I kötet mappa. 60 Bolffy

BÁNYAMÉRÉSTAN

ÉS

FELSŐ FÖLDMÉRÉSTAN

A BÁNYAMÉRNÖK, ORSZÁGMÉRŐ ÉS VASÚTI MÉRNÖK HASZNÁLATÁRA.

IRTA

CSÉTI OTTÓ,

M. KIR. FŐBÁNYATANÁCSOS ÉS BÁNYÁSZAKADEMIAI RENDES TANÁR.

NEGYVENNÉGY RAJZTÁBLÁVAL.

SELMECZBÁNYÁN

JOERGES ÁGOST ÖZVEGYE ÉS FIA KIADÁSA.

1894.

Joerges Ágost Özvegye és Fia könyvnyomdája Selmeczbányán.

ELŐSZÓ.

Kőszén, gőz és elektromosság, századunk e három csodagyermeke, varázsolta ellenállhatatlan erejével Földünkön ama kulturális és gazdasági állapotokat, melyeket a tizenkilenczedik század végén élvezünk, és melyek Földünk fejlődése történetében örökké ki fognak magaslani! A bányászat, mint a gépészet legrégibb alkalmazója, mint az ásványos tüzelőanyagok és fémek előteremtője, korszakunk fejlesztő hatásának első sorban volt alávetve. Rohamos lendületének köszönhető, hogy eddig hozzáférhetetlennek tartott mélységek fel lettek tárva, hogy Földünkön évenkint 300—400 millió forintot érő aranyat és ezüstöt termeltek, 500—600 millió tonna kőszenet, hasonlókép 70—80 millió tonna vasat és 20—30 millió tonna más érczet szállitottak a napszinre.

A bányászatnak e rohamos haladása mérnökeitől is uj, igen kényes, néha milliókba kerülő feladatok megoldását követelte; oly nagyszabásu feladatokat, melyeknek sikeres végrehajtása csak úgy volt biztositható, ha mérnökei nem csak az alsó és felső földméréstannak tételeit alaposan ismerték, hanem ha még azonkivül képesek voltak a bányaüzem sajátos követelményeit, sőt gyakran rendkivüli nehézségeit is legyőzni.

Az alsó földméréstant ismertető tankönyvben nincsen hiány; de igenis hiányzik irodalmunkban oly mű, mely a bányaméréstannak, valamint a felső geodéziának ama tételeit kimeritően ismertetné, melyeket ~~bánya~~mérnöknek vagy nagyobb feladatokkal megbizott vasuti mérnöknek feltétlenül kell tudnia, hogy feladatának minden esetben megfelelhessen.

E régen érzett hiány pótlása inditotta szerzőt e könyv megirására, munkájával azt tűzvén ki czéljául, hogy a bányászati akademia hallgatóinak tankönyvet, okleveles szaktársainak oly útbaigazitó tanácsadót nyujtson, melyben már elfelejtett tételeket vagy ezeknek alkalmazását könnyen megtalálhatják. E kettős czél biztositása tette szükségessé, hogy az elméleti tárgyalásokon kivül, kényesebb feladatok még gyakorlati példákkal is megvilágittassanak, sőt egyes eljárásoknak előnyei vagy hátrányai beható birálat tárgyává tétessenek.

A mérőműszerek tárgyalása során csakis a legjobbnak bizonyult és a gyakorlatban meghonosodott szerkesztményekre szoritkoztunk; különös súlyt fektetvén a műszerek biztos felállitását, a mérés gyors foganatositását vagy az eredmény pontosságát előmozditó sikerültebb eszközökre.

A mérésmódok sorát az általános elvekkel kezdvén, ismertettük: a vizszintes vetület meghatározására alkalmazott régi és ujabb eljárásokat, a mérések feljegyzéseit, az előforduló számitásokat, földalatti folyosók szintméréseit, függőleges- és lejtőaknák magasságmérését, valamint a bányamérések által követelt pontosságot is.

A térképrajzolást felölelő szakaszban bemutatjuk a szén- és fémbányász által eddig alkalmazott öt ábrázoló eljárást. Az ily czélból nyujtott tiz szinnyomatu táblán összehasonlitottuk az eljárások előnyeit és hátrányait, hogy kiki feladataira a legczélszerűbb ábrázolást választhassa, sőt szükség adtán uj módositásokat is alkalmazhasson.

A bányamérnök különleges feladatait az irány és a talphágás meghatározásával és kitűzésével kezdtük; folytatólag ismertettük a telepsik meghatározását, kutatások mérő feladatait, bányahatárok bemérését és kijelölését, köbtartalmi méréseket és számitásokat, bányászati áttöréseket, valamint altárók, siklók, aknák tervezését a legváltozatosabb viszonyokra. Befejezőül a táblalaku telepeknek metszeteit és vetődéseit ismertettük. Mind e feladatok megoldása úgy számitás, valamint szerkesztés útján lett bemutatva. E tárgyalások során úgy az elméleti szempontoknak, mint a gyakorlati követeléseknek iparkodtunk eleget tenni.

A felső földméréstannak bekezdő szakaszául a gömbháromszögméréstant ismertettük röviden. Utána soroztuk a földabroszok szerkesztését, hol csak a tényleg alkalmazott eljárásokra szoritkoztunk. Feladatunk természete követelte, hogy a legnagyobb tért a hibaszámitásnak és a kiterjedtebb háromszögeléseknek szenteljük, mely tanoknak nem csak elméletét, de alkalmazását is be kellett mutatni.

Tárgyalásaink végét a földrajzi helymeghatározások képezik, a hol ismét lépten-nyomon a bányamérnök különleges feladatait tartottuk szem előtt az eljárások megválasztása alkalmával.

A munka megirásánál használt művek a következők:

Berliner astronomisches Jahrbuch.

Borchers E. Markscheidekunst. Hannover 1870.

Brathuhn C. Markscheidekunst. Leipzig 1884.

Brünnow F. dr. Lehrbuch der sphärischen Astronomie. Berlin 1871.

Fischer Ph. dr. Lehrbuch der höheren Geodäsie. Giessen 1846.

Franke J. H. Die Koordinatenausgleichung. München 1884.

Gauss F. G. Die trigonometrischen und poligonometrischen Rechnungen. Halle 1876.

Gretschel H. Lehrbuch der Karten-Projection. Weimar 1873.

Gruber Lajos dr. Utmutatás földrajzi helymeghatározásokra. Budapest 1883.

Herr Jos. Ph. dr. Lehrbuch der sphärischen Astronomie. Wien 1887.

Jordan W. dr. Grundzüge der astronomischen Zeit- und Ortsbestimmung. Berlin 1885.

Müller-Hauenfels A. Höhere Markscheidekunst. Wien 1868.

Mittheilungen des k. k. militärisch-geographischen Institutes, Wien 1881—1884.

Schmidt M. Musterblätter für Risszeichnungen. Freiberg 1887.
Vész János Ármin. A legkisebb négyzetek elmélete. Budapest 1869.
Vogler Ch. A. Praktische Geometrie. Braunschweig 1885.
Weisbach J. Die neue Markscheidekunst. Braunschweig 1859.
Weisbach J. Abriss der Markscheidekunst. Freiberg 1873.

Selmeczbányán, 1894. május hóban.

A szerző.

TARTALOMJEGYZÉK.

ELSŐ RÉSZ.

BÁNYAMÉRÉSTAN.

Bevezetés.

Első szakasz.

Mérőeszközök és műszerek.

Első fejezet.

Eszközök és eljárások pontok kijelölésére.

Második fejezet.

Szögmérő műszerek.

Lap

Harmadik fejezet.

Hosszúság- és távolságmérők.

Negyedik fejezet.

Magasság- és szintkülönbségmérők.

Második szakasz.

Bányamérések foganatositása.

Harmadik szakasz.

Bányatérképek szerkesztése.

Első fejezet.

Bányatérképek czelja, felosztása, tárgya és kisebbitése.

MÁSODIK RÉSZ.

FELSŐ FÖLDMÉRÉSTAN.

Bevezetés.

Első szakasz.

Gömbháromszögek mérése.

Második szakasz.

Földabroszok szerkesztése.

Lefejthető vetületek.

Harmadik szakasz.

Hibaszámitás a legkisebb négyzetösszegek elmélete alapján.

Első fejezet.

Második fejezet.

Mérések hibaigazitása a hibaszámitást megközelitő módokon.

Negyedik szakasz.

A háromszögelés, tekintettel Földünk gömbalakjára.

Ötödik szakasz.

A földrajzi rendszálak közvetetlen meghatározásai.

ELSŐ RÉSZ.

BÁNYAMÉRÉSTAN.

Bevezetés.

Bányamérések czélja és sajátossága.

A bányamérések fontossága nem szorul igazolásra, elég ha megjegyezzük, hogy adományozott bányabirtok biztositása, vagy bányák okszerü üzeme nem is képzelhető pontos és minden iránybban felvilágositást nyujtó térképek nélkül. A legtöbb bányánál egy, esetleg több okleveles bányamérnök csakis azzal van megbizva, hogy a folyton terjedő bányatérségeket felmérje, a térképeket kiegészitse üzemi feladatokra, vagy peres kérdésekben is a megkivánt kitüzéseket, esetleg ellenőrző méréseket végrehajtsa.

Földalatti méréseink sajátossága első sorban bányáink korlátolt térségi viszonyaiból származik. Földalatti folyosóink keresztszelvénye rendszerint szűk, hosszanti tengelyük iránya gyakran változó. E viszonyok, nemkülönben földalatti térségeink teljes sötétsége úgy a mérő műszereken, valamint a felmérés módjain több módositást követel. Bányaméréseink további sajátossága még abban is nyilvánul, hogy rendszerint minden bemért pontnak fekvését nemcsak a vizszintes vetületi síkban kell ismernünk, de még a pontok kölcsönös szintkülömbsége is feladatunk okvetetlen követelése. Bányamüveletek költségessége felfoghatóvá teszi azt, hogy bányaméréstől mindig nagyobb pontosságot követelünk, mint közönséges földmérésektől.

1. §. A bányaméréstan felosztása.

Feladataink különféleségét tekintve, felosztjuk tárgyalásainkat négy szakaszra:

1. Mérőeszközök és műszerek. 2. Mérésmódok. 3. Bányatérképek szerkesztése. 4. A bányamérnök különleges feladatai.

ELSŐ SZAKASZ.

Mérőeszközök és műszerek.

A mérő műszerek és segitő eszközök sorából csakis azokat tárgyaljuk, melyek a bányász különleges használatára szolgálnak. Csoportositásukat a következő négy fejezetben adjuk:

1. Eszközök és eljárások pontok kijelölésére.
2. Szögmérő műszerek.
3. Hosszuság és távolságmérők.
4. Magasság- és szintkülömbség-mérők.

ELSŐ FEJEZET.

Eszközök és eljárások pontok kijelölésére.

A bányamérnök külső méréseinél pontjait gyakran úgy jelöli ki, mint a földmérő, tehát földbe vert czövekkel, jelző rúddal, lobogós rúddal, keresztdeszkás póznával, háromlábu gulával; vagy használja a vidék nyujtotta épitményeket és mesterségesen elhelyezett jeleket, u. m. toronycsúcsot, gyári kürtőt, mezőgazdasági vagy politikai határvonalak jelző köveit stb.*

A bányamérnök különleges jeleit két csoportba sorozzuk:

1. Rövidebb időtartamra szolgáló jelek; rendszerint csak addig szükségesek, mig a kijelölt pontot be nem mértük, ezek az ugynevezett veszitett pontok jelei.

2. Hosszabb, esetleg nagyon hosszu időszakokra szolgáló pontok jelei; az ugynevezett vezér- vagy állandósitott pontok jelei, melyek sorába a bányászati határjelek is tartoznak.

2. §. Veszitett pontok jelei.

Gyakran veszitett pontokkal mérünk, még pedig úgy a föld alatt, valamint a napszinén is. Ismertetésük sorát a legfontosabbal kezdjük.

* L. Cséti Ottó, Erd. földméréstanát 31—69. oldalon.

A mérőcsavar.

A bányamérnök háromféle mérőcsavart használ: 1. a magyar mérőcsavart, 2. a harcz-hegységi mérőcsavart, 3. a szászországi mérőcsavart. A többi csak kisérletképen használt, de tovább el nem terjedt csavarokat nem emlitjük.

A magyar mérőcsavar, l. 1. ábrát, a legelterjedtebb és legczélszerűbb; hossza 60—100 *mm*, átmérője 5—7 *mm*, alsó vége hegyes, hosszának felerésze csavarmenetekkel van ellátva; felső vége 90 *mm* hosszu, 35 *mm* széles kezelőkarikával van felszerelve, melynek alakja közönséges kulcsra emlékeztet. Utóbbi karikával drótgyűrűre fűzhető, mi módon ily csavarok szállitása kényelmes. A mérőcsavar készitésére régebben sárgarezet is alkalmaztak, ujabban kizárólag szivós vasból, vagy jó szerszámaczélból kovácsolják.

A harczhegyi mérőcsavar, l. 2. ábrát, megelőzőjétől csak annyiban külömbözik, hogy felső vége 90 *mm* hosszu; 7—8 *mm* átmérőjü kezelő nyéllel van ellátva.

A szászországi mérőcsavar, l. 3. ábrát, egyszerü hegyesvégü csavarorsó; felső végén körtealaku famarkolóval.

A mérőcsavarok elhelyezése.

A mérőcsavar rendes feladata az, hogy fába fúrva a mérőzsinórt ráköthessük, azaz hogy a zsinórt csavartól csavarig kifeszithessük és igy az általa képviselt poligon oldal hosszát még a legszűkebb s legkényelmetlenebb földalatti folyosóban is biztosan megmérhessük. Ácsolattal bélelt tárókban a csavart közvetetlenül a bélelő fába furjuk, l. 4. vagy 5. ábrát, hol a csavar majd α homlokfában, majd β talpfában van elhelyezve. Kompaszmérések alkalmával czélszerűbben járunk el, ha a mérőcsavart, l. 6. ábrát, felváltva a jobb- és baloldalu oszlopfába furatjuk. Ki nem bélelt folyosókban a mérőcsavart háromféle módon helyezzük el, l. 7. ábra, különösen e czélokra vert feszitő fába. Ez rendszerint 7—8 *cm* vastag rúdfa, melyet a táró sziklás oldalfalai közé ékeltetünk, vagy furatunk a táró oldalfalaiba 6—8 *cm* mély, 3 *cm* átmérőjü lyukat, ebbe tölgyfa dugót veretünk, l. 8. ábra *m* fadugót, melynek kiálló végébe a mérőcsavart befuratjuk. Elvégre befuratjuk a mérőcsavart a járópadlóba is, l. 8. ábrában *K* csavart.

A mérőzsámoly.

Régi bányászaink kedvelt segitőeszköze a mérőzsámoly volt, melyet úgy külső, valamint földalatti mérésekre is gyakran alkalmazták. Napszini mérésekre főkép sziklás talajon használták, hol karót beveretni nem lehetett.

A zsámoly két A és B oldaldeszkája, l. 9. és 10. ábrát, fent 65 foknyi szög alatt egyesül, hogy ott rézlemezzel védett élt képezzen. E két oldaldeszka 0·5 m magasságban vizszintes CD ülődeszka által van összekötve és még $m\,m_1$ feszitőkkel megtámasztva. A zsámoly minden lábát képező oldaldeszka alsó végén tüskékké kihegyezett vasalással van ellátva. A mérőzsinor megerősitésére f_1 és f_2 rézcsapok szolgálnak, melyeken a zsinórt a zsámoly felső élén bereszelt (r) rovátkába fektetve a következő zsámolyig kifeszitjük, l. 11. ábrát. Hogy a zsámoly megállása még akkor is biztos legyen, ha a kifeszitett mérőzsinór függőleges középsikja a mérőzsámoly függőleges középsíkjától eltér, e czélból két hegyesre vasalt h oldaltámasztókkal lett ez ellátva.

Használata a 11-ik ábrából tekint felénk. Legyen CD a kijelölt poligonoldal két végpontja, ekkor hosszmérését két zsámolylyal a legczélszerűbben úgy foganatositjuk, hogy mind a két zsámolyon a mérőzsinórt megkötjük és függőleges középsikjával C_1D_1 pontok fölött kifeszitjük, l. 11. ábrát. Feltevésünk sikeréről meggyőződünk az által, hogy mind a két pontban kézi függélyzővel a zsinórra kelünk át. Netaláni eltérés a mérőzsámolyok félremozditása által könnyen igazitható ki. Minden zsámolyt egy munkás kezel, ki a zsinór kifeszitése czéljából o és p-nél ülődeszkájára ráül. Az igy kijelölt poligonoldal hosszmérését C és D pontok függőlegesei között mérőrudakkal foganatositjuk.

A salgótarjáni kecskeláb.

Andreics János bányamérnök a salgótarjáni részvénytársulat kőszénbányáiban a poligon oldalait igen könnyü kecskelábakkal méri meg. Ily kecskelábat a 12. ábrában vázoltunk, cd gerinczfája 80 cm hosszu és ${}^{10}/_{10}$—${}^{10}/_{12}$ cm-nyi a keresztszelvénye. Ezt ellátjuk négy $fghi$ lábbal, melyek hosszát rendszerint 0·8—1·0 m-re és keresztszelvényét ${}^{5}/_{5}$ cm-nyire szabjuk. A lábakat fél-fecskefarkos csappal kötjük a gerinczfa oldalaihoz oly módon, hogy lábai négyélü csonkitott gulát alakitsanak. Két-két lábát még azonkivül 0·4 *m*-nyi magasságban, $^5/_5$ *cm*-nyi vizszintes léczczel egyesitjük. Alkalmazását a földalatti theodolitmérésnél ismertetjük.

A harczhegységi mérőbak.

A harczhegységi bányász erősebb háromlábu kecskelábat használ, l. 13. ábrát, minőt ácsok is gyakran alkalmaznak. Szerkesztése és használata minden további magyarázat nélkül a rajzból érthető. Ezért még csak annyit emlitünk, hogy megállása biztosabb, de sulya jóval nagyobb, mint a mérőzsámolyé.

A megvasalt mérőkaró.

Napszini mérések czéljaira, hol karó beverhető a földbe, az oldalhosszuságok közvetetlen mérésére a mérőzsinórt egyszerüen karókra feszitjük. Igen előnyösnek bizonyult a mérőkarót megvasaltatni, l. 14. ábrát. Ugyanis 7 *cm* vastag, 60—80 *cm* hosszu tölgyfakaró alsó végét hegyesvasalással látunk el, felső végén ráhuzunk vörös izzó állapotban *d* vaskarikát, alatta *f* fülkés csavart furunk beléje. Igy kiállitva több évig mérhetünk e karóval Felső karikája megvédi a karó fejét, hogy szét ne hasadjon, ha naponként 20 - 30-szor a földbe sulykoltatjuk; *f* fülkés csavar czélszerűnek bizonyul, ha 80—200 *m* hosszu oldalt — hosszmérése czéljából rövidebb alrészekre kell osztani, akkor *f* fülkéjét a theodolit látócsövével intünk be a vonal függőleges sikjába, a zsinór hosszát pedig fülkétől fülkéig méretjük meg. Igy nemcsak a kijelölt vonal iránya, de a megmérendő szakaszok végpontjai is a legszabatosabb és legegyszerűbb módon lesznek kitüntetve.

3. §. Földalatti vezérpontok jelei.

Legegyszerűbb és legelterjedtebb jelzőeszközül bemutatjuk e helyen a függélyző éket és függélyző csavart. Az ily szerkezetü jelzőeszközök száma igen nagy, a mennyiben minden bányamérnök módositásokat eszelt ki, melyekkel czéljait elősegiteni iparkodott. E helyen csakis a figyelemre legméltóbb jeleket soroljuk el.

A régiek leginkább a 15. *B*. ábrában bemutatott függélyző vasat használták. Ez 100 *mm* hosszu, 10 *mm* vastag és fején 15 *mm* szélességre kovácsolt vasék, mely hegyben végződik és szárának több helyén be lett vésve, hogy fába verve jobban tartson. Feje végén $1^1/_2$—2 *mm*-es furást mutat, ezen át fűzzük a függélyző zsinegét, ha pontot be akarunk mérni.

Legegyszerűbb a gömöri vashegyen használt kajmos drótszög, l. 15. *C* ábrát. A rimamurányi társulat bányáiban vezérpontok jelölésére nagyobbrészt ezt alkalmazzák. Egyszerü drótszög, melynek fejét levágják és fejutáni részét kajmóvá hajlitják. Hegyes végével beverik a földalatti folyosó bélelő fájába.

A szélaknai m. kir. bányamérőhivatal más alaku függélyző vasat használ, l. 16. ábrát, 60—100 *mm* hosszu, fején 15—20 *mm* széles és 7 *mm* vastag vasék, melynek vége hegyes és több helyen be van vésve. Fejében 2 *mm* átmérőjü furat van a függélyző felakasztására.

A 17. ábra mutatja Borchers kétágu szegét, melynek hasáb alaku fejében van a fúrás, hogy a függélyző zsinegét ezen át fűzhessük. A szegnek, mint jelzőeszköznek az a hátránya, hogy irányok kitüzéseinél a rajta felakasztott függélyzőt nem lehet oly kényelemmel és oly parányi mozdulatokkal a kitüzendő irány függőleges síkjába helyezni, mint a függélyző csavart. Onnan van, hogy a legtöbb mérnök jelzőcsavart szivesebben alkalmaz.

Wisbach Gyula, a freibergi bányászati akadémiának néhai tanára ily czélokra sárgarézből készitett függélyző csavarokat alkalmazott, l. 18. ábra. E csavarkák hossza 40—50 *mm*, vastagsága 5 *mm*, laposra vert fejükben 1—$1^1/_2$ *mm*-es furás van. — Alakja majd egyenes hossztengelyü, majd elgörbitik ezt a feje végén 90 foknyi szög alatt. Utóbbi könnyiti a függélyzőnek szabatosabb beintését, de lehetővé teszi pontjainknak rosz akaratu eltolását könnyü szerrel.

