euklidész a bizonyítás egy részét gyakran az olvasóra hagyja. Ha *EFGD* konkáv, akkor I. 21. miatt $DF+FE < DG+GE$, tehát $FG < GE$.

I. 26. A tételnek ez a második fele I. 32.-ből rögtön következnék. Euklidész nyilván el akarta kerülni, hogy az 5. P.-ra ott is támaszkodjék, ahol ez nem feltétlenül szükséges, vagyis abszolút geometriai szemlélete volt.

I. 29. Ezzel a tétellel kezdődik meg a nem abszolút geometriai része az első könyvnek.

I. 32. $\widehat{ACD} = \widehat{CAB} + \widehat{ABC}$, $2R = \widehat{ACD} + \widehat{BCA} = \widehat{ABC} + \widehat{BCA} + \widehat{CAB}$. A levezetéseket szöveges formában roppant nehéz követni, célszerű tehát az olvasás során modern formulákra átírni.

I. 33. Ugyanis AD és BC szintén összekötik őket, de nem az ugyanazon az oldalon levő végpontokat. Különben annyi az abszolút geometriában is igaz, hogy egy $ACDB$ (konvex) négyszög szemközti szögei pontosan akkor egyenlők, ha a szemközti oldalai azok, és az ilyen négyszöget bármely átlója két egybevágó háromszögre bontja.

I. 34. „Párhuzamos vonalú" görögül parallélogrammon: e szót külön definíció nélkül alkalmazza Euklidész.

I. 35. * Értsd: adjuk mindkettőhöz hozzá DE-t.

** Értsd: az AE összeg.

I. 40. Valószínűleg az egész tétel csupán Theón előtti okoskodó betoldás. Az ábrán BC és CE egy egyenes két érintkező szakasza kell legyen.

I. 43. * A paralelogrammák röviden csak két szemközti csúccsal jelöltetnek.

** Magyarul „töltelék". A II. 2. D.-ban mint a gnómón alkotórészei szerepelnek.

I. 44. * Hozzáillesztés görögül parabolé, a tétel tehát a parabolikus területillesztést tárgyalja. Magyarázatát Proklosz így kezdi: „Mint Eudémosz nyomán mondják, a pythagoreusok múzsájának régi leleményei ezek, a területek paraboléja, hyperboléja (illesztés többlettel — VI. 29.) és ellipszisze (illesztés hiánnyal — VI. 28.). Az újabb szerzők (ti. Apollóniosz óta) innen kölcsönözve az elnevezéseket, átvitték azokat az úgynevezett kúpszeletekre, s ezek közül is az egyiket parabolénak, a másikat hyperbolénak, a harmadikat pedig ellipszisznek nevezték el, míg ama régi, isteni férfiak ezen elnevezések jelentését idomoknak meghatározott szakaszhoz való síkbeli illesztésében látták." Apollóniosz azért vette át az elnevezéseket, mert a kúpszeletek — természetesen szintén területegyenlőséget kimondó — egyenlete kapcsolatba hozható az I. 44. és VI. 28—29. tételekben megkövetelt területegyenlőséggel.

** Most már megvannak az eszközök a paralelogramma mozgatásához.

I. 45. A négynél több oldalú sokszög esete ugyanígy (szigorúan véve teljes indukcióval) intézhető el. Ez a tétel és I. 41. biztosítja, hogy I. 44. háromszög helyett bármely sokszögre alkalmazható legyen.

II. 2. D. Az I. 43. ábrán levő helyzetet föltételezi a definíció. Ezen gnómón vagy a *HKEBCD* vagy az *FDABGK* konkáv hatszög. A gnómón eredetileg két közös csúcsú négyzet különbsége — ekkor hasonlít a csillagászati gnómónhoz, mely merőleges a horizontra —, majd általánosabban két hasonló paralelogrammáé (VI. 24.). Az ábrákon (II. 5. stb.) 270°-os szaggatott körív jelöli, a körívet pedig három betű.

II. 1. Algebrailag: $a(\Sigma b_i) = \Sigma ab_i$. Ez a tétel az Elemekben fölösleges, II. 2—3. általánosítása, valószínűleg még Theón előtti betoldás.

II. 2. $AB = AC+CB$ esetén $AB^2 = AB \cdot AC+AB \cdot CB$. Már I. 47.-ben is fölhasználtatik.

II. 3. $AB = AC+CB$ esetén $AB \cdot CB = AC \cdot CB+CB^2$
A második könyv némely tételének (3—4., 6., 8.*) számokra érvényes megfelelőjét is használni látszik Euklidész, anélkül, hogy bizonyította volna azokat. Bizonyításuk számolókavicsok (pszéphosz) kirakásával könnyen elvégezhető. Az V. könyv némely tételét később szintén hallgatólagosan alkalmazza számokra.

II. 4. $(AC+CB)^2 = AC^2+CB^2+2\,AC \cdot CB$
Az utóbbi három tétel a felületdarabokkal végzett műveletek legegyszerűbb eseteit tárgyalja. Attól persze, hogy a II. könyvben műveletek végeztetnek, e könyv nem válik algebrává, hacsak nem akarja valaki a II. 12—14., III. 35—36., IV. 10. tételeket is algebraiaknak nevezni.

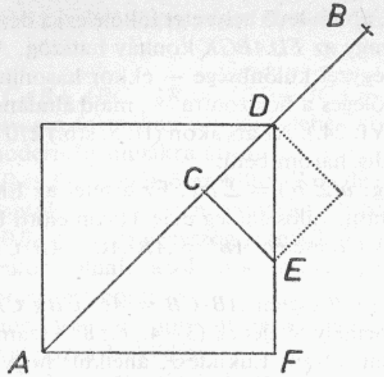
II. 5. $AB = 2AC = AD+DB \Rightarrow AD \cdot DB+CD^2 = AC^2$ $(CD = AC-DB)$
Alighanem II. 14. lemmájaként született.