Végül még a selmeczi függélyző csavart ismertetjük, l. 19. ábrát. Ez 2 *cm* hosszu, 5 *mm* vastag vascsavar, végén 15 *mm* átmérőjü fülkével, a mint ez ablakfüggönyökre minden vasárus boltban $1^1/_2$—2 krajczárért kapható. Ha fülkéjét keveset megnyitjük, akkor benne igen czélszerü jelzőcsavart birunk, t. i. így felakaszthatjuk rajta az ellensúlyos függélyzőt, sőt folyosóink magasságmérése alkalmával a szintmérő léczet is reá akaszthatjuk.

Függélyző csavarok és szegek elhelyezése.

Bélelés nélküli folyosókban lyukat furatunk a főte kőzetébe, oda 10—15 *cm* hosszu, 1·5—2 *cm* vastag fadugót veretünk, rendesen ferdén, l. 15. *D* ábrát, és ebbe erősitjük a függélyző csavart. Fával bélelt tárókban, az ajtókeret homlokfájába helyezzük a jelzőcsavart, esetleg a jelzőszöget.

4. §. Vezérpontjaink számjelzése.

Vezérpontjaink feladata könnyiteni bányában a tájékozást, nemkülönben, hogy a folyton terjedő földalatti térségek kiegészitő méréseit mindig csak a legközelebbi vezérpontból folytathassuk. Ez azonban csak czélszerü számjelzéssel biztositható. Jelenleg római számot már nem használunk, a mennyiben nagyobb bányában a vezérpontok száma ezrekre megy; már pedig római számokkal harminczny olcznak a felirása is már hét számjegyet követel. Azonkivül fáradságos és nehéz a római számnak szabályos, tetszetős felirása tervekben vagy jegyzőkönyvben. Igy tehát kivétel nélkül arabs számokat használunk. Ki nem bélelt folyosókban, hol a kőzet tartós, a jelzőszámot mészszel irjuk a függélyző csavar közelébe, vagy a főtelapra, vagy az oldalfalra. Fával bélelt folyosókban néha a bélelő fára is irjuk, de mindenesetre czélszerűbb a folyó számokat apró vas vagy rézlemezlapokon kiveretni és e készletben tartott jelzőlapokból a vezérpont közelébe a megfelelőt felszegezni. Eljárásunk legczélszerűbb, ha az egész bánya jelzésére folytonos számsort használunk, mert nagy tévedésekre vezethetne, ha a különböző magasságokban haladó folyosókon vezérpontjaink számjelzése ismétlődnék.

5. §. Állandósitott külső vezérpontok.

Fontos tárók irányát két állandósitott vezérponttal szoktuk kijelölni. E vezérpontok egyikét a táró szája elé telepitjük; ez rendszerint földbe sülyesztett jelző kő, mely a táró tengelyvonalában fekszik és arra való, hogy fölötte a műszert felállithassuk és tárónk irányát időnként ellenőrizhessük, l. *B* pontot a 20-ik ábrában.

A második *C* vagy *D* vezérpontot lehetőleg messzire *B* ponttól a táró függőleges középsikjába állitjuk; erre legczélszerűbben háromszögelő gúlát alkalmazunk; *D* pont a táró hosszabbitására előnyösebb mint *C* pont. A követendő eljárást, ily hosszú időszakokra biztositott vezérpontok elhelyezése alkalmával, legegyszerűbben *B* pontnak kijelölésével ismertetjük, l. 21-ik ábrát. A mérnök kitűzi *B* pontot, számitásai alapján úgy, a hogy ezt tankönyvünk negyedik szakaszában ismertetjük, *B* pont helyére ideiglenes karót veretünk a földbe, melynek fején apró fúrás vagy bele vert drótszög a pontot szabatosan kitünteti. Hogy azonban ugyan e pont helyébe jelzőkövet épithessünk következőleg járunk el. *B* pont körül négy *(d)* faoszlopot ásatunk a földbe, kettőt-kettőt *b* homlokgerendával egyesitvén, ezekre keresztbe *c* gerendát fektetünk. Utóbbi gerendáról függélyzőt bocsátunk alá, melyet szabatosan *B* pont fölé helyezünk. Folytatólag biztositjuk függélyzőnket és *c* gerenda fekvését, nehány szög beverése által; mire *B* karó eltávolitható és helyén az épitő gödör ásható ki: *K* jelzőkőnek körülfalazása után pedig pontja ujból kijelölhető. Ugyanis a jelzőkő felső vizszintes határlapjába 3 *cm* vastag, 6 *cm* mély lyukat fúratunk a leeresztett *B* függélyző folytatott tengelyvonalában. E fúratba állitjuk a leesztergált és sárgarézből készitett B_1 vagy B_2 jelzőhengert, l. 22. ábrát. Az egyik B_2 hegyes végü henger, ezt akkor választjuk, ha azzal csakis irányzatot akarunk kijelölni; mig B_1 tompán határolt henger még a magasságmérésre is jó kiinduló pontul szolgál. E jelzőhengert állitjuk nehány ideiglenes faékkel szabatosan *B* függélyző alá, ha ez sikerült, a fúratba tűzfolyó ólmot vagy esetleg ként is öntetünk.

6. §. Déllőoszlop.

A mágnestű folytonos irányváltozása teszi szükségessé, hogy kompaszszal bemért szögadatainkat mindig a csillagászati déllőre viszonyitsuk. Ily czélból állitunk minden rendezett bánya közelébe déllőkövet, melyen a használt kompasznak declinátióját minden mérés előtt leolvassuk.

A kőoszlop méreteit és befalazás módját a 23. ábra ismerteti. Felállitását rendszerint úgy foganatositjuk, hogy az oszlop felső vizszintes határlapjának egyik átlója, l. *P* vizszintes vetületét, a csillagászati déllő irányába essék. A kő minőségére csak annyit jegyezünk meg, hogy ez mágnesi vonzást ne gyakoroljon, valamint hogy ásványrészei el ne málljanak. Rendszerint aprószemü kvarczdús homokkövet, vagy szép mészkövet alkalmazunk.

7. §. Bányászati határjelek.

Több egy bányabirtokot képező összefüggő bányateleknek határvonalait a földfelszinén úgy szoktak kitűzni, hogy körülkerítő határvonalainak minden töréspontjában határkövet falaztatunk vagy ékeltetünk a földbe. Ha valamely pont útra, patakba, háztelekbe vagy oly helyre esnék hová követ állítani nem lehet, ott vagy teljesen elhagyjuk, vagy ha felállitása kivánatos, akkor eltoljuk a határvonal oly pontjába, melynek jelentősége van. Határjelölésre csak ritka kivételképen használunk faoszlopot t. i. akkor ha tartós kőanyag megszerzése felette nagy pénzáldozattal jár.

A 24. ábra határkövet mutat jól faragható kőfajtából, lapokba hasadó palákból a határkövet inkább a 25. ábra szerint alakitjuk. Érdekes példaképen bemutatjuk még a gömörmegyei Vashegyen használt határjeleket, l. 26. ábra. *C* a fél méter hosszú oldalakkal határolt, négyzet alaku vastábla, mely felfelé négyoldalu csonka gulába végződik. A gulát csonkitó felső alaplapja közepén 2 cm. átmérőjü fúrat van, hová czöveket lehet verni és a pontot élesen kijelölni. Rajzunkon e fadugóban *m* mérőcsavar van, úgy mint ezt hosszmérések kiinditására alkalmazzuk. E vaskalapot aláfalazták *D* pillérrel, továbbá lefoglalták *E* alapfalához négy alkalmazott *f* vascsavarral. Ha tehát *D* pillérnek aláfalazott kőanyaga el is mállik, kicserélik időnként ujjal, a nélkül hogy a pont jelét el kellene mozditani. Ujabb időben tartós faragható kövek hiányában csömöszölt betonból is készithetünk határjelet.

Határkövek felirása.

Minden határkövet elszoktunk látni bevésett felirással és pedig a kő egyik oldalára két keresztezett bányászati kalapácsot és elhelyezésének évszámát vésetjük; mig ennek második oldalán rendszerint a bányabirtokos nevének kezdőbetüit és a kijelölt határpontnak jelzőszámát tüntetünk ki, mely az adományozó térképen kitüntetett számával egyezzék.

Határkövek elhelyezése.

Határoszlopot 1·0—1·4 *m* mély gödörbe falaztatunk, hogy alapját a fagy meg ne támadhassa, azaz hogy ne sülyedhessen. A gödörbe rendszerint úgy állitjuk fel, hogy a birtokos reávésett kezdőbetüi a határolt birtok belseje felé álljanak. A gödör fenekére oly anyagok törmelékét teszünk, melyek az illető helyen elő nem fordulnak; pl. üveg- vagy cserépdarabokat. Ez arra való, hogy rosz szándékból történt áthelyezését felismerhessük és be is igazolhassuk. E gödörben körül falaztatjuk a határkövet habarcscsal vagy habarcs nélkül.

8. §. Földalatti határjel.

A bányahatósági mérnök nem ritka feladata földalatti folyosóban azon pontnak a kitűzése a hol két szomszédos bányabirtok ily folyosóban határos. Szilárd kőzetben régi szokás szerint a folyosó egyik oldalfalában, l. 27. ábrát, három *a b c* lyukat fúratunk, úgy hogy ezek egyenlő oldalu háromszög csúcsait képezzék. E háromszög egyik oldalának vizszintes legyen a fekvése, akkor a határt jelző pont ama harmadik *c* fúrat tengelyvonalában fekszik, mely (*a b*) vizszintes oldal felett van elhelyezve. E jelt még az által is tesszük feltünővé, hogy a háromszögön belül két keresztezett bányászkalapácsot vésetünk. Fával bélelt tárnákban gyakran elzárható ajtófélt állitunk a határsikba. Ily ajtófélen felismertetjük a határt rászegezett vaslemeztáblával, mely figyelmeztető táblán a határt is röviden körülirjuk.

9. §. A magasságmérés jelei.

Magasságmérés vagy szintmérés czéljából kétféle jelet különböztetünk meg: úgymint ideiglenes és állandósitott jelet.

Ideiglenes jelek.

Külső szintmérésre legczélszerűbb a szintmérőléczneк a vassarúja, l. 28-ik *C* ábra. Ez czélszerü alaku vasöntvény, súlya $2^1/_2$ 3 kgr., törzse 60 *mm* sugaru félgömb, legmagasabb pontjában *d* gödörkével, oldalán (*e*) kezelő drótfülkével, alsó síkhatárlapján pedig három *f f* vastüskével felszerelve. A szintmérőlécz alsó végén gömbcsap van, mérés alkalmával ezt állitjuk (*d*) gödörkébe. E léczsarúval fokozzuk az ideiglenesen kijelölt pontnak szabatos bemérését feltünően főkép akkor, ha a léczet tartó segéd mindig rálép a vassarúra, midőn azt uj ponton a földre tette. Előnyeiről legkönnyebben úgy győződünk meg, ha kiinduló pontjára visszatérő vonalnak a pontjait szintezzük.

Földalatti szintmérésre legczélszerübben a selmeczi függélyzőcsavart alkalmazzuk, úgy mint ezt 19. ábrában ismertettük. A szintmérőléczet kampójával egyszerüen felakasztjuk, mi módon helyzete nyugodt és függőleges, azaz igy jóval pontosabb mérést biztositunk, mint ha a járópadlóra állitott léczczel mérünk; mert ez esetben nagy részben segédünk jóakaratától függ a jó eredmény.

A magasságmérés állandósitott jelei.

Hol fontosabb feladatra magasságot, napszini vagy földalatti pontban, hosszabb időre kell kijelölni, ott rendszerint szintjelző szeget helyeztetünk el. A szintjelzőt majd vizszintes talplapba, majd oldalfalba veretjük. Vizszintes talpban leginkább a bányász régi talpjelző szegét használjuk; l. 28. *B* ábrát. Ezt vertvasból vagy aczélból kovácsoltatjuk. Szára 80 *mm* hosszu, 18 *mm* vastag és alsó végén hegyes, feje 30 *mm* átmérőjü félgömb.

Oldalfalakba rendszerint hosszabb erősebb jelzővasat veretünk, l. 29. ábrát. Feje hengeralaku, 80 *mm* hosszu és 30 *mm* vastag, a falba vert hegyes vége 12 *cm* hosszu, több pontjában be van vésve, hogy szilárdabban szoruljon a fészkébe. Hosszanti tengelyével vizszintesen veretjük a falba; bemérése alkalmával kiálló fejére támasztjuk a szintmérő léczet.

Igen fontos pontok magasságát néha öntött vastáblával jelöljük ki, tehát oly módon, mint ez vasuti állomásokon, vagy nagyobb városokban szokásos. Ily esetben apró párkánynyal ellátott magassági táblát használunk, l. 30. ábrát, ezt négy elsülyesztett csavarral szoritjuk valamely épület oldalfalába.

A szintmérőléczet e tábla párkányára támasztjuk, ha pontját beakarjuk mérni. Alkalmazhatunk azonkivül sima magassági táblát is, l. 31. ábrát, melynek befalazott *m n* hasábos részét szabatosan kifúratjuk; fúrásába szorosan illő *P* hengert kell dugni, hogy a szintmérőléczet erre támasztván, a pontot bemérhessük. Utóbbi egyszerübb és kevésbé rontható, ha a *P* jelzőhengert mindig eltávolitjuk.

MÁSODIK FEJEZET.

Szögmérő műszerek.

A bányamérnök mérései alkalmával következő szögmérőket használ:

1. Különböző fokivszerkesztményeket egyenes vonalak dülésszögének meghatározására.

2. Kompaszt vagy theodolitot irányzatok vagy poligonoldalak vizszintes szögeinek mérésére.

3. A mágnestű mindennapi irányváltozásait declinátoriumókon figyeli meg.

4. Térképrajzolásra, valamint térképeken való szögmérésekre különféle eszközeink vannak.

I. Fokív-szerkesztmények.

10. §. A közönséges fokív.

A bányamérnök legrégibb műszereinek egyike a közönséges fokív; ezzel a kifeszitett mérőzsinór dülésszögét méri. A fokív, l. 32. ábrát, egy legfeljebb 1·5 *mm* vastag réz, vagy legujabban aluminium fémből készitett félkör, melynek átmérője czéljaink szerint 26 *cm*-től 16 *cm*-ig választható. Sulya ne legyen nagy, miért is körivét legfeljebb 10—12 *mm* szélesre szabjuk. Rendes sulya 75—120 gramm, ha sárgarézből való, mig aluminium fokív csak 20—30 grammot nyom. A kör átmérőjének két végén m és n felakasztó horgok vannak. Körívét kétszer 90 fokra szoktuk beosztani; kezdőpontja vagy más szóval indexvonala ama körsugár, mely mn átmérőn merőlegesen áll, úgy hogy m és n pontokban beosztásunk 90 fokkal jelölt részei fekszenek. A beosztás minden tizedik foka számmal van felismertetve; minden ötödik foka vagy hosszabb osztásvonal, vagy az osztásvonal folytatásába elhelyezett pont által tűnik ki. Az egyes fok a kör átmérője szerint 4, 5 vagy 6 alrészre van még beosztva, úgy hogy 15, 12 vagy 10 szögpercz a legkisebb kijelölt osztórész értéke. A beosztott kör középpontjában apró F fúrás van, átmérője rendszerint 0·2 *mm*. E fúráson át fekete szinü női hajszálat fűzünk és e hajszál szabadon lelógó végét megsulyozzuk apró g rézkörtével.

11. §. A fokív leolvasása.

Kifeszitett mérőzsinórra akasztott fokíven megfigyeljük a szabadon lelógó hajszálat, azaz itt kipuhatoljuk hány fokon és hány alrészen ment keresztül, nulla foktól kiindulva és a számsor növekedő irányát követve. Ha ekkor a hajszál két kimutatott legkisebb alrész között bárhol megállott, ezt szembecsléssel határozzuk meg, rendszerint $\pm$ 3 szögperczig lekerekitve. A leolvasott értéket azonnal a jegyzőkönyvbe irjuk. Ugyanez alkalommal megfigyeljük a zsinór hágását vagy esését mérésünk haladása irányában, mit + vagy — előjellel a jegyzőkönyvbe irunk. A dülésszögnek előjelét csakis akkor szükséges bejegyezni, ha a bemért zsinórhosszuságokból nemcsak a vízszintes vetületet, hanem egyuttal két végpontjának szintkülönbségét is kiakarjuk számitani.

A közönséges fokív kellékei.

Hasznavehető fokívtől követeljük:

1. Hogy beosztott körének minden osztóvonala a kör középpontjával egy síkba essék, mely sík a zsinórra akasztott műszeren függőleges helyzetet foglaljon el.

2. A hajszál felfüggesztő-pontja a beosztott kör középpontjával essék össze.

3 Hibátlan legyen a kör beosztása.

4. Ne legyen a fokívnek indexhibája, azaz függélyzője nulla fokot mutasson, ha a fokív vizszintes zsinóron függ.

A fokív vizsgálása.

1. A körsík vizsgálása. A fokívet körlapjával a mérőasztalra, vagy rajzdeszka síklapjára úgy fektetjük, hogy két horogja az asztal szélén tulterjeszkedjék; ha ekkor a fokív az asztal lapját mindenütt szorosan érinti, igy körlapja síknak mondható.

2. A hajszál központon kivüli felfüggesztése igen érzékeny hiba-forrás, mely félköralaku fokíven mérésünk eredményéből ki sem küszöbölhető. E hiba két okból állhat elő:

α) a furat helytelen fekvéséből;

β) a furat felette nagy átmérőjéből is, mely esetben függélyzőnk hajszála apró körben mozoghat. A furat megfelelő átmérőjéről jó górcsővel győződünk meg, midőn alatta összehasonlitjuk a hajszálat a furattal. A fokív furata csak annyival legyen nagyobb a hajszál átmérőjénél, hogy azt még befüzhessük.

A furat kellő fekvéséről körzővel győződhetünk meg; ugyanis megmérjük egyenlő-e távolsága a körnek több pontjára nézve. A fokívnek központon kivül fekvő furatából származó hibáját mennyiségtanilag is ki lehet fejezni, l. 33. ábrát.

Legyen K a beosztott kör középpontja, i a hajszál felfüggesztő pontja, bK a fokív indexvonala, r a kör sugárhossza, $e = Ki$ fokívünk vonalas külpontossága, akkor $Do = \text{arc}\ \alpha$ a zsinór valódi hajlásszöge, $bB = \text{arc}\ (\alpha + \varphi)$ a leolvasott szögnek ívhosszusága, φ pedig központon kivüli felfüggesztésének a hibája. — A 33. ábra nyomán kifejezhető φ szögnek ívhosszusága im egyenes hosszusága által, feltéve hogy $e = im$ oly csekély, mily rendszerint szokott lenni.

Ezzel:

[1] $$\text{arc}\,\varphi = im = e \sin(\beta - \alpha)$$

vagy ha $\varphi^1 = 3438 \,\text{arc}\,\varphi : r$ értéket behelyettesitjük, találjuk e hibának szögperczekben kifejezett értékét,

$$\varphi^1 = 3438 \frac{e}{r} \sin(\beta - \alpha)$$

Eredményünk azt tünteti fel, hogy eme hiba legnagyobb értéke akkor áll elő, ha $\sin(\beta - \alpha) = 1$; ezzel pedig:

[2] $$\varphi^1_{\text{max.}} = 3438 \frac{e}{r}$$

Szóval: A külpontosság okozta szöghiba *e*-vel, vagyis a külpontosság vonalas értékével egyenes arányban nő és visszás arányban nő a körnek *(r)* sugárhosszával.

Lássuk még e hiba számbeli értékét kedvező esetben; p. ha $r = 13\,cm$ és $e = 0{\cdot}2\,mm$; ekkor

$$\varphi_{\text{max.}} = 3438 \frac{2}{1300} = 5{\cdot}29 \text{ szögpercz};$$

vagy 5' és 17", mely hiba a fokívnek ± 3 szögperczczel megállapitott leolvasó határértékkel szemben igen nagynak mondható, úgy hogy elhanyagolni nem szabad. Ha tehát külpontossági hibája van a megvizsgált fokívnek, akkor a mechanikusnak visszaadjuk.

3. *A beosztás vizsgálása.* Elődeink körzővel vizsgálták a beosztást, ez azonban nem ajánlható, mert pontossága meg nem felel, azonkivül összekarczoljuk a műszer beosztott részét. Jobb s megbizhatóbb a fokív vizsgálása, ha ezt ragasztó viaszszal theodolit vagy más műszer látócsövére ragasztjuk és igy mind a két készülék magassági körét összehasonlitjuk. Ugyanis szabályszerüen felállitott theodolitra a fokívet úgy erősitjük, hogy körsíkja függőlegesen álljon; mit függélyzője után fel lehet ismerni, ha ez a látócsőnek minden tetszőleges hajlásszöge mellett gyöngén a körsíkhoz simul. Az ily módon összekapcsolt fokívet elforditjuk a theodolit vizszintes forgástengelye körül úgy, hogy fokról-fokra hajlitjuk; minden forditás után leolvassuk úgy a theodolit magassági körét, valamint a fokívét is. Ha ekkor a fokíven tett leolvasások, ± 3 szögperczenyi hibahatáron belül, ugyanannyival külömböznek mennyivel a theodolitot forditottuk, igy fokívünk beosztása jó. Hibásan beosztott fokívvel nem lehet mérni.

4. A fokív indexhibája akkor áll elő, midőn a kőrosztás nulla pontját magában foglaló körsugár nem áll merőlegesen a zsinór középvonalán, ha ezt kifeszitett mérőzsinórra akasztjuk. E hibaforrás kártékony befolyását a 34. ábrában tüntettük ki, a hol CD a kifeszitett zsinór, a és b a fokív két kajmója, KO a fokív indexvonala; KM pedig CD vonalnak azon merőlegese, mely K pontot metszi, KF a függélyző hajszála. E feltevések mellett kitünteti, δ szög a zsinór valódi dülésszögét, φ szög az indexhiba és O_1 a leolvasott szög, mely adatok mennyiségtani összefüggése:

[3] $$O_1 = \delta + \varphi$$

Ha folytatólag a fokivet ugyane zsinóron 180 fokkal megforditva függesztjük fel, ekkor φ indexhiba (—) előjellel változtatja az O_2-vel leolvasott szögadatot, azaz ekkor

[4] $$O_2 = \delta - \varphi$$

egyenlettel fejezhető ki. E két egyenlet levonása által:

[5] $$\varphi = \frac{O_1 - O_2}{2}$$

Szóval a fokivet indexhibájára úgy vizsgáljuk, hogy ezt két izben kifeszitett mérőzsinórra akasztjuk, második felfüggesztése előtt megforditjuk 180 fokkal. Ha e két mérés O_1 és O_2 leolvasása különböznék, ez indexhibára vall. Az indexhibát pedig a két leolvasás fél különbsége adja.

A fokív általános vizsgálása.

Uj műszernél nem annyira az egyes hibaforrások érdekelnek, hanem inkább az a pontosság, mely ezzel egészben véve biztositható. Megvizsgáljuk tehát az uj fokivet általános pontosságára.

Müller, a leobeni bányászati akadémia néhai tanára, a 35. ábrával vázolt eljárást ajánlotta. A mérnöki hivatal egyik szobájában függőleges állásba hozunk IK legyalult gerendát, azaz ezt ékkel BD födém és FG szobapadló közzé szoritjuk. Öt-hat méternyire IK gerendától C mérőcsavart helyezünk el, más szilárdan álló függőleges fába, p sulyos rajzasztal lábába. Ezután kijelöljük libellával C pont magasságát IK gerendán, l. m_0 pontot. Hasonlóképen kijelölünk IK gerendán még több, deczimétertől-deczimétерre magasabb pontot. Eddig érve megmérjük C pontnak vizszintes T távolságát IK gerendának egyik függőleges élétől, hogy ez adatokkal:

$$\text{tang}\ \alpha_1 = \frac{m_1 - m_0}{T}; \quad \text{tg.}\ \alpha_2 = \frac{m_2 - m_0}{T};$$

[6] $$\text{tang}\ \alpha_3 = \frac{m_3 - m_0}{T} \ldots\ldots\ldots$$

kiszámithassuk. Végül kifeszittetjük a mérőzsinórt Cm_1, Cm_2, Cm_3 ... irányokban, hogy minden zsinór közepére a megvizsgálandó fokivet akaszthassuk, és ezzel a zsinór δ_1, δ_2, δ_3 düllésszögét leolvashassuk. Ha e leolvasások, szögük kiszámitott értékével $\pm$ 3 szögperczig egyeznek, igy a fokiv tökéletesen jó, ellenkező esetben részletes hibáira vizsgálandó.

A fokívmérés további hibaforrásai.

A fokivvel mért düllésszög még más hibaforrásokból is helytelen lehet:

1. Előállhat oly eset, hogy a használt mérőzsinór, ott hol a fokiv egyik kajmóját ráakasztjuk $\pm$ 0·5 *mm*-el vastagabb, mint második kajmója alatt. Ily viszonyok közt indexvonala mozdul ki helyes állásából, l. 36. ábrát. Legyen *d* fokivünk átmérője, δ a zsinór vastagodása, β az e forrásból eredő szöghiba, akkor

[7] $$\text{arc}\,\beta = \frac{\delta}{d}$$

Vagy határozott számokban, ha $\delta = 0{\cdot}5$ *mm*, $d = 250$ *mm*, igy $\text{arc}\,\beta = 0{\cdot}002$, tehát 7 szögpercz, mely hiba semmi esetre el nem hanyagolható. A kimutatott szám mérőzsinórjaink követelt gőcsnélküli hengeralakját eléggé igazolja.

2. *A fokiv azon szöghibája, melyet légáram okozhat.* Földalatti folyosókban a bemért düllésszög hibás még onnan is lehet, hogy élénk légcseréhen mértünk. Ugyanis 1·9 *m* sebességgel haladó légáram a fokivet $^1/_5$ fokkal, a függélyzőt pedig $\pm$ 5 fokkal terelheti el helyes állásából. E befolyások elhanyagolása által megesett már az is, hogy szellőző táróban hágást találtak, hol tényleg esés volt.

3. *A fokiv leolvasó hibája.* A fokivleolvasás bizonytalanságát Müller leobeni tanár utasitása szerint következőleg találhatjuk. A fokivet theodolittal hozzuk kapcsolatba, hogy egy- és ugyanazt a magassági szöget a látócsővel több izben megmérhessük. Minden mérés kezdetén a fokivnek más állást adunk, más körrész leolvasása czéljából. Müller ily módon ugyanazt a magassági szöget 15-ször mérte meg, mely 15 eltérő eredményből az egyes

mérés hibáját $h\alpha = 2{\cdot}85$ szögperczczel találta. Ezzel tehát igazolva van, ha mi, úgy mint ezt Weisbach is tette, a fokiv leolvasó hibáját ± három szögperczre becsüljük.

11. §. A Schneider-féle fokiv.

Schneider Ernő bécsi mechanikus oly fokivet szerkesztett, melylyel a kifeszitett mérőzsinór dülésszögét nagyobb kényelemmel mérhetjük. Alakja a 37. ábrában tekint felénk. BB a 32 *cm* hosszú, aluminium fémből kovácsolt felfüggesztő rúdja, melylyel a mérőzsinórra tesszük; miért is eme rud keresztszelvénye egyenlő száru derékszöget képez, l. xy metszetet. BB rudnak mindkét oldalán egy 140 fokra terjedő köriv van megerősitve. T_1, T_2 az alhidáda kar, minden végén kétszárú noniussal felszerelve, F a forgástengelye, ez BB ruddal áll összefüggésben; ss apró libella; K az alhidáda kötőkarja, Z kötőcsavarkája; p a mikrometer-csavar, r ennek rugója. Ha K kart Z csavarral megkötjük, akkor ezen fokiv libellája (p) csavarral gyorsan bevágásra hozható.

A fokiv pontossága.

Általános vizsgálása czéljából kapcsolatba hoztuk e fokivet jó theodolit látócsövével. Az igy összekapcsolt két műszerrel több magassági szöget mértünk, azaz a theodolit vizszintes forgástengelyét mindig 5 fokkal forditottuk, miről magassági körén győződtünk meg; minden forgatás után bevágattuk a fokiv alhidáda karján alkalmazott libellát, azután leolvastuk mindkét noniusát. E kisérlet során, mely 20 ily összehasonlitó mérésre terjedt, kiszámitottuk a Schneider-féle fokiv leolvasó hibáját ± 1·3 szögperczczel. Folytatólag megmértünk még 10 ismert hajlásszög alatt kifeszitett mérőzsinórnak dülésszögét, ezt pedig úgy a Schneider-féle, valamint a közönséges fokívvel tettük. Utóbbi kisérlet azt bizonyitotta, hogy a zsinór közepére függesztett fokivvel, a zsinór dülésszögét 3—4 szögperczнél pontosabban meg nem határozhatjuk, még akkor sem, ha a használt fokiv leolvasása pontosabb, mint a közönséges fokivé. E tény abban találja magyarázatát, hogy minden zsinór kötélpoligont alkot, ha a fokivet reá akasztjuk, mely kötélpoligonnak dülésszöge más, mint a zsinór végpontjait összekötő egyenes dülésszöge.

A Schneider-féle fokiv előnyei.

1. A légáram befolyása kisebb méréseinek eredményeire, mint közönséges fokiven.

2. Kényelmesebb s biztosabb a leolvasása, mert leemelt műszeren foganatosítható, nem úgy mint közönséges fokiven, mely akkor a zsinóron függ.

3. A műszer külpontossági hibája kiküszöbölhető, a két noniuson tett olvasások számtani közepesével.

4. Indexhibája megsemmisithető, ha noniusait kellően eltoljuk.

5. Térfogata, valamint 120 grammnyi sulya megfelel követeléseinknek.*

12. §. A Borchers-féle fokiv.

E műszer kiváló sajátossága az, hogy a poligonoldal dülőszögét mérhetjük függetlenül a zsinór behajlásától, mely tulajdonsága szűk és meredek lejtőakna mérését nagyban könnyiti.

E műszer főalkotórésze, l. 38. ábrát, a 20 *cm* átmérőjü és 200 fokra terjedő KL köriv, mely felső elmetszett részén $m\,n$ rúddal, a felfüggesztésére szolgáló, D kampót kapcsolja magához. Q a műszer 12 *cm* hosszu látócsöve, tárgylencséje 16 *mm* átmérővel; oculárlencséje előtt *(s)* üveghasábbal felszerelve, hogy megfigyeléseink alkalmával a rajzban nyil által kijelölt irányban beletekinthessünk. A látócső ivalaku o és p támasztókkal van $m\,n$ rúdhoz oly módon kötve, hogy a mérőzsinór a látócső és a fokiv között férjen el; csak igy sikerült a látócső irányzó tengelyét a fokívvel és a mérőzsinórral egy függőleges síkba hozni. A fokiv (A) alhidáda karja alsó végén villaalaku, hol (N) nonius és $L_1\,L$ libella van elhelyezve.

Az alhidáda C forgástengelye apró aczélcsavar, mely könynyü mozgását biztositja. A felakasztott fokiv második támasztó pontja G kajmó, ez F csavarral és H karral van a fokivhez kötve.

E fokiv alkalmazására még kivilágitható czéltáblára van szükségünk, l. 38. és 39. ábrát. Ezt $d\,f$ rúdjával a kifeszitett zsinór második végpontjába akasztjuk. A czéltábla apró lemezlap;

* Ára 35 frt, kissé magas, ha meggondoljuk, hogy közönséges fokiv 16—24 forinton megszerezhető.

melyen négyzet van kivágva, úgy hogy az egyik átlója függőleges a másik vizszintes; l. p kivágást, úgy a mint ezt df rúdjával a zsinórra felfüggesztettük, midőn S súlyzója a legmélyebb helyzetét elfoglalta.

Kivilágitása legczélszerűbben oldalt tartott bányamécscsel foganatositható, miért is a kivágott lemeztábla mögé vagy 45 fok alatt állitott tükröt, vagy t üveg hasábot tétetünk.

Használat.

A megmérendő vonal két végpontjába mérőcsavart fúratunk úgy, hogy hosszanti tengelye vizszintesen álljon; a zsinór egyik végpontjában felfüggesztjük e fokiv czéltábláját második végpontjában a fokivet. Folytatólag a czéltáblát megvilágittatjuk, a fokiv F beállitó csavarkáját most eddig kezeljük, mig a látócső vizszintes pókszála a czéltáblának vizszintes átlójára rá nem vág, midőn azt a látócsővel megfigyeljük; ekkor leolvashatjuk a fokiv noniusán a végpontokat összekötő egyenesnek valódi dülésszögét 30" pontossággal, föltéve, hogy a fokivet előbb tökéletesen rektificáltuk.

E fokiv kellékei.

1. A fokiv indexvonala merőlegesen álljon látócsöve irányzó tengelyén.

2. Az indexvonal a nonius nullapontjával essék össze a midőn a látócső irányzótengelye vizszintes.

3. A libella vágjon be a normálpontjára, midőn műszerünk a 2-ik pontban emlitett helyzetet elfoglalja.

13. §. A Weisbach-féle fokiv.

Weisbach Gyula, a freibergi bányászakademia néhai tanára, lejtőaknák mérésére libellával felszerelt fokivet szerkesztett.

A fokiv l. 40. ábra, 16 *cm* sugaru negyedkör, melynek $c\,d$ ive 0 foktól 90 fokig teljes és harmadfokokra van beosztva, ef az alhidádakar, közepén libellával, végén kötőcsavarral, forditó csavarral és egyes szögperczet mutató noniussal. Felállitása czéljából a fokiv T szelvényü vonalzóra van erősitve. Weisbach fokivét 2 darab két méter hosszu faléczen használjuk, l. 41. ábrát. E léczek mindegyikének T alaku a keresztszelvénye, $o\,p$ végei lefelé hajló vasékekkel vannak felszerelve, a lécz közepén, ott hol a fokivet reá állitjuk, két *m n* vasék van rácsavarva; ezen élek egyikén kiigazitó csavarok is vannak.

A fokiv alkalmazásáról majd csak lejtőaknák mérése alkalmával lesz szó.

A fokiv kellékei.

1. A libella tengelye egyenlőközüen haladjon *a b* rézvonalzónak alsó lapjával akkor, mikor *e f* alhidáda karnak noniusa nullafokot mutat.

2. A mérőléczнek két m_1 *n* támasztóéke egyközü síkba essék a végső *o p* ékek éleivel.

Kiigazitás.

A fokivet — mérőléczczel együtt — két a földbe vert karónak fejére támasztjuk; ekkor bevágatjuk az alhidádát 0 fokra, az egyik karót pedig addig veretjük mélyebbre, míg műszerünk libellája is bevág. Folytatólag egyedül a fokivet emeljük fel, hogy 180 fokkal való forditása után ismét e léczre vissza állitsuk. Ha utóbbi esetben libellánk eltér, kiigazitjuk eltérésének felerészét az egyik karónak leveretése által, második felét pedig a libella igazitó csavaraival tüntetjük el. Az eljárás többszöri ismétlése által a libella tengelyét és még az *(a b)* vonalzónak alsó lapját is vízszintes helyzetbe hoztuk. A további kellékek kielégitésére, megforditjuk most a mérőléczet a rajta fekvő fokivvel együtt 180 fokkal; azaz úgy hogy támasztó karóit felcseréljük. Ha a libella ekkor eltérést mutat, kiigazitjuk az eltérés egyik felét *n* támasztó éknek mozditása által, másik felét a karók egyikének leveretése által.

14. §. A bányászati kompasz.

A kompasz még maig is a bányász igen fontos szögmérője, daczára annak, hogy fontosabb mérésekre majdnem kizárólag theodolitot használ.

A kompasz szerkezete.

Főalkotó részei: g_1 g_2 mágnestű, l. 42. és 43. ábrát, és *c d* beosztott köre, ezeket hengeralaku *A B* perselybe foglaljuk, hol *e* kör, körülfutó padkán nyugszik; a mágnestű pedig a persely fenéklapjában megerősitett *F* forgástengelyre támaszkodik.

A kör állását *g h* fémkarika biztositja, mely szorosan a perselybe illik és a kört erősen a padkához szoritja. A persely elzárására üveglap tétetik *g h* fémkarikára, ezt ismét, de gyöngébb *m n* karikával szoritottuk le.

A kör átmérője alig fél milliméterrel nagyobb a mágnestű hosszánál, melyet rendszerint 7, 8 vagy 9 *cm*-re szabunk, sőt ujabban midőn a kompaszt aluminiumból készittetjük, még 12 *cm*-es tűt is használunk. A kör beosztása 360 egész és még fél fokokra terjed. A beosztás indexvonala a körnek azon átmérője, mely műszereinken Észak Déllel van jelölve és melynek északi végpontja körosztásunk kezdőpontja. A körosztás számsora rendszerint ellentétes irányban nő, mint theodolitjaink limbus körein. Ez abban leli igazolását, hogy a kompaszon a tű áll és köre fordul, ha azzal szöget mérünk, mig ellenben a theodoliton a beosztott kör áll és noniusa mozog. Szóval visszásan számozott kompasz mérései a theodolit méréseivel a legegyszerübb módon kapcsolhatók. A kompasz körére irt számsor kétféle szokott lenni. Rá irunk 0-tól 24-ig terjedő nagyobb számjeleket, ezeket óráknak nevezzük, azonkivül kitüntetünk rajta kisebb számokkal minden tizedik fokot.

Az órák szerinti beosztás régi szokása a bányásznak, mely a napnak látszólagos mozgása szerint számitott időnek és szögmozgásnak arányát fejezi ki; azaz

24 óra = 360 fokkal.
Innen 1 „ = 15 „

A mágnestű.

Műszereinken a mágnestű alakja vagy a 44. ábrában mutatott rombusos, vagy a 45-ik ábrában adott hasábos forma. A hasábalaku tű nagyobb pontosságot biztosit a leolvasásnál. Végei ugyanis finomabb éllel láthatók el, a nélkül hogy ez által az olvasás nehezittetnék. Elkerüljük továbbá ezzel a leolvasás parallaktos hibáját, ha megfigyelésénél a körosztást mindig a tű függőleges síkjában tekintjük meg. A tű északi végét kékre befuttatott szine által ismertetjük fel, mig déli vége fehér szinü. A tű közepe fülkével van ellátva, melybe a kalapkaalaku sárgaréz *k* hüvelyt az úgynevezett sisakot fűzzük be, ebbe pedig apró *m* achát- vagy gránáthengerke helyeztetik el. Ezen hengerkébe be van köszörülve a forgástengely csapnyoma, melynek alakja paraboloid. Igy biztositjuk a tű szabad mozgását a legegyszerűbb módon, mi érzékenységének egyik feltétele.

A kompasz vizsgálása.

Czéljaink biztositására az egyszerü kompasznál következők a kellékek:

1. Pontos legyen a kör beosztása.

2. A mágnestűnek meglegyen a megkivánt érzékenysége.

3. Ne létezzék az egész készüléken, kivéve a tűt és ennek forgástengelyét, a mágnesre vonzóhatást gyakorló fém, pl. vas vagy nikkel.

4. A tű szimetrális hossztengelye egyenes legyen.

5. Megkivántatik, hogy a beosztott kör és a tű forgástengelye egyközepü legyen.

1. *A körosztás vizsgálása.* Ujabb koru és valamely jelesebb gyárból származó műszert helyes beosztására nem vizsgálunk, a mennyiben minden esetre megbizható. De ha ez mégis szükségesnek bizonyulna, akkor a kompaszt más szögmérő műszerhez kapcsoljuk, pl. mérőasztalhoz vagy theodolithoz és ezzel mérünk több határozott nagyságú szöget; pl. 5—6 és 7 foku szöget. E mérések alkalmával úgy járunk el, hogy e szöget fokról-fokra a körnek végigmenő beosztására rávetitjük, mi által köröskörül megvizsgáljuk. Ha e vizsgálat valahol hibát tüntet fel, akkor számértékét a theodolittal meg is mérhetjük. Hibásan beosztott kört mérésre használni nem szabad.

2. *A mágnestű érzékenysége.* A tű érzékenysége egyenes arányban áll mágnesi erejével, és forditott viszonyban forgástengelyének csapsurlódásával.

Ezért kivánatos, hogy a tű lehetőleg könnyü legyen, csapágya pedig lehetőleg kemény anyagból készittessék, pl. achát vagy gránát kőből, melyben a csapágyat képező gödröcske nagy tökéletességgel legyen beköszörülve. A tű forgástengelye finom edzett aczélból készüljön, felső hegye 15—20 foknyi szög alatt legyen kicsiszolva.

A mágnesi erő a tű felületével nő, ezért csekély súlya mellett nagy legyen felülete. A mágnestű érzékenysége megfelelőnek tekinthető, ha ez az általunk megkivánt hat szögpercznyi pontosságot biztositja; miről próbamérések utján győződünk meg. E kisérletek czéljából összefüggésbe hozzuk a kompaszt theodolittal, hogy mágnestűjét az alhidáda forgatása által több izben egy és ugyanazon osztóvonásra bevágassuk, ekkor leolvassuk a theodolit noniusait. E számadatokból számitjuk ki az egyes megfigyelés vagy beállitás hibáját; ha ez hat percznél kisebb igy a mágnestű eléggé érzékeny.

3. A műszer öntvényét megvizsgáljuk tisztaságára, úgy hogy a mágnestűt perselyéből kiemeljük és e tűnek aczélból készitett forgástengelyét is eltávolitjuk. Folytatólag tesszük a tűt hegyes varrótűre, melynek vastag végét parafába szurtuk. Az ily módon szabadon mozogható tű egyik hegye fölött elmozditjuk most lassan a perselynek minden egyes pontját. Ha e kisérlet közben a mágnestű iránya nem változik, akkor készülékünk ötvénye tiszta.

4. és 5. A tű egyenes alakját és forgástengelyének központos fekvését egy kisérletsorral vizsgálhatjuk meg. Sik és mozdulatlanul álló asztalon a kompasz mindkét tű végén leolvasásokat teszünk és pedig több izben, p. 20-szor, midőn a müszert minden leolvasás előtt 18—20 fokkal tovább forditjuk. Legyen a két tű végen tett két összetartozó leolvasás külömbözete 180 ± δ. Ekkor azt következtetjük, hogy a tű hosszanti tengelye görbe, ha δ nem nulla, de a műszer bármely állásánál is ugyanaz. Ha a műszer forgástengelye a kör középpontján kivül fekszik, ekkor (δ) a műszer változtatott állásánál a nullától kezdve bizonyos maximumig nő és onnan ismét kezdő értékeig apad. A műszer mindkét hibaforrástól mentes, ha (δ) minden leolvasásnál nulla. Görbe tű kiegyenesithető; külpontos hibával terhelt műszeren hibátlan adatot csak oly módon lehet megszerezni, hogy minden mérés alkalmával a fok tizedrészeire nézve a tű mindkét végét leolvassuk és a két olvasás számtani közepesét vesszük hibátlan adatul.

15. §. A kompasz alkalmazása.

Szögmérésre használjuk a kompaszt kifeszitett mérőzsinóron felakasztva, vagy összekötjük dioptrákkal, esetleg látócsővel, ugymint busszola-műszereken; de még rajzokon is használjuk irányzatok kijelölésére vagy azok lemérésére. Ha a kompasz kényelmes alkalmazását emlitett czélok egyikére biztositani akarjuk, akkor ezt még más készülékkel kell kapcsolatba hozni. E készülékek száma igen nagy, mi azonban csakis a meghonosodott és jónak bizonyult szerkesztményeket ismertetjük.