II. 6. $AB = 2\,AC \Rightarrow (AB+BD) \cdot BD+AC^2 = (AC+BD)^2$
Alighanem II. 11. lemmájaként született.

II. 7. $AB = AC+CB$ esetén $AB^2+CB^2 = 2AB \cdot BC+AC^2$

II. 8. $AB = AC+CB$ esetén $4\,AB \cdot BC+AC^2 = (AB+BC)^2$
Nyilván XIII. 1—5. testvére, és az $AB \cdot BC = AC^2$ esetre alkalmazták, vagyis amikor a szakasz az *aranymetszés* szerint van fölosztva. Ekkor $5\,AC^2 = (AB+BC)^2$, tehát $(AB+BC)^2 : AC^2 = 5:1$, amiből könnyen ellentmondásra lehet jutni X. 15., 9. és VIII. 24. révén, ha indirekte fölteszszük, hogy valamelyik két szakasz összemérhető. XIII. 6. sokkalta mélyebb apparátussal tárgyalja az aranymetszés irracionalitását, így II. 8.-ra ott már nincs szükség.

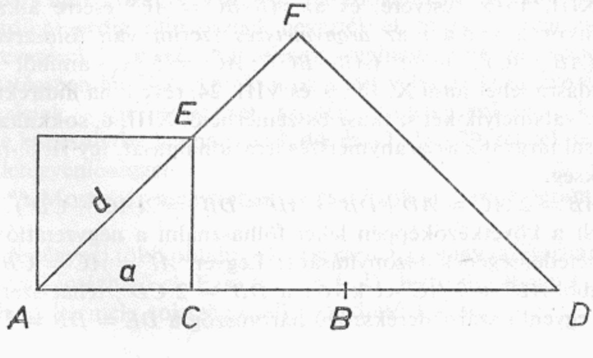
II. 9. $AB = 2\,AC = AD+DB \Rightarrow AD^2+DB^2 = 2(AC^2+CD^2)$
Ezt a tételt a következőképpen lehet fölhasználni a négyzetátló és -oldal összemérhetetlenségének bizonyítására: Legyen $AF = AC = CB$. A fönti azonosságból $AD^2 = 2\,AC^2$-et kivonva $DB^2 = 2\,CD^2$, tehát szerkeszthető egy *DCE* egyenlő szárú derékszögű háromszög a $DE = DB = 2\,AF-AD$



átfogóval és a $CD = AD - AF$ befogókkal, és ez az eljárás a végtelenségig folytatható, X. 2.-ből tehát következik, hogy a négyzet oldala és átlója összemérhetetlen. Hasonló regressziós bizonyítása az aranymetszés irracionalitásának még könnyebben adható, s valószínűleg ilyen úton ismerték föl először. Az Elemekben viszont már csak számelméleti eszközökkel végzett irracionalitás-bizonyításokat őrzött meg Euklidész.

II. 10. $AB = 2\,AC$ esetén $AD^2 + DB^2 = 2(AC^2 + CD^2)$

Az előző tételhez képest csupán a D pont helyzete változott meg. Ez azt eredményezi, hogy segítségével a négyzetoldalaknak és -átlóknak nem csökkenő, hanem növekvő sorozata állítható elő. Legyen ti. $d = AE = BD$ és $a = AC = CB = EF$. A fönti azonosságból $DB^2 = 2\,AC^2$-et kivonva $AD^2 = 2\,CD^2 = 2AF^2$, azaz $(2a+d)^2 = 2(a+d)^2$. Ez a levezetés megvan Proklosznál. Szám-



példákat fölsorolva bemutatja a hasonló eljárást (egész) számok esetében is, ahol az ún. oldal- és átlószámokra (28–29. o.) $d_n^2 = 2a_n^2 \pm 1$ érhető el (az első érték lehet $a_1 = d_1 = 1$, és indukcióval a $d_{n+1} = 2a_n + d_n$, $a_{n+1} = a_n + d_n$ számokra $d_{n+1}^2 = 2a_{n+1}^2 \mp 1$). $\frac{d_n}{a_n} = \sqrt{2 \pm \frac{1}{a_n^2}}$ növekvő n-re egyre jobban közelíti $\sqrt{2}$-t.

II. 11. Ennek a tételnek a segítségével már az arány fogalmának bevezetése előtt elvégezhető az *aranymetszés* és a szabályos ötszög szerkesztése.

II. 12. $BC^2 = AB^2 + AC^2 + 2\,AC \cdot AD$, $\quad AD = AB \cdot \cos \widehat{DAB}$

II. 13. $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2\,BC \cdot BD$, $\quad BD = AB \cdot \cos \widehat{ABC}$

Ez a két tétel a Pythagorasz-tétel általánosítása, és a cosinus-tétel őse. Már egy régi szkholion is fölhívja a figyelmet arra, amit persze Euklidész is tudott, hogy II. 13.-ban elég, ha $\widehat{ABC}$ hegyesszög.

II. 14. A sokszög „négyszögesítése". *EH* a *BD* téglalap két oldalának *középarányosa*.

III. 1. D. Hogy az egyenlő körök területe egyenlő, arra nincs szükség az Elemekben; belátható mozgatással vagy XII. 2.-ből.

III. 2. D. Azaz a metszetük nem Ø.

III. 4. D. Húr görögül szintén csak eutheia: „egyenes" (egy körben), vö. I. 4. D*.

III. 7. D. Ehelyett ma – elkerülve a görbe szárú szög fogalmát – *érintő-szárú kerületi szög*ről beszélünk. A görög felfogás, mint I. 9. D.-ból látszik, megenged görbe szárú szögeket. Ezek egyenlők a metszéspontbeli érintők szögével.