A kompasz függesztő-készülékei.

A bányásznak régóta gyakorolt mérésmódjára felfüggesztjük kifeszitett mérőzsinórra, mely czélból függesztő-készülékbe tesszük. Rössler Boldizsárt szászországi bányafőnököt emlitik e készülék feltalálójául, ki ezt 1673-ban az altenbergi bányák mérésére alkalmazta. Szerkezetét némiképen javitva a 46. és 47. ábrában mutatjuk be, a mint ezt a déli német függesztő-készülék, nevezeten jelenleg alkalmazzuk. Alkotórészei: *AB* főtartó, *CD* a perselykarika és a beléje helyezett *(GH)* kompasz.

Vizszintes szögek mérésére fontos, hogy a zsinóron függő kompasznak beosztott köre mindig vizszintes sikba helyezkedjék. E kellék biztositására a persely karikája *FF* tengelycsavarokkal van ellátva; a kompasz e csavarok kisimitott csapjaira van füzve, hogy azok körül szabadon fordulva vizszintes állásba helyezkedjék. Hogy végtére *FF* forgástengely ugyancsak vizszintes állást foglaljon el, fordulhat az egész készülék még a mérőzsinór körül is, midőn *ab* horgokkal reá akasztjuk. *FF* tengelyét jövőben a persely vizszintes forgás tengelyének nevezzük.

Fejlettebb szerkesztményt látunk az ugynevezett éjszaki német függesztő-készülékben, l. 48. ábrát. *B* a főtartó, fönt, hol olvasás alkalmával a műszerre tekintünk, teljesen nyitott; továbbá az *ab* horgok jóval távolabb fekvők, mint a déli német függesztő-készüléken.

Összehasonlitás.

A déli német készülék kisebb tért foglal el és egészben véve merevebb, mint az északi német, ennél fogva biztosabb s kényelmesebb a kezelése. Hátránya azonban, hogy a mágnestű leolvasása parallaktos hibával jár, ha ez a főtartó sikjában megáll. — A déli német függesztő-készülék szabad olvasást enged mindig, sőt a távolabb fekvő *ab* horgaival még nagyobb pontosságot is biztosit; szóval sikerültebb szerkesztménynek mondható.

A függesztő-készülék kellékei.

Függesztő-készülékbe helyezett jó kompaszszal csak úgy mérhetjük a kifeszitett mérőzsinórnak helyes csapásszögét, ha a következő kellékeknek felel meg.

1. A kompasz perselye úgy legyen egyensúlyozva, hogy be-

osztott köre mindig vizszintes helyzetet foglalhasson el, ha perselyének FF forgástengelye vizszintes.

2. Szükséges, hogy a kompaszperselynek FF forgástengelye merőlegesen álljon a mérőzsinór függőleges középsikján, ha a műszer bármily hajlásu zsinóron függ.

3. Kivánatos, hogy a beosztott kör indexvonala a mérőzsinór függőleges középsikjával egybeessék, vagy legalább egyenlőközüen haladjon vele.

1. *A kompasz-persely sulypontja.* Fontos, hogy a kompaszpersely sulypontja a mágnestűnek forgástengelyébe essék, és pedig annyira a persely vizszintes FF forgástengelye alá, hogy műszerünk leolvasott köre a legkedvezőtlenebb esetben is 2—3 fokig közelitse meg a vizszintes fekvést.

Állitásunk igazolására szolgáljon a 49. ábra, hol F a kompaszperselynek tengelycsapja, r e csapnak sugárhossza, S a kompasz sulypontja, m a sulypont távolsága F tengelyponttól, G a kompasz sulya, f a surlódás tényezője; α az a szög, melynek értékéig a vizszintességet meg kell közelitenünk. E jelölésre következik a 49. ábrából az egyensuly feltétele:

$$Gfv = Gm \,.\, \sin\alpha, \text{ ebből}$$

[8] $$\sin\alpha = \frac{rf}{m}$$

Szóval: Körünk vizszintes fekvése annál biztosabb, mennél vékonyabb perselyünk FF forgástengelye, és mennél mélyebb S sulypontjának a fekvése.

Folytatólag kitüntetjük (η) szöghibát, mely leolvasott körünk hibás vizszintességéből származik. Legyen 50. ábrában $v\,v$ vizszintes sik; ff a körnek ferde fekvése, melynek sikja α_1 szöggel tér el a vizszintes siktól; BK a mágnestű esetleges állása. Szabály szerint leolvasva függőlegesen tekintünk a mágnestűre, mely tényleg vizszintesen áll; ekkor FC a leolvasott iv, ez pedig hosszabb, mint FB a vizszintes sikban.

FBC gömbháromszögből következik:

$$\cos\alpha_1 = \frac{\operatorname{tang} FB}{\operatorname{tang} FC}$$

$$\text{Innen: } \operatorname{tang} FB = \operatorname{tang} FC \cos\alpha_1$$

Legyen rövidség kedvéért: $\varepsilon = FC$ a leolvasott szög; $\varphi = FB$ a helyes szög. E jelöléssel az olvasás (η) szöghibája;

$$\tang \eta = \tang(\varepsilon - \varphi) = \frac{\tang \varepsilon - \tang \varepsilon \cos \alpha}{1 + \tang \varepsilon^2 \cos \alpha} =$$

$$= \frac{\tang \varepsilon\,(1 - \cos \alpha)}{1 + \tang \varepsilon^2 \cos \alpha} = \frac{2 \sin \frac{\alpha^2}{2} \tang \varepsilon}{1 + \tang \varepsilon^2 \cos \alpha}$$

Egyszerűbb alakot nyerünk, ha α_1 szögnek csekély értékét tekintve, $\cos \alpha_1 = 1$-nek irunk; ezzel

[9] $$\tang \eta = \sin 2\varepsilon \sin^2 \frac{\alpha_1}{2}$$

Ebből következik (η) hiba megsemmisül, ha $\varepsilon = o$ és $\varepsilon = 90$ fokkal, azaz ha a mágnestű az indexvonalban, vagy a kelet-nyugati irányban leolvastatnék. Továbbá legnagyobb a leolvasott adat hibája, ha ez 45 fokkal eltér az indexvonaltól; t. i. $\varepsilon = 45^0$-ra lesz:

[10] $$\tang \eta = \sin \frac{\alpha^2}{2}$$

Lássuk e maximál-hiba nehány értékét.

Legyen: $\alpha =$	1^0	2^0	3^0
akkor: $\eta =$	16″	1′ 3″	2′21″

Tehát $\alpha = 3^0$-nyi eltérésre a leolvasás hibája legfeljebb 2′ és 21″ szögértéket tehet, vagyis alig a leolvasás határértékének a felét. Már pedig ily hiba felismerhető, ha a vizszintes mágnestű hegyét a körsikkal összehasonlitjuk, a mennyiben 8 *cm* hosszú tűnél a tű hegye 0·7 *mm*-el eltér, ha α még csak 1 fokot tesz.

Érdekes lesz még e helyen a sulypont (m) mélységét számokkal kifejezni. Az előbb igazolt képlet szerint:

[11] $$m = \frac{r \cdot f}{\sin \alpha}$$

Legyen: $f = 0{\cdot}2$ surlódás réz rézen; $r = 1$ *mm* a persely tengelycsapjának sugara. Láttuk, hogy $\alpha = 3$ fokkal is türhető, igy: $m = 0{\cdot}2 : 0{\cdot}0523 = 4$ *mm* vagy ha tekintetbe vesszük $\alpha = 0{\cdot}5$ fok még a tű állása után a körön felismerhető, igy lesz:

$$m = 0{\cdot}2 : 0{\cdot}0087 = 23\ mm$$

Szóval a kompasz-persely érzékenysége megfelel még, ha sulypontja 4 *mm*-el mélyebben fekszik, mint *FF* forgástengelye; de 10—12 *mm* mélyebb fekvő sulyponttal a kompaszpersely már igen érzékenynek mondható.

2. *Megvizsgáljuk a kompasz FF forgástengelyét helyes fekvésére.* Ugyanis függesztőbe helyezett kompasztól megkivánjuk, hogy mérőzsinórra felakasztva egyazon függőleges sikban

ugyanazt a csapás-szöget olvastassa le, bármely dülésszög alatt legyen a zsinór e sikban kifeszitve. Eltérés esetén műszerünk FF forgástengelye fekszik hibásan. E hibaforrás könnyebb megvilágitására két lehetséges esetet tárgyalunk.

α) Ha FF_1 tengely vizszintes zsinórra akasztott műszeren vizszintes sikban fekszik ugyan, de eme sikban $(90 \pm \varphi)$ szöget zárt be a zsinór VZV_1 függőleges középsikjával, nem pedig 90 foknyi szöget; l. 51. ábrát.

β) Ha a műszer FF_1 tengelye oly függőleges sikban fekszik, mely merőlegesen áll a zsinór függőleges vzv_1 középsikján, de ha e tengely ott nem halad vizszintesen, hanem a vizszintes sikkal $\pm \psi$ szöget képez; l. 52. ábrát.

α) Legyen: 51. ábrában vzv_1, műszerünk függőleges középsikja, ugynevezett függősikja, ha ez zsinóron függ; FK ábrázolja perselyünk forgástengelyének felénk forditott részét, midőn a műszer vizszintes zsinóron van felakasztva, vFv_1 vizszintes sikot képviseljen, vv_1 pedig a vizszintes siknak a függő-sikkal való metszésvonalát. Műszerünk forgástengelyének merőlegesen kellene állania vzv_1 függő-sikon; azaz FF tengelynek vFv_1 vizszintes sikban kellene feküdnie, de még vv_1 vonalon is kellene merőlegesen állania. Hiba esetén azonban FK a fekvése, azaz $FKC = \varphi$ szöggel eltérő a merőlegestől. Ha ily műszert δ szög alatt dülő zsinórra függesztünk, akkor FK tengelye oly körkup felületében mozog, melynek (K) a csucsa és KC a tengelye. Más szóval FK tengelynek F pontja körivben fordul B pontig, tehát oly körben, melynek C a középpontja, $FC = CB$ a sugara és $FCB = \delta$ a forgatás szöge. Ha e forgatás után B pontot vFv_1 vizszintes sikra felvetitjük és O pontját K-val összekötjük, kitüntettük $FKO = \varphi - OKC$ szöggel azt a szögmozgást, melyben műszerünk leolvasott köre azért hajlott, mert perselyünk forgástengelye kimozdul a vizszintes sikból, midőn dülő zsinórra függesztjük. OBC gömbháromszögből következik:

$$\operatorname{tang} OC = \operatorname{tang} BC \,.\, \cos\delta, \quad BC = \varphi, \text{ tehát:}$$

[12] $$\operatorname{tang} OC = \operatorname{tang}\varphi \cos\delta$$

Ebből eme eset h_1 szöghibája:

$$h_1 = \varphi - OC$$

[12] egyenletből tapasztaljuk, hogy OC legnagyobb értéke akkor áll elő, ha $\delta = 0$, ugyanis $OC = \varphi$-vel, tehát $h_1 = \varphi - \varphi = 0$; továbbá $OC = 0$, ha $\delta = 90$ foknyi, ekkor pedig $h_1 = \varphi$-vel.

Szóval, vizszintes zsinóron e tengely hibája szöghibát nem okozhat a mérésben, de e hiba befolyása nől a zsinór dülésszögének sinusával.

Lássuk e hiba számértékét, ha $\delta = 45$ fok és $\varphi = 0{\cdot}5$ fok; ekkor $h_1 = 30' - (21'\,12'') = 8'\,48''$, tehát még nagyobb a leolvasás 6 szögperczes határértékénél és igy el nem hanyagolható.

β) Műszerünk hibája olyan is lehet, l. 52. ábrát, hogy perselyünk KF forgástengelye azért hibás fekvésü, mert $OKF = \psi$ szöggel a vizszintes sik alá hajlik, ha a műszer vizszintes zsinóron függ. Legyen ez esetben ismét VOV a vizszintes sik, OK a vizszintes sik és OZ függőleges siknak metszővonala. Ha e műszert most δ dülésre emeljük, akkor ZOK sikja ugyancsak δ szöggel fordul, mig Z_1OK sikkal össze nem esik. Igy tehát KF tengelynek F végpontja körivben fordul g pontig, úgy hogy arc $OKg = \psi_2$ most a tengelyhiba kifejezője. Vetitsük Og ivet vOv vizszintes sikra. Ezt kifejezhetjük Ogh gömbháromszögből:

$$\operatorname{tang} Oh = \operatorname{tang} \psi \,.\, \sin \delta$$

Utóbbi hibaforrás változik még n megmért csapásszög nagyságával is; t. i. e hiba megsemmisül, ha 0 foknyi csapásszöget olvastunk le, és befolyása teljes értékével jut érvényre, ha 90 foknyi a megmért csapásszög. Mennyiségtanilag kifejezhető (w) csapásszögnek a befolyása eme szög sinusa által, melyet mint szorzót a képletbe irunk. Ezzel az utóbbi hibaforrás teljes hibatétele:

[13] $$\operatorname{tang} h_2 = \operatorname{tang} \psi \,.\, \sin \delta \,.\, \sin w \,.$$

Legyen $\delta = 45^0$ és $w = 90^0$, számitsuk ki ez esetre [13] egyenletből ψ szögnek azt az értékét, melynek jelenléte mellett a kompasz leolvasása még 6'-ig biztos:

$$\operatorname{tang} \psi = \frac{\operatorname{tang}\,(0^0\,6')}{\sin 45} = \operatorname{tang}\,(8'\,16'')$$

Tehát perselyünk KF forgástengelye $8' + 16''$-ig közelitse meg a vizszintes helyzetet.

Mindezekből láthatjuk mennyire fontos, hogy perselyünk FF forgástengelye tényleg vizszintes helyzetet foglalhasson el. Ugyanis 6'-nyi szögeredmény biztositására ne legyen e forgástengelynek 30'-nél nagyobb eltérése vizszintes sikban, sőt függőleges sikban ne térjen el 8' 16''-nyi szögértéknél többel. Hasonlóképp azt is látjuk, hogy a kompasz a szögadatokat kisebb dülésszöggel mindig biztosabban adja, mint meredekebb dülésnél; valamint hogy vizsgálását mentül meredekebb zsinóron kell végbe vinni.

Vizsgálás.

Legkényelmesebben foganatositjuk a függesztőnek eme vizsgálását, ha az 53. és 54. ábrákban bemutatott segitő készüléket használjuk. T. i. három $D_1 D_2 D_3$ léczből keretet alakitunk; D_1 közepén alacsonyabb g oszlopot erősitünk meg; $D_2 D_3$ léczek egybekötése pontjában hosszabb F oszlopot állitunk fel. Ez utóbbi oszlop biztositására I rézpánt van alkalmazva. E két oszlop arra való, hogy köztük rs vizszintes és mn 50—60 fok alatt dülő rézdrótot úgy feszithessük ki, hogy ezek pontosan egy függőleges sikban legyenek; rs drótnak vizszintes helyzete kevésbbé fontos; itt megközelitéssel is beérjük. A műszert elsőben α) hibaforrásra vizsgáljuk, mely czélból ezt bc horgaival rs vizszintes drótra akasztjuk. Ekkor a készüléket a rajta lévő műszerrel együtt addig forditjuk, mig mágnestűje 0 fokra be nem vág. Ezt azért tesszük, mert β hibaforrás [13] egyenlet szerint megsemmisül, ha $w = 0^0$.

E helyzetben leolvassuk a mágnestűt mindkét végén. Folytatólag felakasztjuk a műszert mn ferde drótra; itt szintúgy mind a két tű végén leolvassuk a kört. Ha végtére ez utóbbi olvasások számtani közepese a vizszintes dróton tett leolvasások eival nem egyezik, akkor α hibaforrás ennek az okozója. E hiba kiigazitható b és c akasztó horgok félremozditása, esetleg félrehajlitásával.

β hibaforrás kipuhatolására forditjuk a vizsgálat alatt lévő készüléket a műszerrel együtt, mig mágnestűje 6 órát nem mutat. E helyzetben leolvassuk a tű mindkét végét. Ennek befejeztével átakasztjuk a műszert úgy, hogy felső horogja alsónak legyen mn drótra akasztva. Itt ujból mind a két tű végén olvassuk le a kört. Ha végtére e két felfüggesztés számtani közepesei eltérnek, igy β a hibaforrásuk. Kiigazitásukra, l. 48. ábrát, CD perselykarikát egyik oldalán le kell hajlitani.

Szükség esetén mérhetünk a műszerrel úgy is, ha β hibával bir; de akkor minden zsinórra kétszer kell ezt felakasztani és e két 180 fokkal külömböző helyzetü leolvasásnak számtani közepesét kell használni.

3. *Az indexvonal megvizsgálására* a valódi déllőt kell ismerni és a mágnestűnek eltérését a csillagászati déllőtől is, azaz ennek declinátióját. Ez adatok meglévén, mérőzsinórt feszitünk ki

déllő irányában, erre függesztjük a kompaszt, ha ez az uralkodó declinátiót leolvastatja, akkor műszerünk e tekintetben is jó; különben forditani kell a beosztott kört, vagy mérhetünk indexhibával is, ha ezt mindig számitásba vesszük.

Más függesztő-készülékek.

A kompasznak mérőzsinóron való alkalmazására, a hatvanas évek óta több szerkesztmény hozatott javaslatba, de mindannyia nem elég egyszerü, hogy a gyakorlatban tért hódithatott volna. Igy indokoltnak találtuk még csak két készüléket emliteni.

Tudniillik bányában, hol vasut van lefektetve, vagy hol a hegység kőzete mágnesi tulajdonsággal bir; ott a mágnestű nem mutathatja a mágnesi déllőt helyesen. Ily viszonyok közt kompaszszal csakis a poligonoldalak iránykülömbségeit mérhetjük; mely czélból a kompaszt a poligonoldalak szögpontjaiba kell felfüggeszteni. Ekkor tehát oly függesztő-készülékre van szükségünk, mely lehetővé teszi azt, hogy a mágnestű forgástengelyét épen a kifeszitett zsinórágak metszéspontja alatt függeszthessük fel. Ily alkalmazásra még két készüléket mutatunk be.

1. A Reichelt-féle kompasz-pálczát, l. 55. ábrát *m n*, 6 *mm* vastag, 40 *cm* hosszu sárgaréz pálcza, közepe táján ráforrasztott *c* horoggal, végén csavarral rászoritható ellensulylyal és *b* horoggal felszerelve. Ugyane pálczán még két lefelé nyuló *e d* kar van alkalmazva; utóbbiakkal 2—3 *mm* vastag *t* rézdrótot feszithetünk ki, ha a *d* kart hátra toljuk és kötőcsavarkájával állandósitjuk.

Használata czéljából felfüggesztjük a kompaszpálczát 1. zsinórágra, úgy hogy *c* horga a *D* mérőcsavart egyik oldalán érintse. Ekkor *t* drótra a kompaszt akasztják. A mágnestű forgástengelye a mérés alkalmával szögünk csúcspontja alatt álljon, miért is *D* csavarról *(f)* függélyzőt bocsátunk le és a *K* kompaszt alája toljuk. Hogy ekkor kompaszunk tulsulya *b* horgot a zsinórról le ne emelhesse, megterheljük megfelelő suly ráerősitése által. Midőn a kompaszt az első zsinóron leolvastuk, átakasztjuk pálczájával együtt a (2.) zsinórra; l. 55. ábrában c_2 és b_2 pontozott vonallal jelölt horgokat. Az utóbbi és a megelőző leolvasások külömbözeteiből találjuk az egymásra következő zsinórágak irányváltozásait.

2. A Penkert-féle felfüggesztő, l. 56. ábrát, annyiban különbözik a megelőző készüléktől, hogy nála *b* és *c* felfüggesztő hor-

gok 30 *cm* hosszu rudakon alkalmaztattak, mi módon *mn* felfüggesztőpálczája sokkal mélyebb fekvést nyert és a műszer leolvasása kényelmesebbé vált. A Reichelt-féle készüléknek *t* drótja itt *vg* pálcza által van képviselve, mely pálcza villában végződik és igy a kompasznak perselytartó karikáját helyettesiti. E terjedelmes készülék sulyát azzal csökkentették, hogy minden rudja vékonytestü rézcső. Kisebb alakot használaton kivül azzal biztositottak e készüléknek, hogy *b* és *c* rud csuklókkal *mn* pálczára fektethetők; *K* kompasza pedig *vF* villával együtt az *mn* rud felé fordítható. Igy összehajtva kényelmes tokban helyezhető el.

Használata egyezik a Reichelt-féle kompaszpálcza használatával, miért még csak a készülék helyes felfüggesztéséről szólunk. A kompasz *vg* tartórudja *ed* csapfülkékben előre-hátra tolható, mig sikerült a mágnestű forgástengelyét *S* függélyző alá tolni; helyzetét akkor *X* kötőcsavar megszoritása által biztositjuk. Szögponton, hol a kompaszt előre kell tolni, meglehetős tulsulyra vergődik a kompasz, úgy hogy *c* horog a zsinórról fölfelé emelkedik. Ennek megakadályozására szolgál e függő-kar felső végén *y* kötőcsavar, melylyel félkőralaku lemezkéje a zsinórhoz szorítható.

Meg kell azonban jegyeznünk, hogy mind a két készülék kitűzött czélunknak csak addig felelhet meg, mig poligonunk oldalai körülbelül egyazon vizszintes sikban vannak kifeszitve. — Állitásunk igazolására az 57. ábra szolgáljon, hol *mn* vizszintes, *no* vagy 35 fok alatt dülő zsinórág. Ábránkból látjuk, hogy *no* zsinórágon *vg* rudat hosszura kell kitolni, hogy műszerünk a függélyző alá kerüljön. Ezzel műszerünk 2-ik helyzete jóval mélyebb, mint az első; azaz a vasuti sinszálak vonzó hatása a mágnestűre ily viszonyok közt minden felfüggesztés alkalmából szintén más és más.

Zala

16. §. A kompasz szögfelrakó vagy szögrajzoló táblája.

Szögfelrakó táblával alkalmazzuk a kompaszt, ha azzal vizszintes irányzatokat vagy poligonoldalakat viszonyitva a mágnesi déllőre térképekben akarunk kirajzolni, vagy azokból lemérni.

A szögfelrakó tábla, l. 58. ábrát, 0·16—0·24 *m* hosszu, 0·1—0·15 *m* széles és 3—4 *mm* vastag, épszögü *CD* sárgaréz tábla; közepén 18—20 *cm* átmérőjü, 1·5 *cm* magas, ráforrasztott *mn* fémkarikával, melybe a kompasz perselye szorosan beleillik, s a hol *X* kötőcsavarral minden tetszőleges helyzetben állandósithatjuk. Néha felszereljük még *pq* dioptrákkal is; igy felszerelve irányzóműszerül is használható.

Használat.

Térképeken való szögek kirajzolására vagy azok lemérésére, vonatkozással a mágnesi déllőre mindenekelőtt tájékozni kell a kompaszt. Ugyanis a szögrajzoló táblát egyik kifent élével ama vonal mellé fektetjük, mely a rajzon a mágnesi déllőt képviseli; ott a kompasz perselyét *mn* karikában addig forditjuk, mig szabadon lengő mágnestűje északi végével a nulla fokra be nem vág; erre megszoritjuk *x* kötőcsavarral. Ha a műszert ily módon tájékoztuk, alkalmazhatjuk irányzatok kijelölésére a következőképen. A tábla egyik éles szélét a kijelölendő irányzatnak kezdőpontjához illesztjük, hol addig forgatjuk e pont körül, mig műszerünk mágnestűje a kijelölendő szögértékre be nem vág, mikor irányvonalát a vonalzó éle mentén kellő hosszuságban kijelöljük. Irányzatok leolvasására a tájékozott műszert az egyik éles szélvonalával a meghatározandó vonal mellé fektetjük, hogy a mágnestűnek állása szerint csapó szögét közvetetlenül leolvashassuk. Két irányzatnak közbezárt szögét minden tájékozás nélkül kapjuk, ha műszerünk vonalzó élét mindenik szögszárhoz illesztvén, a mágnestű állását leolvassuk és ezen adatok különbözetét vonjuk.

A szögfelrakó kompasz vizsgálása.

Szögrajzolásra alkalmazott kompasztól kivánjuk, hogy:

1. A készülék élei, melyek vonalzóul szolgálnak, egyenesek és egyenlőközüek legyenek;

2. hogy ugyaneme élvonalak egyenlőközüek legyenek a beosztott körnek indexvonalával is akkor, ha a kompasz perselyét úgy állitottuk be, hogy a karimán és a perselyen kijelölt vonáskák egymásra vágnak.

Ad. 1. A vonalzót sik rajzlapra fektetjük s éle mentén finomra hegyezett rajzónnal vonalat huzunk. Erre fölemeljük szögrakó táblájával, hogy vonalzóját 180 fokkal történt forditása után e vonal második oldalához illeszszük. Ha éle e második helyzetben a vonalat ismét mindenütt fedi, akkor egyenes, ellenkező esetben a mechanikus által kiigazitandó. A két vonalzóél egyenlőközüségéről meggyőződünk, ha mind a két éle mentén vonalat huzunk és a táblának 180 fokkal történt forditása után ujból e két vonal közé fektetjük. Szükséges, hogy utóbbi fekvésben a vonalzó élek e vonalakat teljesen fedjék.

Közvetetlen méréssel is meggyőződhetünk a két vonalzóél egyenlőközüségéről, ha mind a két éle mellé drótszögeket veretünk és ezek között ide-oda toljuk.

Ad. 2. Az indexvonal és a vonalzóélek egyenlőközüségét legczélszerübben theodolittal figyeljük meg. A kompaszperselyt beállitjuk a szögfelrakótáblán úgy, hogy jelzővonáskái egymásra vágjanak; most függőleges állásba hozzuk két vonalzóélét fehér függőleges fal előtt. Folytatólag felállunk 6—8 *m*-nyi távolságban tőle, jól kiigazitott theodolittal; ha ezt szabályszerűen felállitottuk, összehasonlitjuk a látócső hajlitása mellett úgy a vonalzó éleit, valamint a kompasz indexvonalát függőlegességükre.

17. §. A kézi kompasz.

Ez kisebb, 5—6 *cm* hosszu tűvel és apró fokivvel felszerelt kompasz, mely csuklókban járó födeles fatokban van elhelyezve, hogy kézben tartva hozzávető mérésekre alkalmazhassuk, l. 59. ábrát.

Elvégre még a kompasznak különböző ujabb keltü alkalmazása módjáról kell megemlékeznünk. Úgy a hatvanas évek óta bányáinkban a szállitó vasutak terjedése által a kompasz régi alkalmazása módja is gyorsan kiszorult. Azonban régi bányászaink szivós ragaszkodása e megszokott és némi kényelmet biztositó műszerhez több mechanikust arra inditott, hogy a mágnestűt részint mint busszola-műszerrel, részint a theodolittal egyesitve alkalmazásba hozzák. Mind e műszerek azonban tért hóditani nem tudtak, miért is igazoltnak látjuk ez alárendelt műszereket meg sem emliteni.

Korunk legjelesebb bányamérnökei azt a nézetet vallják, hogy földalatti folyosókban, hol kompaszt a régi módon alkalmazni lehet, főkép ha poligonunk 2 *km*-nél rövidebb és oldalai 5—20 *m*-nél nem hosszabbak, feltétlenül kompaszt kell alkalmazni. Mig mágnesi kőzetben, vagy vasuttal felszerelt folyosókban, sőt akkor is, ha poligonunk több kilométer hosszu és egyes oldalai 40—100 méteresek, egyedül a theodolit alkalmazandó.

18. §. Declinatoriumok.

A fizikából tudjuk, hogy minden mágnestű háromféle irányváltozásnak van alávetve, ugymint: 1. évszázados, 2. mindennapi, 3. rendkivüli ingadozásoknak.

E ránk nézve igen fontos megfigyelésekre, nemkülönben kényesebb tájékozó mérések sikeres foganatositására szükséges leend az e czélokra szolgáló jobb műszerekkel megismerkednünk.

1. *A Schablasz-féle declinatorium.* E műszerek sorában legegyszerűbb Schablasz bécsi mechanikus szerkesztménye, l. 60. ábrát; *(K)* közönséges szögfelrakó kompasz, *MN* alaptábláján a reáerősitett *G* górcsővel, melynek *C* parányméró csavarával — ugymint ez theodolitokon történik — a mágnestű állását 20, esetleg 10 másodpercznyi szögértékig leolvashatjuk.

2. *A Borchers-féle declinatorium.* Főalkotó része a 3 *mm* vastag, 125 *mm* hosszu körszelvényü mágnespálcza, súlypontjában *Fg* kettős horoggal felszerelve, hol 0·5 *m* hosszu sodratlan selyemszálon felfüggesztjük. Hogy a szabadon lengő mágnespálczának még a legkisebb szögmozdulatát is megfigyelhessük, e czélból mellső végén aluminium karikába foglalt *BC* achromatikus tárgylencsét erősitünk meg, hátsó végén pedig *DE* csiszolt üveglapon felvésett apró léptéket, melynek mellső siklapja épen *BC* tárgylencsének gyujtó pontjában áll, úgy hogy a belőle kiinduló széthajló fénysugarak a tárgylencséből, mint parallel sugarak lépnek ki.

Borchers az ily módon felszerelt mágnestűjét a bányásznak legáltalánosabb alkalmazására úgy kapcsolta a theodolittal, mint ez a 62. ábrából felénk tekint. Ugyanis itt *MN* a mágnestű *RS* fémszekrénynyel körül van zárva, hogy légáram meg ne mozdithassa. A szekrény függőleges körfalai átlátszó sik üvegtáblák, melyeken át a tű kényelmesen megfigyelhető. A szekrény támasztója *p* hengeralaku csap, melynek függőleges tengelye körül fordítható, ha a mágnestű hosszanti tengelyét a theodolit *BC* látócsövének irányzó tengelyével egy függőleges síkba akarjuk helyezni. A szekrény és a theodolit összefüggése *xyz* karral van biztositva, még pedig oly módon, hogy a kar még *y* csukló körül is fordítható. A selyemszálnak megkivánt 0·4—0·5 *m*-nyi hossza biztositva van a szekrény födelére erősitett *OK* üvegcső által; ez felfelé rézhüvelyben végződik, hol *K* csavarral a mágnestűt a szükséghez mérten 1—2 *cm*-nyire felemelhetjük, sőt még fordithatjuk is a mágnestűt függőleges tengelye körül *(l)* kötőcsavar meglazitása után.

Földalatti megfigyelésekre *T* olajmécscsel világitjuk meg a mágnestűnek *M*-ben alkalmazott üvegléptékét, melynek képe a theodolit látócsövében megfigyelhető, ha az *N* tárgylencséből kilépő parallel fénysugarakat a theodolit látócsövébe bocsátjuk. Ekkor a lépték képét jobbra-balra látjuk mozogni látócsövünk függőleges pókszála előtt. E mozgó képen leolvassuk a függőleges pókszálnak legszélsőbb jobb és baloldali állását, mely alkalommal az osztórészek közötti hosszakat csak becsüljük. Ha a műszert szállitjuk, felemeljük *MN* mágnestűjét 4–5 tűzáró villával addig, mig 2—3 hasábkákra szoritottuk, hol biztos pihenője van, mely helyzetét *U* kötőcsavarral állandósitjuk. Az ily módon lezárt mágnestűvel eltávolitjuk készülékünk szekrényét, mely czélból *Z* csavart megoldjuk; ekkor ezt külön ládikába tesszük, hol egyúttal a lámpát is elhelyezhetjük.

Azon szögérték meghatározása, mely a Borchers-féle declinatoriumon egy-egy osztóvonalnak felel meg.

E szögértéket két módon határozhatjuk meg.

1. Szabályszerüen felállitott műszeren, egy vagy több osztórésznek ez értékét közvetetlenül mérjük meg, midőn a mágnestűt előbb állandósitottuk, hogy mérés közben irányát ne változtassa. Ekkor az egyes osztórésznek φ szögértékét úgy találjuk, mint bármily más szögmérés alkalmával; ugyanis, hogy a theodolit O_1 és O_2 kezdő és végső állását leolvassuk és eme számok különbzetét az igy bemért osztórészek *(n)* számával elosztjuk.

[14] $$\varphi = \frac{O_2 - O_1}{n}$$

2. Meghatározhatjuk az egyes osztórésznek szögmásodperczekben kifejezett értékét igy is, l. 63. ábrát, hogy az *M* üvegléptéken kijelölt osztórésznek *(k)* hosszértékét, mely rendszerint 0·1 *mm* vagy még ennél is rövidebb és a mechanikus által mindig közölve van, *M* léptéknek és *N* tárgylencsének optikai középpontjától való *T* távolságával elosztjuk, ez osztatot pedig 260265 redukáló tényezővel szorozzuk, igy:

[15] $$\varphi'' = \frac{h}{T} 206265.$$

Ekkor h, valamint T is egyazon hosszegységben fejezendő ki.

E képletből meghatározható az üveglépték osztó részeinek (h) távolsága, ha T és φ van adva. Például legyen $T = 250\ mm$, $\varphi = 60''$, igy

$$h = \frac{\varphi T}{206265} = \frac{60 \times 250}{206265} = 0{\cdot}0727\ mm.$$

Az indexhiba meghatározása a Borchers-féle declinatoriumon.

Ha Borchers műszerével a mágnestűnek absolut declinátióját akarjuk meghatározni, akkor vagy azt kivánjuk, hogy a mágnesnek hosszanti tengelye egyenlőközüen haladjon tárgylencséjének optikai tengelyével, vagy ismernünk kell e két tengely iránykülömbségét, a műszer úgynevezett indexhibáját; hogy ezt számitásba vehessük. A vizsgálást ezen czélra foganatositjuk, ha a mágnestűt egymásután mind a két horgára felakasztjuk és beosztásának azon osztórészét olvassuk le, mely a theodolit függőleges pókszálával esik össze. E megfigyelésnél meg kell akadályozni a tűnek folytonos apró lengéseit az által, hogy a mágnest két végéhez közel függőlegesen álló rézhengerkével érintetjük. Ha e kisérlet alkalmával a mágnestűnek mindkét helyzetében ugyanazt olvastuk, akkor nincs indexhibája. Ha pedig az első O_1 olvasás kisebb, mint a második O_2 olvasás, föltéve hogy a látócsőben megjelenő képen a számsor balról jobbra nagyobbodik, igy $\frac{O_2 - O_1}{2}$ szögértékkel minden leolvasott szögérték nagyobbitandó, hogy a mágnesnek az első megfigyeléssel egyező felfüggesztése mellett indexhiba mentes eredményt találjunk. Ha pedig $O_2 < O_1$, akkor ugyanezen felfüggesztésnél és számitó iránynál $\frac{O_1 - O_2}{2}$ levonandó O_1 olvasásból.

3. *A Gauss-féle declinatorium.* Korlátlanabb pontosságu és némi tekintetben kényelmesebb a Gauss-féle declinatorium, melynek czélszerü kiállitását a 64. ábrában látjuk, a mint ezt Lamont müncheni csillagász módositotta. *cd* a mágnestű 3—5 könnyü, 8 *cm* hosszu, 7 *mm* széles és delejezett aczélrúgókból alakitva, mely mágnes a kettős felfüggesztő sárgaréz horogra van

fűzve úgy, hogy felette még a 2·5 *cm* átmérőjü sík üvegtükör legyen elhelyezhető. Ez összetett igen könnyü, nagy felületü mágnes *hk* üvegszekrénynyel van körülfogva és mozgékonysága a 0·5 *m* hosszu *mh* üvegcsővel biztositva, miért is felső végén, úgy mint a Borchers-féle műszeren, gondoskodva van arról, hogy a selyemszál felemelhető, vagy szükség adtán fordítható legyen. Hogy végtére a műszer felállitása is kényelmes legyen, mi mindig külön állványon történik, ezért *hk* szekrény *fg* rézkarikán nyugszik, melynek beállitására az ott részarányosan elhelyezett három emelőcsavar szolgál.

A mágnestű megfigyeléseire bármely kimustrált műszernek jobb látócsövét használhatjuk, ha ennek merev állása biztosítható; s fölötte *p* üveglépték és *q* sík üvegtükör elhelyezhető. Az üveglépték, mely megfigyeléseinknek mértékül szolgál, rendszerint 4 *cm* széles, 20 *cm* hosszu, átlátszó fehér sík üveglap, mely hosszirányában rávésett milliméteres osztással van ellátva. A mögötte elhelyezett sík üvegtükör ugyanoly nagyságu, mozgékonysága vizszintes tengely körül kell, hogy biztositva legyen.

Használat.

S pontban, l. 64. ábrát, fényforrást — gázlángot — helyezünk el, melyből jövő fénysugaraknak kell esniök a *q* tükör lapjára, hogy *(p)* üveglléptéken átvonulván a mágnestű feletti *(c)* üvegtükörre essenek. Ekkor a *c* tükörtől visszavert fénysugarak *AB* megfigyelő látócsővel felfoghatók. Ily módon megjelenik a látócsőben *(p)* léptéknek a hátulról megvilágitott képe, melynek osztórészei az állandósitott látócsőnek függőleges pókszála előtt úgy mozognak, a mint a mágnesen lévő *(c)* tükör ide-oda leng.

A megfigyelésnél leolvassuk egyazon lengzetnek két legszélsőbb kitéréseit, mely két adatnak számtani közepese, megfigyelésünk pillanatában a mágnestű állását adja. Az adatot szögmértékben fejezzük ki, mely czélból a mágnestűt a látócsőnek függőleges tengelyétől oly távolságra szoktuk elhelyezni, hogy léptékünk *mm*-nyi osztórésze első szögperczét vagy ennek felét képviselje.

A látócső és mágnestű távolsága.

Legyen a 65. ábrában, *de* a mágnestű, *c* a rajta álló tükör, $p_1 p_2$ az üveglépték, *T* e két alkotórész kölcsönös távolsága, *h* azon osztórész hosszusága, melylyel fénysugarunk a látócső irányzó-tengelyétől eltér, ha (c) tükör α szöggel fordul, akkor ez esetben tekintetbe veendő, hogy a fénysugár kétszerakkora szöggel elfordul, mekkorával a tükör fordult. Ezzel pedig

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{h}{2} : T \text{ vagy ha szögmásodperczre térünk át:}$$

$$[16] \qquad \alpha'' = \frac{h}{2T}\, 206265.$$

Lássuk már most T-nek a hosszát, ha azt kivánjuk, hogy $h = 1\,mm$ és $\alpha = 60''$ legyen.

$$T = \frac{1}{120}\, 206265 = 1719\, mm$$

azaz nem is két méter. Minthogy a milliméternek még tizedrésze is lebecsülhető, igy a mágnestű állása $6''$-ig becsülhető le.

E készülékkel a mágnestűnek abszolut declinátiója szintén csak azon feltevés mellett határozható meg, ha (c) tükör síkja merőlegesen áll a mágnestű hosszanti tengelyén, miről a tűnek mind a két horgon való felfüggesztése mellett tett megfigyelések által kell meggyőződnünk, ép úgy mint ezt a Borchers-féle declinatoriumnál mutattuk.

A mágnestűt és a látócsövet mindig úgy kell felállítani, hogy megfigyeléseink a mágnesi délllő síkjában történhessenek. További követelésünk az is, hogy vas vagy más a mágnestűt vonzó anyag ne legyen befolyással megfigyelésünkre.

A declinátió megfigyelése.

A szénbányász vagy a vaskőbányász mai nap kompaszt már nem használ, inkább a fémbányász az, ki még mindig a kompaszhoz ragaszkodik. Onnan van, hogy minden nagyobb bányateleknél a mágnestű irányváltozásait jobb declinatoriumon naponként 3-szor figyelik meg és ezen megfigyeléseket táblázatokban gyüjtik, sőt néha a szaklapokban havonként ki is nyomatják. — A megfigyelések rendszerint reggeli 8 órakor, déli egy vagy két órakor és esteli 5 vagy 6 órakor mennek végbe. Feljegyzendő a megfigyelés ideje; a tű declínátiója, mely adat legalább két legnagyobb kilengésnek a számtani közepeséből veendő. Kiszámitandó elvégre e három adatból a declinátió napi átlaga és ennek legnagyobb különbzete, azaz variátiója.

A mágnestű mindennapi irányváltozásai.

Számos évre terjedő megfigyelésekből tudjuk, hogy a mágnestű naponta reggeli 8 órakor a legkisebb nyugati napi elhajlását mutatja; továbbá, hogy ezen elhajlás 8 órától kezdve déli 1-2 óráig folyton nő, úgy hogy ezen idő körül a legnagyobb nyugati elhajlást veszi föl: innen a tű esteli 10 óráig majdnem a reggeli állásába helyezkedik. Ez időtől reggeli 4 óráig a tű állása majdnem mozdulatlan; 4 órán túl közeledik a tű reggeli 8 órai minimumához; hogy onnan napi útját csekély külömbséggel ismételje. A nappali átlagos állást vagy reggeli 10 órakor, vagy délutáni 5 órakor figyeljük meg. A mágnestű eme ingadozásai szoros összefüggést mutatnak földünk és a nap kölcsönös állásával; a nap hatása következtében nyáron nagyobbak, a téli hónapokban kisebbek. Legkisebbek az ingadozások deczemberben (2—3 szögpercz), legnagyobbak junius-hóban (12—13 szögpercz). A napi ingadozásoknak évi átlagát 6 szögperczre becsülik, és onnan van, hogy közönséges bányászati kompaszon a tű állását, becslés utján, egy hatod fokig vagy hat szögperczig szoktuk meghatározni.

A mágnestű évi irányváltozása nem állandó, de átlagos értékét 0·16 fokkal veszik számitásba. Selmeczbányán a tű elhajlása jelenben: $7^{0} 40'$ nyugatra; azaz a mágnestű északi vége eltér a csillagászati délllő északi végétől nyugat felé fordulva 7 fok és 40 percznyi szöggel.

A mágnestű rendkivüli irányváltozásai.

Északi fény, földrengések vagy vulkáni kitörések a mágnestűt tetemesen megzavarják rendes állásában, és pedig akkor is, ha e tünemények a tűtől nagy távolságban jelentkeznek. Ily eset alkalmával eltér a tű rendes irányától 20—30 időpercz alatt több foknyi szögértékkel; a honnan meglehető gyorsasággal visszatér eredeti állásába. Az ily forrásu hibák a mérnökre nézve különösen veszedelmesek. miután nagyságukról fogalma nem lehet. Tapasztalt mérnök megszünteti mérését, ha a mágnestű feltünő nyugtalanságot mutat.

19. §. A szögmérés pontossága közönséges bányászati kompaszszal.

A mágnestű napi ingadozásait tekintetbe nem véve, egy a kompaszszal megmért szögnek pontossága két hibaforrástól függ, ugymint: 1. a leolvasás hibájától, 2. ama hibától, mely mérőzsinórjaink egyenlőtlen vastagságából keletkezik, ha a kompaszt reá függesztjük.