III. 8. D. Azaz a körszelet alapjának nevezett húron nyugvó *kerületi szög*. Vö. 11. D.

III. 9. D. Vonatkozik a kerületi és a középponti szögekre is.

III. 10. D. Euklidész csak itt említi a *körcikk*et.

III. 11. D. Föltételezi III. 21.-et. A *hasonlóság*ról általános meghatározást természetesen nem találhatunk az Elemekben.

III. 1. Ennek a könyvnek az elején (mint az elsőén) szintén hosszabb sorozat abszolút geometriai tétel van (1–19.).

III. 1. K. E mondat magára a tételre vonatkozik.

III. 12. E tételre szükség a továbbiakban nincs, s an-Nairízi szerint Hérón kiegészítése.

III. 14. Ez a tétel is abszolút, a nem abszolút geometriai I. 47.-re csupán azért van szüksége Euklidésznek, mert a háromszögek két-két oldal és a nagyobbikkal szemközti szög egyenlőségét megkívánó egybevágósági kritériumát (de vö. VI. 7.) nem vette föl.

III. 17. Az AE-re Thalész-kört emelő egyszerűbb, de nem abszolút geometriai szerkesztést Dedomena c. művében említi Euklidész.

III. 20.* A harmadik könyv első nem abszolút tétele : az 5. P. nélkül csak $2\widehat{BAC} \leqq \widehat{BEC}$ állítható.

** Ti. BDC. Szokatlan kifejezés, talán az egész bekezdés későbbi (Hérón) betoldás.

III. 21. Vagyis az ugyanazon az íven nyugvó kerületi szögek.

III. 30. $\widehat{ACD} = \widehat{BCD}$ közvetlenül az I. 10. D. szerint.

III. 35. Ha $F \in BD$, akkor ez közvetlenül következik II. 5.-ből.

IV. 4. Ez mégis abszolút geometriai tétel, mert (többek között a Pasch-axiómára támaszkodva) belátható, hogy a szögfelező metszi a szemközti oldalt, tehát a két szögfelező metszi egymást (a háromszög belsejében). IV. 5.-ben viszont a két oldalfelező merőleges a hiperbolikus geometriában nem föltétlenül metszi egymást.

IV. 5. Értelemszerűen a háromszög legnagyobb szögének csúcsát kell A-val jelölni.

IV. 12. Mint III. 14.-ben, ismét a megfelelő kongruencia-tétel hiánya miatt szükséges e körülményes eljárás.

V. 1–2. D. Ti. maradék nélkül osztja, azaz a nagyobb a kisebbnek egészszámú többszöröse. Vö. VII. 3. és 5. D.

V. 3. D. Vagyis egyenlő dimenziójú.

V. 4. D. Euklidész – ellentétben Arkhimédésszel – nem mondja ki követelményként, hogy egynemű mennyiségek kielégítik ezt a föltételt, de (többnyire hallgatólagosan, X. 1.-ben ki is mondva) mégis él vele.

V. 5. D. A további jegyzetekben $i, j, k, m, n \in \mathbb{N}$ természetes egészek, q, r, s stb. $\in \mathbb{Q}$ pozitív törtek, a, b, c stb. pedig mennyiségek (kivéve ha az eredeti jelölést követjük).

$a : b = c : d$, ha $\forall m,\ n \in \mathbb{N}$-re $(ma > nb \Leftrightarrow mc > nd)$ és $(ma = nb \Leftrightarrow mc = nd)$ és $(ma < nb \Leftrightarrow mc < nd)$. Azt, hogy $ma > nb$ és $m'a < n'b$ valóban fönn is álljon bizonyos egészekre, az előző definíció biztosítja. Modernizálva, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, ha $\forall q \in \mathbb{Q}$-ra q egyszerre vagy kisebb, vagy egyenlő vagy nagyobb mindkettőnél, vagyis az irracionális számokat meghatározza a náluk kisebb (vagy nagyobb) racionálisok halmaza.

V. 7. D. $c : d < a : b$, ha $\exists m,\ n \in \mathbb{N}$: $ma > nb$ és $mc \leqq nd$, azaz ha $\exists q \in \mathbb{Q}$: $\frac{c}{d} \leqq q < \frac{a}{b}$.

V. 8. D. Egyes kéziratokban az arányosság (analogia) meghatározása is olvasható, vagy a 3. D. után „Az arányosság az arányok azonossága.", vagy a 8. D. előtt „Az arányosság az arányok hasonlósága." alakban.

V. 9. D. Ha $a : b = b : c$, akkor $a : c$ kétszeres arány (logosz) $a : b$-hez képest; a $2 : 1$ arány neve viszont kétszeres arányosság (analógia; pl. IX. 36.).

V. 10. D. Ha $a : b = b : c = c : d$, akkor $a : d$ háromszoros arány $a : b$-hez képest. Az arány négyzetének vagy köbének fogalma idegen ettől a felépítéstől.

V. 12. D. Az $a : b = c : d$-hez tartozó fölcserélt arány $a : c = b : d$, vagyis a beltagokat kell fölcserélni. Szükséges, hogy mind a négy mennyiség egynemű legyen.

V. 13. D. $a : b \to b : a$

V. 14. D. $a : b \to (a+b) : b$ $\left(\text{vagyis } \frac{a}{b} + 1\right)$

V. 15. D. $a : b \to (a-b) : b$ $\left(\text{vagyis } \frac{a}{b} - 1\right)$

V. 16. D. $a : b \to a : (a-b)$

V. 17. D. Más kifejezéssel: egyenlő sok tagon át való arányok $a_i : a_{i+1} = b_i : b_{i+1}$, $1 \leqq i < n$ esetén az $a_1 : a_n = b_1 : b_n$ arányok (V. 22.). Ekkor különben $a_1 : a_n = \prod_{i=1}^{n-1} (a_i : a_{i+1})$.