1. *A leolvasás pontossága.* Müller leobeni tanár ezen hibaforrás meghatározására egy szöget tizenötször mért meg, hogy az igy talált értékeiből a hibaszámitás tételei szerint, l. II-ik résznek 3. szakaszát, legvalóbbszinü értékét és ebből az egyes megfigyelés valószinü hibáját következőkép kiszámitsa. A megmért szög következő olvasásokat adott 69 fok és perczekben: 53, 50, 53, 57, 59, 60, 67, 62, 62, 55, 53, 57, 47, 43, 45. Ezek számtani közepese $M = 69^0\,54{\cdot}9'$. Innen $v = M - o$ kiigazaitásokat származtatta le

$$v_1 = 54{\cdot}9 - 53 = +\,1{\cdot}9'$$
$$v_2 = 54{\cdot}9 - 50 = +\,4{\cdot}9'$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$v_{15} = 54{\cdot}9 - 45 = +\,9{\cdot}9'$$

Ha $n = 15$ a megfigyelések száma, akkor az egyes szögnek (h) hibája:

$$h = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}} = \sqrt{\frac{620{\cdot}95}{14}} = 6{\cdot}66'$$

Minthogy a szög két irányzatnak az eredménye, igy az irányzat valószinü (h_1) hibája:

$$[17] \qquad h_1 = \frac{h}{\sqrt{2}} = 4{\cdot}71'$$

Müller eljárása abban állott, hogy vizszintes mérőasztalra jól kiigazitott látócsöves vonalzót és a megvizsgálandó kompaszt helyezte; érintetlen vonalzóval megirányozott két élesen kijelölt és megvilágitott pontot a mérőasztal forgatása mellett. Minden irányzás után leolvasta a mágnestűnek mindkét végét, hogy számtani közepesüket a fönt idézett számokban használhassa.

E szögnek minden ujból való mérése előtt más állást adott a kompasznak a mérőasztalon, hogy más-más körrészszel és más becslésekkel határozza a szöget.

2. A mérőzsinór egyenlőtlen vastagságából származó szöghibákat átlagban 3 szögperczre becsülhetjük; ha tehát még eme hibaforrást is tekintetbe vesszük, akkor ezeknek együttes befolyása alatt a kompasz szögmérő h_3 hibája:

$$[18] \qquad h_3 = \sqrt{(4 \cdot 7)^2 + (3)^2} = 5 \cdot 571$$

Szóval kisebb 0·1 foknál vagy 6 szögperczнél. Ez tehát egy második ok, hogy a mágnestű helyzetét szögmérésnél csakis 6 szögperczig szoktuk lebecsülni.

20. §. A bányászati theodolit.

Mindazon feladatokra, melyekre kompasz nem alkalmazható, vagy hol kompaszszal a kivánt pontosság nem biztositható, mai nap csakis a theodolit használandó. Ily műszer megszerzésénél első feltétel, hogy ama mérésnek és pontosságnak feleljen meg minden tekintetben, mely ugyszólván mindennapi feladatunk tárgya. Nem baj tehát, ha egyes kényesebb és ritkábban előforduló feladatok kellő eredménye csak hosszabb munkával biztositható; péld. ha nehány igen pontos szögnek a meghatározására nem az egyszerü, hanem a szögszorzást kell majd alkalmaznunk. A megrendelésnél biztositandó a körök megkivánt beosztása. A fok ne legyen a kellőnél több alrészre felosztva, osztóvonalai ne legyenek tulságosan vékonyak; különben nehéz és bizonytalan a leolvasásuk. A megkivánt pontosság még tökéletesen biztos, ha az osztóvonal 5—6-szor akkora vastagsággal bir, mekkora a leolvasandó legkisebb szögértéknek ívhosszusága körünk sugárhosszuságánál. Gondoskodva legyen a noniusok és a pókszálak kényelmes kivilágitásáról, a libellák czélszerü elhelyezéséről, kellő érzékenységéről, ép úgy mint a látócső megkivánt nagyitásáról. Ha szükséges, felszereltetjük okulárcsövét üveghasábbal, meredek irányzatok bemérésére, vagy sötétitő üveggel is, ha a napot kell megfigyelni. Igen fontos még a merev és kényelmesen elhelyezhető háromlábu állvány.

A használt műszereket két csoportba oszthatjuk.

1. Megkülömböztetünk műszereket, melyeket alárendelt pontosságu mérésekre használunk. Ezek egyszerü, esetleg szögszorzó theodolitok 10—12 *cm*-nyi átmérőjü limbus körrel és 60″ sőt 30″ szögmásodperczнyi leolvasással, néha teljes magasságu körrel, néha csak negyedkörrel is. Rendes áruk 180 frttól 240 frtig inga-

dozhat. Egyik jeles szerkezetü képviselője a Hildebrand-féle bánya theodolitban tekint felénk, 69. ábra mellső nézete metszve, 70. ábra oldalnézete.

2. Fontos és nagy szabatosságot biztositó mérésekre — főkép terjedelmes napszini mérésre — kivétel nélkül szögszorzó theodolitokat használunk, 12—25 *cm*-nyi limbuskörrel, 30—20 sőt 5" szögmásodpercznyi leolvasással, 18—30-szorosan nagyitó látócsővel 12—15 *cm*-nyi átmérőjü teljes magassági körrel; a leolvasásra nonius helyett gyakran paránymérő górcsövet alkalmazunk; tájékozó mérésekre felszerelték régebben 12 16 *cm* hosszu, érzékeny mágnestűvel; ujabban a tájékozást inkább a theodolittól nagyobb távolságban felállitott mágnestűvel foganatositjuk, oly módon mint a declinatoriumon. E műszerek ára 250 frttól 600 frtig ingadozhat. Igen jeles szerkezetü példányukat, Rost Rezső bécsi mechanikusnak, a 71. ábrában vázolt szögszorzó theodolitjában ismertetjük, melynek 480 frt az ára.

Bányászati theodolit alkotórészei.

Leirásaink rövidségét azzal biztositottuk, hogy a 69, 70, 71, 72. és 73. ábrában ugyanazt az alkotórészt mindig egyazzal a betüvel jelöltük.

A libellának minden theodoliton elsőrangu a fontossága, érzékenysége kell, hogy megfeleljen köreink leolvasó pontosságának. Kisebb műszereken a műszer felállitására való libellák 1', esetleg 30" perczczel hajlittatnak, ha buborékjukat egy osztóvonallal visszük tovább. Ha a libella érzékenysége 15" szögmásodpercz, akkor ezzel már jó szintmérés is végezhető. Elhelyezésüket illetőleg négy módot külömböztetünk meg. Kényelmes rektificátió biztositására a látócső vizszintes forgástengelyére állitjuk a libellát, lásd 69., 70. és 71. ábrában, D_2 nyereglibellát. A műszer gyors felállitására és főkép vizszintes szögek mérésére két D_3 és D_4 libellát erősittetünk az alhidáda tengelyre mereven, melyek egymást derékszög alatt keresztezik. Ha a theodolitnak egyuttal szintmérő műszerül is kell szolgálnia, akkor látócsövére D_1 libellát erősittetünk meg, és pedig úgy, hogy tengelye egyenlőközüen haladjon a látócső irányzótengelyével. Pontos magassági szögek mérésére a libellát, l. 71. ábrát, összeköttetésbe hozzuk a magassági kör *(n)* noniusaival, esetleg mikroszkopjaival. Ezt azért teszszük, hogy műszerünk, ha a D_5 libellát *H* emelő és g_3 hajlitócsavarral bevágatjuk, hibamentes magassági szöget még akkor is adhasson, midőn alhidáda tengelye nem áll tökéletesen a függőlegesben.

A Limbus-kör és noniusai, esetleg egyébb leolvasó készülékei.

Theodolitjaink limbuskörein a beosztás háromféleképen alkalmazható.

1. Alakithatjuk a kört, úgy mint ez régibb műszereken mindig történt, hogy a limbus és noniusai egyazon körsikba essenek, l. 66. és 71. ábrában *N* noniust, *L* limbust és *M* magassági kört.

2. Alakitható *L* limbusköre és *N* noniusa, hogy ez csonkitott kúpnak a palástját képezze, l. 67. ábra, melyre a beosztást vésetjük, úgy mint a 69. és 72. ábrában vázolt műszeren van alkalmazva.

3. Vésetjük az osztást köreinken alkalmazott burkoló hengerlapjaira, l. 68. ábrában, *N* noniust és *L* limbust.

A limbuskörnek kúpalakja kétségenkivül a legczélszerübb, nevezetesen kisebb a bányában használt műszereknél, a mennyiben itt úgy az olvasás, valamint a beosztásnak a megvilágitása a legkényelmesebb. Igen fontos még, hogy műszereink beosztott körei köpenynyel védessenek, legalább a limbust bányászati műszeren feltétlenül kell befödni; noniusa helyén üveggel fedett kivágás alkalmazandó, melyen át leolvassuk; l. 69., 72. ábrában *N* és *n* kivágást.

A magassági kör háromféleképen lesz beosztva: 1. Négy negyedkörre, melyeket egyenként 0°—90°, esetleg 0°—100° számoztatunk. Előnye, hogy a megmért magassági vagy mélységi szöget közvetetlenül leolvashatjuk, mely két szöget + és — előjellel megkülömböztetünk; de hátránya, hogy ezen beosztás kétszárnyu, tehát hosszabb noniust követel és hogy a leolvasásoknál ezeket felcserélni is lehet, mi nagyobb hibát okozhat.

2. Felosztható a magassági kör kétszer 0°—180°, esetleg 0°—200 fokig, ekkor elmarad a magassági és mélységi szög megkülömböztetése.

3. Beosztjuk a magassági kört 0°—360°-ig egyfolyton, ekkor csak egyszárnyu noniusra van szükségünk, de szögadatait egyszerű képletből kell még kiszámitani.

A magassági kör noniusának megerősitési módja szintén igen fontos kérdés; jobb eredmény csak oly módon biztositható ha a nonius úgy mint a 71. ábrában, a látócső forgástengelyére van fűzve, és ha ennek síklapja a beosztott kör lapjával egybe esik. Ugyanis ekkor a nonius esetleges kiigazitása alkalmával tényleg körben mozog, tehát osztóvonalai csakis sugaras állást foglalhatnak el, nem úgy mint a 70. és 72. ábrában vázolt műszeren, hol a kiigazitó csavarkák ezt a kör érintőjében tolják félre. Ily nonius többé meg nem felelhet feladatának, ha eltoltuk. A libellának kapcsolása a magassági körnek leolvasó készülékével, l. D_5, 71. és 73. ábrában, a magassági szög pontosságát és eljárásunk gyorsaságát jelentékenyen segiti elő. Az idézett ábrákkal bemutatott műszerekre meg kell még jegyeznünk, hogy a 71. ábrában bemutatott műszeren a limbuskör átmérője 18 *cm*-nyi, noniusain a szög 20″, sőt kivánatra 10″-ig leolvasható. Magassági köre 12 *cm*-nyi átmérővel, 0°—360 fokig van beosztva, noniusain a szög egy első szögperczig leolvasható. Látócsövének 32 *mm* átmérőjü a tárgylencséje; 30-szoros nagyitást biztosit, ára 480 frt. Készitője Rost Rezső bécsi mechanikus. A 72. ábrával bemutatott műszer Hildebrand freibergi mechanikustól való; limbuskörének 12 *cm* az átmérője, magassági köre 8 *cm*-rel készült, mindkettőn a szög a deczimál osztásu foknak századrészéig még leolvasható. Látócsöve 18-szorosan nagyit, ára 240 frt. A 73. ábrában vázolt műszer ugyancsak Hildebrand gyárából való; mindkét körének átmérője 120 *mm*, górcsöveivel azonban még 6″ is leolvasható, mely tulajdonsága folytán pontos háromszögelésekre igen előnyös, ára 540 frt.

A látócső két módon alkalmaztatik bányászati műszereinken:

1. Úgy, hogy irányzótengelye az alhidádatengelyt messe, ha a műszert főkép vizszintes szögek gyors és kényelmes mérésére akarjuk használni. A műszer szabatos kiigazitására megköveteli ekkor, hogy látócsöve vizszintes tengelye körül 180 foknál nagyobb szöggel legyen fordítható, röviden szólva, hogy át legyen hajtható. Ezt legczélszerűbben úgy biztositjuk, l. 69. és 70. ábrát, ha a látócsőnek okulárcsöve fekszik közelebb vizszintes forgástengelyéhez, azaz ha ez a vége átfér a látócsőnek csapágytartóján. Igy azért czélszerűbb, mert meredek lejtőaknában magassági szöget közvetetlenül bemérhetünk.

2. Ha műszerünknek első sorban igen meredek magassági szögek bemérésére kell szolgálnia; péld. lejtőaknák mérésére, vagy

déllő meghatározásokra, és vizszintes szögnek meghatározása inkább másodrangu feladatul tekinthető, akkor látócsövét vizszintes forgástengelyének egyik végére erősitjük meg, l. 72. és 73. ábrát. Meredeken felfelé inditott irányzatokra *(O)* okulárlencséje előtt üveghasábot alkalmaztatunk, ugynevezett okulárprismát, hogy vizszintesen tekinthessünk a látócsőbe. Ha a nap megfigyeléseire is kell szolgálnia, akkor e hasáb elé fekete üveglapot, esetleg turmalin lemezkét helyeztetünk el, melynek csuklóban kell fordulnia, hogy bármikor gyorsan eltávolithassuk. Látócsöveink rendszerint forditott képet mutatnak, igy kevesebb lencsével szerkeszthetők, képük ezzel fénydusabb, a forditott kép pedig mit sem zavar.

Hosszabb földalatti irányzatok beméréseénél meg kell világitani a látócsőben lévő pókszálakat, hogy élesen láthassuk, továbbá meg kell világitani a noniusokat vagy egyébb leolvasó készülékeket. A pókszálak megvilágitására igen czélszerü a 74. ábrában bemutatott reflektor alkalmazása. Köralaku kivágással ellátott *(m n)* rézlap, mely $p_1 p_2$ karikára erősittetik, hogy ezzel együtt a látócső tárgylencséje elé a cső végére füzhessük; *m n* rendszerint 4–5 foknyi szöget képez látócsövünk irányzótengelyével. A reflektornak beezüstölt és a lencse felé forditott lapjára fénysugarakat vetünk a látócsőhöz közelitett bányamécscsel. Igy a megfigyelő úgy szabályozhatja a pókszálak megvilágitását, hogy czélpontját és a pókszálat egyenlő élességgel lássa.

A nonius megvilágitására igen czélszerünek bizonyult ferdén állitott fehérszinü porczellánlap, l. 69. C_1 és 72. ábra N_2, főkép kúpalaku körnek a leolvasására. Górcsöves műszeren, l. 73. ábra, a górcső alsó végén van a reflektor, hol az oldalos kivágáson a fényt reá vetitjük.

A leolvasásokra alkalmazott mikroszkopokat illetőleg utalunk a Cséti Földméréstana 40. és 41. §§-okban leirt szerkesztményekre. *A theodolit vizsgálásai,* l. u. o. 77—81. §§.

21. §. A theodolit felállitása.

E helyen megjegyzendő, hogy poligont földalatti térségben általában két módon szoktunk mérni: ugyanis kijelölt és veszitett szögpontokkal. E körülmény a műszer felállitásánál ugyancsak tekintetbe veendő; a mennyiben felállitó készülékeink szerkezetére nagy befolyást gyakorol. Földalatti mérésre általában három lényegesen különböző szerkesztményt használunk a theodolit, esetleg szintmérő műszer felállitására.

1. Feszitő állványt.
2. Oldaltartót vagy oldalkart.
3. Háromlábu állványt.

A feszitőn való felállitásnak előnye, hogy tárókban a szállitást nem akadályozzuk, hogy műszerünk állása szilárdabb, mint oldalkarón, végtére hogy azzal még a legszűkebb és legmeredekebb lejtőaknát is be lehet mérni, a hol háromlábu állványnyal többé nem boldogulhatunk.

A feszitőállvány kellékei.

Biztos megállás; változtatható hosszuság bizonyos megszabott határok között, péld. 0·9 *m*-től 1·5-ig, vagy 1·2 *m*-től 3 *m*-ig; a műszer kényelmes és pontos elhelyezése előre kijelölt szögnek a csúcspontjában.

Az eddig alkalmazott feszitők sorából négyet emlitünk:

1. Az egyszerü padlódeszka, l. 75. ábrában *b c*, mely vizszintes helyzetben *c d* kettős ékkel a táró oldalfalai között erősen megszorittatik. Hátránya ezen eljárásnak, hogy ékelése könynyen meglazul, valamint az is, hogy váltakozó tárószélesség esetében sok fát kell magunkkal czipeltetnünk. Szóval sem a biztonság, sem a takarékosság követelményeinek meg nem felel.

2. Gretzmacher Gyula feszitőállványa, l. 76. ábrát. Ez két *m n* és *o p* padlóléczből áll; szélességük 10 *cm*, vastagságuk 4 *cm*. Mind a két léczнek egyik vége vassaruval van védve, második vége az egyesitést czélozó *o g* és *n r* vaspánttal van ellátva, *g* és *r* kötőcsavar megszoritása által a feszitő hosszusága esetről-esetre rögzitendő.

3. Tirscher József szélaknai bányamérnök eljárása.

Költségkimélés szempontjából Tirscher feszitőül 8—12 *cm* vastag rúdfát alkalmaz, melyet függőleges hosszanti középsikjával szögpont függőlegese alatt erősen megékeltet, l. 77. ábrában *S T* feszitőt. A műszer felállitására 30 *cm* átmérőjü, 3 *cm* vastag *c d* fatárcsát használ, mely tárcsa alsó lapján két kajmósvégü I., II. és a *p* csavart tartalmazó III. lábszárral van fölszerelve. Igy a feszitőnek bármely pontjában ráerősithető, ha (*p*) kötőcsavarral jól oda szoritjuk; sőt *c d* tárcsának vizszintes helyzete is biztositható, a mennyiben ez szemmérték szerint sikerül. 2. és 3.

eljárásnak hátránya az ékkel való megerősitésnek bizonytalansága, mely hátrány a szerző által szerkesztett és selmeczi feszitőállvány néven alkalmazott szerkesztményen a teljesen biztos szoritócsavar által van mellőzve.

4. *A selmeczi feszitőállvány.* E felállitó eszköz szerkesztése alkalmával alábbi feltételeknek iparkodtunk eleget tenni.

1. Hosszváltozásának könnyü és gyors foganatositását.

2. Teljesen biztos megszoritását a táró oldalfalai között és pedig úgy, hogy ez 50 *kg*-nyi vonó hatásnak minden irányban sikeresen ellentállhasson, hogy utóbbin a mérőzsinórt is megköthessük, ha azt kivánjuk, hogy szögmérésünket a hosszuságok mérése nyomon követhesse. Utóbbi feltevés szükségessé teszi, hogy a megszoritott feszitőnek hossztengelye körüli forgása be ne állhasson.

3. A mérőműszernek kényelmes és szabatos felállitása a szög csúcspontjában. Szóval a műszernek alátámasztására szolgáló asztalkája el legyen tolható a feszitő tengelyének hosszában, valamint keresztirányában is; egyuttal megadhassuk néki a vizszintes helyzetet még mielőtt a műszer rajta áll.

4. A szögmérést követő hosszmérés könnyitésére kivánatos, készülékünkön a szögpont függőlegesét csap által képviseltetni, melyre a mérőzsinór köthető, vagy szintmérés alkalmával a szintmérő műszer csaphüvelyével ráfüzhető.

5. Ha a hosszmérés alkalmával fokivet használni nem akarunk; akkor a bemérendő végponton hátulról megvilágitott czéltáblát irányozzuk meg.

Leirás.

Hogy nagy szilárdsága daczára csekély sulyát is biztositsuk, ezért AA-val jelölt része, l. 78. és 79. ábrát, 32 *mm* átmérőjü, 2·5 *mm* falvastagságu cső, mely szivós vert vasból készült. Az előbbinek furásába illő, rajzunkon H-val jelölt hosszabbitó rúd tömör és vasból vagy még czélszerűbben aczélból készül. Átmérője 26 *mm.* A feszitőnek gyors hosszváltozására BB rúdja 100-tól 100 *mm*-nyi hosszak után hosszukás ékfészkekkel lett ellátva, melyek egyikébe az ugyancsak aczélból készitett C szoritó éket helyezzük. C ékkel és E szoritó csavartokkal 360 *kg*-nyi erővel szorithatjuk a feszitő végein alkalmazott aczéltüskéket a táró oldalfalaiba, ha F-el jelölt kulcscsal kezeljük. A D-vel jelölt szoritócsavar laposmenetü, emelkedése 7 *mm*, hossza 25 *cm*. Hosszanti tengelye irányában e csavar 7 *mm* széles éknyilással van ellátva. Figyelemreméltó *E* csavartoknak az alakja. Két kilépő karimája vezeti a kajmós alaku *F* csavarkulcsot, ha megszoritjuk, mi módon kezelése jóval kényelmesebb, mintha hatlapu hasáb. A feszitő forgatását hosszanti tengely körül gátoljuk az által, hogy három aczéltüskével szoritjuk a táró falai felé.

A leirt feszitő 0·9 *m*-nyi szélességtől 1·5 *m*-nyi szélességig alkalmazható, sőt ha hosszabbitó rúdját használjuk, még 2·1 *m*-es folyosóban is mérhetünk. Kezelését csekély sulyával segitettük elő, mely nem több $7^1/_2$ *kg*-nál.

E készülék *G* feltüző csapja, l. 78. és 80. ábrát, képezi a feszitőnek és a műszer elhelyezésére szolgáló *f* beállitó asztalkának összekötő részét. *N* kötőcsavarral megszoritható *G* csap, *A A* feszitőnek bármely pontjában. H_1 és H_2 csavarokkal függőleges állást biztosithatunk *G* csapnak, ha a feszitő hosszanti tengelyével a vizszintes helyzetet 15 fokig megközeliti. 78., 79. és 80. ábrából a theodolit részére használt *ff* beállitó asztalka tekint felénk. c_2 kúpalaku hüvelyével füzzük *G* csapra, hol *M* kötőcsavarral erősen megszorithatjuk. Ez asztalkán nyugszik a négyágu tolóka, közepén *I* beállitó tüskével, három szárán $g_1\ g_2\ g_3$ oszlopkákkal, negyedik szárán *K* kötőcsavarral felszerelve; $g_1\ g_2\ g_3$ oszlopokon nyugszik a theodolit, szintező csavarai segitségével.

Használat.

Szintmérésre vagy csakis vizszintes szögmérésre megfelelhetünk egy feszitőállványnyal. Ha azonban veszitett pontokkal akarunk mérni, úgy tehát, hogy az oldalak hosszmérése a szögmérést nyomban kövesse, mi módon a leggyorsabb munkát biztositjuk, akkor legalább két, sőt előnyösebben három feszitőt alkalmazzunk.

A felállitás foganatositása.

A bemérendő szögpontnak már előre elhelyezett jelző csavarkájáról lebocsátunk függélyzőt, folytatólag balkezünkkel a feszitőt, *A* csövén megragadva, vizszintes fekvéssel hozzuk a függélyző alá, és pedig úgy, hogy hosszanti középsikja 1—1·5 *cm*-nyi pontosságig a függélyzővel összeessék. Mig a feszitőnek kettős tüskéit ily módon bal kezünkkel a táró baloldali falának szoritjuk, kihuzzuk jobb kezünkkel *B* hosszabbitó rúdját a jobb oldalon az érintésig; ekkor jobb kezünkkel *C* éket *B* rúdnak ama fészkébe toljuk, mely épen *D* csavarnak hosszhasadékában *E* csavartok előtt áll; ugyan ekkor *E* csavartok forgatása által *C* éket annyira szoritjuk jobb kezünkkel feléje, mennyire ez szabadkézzel sikerül; ezt elérve bal kezünkkel már csak kisebb nyomást kell gyakorolnunk. Most megragadjuk *F* csavarkulcsot, hogy ezzel a feszitő edzett aczéltüskéit, *E* csavartokkal addig szoritsuk a táró sziklafalaiba, esetleg bélelő fáiba mig e tüskék 6—10 *mm*-nyire be nem hatoltak, azaz mig feszitőnk tökéletesen biztosan nem áll.

Az igy megszoritott feszitőre most a beállitó készülék feltüző *G* csapját füzzük, erre pedig *ff* beállitó asztalkát helyezzük és meglazitott *N* kötőcsavarkája mellett alája toljuk, míg *I* tüskéje szögpontunknak lelógó függélyzöjét vagy 1 *cm*-ig megközeliti. Ezután megszoritjuk *N* csavart; eleinte csak lazán, hogy *ff* beállitót vizszintes helyzetbe hozhassuk. *ff* szintezésére használjuk $H_1 H_2$ csavarokat az egyik irányban, a második irányban forditjuk a feszitő hosszanti tengelye körül, ha *N* csavart keveset meglazitottuk.

Ha ily módon *ff* vizszintesen áll, mit *e* szelenczés libellán lehet látni, ekkor *J* tüskének szabatos központositása következik. Ezt legczélszerűbben úgy foganatositjuk, ha *M* kötőt megnyitván, *ff*-et *G* csap körül addig forditjuk, mig *K* és *J* pontok összekötő vonala szögpontunknak lelógó függélyzője alatt nem áll, mire *J* tüskét a függélyző alá lehet tolni és *K*, valamint *M* rögzitő csavarokat megszoritani. A feszitőnek valamely pontban való felállitása már minden mellékmunkával együtt 5 időpercznyi időn belül kényelmesen befejezhető.

A szögpontban felakasztott függélyző most eltávolitandó, mire *ff* asztalkára a theodolitot állitjuk, hol alhidáda tengelyének függőleges beállitására *EE* emelőcsavarain már csak nehány mozdulat szükséges. Szintmérésnél, vagy ha veszitett pontokkal poligont mérünk, akkor felállitásunk 2—3 perczre szoritható; a menynyiben akkor határozott pontra állanunk nem kell. A nálunk általánosan használt Stampfer-féle szintmérő *ff* asztalkát sem követel; egyszerüen *G* csapra fűzzük.

Az oldalkar.

A szászországi és harczhegységi bányászok földalatti mérésekre gyakran használnak oldalkart; tagadhatatlan előnye, hogy még kisebb tért foglal el, mint a feszitő; de hátránya, hogy előre kijelölt szögpontban felállitása gyakran nem sikerül, állása nem oly biztos, mint a selmeczi feszitőé, és szilárd sziklába vájt folyosóban, hol fabélelés nincs épenséggel nem alkalmazható. Szóval inkább csak oly esetekre ajánlható, hol veszitett szögpontokkal mérünk és az oldalkar vagy a bélelő fában, vagy a mellékkőzetben: péld. némely kőszénfalban biztosan elhelyezhető. Ekkor az oldalak hosszát a járópadlóra szoktuk lefüggélyezni, hol függélyzőtől függélyzőig mérőzsinórt feszitünk ki, és ennek mentén az oldal hosszát vagy fémből készitett mérőszalaggal, vagy megfelelő mérölánczczal mérjük meg. Ily eljárás csakis igen szabályos és 0·01-ot meg nem haladó talphágásnál előnyös, minthogy ekkor dűlésszöge hiba nélkül elhanyagolható. Az oldalkarok sorából két szerkesztményt emlitünk.

1. A Borchers-félét és 2. a Hildebrand-félét, melyeket Németországban clausthali és freibergi felállitásnak is neveznek. — A Borchers-féle oldalkarnak, l. 81. ábra, két alkotórésze van; KK_1 a 300 *mm* hosszú, 20 *mm* vastag, 40—50 *mm* magas aczélrúd; végén kúpalaku, 8—10 *cm* hosszu, 2 *cm* vastag megerősitő csavarral. A rúd kezdetén 18—20 *cm* átmérőjü, 5 *mm* vastag vastárcsával van ellátva, mely tárcsa a közepén 4—5 *cm* furást mutat. A rúd és a tárcsa közötti összefüggés két aczélcsavar által van biztositva. A theodolit felállitására és ennek könnyebb elhelyezésére szögünk csúcspontjában, Borchers T_1 T_2 tárcsára még egy más hatszárnyu B_1 B_2 táblát állitott, mely itt $E_1E_2E_3$ szintező csavarokon nyugszik és még azon felül a rugókkal ellátott $G_1G_2G_3$ lefogó csavarokkal van rászoritva. Hogy a rajta álló theodolit a neki adott állását mérés közben ne változtathassa, e czélból B_1B_2 beállitó táblán három $\alpha\beta\gamma$ gödröcske van furva, hová a theodolit szintező csavarai illenek. B_1B_2 középállásából minden irányban vagy 1 *cm*-rel eltolható a műszer szabatosabb központositása czéljából.

Hildebrand freibergi mechanikus oldalkara a 82. ábrából tekint felénk. Szerkezete egyszerűbb, a mennyiben M csavar szolgál vizszintes beállitására; tudniillik az oldalkar hossztengelye körül ugyis forditható, hogy tehát műszerünknek háromszáru

$T_1 T_2 T_3$ alátámasztóját még más keresztben álló vizszintes tengely körül is fordithassuk. E czélból Z feltüző csapja gömbrésznek L felületével támaszkodik az oldalkar mellső végére, ugyanitt hoszszukás kivágása is van, melyben M csavar szögmozgásokat is végezhet, ha N csavartokját meglazitjuk; Z csapra fűzzük a theodolit alátámasztóját, hol a szintező csavarok részére három kigyalult csatornát találunk, hogy különböző műszerekre is alkalmas legyen. A szögpont utólagos kijelölésére tüskében végződik Z csap felfelé, e tüskéje alatt pedig körülfutó csatornával van ellátva, hol oldalhosszak mérése alkalmával a zsinórt kötjük meg.

Háromlábu állványok.

Ha a szögmérést vagy szintmérést a hosszuságok mérésével egyesiteni nem akarjuk és ha földalatti térségeinkben az állványlábaknak szükséges támasztópontjai mindenütt találhatók, akkor kétségbe nem vonható a háromlábu állványnak mindent felülmuló előnye. Elhelyezése nem függ a térség szélességétől, úgy mint a feszitőállványé, és a háromlábbal mérésünket még a bányán kivül is folytathatjuk.

A háromlábu műszerállvány kellékei.

Bányában a theodolit szabatos felállitása rendszerint nagyobb fáradsággal jár mint külső mérésnél, de minthogy minden munka első sorban pénzkérdés, ez okból uj beszerzésnél nem az állvány olcsóságát nézzük, hanem azt, melyik szerkesztménynyel biztositható a legpontosabb és legolcsóbb mérés; hisz nem egy tényezővel, de csak az összes tényezők legkedvezőbb választásával biztositható a legfényesebb siker. Ha tehát e fontos kérdést gyakorlati szempontból tárgyaljuk, akkor nagyon igazoltnak tartjuk e kérdésnek alapos megvitatását.

Bányamérésre szolgáló theodolitállványnak főkellékeit a következőkben foglalhatjuk össze:

1. Sulya ne legyen a szükségesnél nagyobb, de megállása oly biztos legyen, hogy szögmérésünk megkivánt pontossága ne csökkentessék.

2. Legyen állványunknak mind a három lába a megszabott határok között hosszabbitható.

3. Szükséges, hogy az állvány feje beállitó-készülékkel legyen ellátva, mely lehetségessé tegye, hogy az állványfejen alkalmazott

jelzőtüskét kényelmesen beállithassuk a szögnek kijelölt csúcspontjára, még mielőtt a theodolit az állvány fején áll. Az eddig alkalmazott szerkesztmények sorából hármat ismertetünk:

1. Lingke Ágoston freibergi mechanikus állványát; 2. Hildebrand Miksa állványát, ki Lingke űzletét jelenben folytatja; 3. szerző állványát, melyet selmeczi állványnak is neveznek.

1. *A Lingke-féle theodolitállvány* Weiszbach Gyulától a freibergi bányászakadémia néhai tanárától származik, ki ezt a hatvanas évek elején annyira módositotta, hogy azzal a bányában már mérni lehetett. Szerkezetét a 83. ábrában látjuk. Az állvány feje a 25 *cm* átmérőjü és 5 *cm* vastag BB fatárcsa, körülfogó f rézabroncscsal védve, közepén 2·5 *cm* átmérőjü furattal ellátva. Három $h_1 h_2 h_3$ lába két-két rézből áll, keresztszelvényük ketté osztott kör. A láb felső része fülkében végződik, hol g kapcsolócsavarral az állvány fejéhez szoritjuk; a láb alsó része ki van hegyesitve és rézzel beburkolva, hogy könnyebben a földbe szorithassuk. A láb hosszát változtathatjuk m és n rézpántok, valamint a rajtok alkalmazott kötőcsavarokkal úgy, hogy ezen állványnak 0·9 *m*-től 1·3 *m*-ig minden kivánt magasságot adhatunk.

A theodolitot nem közvetetlenül az állvány fejére állitjuk, hanem C rézlapra, mely a három $\alpha\beta\gamma$ kinyulványával g_1 g_2 és g_3 kapcsolócsavar között elfér, és melynek helyzete három d szoritócsavarral biztositható. A reá állitott theodolit alhidáda tengelye összeessék P központositó tárcsának felfelé álló tüskéjével, ha szintező csavarait $\alpha\beta\gamma$ gödröcskékbe illesztjük. Ezzel biztositotta Weiszbach az állványfő szabatos beállitását, azaz központositását a bemérendő szögpontban, még mielőtt a theodolitot reá helyezné. Állványa minden bizonynyal jobb, mint a földmérők tárcsás állványai, azonban központositójának 1 *cm*-nyi beállitó tere igen korlátolt arra nézve, hogy kedvezőtlen viszonyok közt azzal gyorsan mérhessünk. Szerkezete inkább csak oly esetekben felel meg, ha veszitett pontokkal mérünk, ekkor pedig három állványt kell egyszerre alkalmazni, egyet a szög csúcspontjában és mind a két szögszár végpontjában ismét egyet-egyet. További hátránya, hogy lábai, ott hol az állvány fejét érintik, igen keskenyek és hogy itt fa fán nyugszik, ami rugékonynyá teszi. E rugékonysága főkép függőleges tengely körül forditó hatásoknál feltünő és veszedelmes hibaforrás minden szögmérőre.

2. Hildebrand Miksa freibergi mechanikus a bányászati theo-

dolit állványt oly módon javitotta, a mint ez a 84., 85. és 86. ábrából felénk tekint. Az állvány $a_1\,a_2$ feje három egymásra enyvezett deszkaréteget mutat, hogy meg ne vetemedjék. Kisebb suly, nagyobb merevség és kényelmesebb kezelés biztositására az állvány feje kinyulványokkal van ellátva, hol *zz* lábai két oldalról villa módjára hozzásimulnak és *e* csavarral erősen megszorithatók. Rugékonysága igy alig vehető észre. Rövidithető és két darabból összetett *hh* lábainak szárai egyeznek az előbbinek szerkezetével.

A theodolitot biztos elhelyezése czéljából *gg* köldökcsappal szoritjuk az állvány fejére; szintező csavaraival ekkor nem közvetetlenül a fára támaszkodik, hanem kúpos gödörrel ellátott *x* tárcsákra. A köldökcsavar, ha a theodolitra erősitjük alhidádatengelyének folytatását képezi, igy külső mérésekre *v* kajmójáról függélyzőt bocsátunk a földbe vert jelzőkaróig felállitása czéljából; l. *v* kajmót 85. ábrában. Ez állvány egyik hátránya, hogy földalatti mérés alkalmával a táró föntjében elhelyezett vezérpont alá csakis a rajta álló theodolittal helyezhető; továbbá az is, hogy a műszernek eltolhatósága vizszintes sikban csak 2 *cm*-t tesz, mi mostohább viszonyok közt gyors munkára még mindig kevés és nagy idő veszteséggel pótolandó. E szerkesztmény általában arra vall, hogy Hildebrand a mérést veszitett szögpontokkal és három állványnyal tartotta szem előtt.

3. A selmeczi theodolit-állvány a legmesszebb menő követeléseknek képes megfelelni,* mely czél biztositására, l. 87., 88. és 89. ábra *BB* állvány feje 200 *mm* átmérőjü, ⅂ keresztszelvényü vaskarika, ennek sikra esztergályozott felső határlapját fedi a reá illesztett *FF* karika, mi bányában igen czélszerü. A theodolit felállitására *CC* vastábla szolgál, hol a műszer magasabbra emelése végett szintező csavaraival *xxx* oszlopokra támaszkodik; itteni állását hosszukás résekkel biztositottuk. *J* az állványfőnek beállitó tüskéje; ez egy függőleges vonalban fekszik a reá helyezett theodolitnak alhidádatengelyével; lefelé kajmóban végződik, hogy külső mérésekre ugyancsak hasznát vehessük. *CC* vastábla, vagy beállitó asztalkája *L* libellával van még felszerelve, melylyel együtt *KK* vassineken nyugszik; ezek pedig *FF* karikára vannak szögecselve. Összefüggésük lehetségessé teszi, hogy a *CC* beállitó asztalkát, mint valami szánt ide-oda tolhassuk; *FF* karikával pedig körben

* Szerzőnek 1881-ben javitott szerkesztménye.

fordítható KK sinjeivel együtt; igy J tüskéje, sarkponti összrendezők módjára 200 *mm*-nyi körnek bármely pontjára állitható, CC asztalkának vizszintes fekvése mellett kényelmesen. A foganatositott beállitását $D_1 D_2$ és $E_1 E_2$ kötőcsavarokkal biztositjuk. A lábak kapcsolására zz kiugró szárnyak vannak BB karikára szegecselve; ily módon 14 *cm*-nyi felső szélességük volt biztositható; megszoritásukra egy-egy kétfülü g csavartok szolgál, ennek szintén kényelmes és biztos a kezelèse. Emlitésre méltó még hh lábaknak yy keresztmetszete; ezzel azoknak egymásba való ékelese lett elérve; mi módon eme állvány merevsége még akkor is nagyobb, mint a két megelőzőé, ha m és n szoritó pántjait csak lazán feszitjük meg.

A selmeczi theodolitállvány tulnyomó pénzbeli előnye leginkább akkor tapasztalható, ha nehéz viszonyok közt a bányában már előre állandósitott poligon pontjait lehetőleg szabatosan kell bemérni.

Használata a bányában.

Merev állás biztositására nem szabad az állvány lábát sem a folyosó járópadlóira, sem a vasuti vágány valamely részére állitani. Ha tehát a táró közepén még vizcsorga is haladna, akkor követeléseink kielégitése czéljából a bemérendő vezérpont jelzőcsavarját nem a főte közepébe telepitjük, hanem közelebb a táró egyik oldalfalához azért, hogy állványunk lábait a vizcsurgót szegélyező két padkára helyezhessük. Két lábát mindig arra az oldalra tesszük, mely közelebb van a vezérponthoz; a második oldalra tesszük a harmadik lábát. Igy iparkodunk az állványt a lebocsátott függélyző alá helyezni, hogy ez a körülbelül vizszintesen álló állványfőnek majdnem közepére vágjon. Ennek elérése után a talajba szoritjuk mind a három lábat, mignem állásuk eléggé biztos. Most először az egyik lábat addig hosszabbitjuk, vagy röviditjük, mig az állványfőn alkalmazott szelenczés libellának buborékja más lábnak a függőleges középsikjába helyezkedik, ekkor rögzitjük a használt lábat; folytatólag pedig bevágásra hozzuk a libella buborékját azon lábnak hosszváltozása által, melynek függőleges középsikjában állott.

A vizszintes állványfőn meglazitjuk $D_1 D_2$ és $E_1 E_2$ kötőcsavarokat, mig J tüskéje részint FF forgatása, részint CC eltolása által éppen a függősulynak hegye alá esik; mire $E_1 E_2$ és

D_1 D_2 megkötése által feladatunk be van fejezve. Ezután már csak a theodolit állitandó az állványfőre; hogy libelláit szintező csavarainak nehány apró forgatása által is bevágathassuk és a mérést megkezdhessük.

22. §. A bemérendő szögpontok megvilágitása.

A poligonmérés további fontos kelléke, hogy a bemérendő szögszárnak a végpontja, jobban mondva eme pontnak függőleges vonala láthatóvá tétessék. Az e czélokra használt és említésre méltó eszközök száma öt, úgymint: 1. Az egyszerű függélyző. 2. A Weiszbach-féle függőlámpa. 3. Weiszbach állólámpája. 4. Hátulról megvilágitott czéltábla. 5. Elektromos jelzőlámpa.

1. Legegyszerűbb az egyszerű függélyző; vizszintes szögek mérésére felakasztjuk a bemérendő szögpont jelzőcsavarjába, lelógó súlyának hegyes végét metszük látócsövünk függőleges pókszálával, ha megirányozzuk. Az éles látást ekkor azzal biztositjuk, hogy a függélyző mögé, l. 90. ábra égő bányamécset tartatunk, a mécs és a súly közé pedig olajozott papirt, vagy lakkal itatott perkált, ez utóbbit l. 91. ábrát legczélszerűbben a selmeczi ernyőre feszitjük. Ez 20—30 *cm* átmérőjü és 4 *mm* vastag drótból készitett gyürü, melyre a perkált ruganyos *FF* karikával reáfeszitjük. E jelölést füstnélküli tiszta levegőben látócsövünk nagyitása szerint, 50—100 *m*-nyi irányzatokig használhatjuk. Mérésünk sikere követeli azonban, hogy a függősúlynak a hegye függőszálának a tengelyvonalába essék.

2. Hosszabb irányzatok bemérésére, vagy akkor is ha földalatti folyosóink füsttel telvék, inkább a Weiszbach-féle függőlámpát alkalmazzuk, l. 92. ábrát, *B* hengeralaku olajtartója, mely patkóalaku *m* rézpánttal úgy van felfüggesztve, hogy *B* olajtartó t_1 t_2 vizszintes tengely körül szabadon fordulhasson, de egyszersmind hogy lángjának függőleges középvonala *h* függőszálnak középvonalába is essék. Mérés alkalmával bevágatjuk a látócsőnek függőleges pókszálát a láng függőleges középvonalára.

Ha állandósitott szögpontokkal mérünk, akkor felfüggesztett czélponttal a leggyorsabb mérést biztositjuk, azonban a folyosók erősebb légárama mérésünk pontosságát csökkentheti e jelek lengése által.

3. Hol nagyobb a légáram ott a pontosság szempontjából, állólámpa ajánlhatóbb. Weiszbach állólámpáját l. 93. ábrát, kör-

alaku TT tárcsra állitjuk, mely ott ráforrasztott karikában központos helyét találja. A műszer részére, mely elébb vagy utóbb ugyan csak oda helyezendő, három $\delta\,\delta$ csátorna van a tárcsán, a hová a szintező csavarait állithatjuk. Hogy TT tárcsának vizszintes állását is biztosithassuk, erre szolgál $s_1\,s_2\,s_3$ szintező csavar. E jelző készüléket állithatjuk feszitőre, oldalkarra, vagy háromlábu állványra is, de gyorsabb mérés csakis igy biztositható, ha veszitett szögpontokkal dolgozunk.

4. A hátulról megvilágitható czéltábla a legköltségesebb jelzőeszköz, l. 94. ábrát. MNa 14–16 *cm* átmérőjü lemeztábla négyzetalaku kivágással, melyet $V_1\,V_2$ vizszintes tengelylyel úgy helyezünk PD tartóba, hogy vizszintes tengelye kivágásának vizszintes átlójával egybe essék, függőleges átlója pedig h oszlopnak függőleges tengelyében álljon. Szabályos felállitására három a használt theodolitnak teljesen megfelelő $q_1\,q_2\,q_3$ szintező csavarra támaszkodik, melyekkel l szelenczés libelláját bevágatjuk. A négyzetalaku kivágás hátúl porczellán üveggel lesz befedve és onnan megvilágitva. Ez a legegyszerűbb czéltábla, mely több fényt bocsát a látócsőbe mint, ha sok czifrasággal szerkesztjük. Hogy ugyan e czéltáblát rövidebb azaz 6—7 *m* hosszú irányzatokra is alkalmazhassuk, kifeszittetünk még $b\,c$ és $d\,e$ czérnavastagságú drótokat. Vizszintes szögek mérésére bevágatjuk a látócső függőleges pókszálát a czéltábla függőleges átlójára; magassági szögek mérésére a vizszintes pókszálat a vizszintes átlóra vágatjuk be.