V. 18. D. $\left.\begin{aligned} a : b &= a' : b' \\ b : c &= c' : a' \end{aligned}\right\} \Rightarrow a : c = c' : b'$ (V. 23.)

V. 1. $AB = ne,\ CD = nf,\ \ldots \Rightarrow AB + CD + \ldots = n(e+f+\ldots)$

** Szó szerint sokasága (modernizálva számossága) nem azonos a (természetes) szám (arithmosz) szóval.

$$\left.\begin{array}{l}\text{V. 2. } \mathbb{N} \ni (AB : c) = DE : f \\ \mathbb{N} \ni (BG : c) = EH : f\end{array}\right\} \Rightarrow \mathbb{N} \ni [(AB+BG) : c] = (DE+EH) : f$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{V. 3. } \mathbb{N} \ni \quad (a : b) = \quad c : d \\ \mathbb{N} \ni (EF : a) \quad = GH : c\end{array}\right\} \Rightarrow \mathbb{N} \ni (EF : b) = GH : d$$

V. 4. $a : b = c : d,\ k = \frac{e}{a} = \frac{f}{c},\ m = \frac{g}{b} = \frac{h}{d} \Rightarrow \frac{k}{m}(a : b) = e : g =$

$= f : h = \frac{k}{m}(c : d)$

V. 5. $\mathbb{N} \ni (AB : CD) = AE : CF \Rightarrow (AB-AE) : (CD-CF) = AB : CD$

** A 6. Ax. általánosításából következhetne.

$$\left.\begin{array}{l}\text{V. 6. } \mathbb{N} \ni (AB : e) = CD : f \\ \mathbb{N} \ni (AG : e) = CH : f\end{array}\right\} \Rightarrow \mathbb{N} \ni [(AB-AG) : e] = (CD-CH) : f$$

** Az 5. Ax. általánosításából következhetne. Vö. VII. 1.*-ben az V. 9.-ről mondottakkal.

V. 7. K. Theón a 4. tétel után helyezte el.

V. 12. $a : b = c : d = e : f = \ldots \Rightarrow a : b = (a+c+e+\ldots) : (b+d+f+\ldots)$

V. 15. $c : f : \ldots = kc : kf : \ldots$

V. 17. $AB : BE = CD : DF \Rightarrow (AB-BE) : BE = (CD-DF) : DF$

V. 18. Az előbbi megfordítása.

V. 19. $AB : CD = AE : CF \Rightarrow (AB-BE) : (CD-CF) = AB : CD$

V. 19. K. Az ($AB : BE = CD : FD \Rightarrow AB : AE = CD : CF$) implikációt kell bizonyítani. V. 16. miatt $AB : CD = BE : FD \Rightarrow AB : CD = AE : CF$ (V. 19.) $\Rightarrow AB : AE = CD : CF$.

V. 20. $a : b : c = d : e : f$ és $a > c \Rightarrow d > f$ stb.

V. 21. $a : b = e : f,\ b : c = d : e$ és $a > c \Rightarrow d > f$ stb.

V. 22. $a : b : c = d : e : f \Rightarrow a : c = d : f$

Indukcióval bizonyítható tetszőleges tagszámra.

V. 23. $a : b = e : f$ és $b : c = d : e \Rightarrow a : c = d : f$

$$\left.\begin{array}{l}\text{V. 24. } AB : c = DE : f \\ BG : c = EH : f\end{array}\right\} \Rightarrow (AB+BG) : c = (DE+EH) : f$$

V. 25. $CD = e$ esetén azt kapjuk, hogy a számtani közép nagyobb a mértaninál.

VI. 2. D. A definíció szövege homályos. Feltehető értelme kiviláglik a *fordított arányosságot* kimondó tételekből.

VI. 3. D. Ez az *aranymetszés.*

VI. 5. D. Szintén szokatlan fogalmazású. Vö. *arányok szorzata.*

VI. 2. Az abszolút geometriában is igaz pl., hogy a háromszög középvonala párhuzamos (I. 23. D. értelmében) a megfelelő alappal, s az alap felező merőlegese reá is merőleges.

VI. 9. *Rész* vagy *hányad* az $\frac{1}{n}$-ed rész.

VI. 14. $DB : BE = a : a' = b' : b = GB : BF$

VI. 19. $t(ABC) : t(DEF) = (AB : DE)^2$

VI. 19. K. A 19. és 20. tétel következményei felcserélődötteknek tűnnek. Lehetséges, hogy a szöveg eredeti állapotában a sorrend VI. 19., VI. 20. K., VI. 19. K. volt — így logikus —, és csak egy későbbi átdolgozó illesztette be 20. K. bizonyítását, azaz a 20. tételt. A zavart Theón úgy simította el, hogy a 19. K.-ben alakzat helyett csak háromszögről beszél, és pótlólag beillesztette az általános 20. 2. K.-t.

VI. 28–29. *Területillesztés*eket tárgyalnak.

VI. 31. A Pythagorasz-tétel általánosítása négyzet helyett tetszőleges alakzatra (eidosz), mely szón azonban itt nyilván csak sokszöget kell érteni (vö. XI. 9. D.). Ugyan definiálva van már a körszeletek hasonlósága is, de ezek esetében a bizonyításhoz XII. 2.-n kívül VI. 33. Theón-féle kiegészítésére is szükség van.

VI. 33. Theón kiegészítette e tételt azzal, hogy a szögek és ívek aránya egyenlő a körcikkek arányával is. Ebből, és Arkhimédésznek abból a tételéből, hogy „minden kör egyenlő azzal a derékszögű háromszöggel, melynek egyik befogója a kör sugarával egyenlő, a másik pedig a kerületével", következik, hogy a körcikk területe $\frac{ir}{2}$, amint azt pl. Hérón is közli egyik művében.

VII. 2. D. Arisztotelész is említi a Metafizikában, hogy az egység nem szám, itt azonban ez a (fölöslegesen bonyolító) megkülönböztetés nem mindenütt vitetik következetesen végig.

VII. 3. D. Szó szerint „része", vö. V. 1. D.

VII. 4. D. Szó szerint „részei", azaz $\frac{k}{n}$-ed része, ahol $(k, n) = 1$.

VII. 10. D. Valószínűleg betoldás a Nikomakhosz-féle osztályozás nyomán. Vö. VII. 16. és IX. 33.

VII. 21. D. Ha a 2—5. D.-kat szigorúan venné, nem lenne arány sem 1 : 1, sem pl. 3 : 2.

VII. 23. D. Az osztók („részek") közé értendő 1, de maga a szám nem.

VII. 1. A VII–IX. könyvben Euklidész a számokat szakaszokkal ábrázolja, Thaer ezek helyett a négyet pl. négy vonalkával (számolókavics helyett) szemlélteti, s ha túl sok vonalkát kellene rajzolni, arab számmal jelzi számukat. Euklidész nyilván tudatosan választotta a kevésbé szemléletes, de általános ábrázolásmódot. Előre tudottnak tétetik föl az oszthatóság három elemi tulajdonsága:

1. E. $a \mid b$ és $a \mid c \Rightarrow a \mid b+c$
2. E. $a \mid b$ és $a \mid c \Rightarrow a \mid c-b$ $(c > b)$
3. E. $a \mid b$ és $b \mid c \Rightarrow a \mid c$,

valamint V. 7., 9. (pl. VII. 19.) és 11. (pl. VII. 14.) arithmetikai megfelelője.

VII. 2. Az algoritmus valószínűleg századokkal korábbi Euklidésznél.

VII. 5. $\mathbb{N} \ni \frac{BC}{a} = \frac{EF}{d} \Rightarrow \frac{BC+EF}{a+d} = \frac{BC}{a}$ Vö. V. 2. és 12., VII. 6. és 12.

VII. 7. $\mathbb{N} \ni \frac{CD}{AB} = \frac{CF}{AE} \Rightarrow \frac{CD-CF}{AB-AE} = \frac{CD}{AB}$ Vö. V. 5. és 19., VII. 8. és 11.

VII. 9. $a : BC = d : EF \Rightarrow a : d = BC : EF$ Vö. V. 16. és VII. 10., 13. és 15.

VII. 14. Lásd V. 17. D.*

VII. 17–18. Vö. V. 15. és VI. 1.

VII. 19. Vö. VI. 16–17.

VII. 20. E tétel után Theón beszúrta V. 23. arithmetikai változatát.

VII. 22. V. 14. arithmetikai megfelelőjéből következnék, hogy a legkisebbek egyértelműek, tehát VII. 21. miatt relatív prímek.

VII. 34. A konstrukció $c = [a, b] = ab : (a, b)$.

VII. 39. Olyan számot kell találni, melynek – a tétel jelöléseivel – létezik $\frac{1}{d}$, $\frac{1}{e}$, $\frac{1}{f}$ stb. hányada.

VIII. 2. A háromtagú sorozat a^2, ab, b^2, a négytagú a^3, a^2b, ab^2, b^3 stb.

VIII. 4.* A keresett számok tehát $n = \frac{ac}{bd}\, m$, $o = \frac{c}{d}\, m$, $m = \left[e, \frac{d}{c} [b, c] \right]$, $p = \frac{f}{e}\, m$.

** Az $\overline{ab}$ jel, a modern $a : b$ megfelelője, a zeneelméletből származik, ahol a és b a zenei intervallum („szakasz”) két végpontja.

VIII. 7. $a_1 = a \mid aq^{n-1}$ azaz $q^{n-1} \in \mathbb{N} \Rightarrow \frac{b}{a} = q \in \mathbb{N}$

VIII. 11–12. Független általánosításuk VIII. 18–19. Vö. VII. 21. D* Nem használja e tételeket IX. 2., 5. és 6.-ban.

VIII. 20. A talált fölbontás $a = \frac{a}{(a, c)} \cdot (a, c)$, illetve $b = \frac{b}{(b, c)} \cdot (b, c)$, ahol $\frac{a}{(a, c)} : \frac{b}{(b, c)} = \frac{a(b, c)}{b(a, c)} = \frac{(ab, ac)}{(ab, bc)} = \frac{(c^2, ac)}{(c^2, bc)} = \frac{c(a, c)}{c(b, c)} = (a, c) : (b, c)$.

VIII. 21. A konstruált fölbontás: $a = \frac{a}{(a, c)} \cdot \frac{(a, c)}{(a, c, d)} \cdot (a, c, d)$, $b = \frac{b}{(b, d)} \cdot \frac{(b, d)}{(b, c, d)} \cdot (b, c, d) = \frac{d}{(c, d)} \cdot \frac{(c, d)}{(a, c, d)} \cdot \frac{b}{d} (a, c, d)$.

VIII. 22–23. Ilyen tételt Euklidész nem bizonyított, de könnyen belátható.

IX. 8–9. * Világos példái a teljes indukció alkalmazásának. Szintén szükség lenne teljes indukcióra V. 22. és VII. 14. bizonyításához.

** E mondat vagy törlendő, vagy „Ismét, minthogy c, d, e mértani sorozat, s c négyzetszám, e is négyzetszám.”-ra javítandó.

IX. 19. Ez az állítás téves (pl. $3 : 6 = 7 : 14$; – az $a \nmid b$ pótfeltétellel viszont már igaz lenne), bizonyításában e létezésének föltételezése a hiba. Ezt természetesen régen észrevették, és a kódexekben különféle módon gyógyították. Talán Euklidész szövegének okoskodó kiegészítése során keletkezett a hiba, s Euklidész a $\neg$ (a, b, c mértani sorozat és $(a, c) = 1$) esetet egységesen tárgyalta: $\exists$ negyedik arányos $\Leftrightarrow a \mid bc$.

IX. 21–36. Lásd a 39. o.-t. Ezen igen régi tételek bizonyítását Euklidész itt-ott (IX. 32., IX. 35–36.) feltehetőleg modernizálta.

IX. 31. VII. 24. speciális esete.

IX. 32. A kettő kitüntetett helyzetének a számelméletben külön elnevezés felel meg: amint az egy mellett van egység (monasz), úgy a kettő mellett is van „kettőség” (dyasz). Neoplatónikus matematikusok szerint még a kettő sem szám, hanem csak a három az első szám.

IX. 35. Ha $(a_i)_{i=1}^{n}$ a sorozat, akkor $(a_2 - a_1) : a_1 = (a_n - a_1) : (a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1})$, vagyis $s_{n-1} = \frac{a_1(a_n - a_1)}{a_2 - a_1} = \frac{a_n - a_1}{q - 1}$, $q = \frac{a_i}{a_{i-1}}$

IX. 36. * Lásd V. 9. D.*

** $2^{n+1} - 1$ prím $\Rightarrow 2^n(2^{n+1} - 1)$ tökéletes. A görögök négy tökéletes számot ismertek ($n = 1, 2, 4, 6$), és tudták, hogy 6-ra vagy 8-ra végződnek. Helyesen először Regiomontanus határozta meg az ötödiket ($n = 12$), ma két tucat ismeretes. Euler bebizonyította, hogy IX. 36. a páros tökéletes számokat kimeríti, de ma sem tudjuk, létezik-e páratlan tökéletes szám (több persze lehet egy páratlan szám osztóinak összege is magánál a számnál, pl. 315 osztóinak összege 325).

X. 2. D. A jegyzetekben áttekinthetőség kedvéért algebrai formulákat is alkalmazunk a tételek és definíciók átírására. Bevezetünk néhány újabb jelölést: $\mathbb{H}^n = \{h^n : h \in \mathbb{H}\}$, $\sqrt[n]{\mathbb{H}} = \left\{\sqrt[n]{h} : h \in \mathbb{H}\right\}$, $\mathbb{Q}' = \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Q}^2$. $\sqrt[n]{\mathbb{Q}}$ nyilván részcsoportja az (algebrai) számok multiplikatív csoportjának. A szakaszok négyzetes összemérhetősége ekvivalenciareláció, átvíve a mérőszámaikra: kongruencia-reláció, és magja $\sqrt{\mathbb{Q}}$.

X. 3. D. * Sokkal erősebb állítást mond majd ki X. 115.

** Lásd a X. 19. Lemmát is.

X. 4. D. Az illető sokszöggel egyenlő területű négyzet oldalát II. 14. alapján lehet megkapni.

X. 5. A bizonyítás a VII. 21. D.-n alapszik, anélkül, hogy (pl. VI. 16. és VII. 19. segítségével) explicite megteremtette volna Euklidész az V. és a VII. könyv arányelmélete közötti kapcsolatot. A X. könyvben vegyes (mennyiségek – számok) aránypárokra is szabadon alkalmazza az V. (és VII.) könyv tételeit.

X. 6. Ha *a* szakasz – mint a K.-ben – akkor a szerkesztés VI. 9. segítségével elvégezhető.

X. 10. L. Ezt nem mondta ki sehol, de IX. 10.-ben is használja. Rögtön következik a VIII. 11., 8. és 20. tételekből.

X. 14. $a : b = c : d$ esetén $\left(a : \sqrt{a^2-b^2} \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow c : \sqrt{c^2-d^2} \in \mathbb{Q}\right)$

X. 17. $\left(a < BC \text{ és } BD \cdot DC = \dfrac{a^2}{4}\right) \Rightarrow \left(BD : DC \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow BC : \sqrt{BC^2-a^2} \in \mathbb{Q}\right.$, ahol $\left.\sqrt{BC^2-a^2} = BD-DC = FD\right)$

X. 18. Közvetlenül következik X. 17.-ből.

X. 21. Maga a tétel közvetlenül következik X. 20.-ból. Mediális szakasz mérőszáma $\sqrt[4]{q}$, mediális területé pedig $\sqrt{q}$, ahol $q \in \mathbb{Q}'$.

X. 23. Elegendő a négyzetes összemérhetőség. Ha az összemérhető mediálisokat nem lényegesen különbözőknek tekintjük, fölvethető a kérdés, melyek a lényegesen különböző mediálisok, azaz mik $\sqrt[4]{\mathbb{Q}} / \sqrt{\mathbb{Q}}$ elemei. Válasz: minden osztály reprezentálható $\sqrt[4]{m}$ alakú elemmel, és $\left\{m = \prod_{k=1}^{n} p_{i_k} : k, n,\right.$

$i_k \in \mathbb{N}$ és p_i, $i \in \mathbb{N}$ az összes különböző prím$\Big\}$ a (nem egység) osztályok teljes reprezentáns-rendszerét szolgáltatja.

X. 24. A szögletes zárójelbe tett szavak értelemzavaróak.

X. 25. Pl. $\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[4]{8} = 2$, $\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[4]{12} = \sqrt{6}$.

X. 27. $c = \sqrt{ab}$, $d = b\sqrt{\dfrac{b}{a}}$, $cd = b^2 \in \mathbb{Q}$

A konstrukció kimeríti az összes ilyen mediális-párt.

X. 28. $d = \sqrt{ab}$, $e = c\sqrt{\dfrac{a}{b}}$, $de = ac \in \sqrt{\mathbb{Q}'}$. E konstrukció szintén kimerítő.

X. 29–35. A X. 39–41. és 76–78. tételek számára hivatottak az egzisztenciát biztosítani.

X. 36. Pl. $1+\sqrt{2}$. Az összes lényegesen különböző binomiálist megadja a $\{k+m\sqrt{n}$: $(k, m) = 1$, $1 < n$ négyzetmentes, és valamely $p \mid n$-re $p \nmid k\}$ reprezentánsrendszer.

X. 37. Pl. $\sqrt[4]{2}+\sqrt[4]{8}$. Az összes lényegesen különböző első bimediálist megadja az $\{a+a^3 : a$ mediális$\}$ reprezentánsrendszer.

X. 38. Pl. $\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{12}$.

X. 39. $AB^2+BC^2 = q$, $(AB\cdot BC)^2 = r \in \mathbb{Q}'$ esetén AB^2, illetve $BC^2 =$ $= \dfrac{q}{2} \pm \sqrt{\dfrac{q^2}{4} - r}$. Pl. $q = 6$, $r = 2$, $AC = \sqrt{3+\sqrt{7}}+\sqrt{3-\sqrt{7}}$. $\left(\dfrac{q^2}{4} - r \notin \mathbb{Q}^2\right)$

X. 40. Ha $(AB^2+BC^2)^2 = q \in \mathbb{Q}'$, $AB\cdot BC = r$, akkor AB^2, illetve $BC^2 =$ $= \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{q}+\sqrt{q-4r^2}\right)$. Pl. $q = 20$, $r = 2$, $AC = \sqrt{\sqrt{5}+1}+\sqrt{\sqrt{5}-1}$.

Ez az elnevezés nem zárja ki, hogy más irracionálisok négyzetértéke is lehet racionális plusz mediális – lásd X. 71. –, hanem arra utal, hogy a most tárgyalt forma a nem speciális.

X. 41. Ha $(AB^2+BC^2)^2 = q \in \mathbb{Q}'$, $(AB\cdot BC)^2 = r \in \mathbb{Q}'$, akkor AB^2, illetve $BC^2 = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{q} \pm \sqrt{q-4r}\right)$. Pl. $q = 40$, $r = 8$, $AC = \sqrt{\sqrt{10}+\sqrt{2}}+\sqrt{\sqrt{10}-\sqrt{2}}$.

X. 48. $AC : CB = k^2 : m^2$, $\dfrac{AB}{AC} \notin \mathbb{Q}^2$, $EF \in \mathbb{Q}$ feltételekkel $EG =$ $= EF+FG = EF\left(1+\sqrt{\dfrac{AC}{AB}}\right)$. Ha $(k, m) = (AC, AB) = 1$, akkor $AB = k^2$,

$BC = m^2$, $AC = k^2-m^2 \notin \mathbb{Q}^2$. A X. 54–65. tételek föltárják a binomiális alfajai és a mediális utáni hat irracionális-főfajta kapcsolatát. A binomiálisok alfajaira a X. 36–41.*-beli számpéldákhoz rendelendő példákat hozom, vagyis az ottani kifejezések négyzetét. Első binomiális tehát pl. $3+\sqrt{3}$.

X. 49. AC, AB, EF ua., $EG = EF\left(1+\sqrt{\frac{AB}{AC}}\right)$, pl. $4+\sqrt{18}$.

X. 50. AC, AB, EF ua., $d \notin \mathbb{N}^2$, $\frac{d}{AB}, \frac{d}{AC} \notin \mathbb{Q}^2$, $FH = e\left(\sqrt{\frac{AB}{d}}+\sqrt{\frac{AC}{d}}\right)$; pl. $\sqrt{27}+\sqrt{24}$.

X. 51. $\frac{AB}{BC}$ és $\frac{AB}{AC} \notin \mathbb{Q}^2, EF \in \mathbb{Q}, EG = EF\left(1+\sqrt{\frac{AC}{AB}}\right)$, pl. $6+\sqrt{8}$.

X. 52. AC, AB, EF ua., $EG = EF\left(1+\sqrt{\frac{AC}{AB}}\right)$, pl. $4+\sqrt{20}$.

X. 53. AC és AB ua., $d \notin \mathbb{N}^2$, $\frac{d}{AB}$ és $\frac{d}{AC} \notin \mathbb{Q}^2$, $e \in \mathbb{Q}$, $FH = e\left(\sqrt{\frac{AB}{d}}+\sqrt{\frac{AC}{d}}\right)$, pl. $\sqrt{40}+\sqrt{32}$.

X. 54–65. E tételek tartalma a

$$\sqrt{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{\sqrt{a}+\sqrt{a-b}}{2}}+\sqrt{\frac{\sqrt{a}-\sqrt{a-b}}{2}}$$

formulával algebraizálható, de az Elemekben az összes aleset gondosan részleteztetik, ti. hogy mikor lehet kevesebb gyökjellel kijönni.

X. 63. Itt pl. X. 39.* jelöléseivel $AC^2 = q+2\sqrt{r}$, számpélda a X. 51.*-ben.

X. 64. X. 40.* jelöléseivel $AC^2 = 2r+\sqrt{q}$, példa X. 52.*-ben.

X. 65. X. 41.* jelöléseivel $AC^2 = \sqrt{q}+2\sqrt{r}$, példa X. 53.*-ben.

X. 66. Vö. X. 23. Az irracionálisok főfajtái invariánsak a négyzetes összemérhetőséggel, vagyis algebrailag a $\sqrt{\mathbb{Q}}$-beli elemmel való szorzással szemben. Csupán a binomiális (és majd az apotomé) alfajainál kell lineáris összemérhetőségre szorítkozni.

X. 67. A lineáris összemérhetőség megkövetelése fölösleges, talán egy átdolgozó követte el, aki nem volt teljesen tisztában a főfajták (ilyen az első és a második bimediális is) és az alfajták (első–hatodik binomiális) közötti különbséggel.

X. 72. X. 42. és a X. 2.1–6. D.-k miatt.

X. 73–110. Megfelelnek a 36–72. tételeknek, a megfelelő helyen mindenütt összeadás helyett kivonás írandó.

X. 112–114. $\underbrace{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}_{\text{binomiális}}\cdot q\underbrace{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}_{\text{apotomé}} = \underbrace{q(a-b)}_{\substack{\text{racionális}\\ \text{négyzete}}}\ (q \in \mathbb{Q})$

X. 115. $a = \sqrt[4]{q},\ c = \sqrt[8]{q},\ d = \sqrt[16]{q}$ stb.

X. 27. Függ. Vö. 17–18., 39. o. és II. 9.*

XI. 3. D. E definíció értelmes volta XI. 4.-ben bizonyíttatik.

XI. 4. D. Két sík metszete XI. 3. szerint egyenes.

XI. 9–10. D. Téridomon (konvex) poliéder (e szót használja is majd XII. 17–18.-ban, jelentése „sokülőkéjű") értendő. Pl. XIII. 18. is egyszerűen csak az öt testről beszél.

XI. 14. D. Egy szkholion szerint „a keletkezését határozta meg a gömbnek, ugyanis a továbbiakban erre van szüksége; Theodosziosz megadja a meghatározását".

XI. 18. D. Ennek a kúpszeletek tanában van jelentősége. Ha ti. valamely alkotóra merőleges metszetekre szorítkozunk, akkor az ellipszis hegyesszögű kúp metszete stb. Apollóniosz előtt éppen ezeket a terminusokat használták ellipszis stb. helyett.

XI. 7. A következő tétel már nem abszolút: a térgeometria fölépítése, axiomatizálása láthatólag nem ért el olyan szintet, mint a síkgeometriáé (vö. Platón, Az állam, 528). Abszolút tétel még pl. 11–14., 16., 18–19., de ezek közül is 11–12. és 18. bizonyítása már nem abszolút.

XI. 25. A paralelepipedont éppúgy nem definiálja Euklidész, mint a paralelogrammát.

XI. 38. Theón paralelepipedonra általánosította.

XII. 2. Szimplikiosz (Eudémosz nyomán) arról tudósít, hogy már a khioszi Hippokratész is bizonyította e tételt.

XII. 7. Arkhimédész szerint „azokban a tételekben – melyeknek először Eudoxosz találta meg a bizonyítását –, hogy a kúp harmadrésze a hengernek, a gúla pedig a hasábnak, ha ugyanaz az alapjuk és egyenlő a magasságuk, nem csekély része volt Démokritosznak, aki a fönti idomokról – bizonyítás nélkül – elsőként mondta ki e tételt".

XII. 17.* „Theodosziosz Szphairika c. művében általánosabban azt is megmutatja, hogy ha a metsző sík nem megy át a gömb középpontján, a metszet akkor is kör." (szkholion).

**Euklidész nem mutat rá, hogy V és Z ugyanaz a pont; nincs is rá szüksége.

XIII. 8. Függelék A kéziratok XIII. 7. előtt hozzák, s hasonló elemzését adják a 2–5. tételnek is.

XIII. 6. $AC = \underbrace{\frac{AB}{2}(\sqrt{5}-1)}_{\text{ötödik apotomé}}, \quad CB = \underbrace{\frac{AB}{2}(3-\sqrt{5})}_{\text{első apotomé}} = \frac{AB}{4}(\sqrt{5}-1)^2$

XIII. 8. Ez rögtön következik a később föl is használt III. 27–28. tételekből. Euklidész tehát egy igen régi bizonyítást vett alapul, de helyenként lerövidítette és átdolgozta.

XIII. 11. $a_5 = \frac{r}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}} \approx 1{,}18\, r$

XIII. 12. $a_3 = r\sqrt{3}$

XIII. 13. Gúla görögül pyramisz, ezért is hozták az őselemek tanában kapcsolatba a tűzzel, ami görögül pyr (Platón, Timaiosz 56B). $d = \sqrt{\frac{3}{2}}\, e_4$; e_n a szabályos n-éder éle.

XIII. 15. A 14–15. tétel szövege megkívánja a sorrendcserét. $d = e_6\sqrt{3}$

XIII. 14. $d = e_8\sqrt{2}$.

XIII. 16. $e_{20} = \frac{r}{\sqrt{5}}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$

** Ennek néhány soros fölösleges indokolását, mely valószínűleg betoldás, kihagytam.

XIII. 17. $e_{12} = \frac{r}{\sqrt{3}}\cdot(\sqrt{5}-1)$

XIII. 18.
$$\begin{array}{cccccccccc} & e_{12} & < & e_{20} & < & e_6 & < & e_8 & < & e_4 \\ & \| & & \| & & \| & & \| & & \| \\ & NB & & MB & & BF & & BE & & AF \\ & \| & & \| & & \| & & \| & & \| \\ \frac{e_n}{r} \approx & 0{,}71 & & 1{,}05 & & 1{,}15 & & 1{,}41 & & 1{,}63 \end{array}$$

Betűrendes mutató

Számok ha dőltek, akkor az előszó oldalaira utalnak, különben a tételekre. A csillag az illető tételhez fűzött jegyzetre utal. Olyan modern fogalmakat is fölvettünk, melyeknek az antik esetleg csak távoli elődje vagy rokona. Összetett kifejezések nem föltétlenül az első tag alatt találhatók.

A védőborító- és kötésterv Kónya Katalin munkája

A kiadásért felel a Gondolat Könyvkiadó igazgatója

82/1323 Franklin Nyomda, Budapest, 1983
Felelős vezető: Mátyás Miklós igazgató

Felelős szerkesztő: Seres Iván
Műszaki vezető: Gonda Pál
Műszaki szerkesztő: Gut Ferenc
Megjelent 33,25 (A/5) ív terjedelemben,
az MSZ 5601–59 és 5602–55 szabvány szerint