A czéltábla úgy van szerkesztve, hogy a theodolit helyére szabatosan állithassuk, tulajdonságánál fogva gyorsan csakis veszitett szögpontokkal mérhetünk s ez is csak igy biztositható, ha legalább három állványnyal dolgozunk. A czéltábla előnye, hogy szél nem lengeti, továbbá hogy ezzel úgy vizszintes mint magassági szöget egyszerre be lehet mérni; hazai bányászaink nem alkalmazzák.

5. Az elektromos függőlámpa szerző szerkesztménye, l. 95. ábrát. Ezen kis izzólámpa f üveggömbjének 2·5—3 *cm*-nyi az átmérője, 5 6 *mm* hosszú szénpatkó fehér izzóvá válik, ha 6 voltos áramot vezetünk át rajta, CD a selyemmel elszigetelt két vezeték, melyek mindenike nagy hajlékonyság biztositása czéljából húsz darab 0·1 *mm* vastag rézdrótból áll. Utóbbi vezetékkel és MN fémpatkóval van a lámpa felfüggesztve. Ugyanis T

fahenger 0·5 kilogrammnyi δ ólomsúlylyal van megterhelve, hogy a vezetéket kellően kifeszitse; k_1 és k_2 a vezeték kapcsoló csavarjai.

A selmeczi elektromos jelzőlámpa robbanógázok jelenlétében valódi áldás a bányamérnökre. Alkalmazása nem veszedelmes és világa napfényű. Tehát az alig pislogó biztositólámpával össze sem hasonlitható.

Használatkor felakasztjuk e lámpát mint bármely függélyzőt a szögpont jelzőcsavarán: világitása czéljából vagy akkumulátorral, vagy kis szállitható dinamógéppel hozzuk kapcsolatba, melylyel tápláljuk. Ily kis dinamógép 50 frton kapható.

23. §. A bányászati mérőasztal.

Megfelelő theodolit hiányában e század kezdetén mérőasztalt is használtak földalatti mérésre. Sajátossága abban állott, hogy rajztáblája kisebb volt, mint a földmérő-é, tudniillik szélvonalai 0·5/0·5 *m*-rel voltak megszabva; beállitó készüléke pedig teljesen fémből készült. A bányászok ez asztalt úgy használták, hogy rajztáblája közepén pontot jelöltek ki, melylyel minden szögpontban felállitották, ily módon e pontban sugárkévét rajzoltak ki, mely az egymásra következő körületi szögeket egy csomópontban tüntette ki. Eltekintve az eljárás nehézségeitől és korlátolt pontosságától azt mondhatjuk, hogy a mérőasztal földalatti térségben már azért sem alkalmazható, mert rajza a haszonvehetetlenségig piszkolódik be. Ez okból indokoltnak tartjuk csakis rövid emlitését, a mennyiben külső mérésekre kivétel nélkül a Starke-féle mérőasztalt választjuk, melynek szerkezetét a geodézia első részéből úgy is ismerjük; lásd a Cséti-féle földméréstannak 94. §-át.

24. §. Szögrajzoló műszerek.

Szögek rajzolására műszerül használjuk a kompaszt szögfelrakó táblájában, a mint ezt a 16. §-ban fejtegettük, vagy használunk félkör alaku esetleg teljeskör alaku transzportört is, l. Cséti-féle földméréstan 123. §. Alárendelt pontosságuknál fogva ezeknek a bányászra nézve nagy fontosságuk nincs, mert tangensekkel kétségen kivül a szögrajzolásnak legnagyobb pontosságát biztositjuk. Az eljárást a geodézia első részéből ismerjük, l. a Cséti-féle földméréstannak 123. §-át.

HARMADIK FEJEZET.

Hosszúság és távolságmérők.

A bányász minden fontosabb távolságot, ha nem háromszögelésből ismeretes, közvetetlen hosszméréssel határoz meg. Ily czélokra mérőlánczot, mérőszalagot, mérőzsinórt vagy mérőrudakat használ.

25. §. A mérőlánez.

A harczhegységi bányász, mérései alkalmával mérőlánczot alkalmaz. Mérőláncza, l. 96. ábrát, teljesen sárgarézből készül, súlya sokkal kisebb mint a földmérőnek vasból vagy aczélból készitett mérőláncza; tagjai 1·5 *mm* vastag drótból, 0·2 *dcm* hosszúsággal vannak készitve, nyúlásuk az által van akadályozva, hogy ott hol a forrasztott és 3 *mm* vastag *c d e m* kapcsoló karikákhoz vannak kötve 4—5 *cm*-nyire összesodortattak.

Minden méter végét *f* lemez táblácska jelöli, mely egyszersmind ennek bevésett sorszámát tünteti ki.* E lánczot kifeszitik a kompasz-mérésnél a poligon oldal irányában, lásd *B*-től *G*-ig: hogy kellőleg megfeszithessék, lenzsineget kötnek azon *m* tagjára, mely *G* végponthoz legközelebb fekvő, és ezzel kötik *n* mérőcsavarra. Mérés alkalmával reá függesztik a fokivet, valamint a kompaszt is, hosszmérésük akkor *mn* távolságra szoritkozik, ez pedig 0·2 *m*-nél kisebb, úgy hogy magukkal vitt rövid mérőpálczával megmérhető. Az eljárás gyors, de pontossága nem versenyezhet zsinórral és rúddal foganatositott méréssel. Nálunk el nem fogadták.

26. §. Mérőszalagok.

Hozzávető mérésekre néha kenderszalagot is használunk, de oly feladatokra, a hol nagyobb pontosság biztositandó, csakis az aczélból készitett mérőszalag járja. Az aczél mérőszalag földalatti folyosóban sikerrel csak igy alkalmazható oldalak mérésére, ha ezeket a járópadlón kifeszitett mérőzsinórral kijelöltük és hoszszuságukat e zsinór mentén megmérhetjük. Eljárásunk hasonlit a mezőn foganatositott lánczmérés eljárásához, a reámért láncznak végpontját ekkor könnyen a padlóba vert drótszöggel jelöljük. Az alkalmazott szalagok hossza 10 vagy 20 méter.

A westphali szénbányászok aknák mélységeit 250 *m* hosszu aczél mérőszalaggal mérik.

E szalagok szélessége 15—20 *mm*, első 50 méterük deczi-méterig van alosztályozva, további részükön már csak a teljes méter van kitüntetve. A méter végét felismertető sárgaréz szögecs fején mindjárt a méter sorszáma is látható. Használaton kivül bádogszelenczében tartjuk, melynek központi tengelyére forgatóval kényelmesen ráfejtjük. Az ily mérőszalag 180 frton megszerezhető.

27. §. A mérőzsinór.

A mérőzsinór hosszméréseinkre igen fontos segitőeszköz, melylyel a megmérendő vonalat kijelöljük, ha szabatos mérését akarjuk biztositani. Készitésére a legjobb minőségü lenczérnát használjuk, melyből 12—15-öt először egy-egy zsinegbe egyesitünk és 3 ily zsinegből lesz a mérőzsinór összesodorva. Vastagsága 3—4 *mm*. A megrendelésnél azonban nem a vastagságot emlitjük, de méterenkénti sulyát; ez rendszerint 12—14 grammot tesz. Egy darabban 120—150, esetleg 200 *m*-re készittetjük. — A selmeczi bányászakadémia eddigi tapasztalatai szerint, mint legjelesebb forrást: a Vogel (Bécs, II. kerület, Augustenstrasse 32. sz.) kötélgyárost ajánlhatja, hol 150 *m* hosszu zsinór 7 frton megszerezhető. Használaton kivül fa- vagy könnyü vascsévékre fejtjük fel.

28. §. Mérőrudak.

A bányász — nevezetesen hazánkban — leginkább 2 *m* hosszu mérőrudat alkalmaz. Rudjait vagy fenyő, vagy juhar fábó késziti: főkellékük az, hogy egyenes rostu göcsnélküli száraz fából fürészeltessük. Beosztásuk, l. 97. ábrát, rájuk vésett vonalakkal van jelölve, és pedig: a méter deczimétег és czentiméter kitüntetésével; a milliméter szembecslésre van bizva. Az alrészek leolvasását a deczimétereknek számozása által könnyitjük. A czentiméteres beosztás gyakran csak a rúd végső deczimétерén van kijelölve. Rudjaink rendes keresztszelvénye derékszögü parallelogramma, melynek egyik oldala 20 *mm*, másika 35 *mm*. A rud végei lekopás ellen biztositandók; ez okból vas- vagy rézpántokkal veretjük körül; és pedig a fenyőrudat a 98. *B* a juharfa-rudat, a 98. *C* ábrában ránk látható módon.

Használat.

Két méteres rudakkal rendszerint bemért poligonjaink oldalhosszuságait mérjük meg, melyeket e czélból elébb az erősen kifeszitett mérőzsinórral kijelöltetünk, mi szabálytalan és szűk bányatérségben nemcsak nagy könnyitése feladatunknak, hanem néha az egyedüli módja, melylyel a követelt pontosságot biztosithatjuk. A hosszmérést két ruddal foganatositjuk; ezek mindenikét egy segéd kezeli. Az első segéd úgy illeszti rúdját a zsinórhoz, hogy kezdő határlapja a zsinór kezdőpontjára találjon, a rúd vége pedig a vonal vége felé közeledjék; folytatólag illesztetjük a 2-ik rudat a zsinórhoz, mely rud az elsőnek véglapjától saját hosszával ismét a vonal vége felé közeledjék; erre felemeltetjük az első rudat, hogy harmadiknak a második elé a zsinórhoz illeszthessük; igy folytatjuk e munkát a vonal végéig. Az utolsó rudat véglapjával mindig a vonal végpontjáig eresztjük, honnan kiindulva alrészeit az utolsóelőttinek végéig, tehát vissza felé haladva szoktuk beszámlálni.

A rudmérés pontosságát 20—30 *m* hosszu zsinóron, két méter hosszu ruddal Müller v. Hauenfels leobeni tanár 1 : 4000-nek veszi, mi kisérleteink nyomán csakis a legjobb mérésnek felel meg.

Időszükséglet.

Három begyakorolt munkással lehet kétórai idő alatt egy 200 *m* hosszu vonalat 30—40 *m* hosszu szakaszokra a theodolittal pontosan kitüzni, azon végig zsinórt feszittetni, hosszát egyszer ide, másodszor visszamérni és a kijelölt szakaszok végpontjainak még a szintkülömbségeit Stampfer-féle műszerrel is mérni.

Aknamérésre használunk még összetett fémrudat 5—6 *mm* vastag és 1 *m* hosszu aczél drótpálczákból, továbbá $1\frac{1}{2}$ *mm*-től $\frac{1}{2}$ *mm* vastagságig vas- esetleg aczéldrótot, melyekről azonban az aknamérés alkalmával szólunk.

Készülék a mérőzsinór kifeszitésére.

A bányaméréstan fejlődését figyelemmel kisérve többször találkozunk készülékkel a mérőzsinór gyors és kényelmes kifeszitésére. E készülékek sorában gyakorlati szempontból csakis a salgótarjáni szénbányákban használt zsinórfeszitőt tartjuk említésre méltónak.

Ugyanis Tarjánban lehetőleg hosszu, legalább 30—70 *m*-nyi poligonoldalakat iparkodunk alkalmazni és ezeknek hosszát, hogy a szállitást ne akadályozzák, lehetőleg gyorsan és egyenként mérik. Sajátságos eljárásuk igazolja tehát, hogy munkakimélés czéljából a mérőzsinór nem szabad kézből két munkás által feszittessék ki, hanem a 99. ábrában bemutatott zsinórfeszitővel. E készülék főalkotó része a 160 *mm* hosszu és 100 *mm* széles *cdef* vaskeret, melynek közepe táján 100 *mm* hosszu és 20 *mm* vastag *gh* tengely van elhelyezve. E tengely keresztbe van furva hosszának közepe táján, hol *lm* zsinórt átfűzvén *hi* forgatóval ráfejthetjük. A tengely egyik végén *g* akasztókerék van megerősitve, hogy ezt *n* záróékjével bármely helyzetben megtarthassuk. Használatát a theodolittal eszközölt poligonmérésnél ismertetjük.

29. §. Távolságmérők.

A bányamérés követelt pontossága rendszerint akkora, hogy távolságmérőt rendes feladatainkra nem használhatunk. Ezt inkább csak külső mérés alkalmával választjuk, midőn a bemért terület domborodottságát vizszintes terepvonalakkal kell kitüntetnünk. Ekkor is műszerünk álláspontjaiul háromszögelő vagy szabatosan meghatározott poligonpontokat választunk, honnan a további részletpontokat, a sarkponti mérés módján, Reichenbach-féle távolságmérővel kötjük hozzá.

NEGYEDIK FEJEZET.

Magasság és szintkülömbségmérők.

A közvetetlen magasságmérésre, nehány az aknamérésnél megbeszélendő segitőeszköz kivételével, csakis azokat a hosszmérő eszközöket használjuk, melyeket a megelőző fejezetből ismerünk. A háromszögtani magasságmérésre alkalmazhatjuk a fokiveket, vagy a theodolitot. Igy külön tárgyalást e helyen csakis a szintmérés eszközei követelnek.

30. §. Talphágásmérők.

Munkásnak esetleg felőrnek, a talphágás szabályozására és ellenőrzésére egyszerű készüléket adunk, melylyel ennek megszabott emelkedéséről könnyen meggyőződhetik.

A talphágásmérő, l. 100. ábrát, igen régi készüléke a bányásznak; fórésze a 2 *m* hosszu, 12—14 *cm* magas 2·5 *cm* vastag *gh* mérőlécz; mind két végén 0·5 *m* hosszú *gi* és *hk* lábakkal, melyek alsó végét kopás ellen vasalással védjük. A mérőlécz közepén 0·5 hosszú, 10 *cm* széles léczet erősitünk meg, hogy azon *Ts* függélyzőt felfüggeszthessük; utóbbinak az állását biztositjuk *bc* és *ef* vaspántokkal.

Kelléke az, hogy függélyzőjének szála akkor vágjon be *mn* rézlapnak kijelölt indexvonalára, ha *i* és *k* lábai egy azon vizszintes síkban állanak. Ezt úgy vizsgáljuk, hogy karót veretünk a földbe megfelelően két lábának; erre állitjuk a megvizsgálandó hágásmérőt; ha függélyzője most nem vág az indexvonalra. Karói egyikét addig veretjük a földbe, mig függélyzőnk bevág; folytatólag megforditjuk e készüléket, hogy lábai támasztó pontjaikat felcseréljék. A függélyzőnek netaláni eltérése most indexhibájának kétszeresét adja; ezért eltoljuk az indexvonalat tartalmazó lapkát a függélyző fél eltérésével; az eltérés második felét azzal tüntetjük el, hogy az egyik karót mélyebbre veretjük. Kiigazitott hágásmérővel emelkedést úgy tűzünk ki, hogy hátulsó lába alá akkora vaslapot helyezünk, melynek vastagsága a 2 *m* utáni emelkedésnek megfelel. Pontossága korlátolt, erősebben szellőzött folyosókban épen hasznavehetetlen; a legkedvezőbb esetben 0·00025-nél kisebb esés alig felismerhető. Nagyobb szabatosság biztositására függélyző helyett talpas libellát erősittetünk a lécz közepére; ekkor pontossága a libella érzékenységétől függ. Ha libellája úgy mint a mérőasztalon használt libella osztóvonalanként hat szögperczes hajlásszöget mutat, akkor ily léczczel legalább még 0·00006 esés meghatározható, azaz 100 méter hoszszuságra 6 milliméter.

Ha ily libellás léczczel szintkülömbségeket akarunk pontosabban mérni, akkor hosszát néha 4 *m*-re is nagyobbitjuk; mind a két végéhez 1·5 – 2 *m* hosszu, és czentiméterekre beosztott léczeket illesztetünk. Ezt rendszerint egy-egy segéddel szabad kézből szorittatjuk oda. A szintkülömbséget akkor a két leolvasott l_1 és l_2 lécznek a külömbzeteiből vagy összegeiből találjuk a szerint, a mint magassági rendszálaink egy vagy két irányban terjeszkedtek. A 101. ábrában vázolt esetben $s_1 = l_1 - l_2$. A 102. ábrában feltüntetett esetre $s_2 = l_3 + l_4$.

31. §. A közlekedő cső.

Földalatti térségekben, melyek emelkedése és tágassága nagyon változó, gyakran oly viszonyok állanak elő, hogy 2 *m* hosszu libellás léczczel a szintkülömbségeket mindenütt meg nem határozhatjuk; ily esetben a 103. ábrából látható közlekedő cső czélszerünek bizonyult. Alkotó részei a 3—5 *m* hosszu *cd* kaucsuk cső, melynek végeibe a 0·4 *m* hosszu üvegcsövet szorosan beledugunk. E csövet megtöltjük pirosra vagy kékre festett vizzel, a két bemérendő *B* és *C* pontba, czentiméter osztásu léczet állittatunk és melléjük illesztjük *m* és *n* üvegcsöveket. A csőben lévő folyadék egy $v\,v_1$ nivólapot jelöl ki, ha a kaucsuk csőben szabadon közlekedhetik, igy leolvashatjuk l_1 és l_2 léczmagasságokat, hogy l_1—l_2-ből a szintkülömbséget találjuk.

E mérés nem versenyezhet sem pontosságra, sem gyorsaságra a libellás léczczel.

32. §. A szintmérő műszer.

A bányamérnök úgy külső, valamint földalatti mérésre, ha csak lehetséges, szintmérő műszert alkalmaz. Nálunk, mint legczélszerűbbnek ismert készülék, kivétel nélkül a Stampfer-féle műszer használtatik. Stampfer, a bécsi műegyetem néhai tanára három műszert szerkesztett:

1. Kicsinyt, az ugynevezett zsebműszert, kisebb pontosságu adatokra és gyors mérésre.

2. Középnagyságu műszert, mely a legelterjedtebb és már igen kényes feladatoknak képes megfelelni, l. 104. ábrát. Ez földalatti mérésre a legczélszerübb, mert rövid irányzatokra is alkalmazható.

3. Nagy szintmérő műszert, mely a legfokozottabb követeléseknek nemcsak a mérés, de még a rectificátió tekintetében is képes megfelelni, azonban csak 7 *m*-nél hosszabb irányzatokra alkalmazható.

A műszer pontossági felszerelését illetőleg emlithető, hogy alkalmazunk műszereket, melynek látócsöve 15—20—35-szörösen nagyit, libellája ekkor osztóvonalanként 20"—15"—5" dülésszöget mutasson.

Stampfer középnagyságu szintmérője.

Igaz, hogy minden bányamérnöknek a geodézia első részével tisztában kell lennie, hol e műszert is* alaposan tárgyaltuk,

* Lásd Cséti Földméréstanát 166., 167. és 168. §-át.

de a műszer fontosságánál fogva mégis nélkülözhetetlennek tartjuk a legszükségesebb tudnivalók ismétlését.

E műszer, l. 104. ábrát, szintkülömbségeken kivül még vizszintes, valamint magassági szöget, sőt távolságot is mér.

$M_1 M_2$ látócsöve, $A l_1$ és $l P$ a látócső tartói, C mikrometercsavar a látócső hajlitására, esetleg távolságmérésre; $A P$ az alhidádát képviselő kar, K a műszer limbusköre, G az alhidáda kötőcsavara, g forgató csavara, H a műszer állványhüvelye, F ezen hüvely szoritó csavara, s_1 s_2 két szintező csavara, s_3 a támasztó rugója, l_1 l_2 a libella és i ennek igazitó csavara.

A műszer kellékei.

1. Szabályszerüen felállitott műszer látócsövében a pókszálak egyike függőlegesen, másika vizszintesen álljon, sőt a nagy műszernél kivánatos, hogy e szálak metsző pontja a csőnek hosszszanti tengelyébe is essék.

2. A libella tengelye egyközüen haladjon a látócső irányzótengelyével.

3. Ismerni kell a mikrometer csavarnak azt a leolvasását, mely a libella és az alhidáda tengely kölcsönös merőlegességének felel meg.

4. Megfeleljen a mikrometer csavar mindazon föltételeknek, melyeket a távolság vagy esetleg háromszögtani magasságmérés céljából követelünk.

5. A limbuskörnek és noniusának pontos legyen a beosztása.

A libella vizsgálása.

Meglehetős sík és vizszintes területen 30—40 m hosszu vonalat tűzünk ki, l. 105. ábrán A és B pontot. E pontokban beosztott mérőléczet állitunk függőlegesen, ha lehet oszlophoz vagy falhoz erősitjük. A műszerrel először AB egyenesnek kimért C pontjában állitjuk fel, itt leolvassuk az A és B pontok $l_1 - l_2 = s$ szintkülömbségét. Ez még hibás műszeren is pontos, ha libellánk mindig szabatosan bevágott. Folytatólag D pontba állunk a műszerrel, melyet úgy választunk, hogy ez A-hoz lehetőleg közel, B-től lehetőleg távol essék. D pontban bevágatott libellával ismét mind a két léczet kell leolvasni; legyenek olvasásai l_3 és l_4. Ha most $l_3 - l_4$ más szintkülömbséget adna, akkor műszerünk hibás. Kiigazitását ekkor következőleg érhetjük el. A közelebb álló léczen kisebb lesz a hiba, mint a távolabb állón. Ez okból megengedhető, hogy a közelebbi lécz l_3 olvasását egyelőre hibátlannak tekintsük és a távolabbi lécz részére oly l_x olvasást számitunk ki, mely l_3-mal a középpontban talált $l_1 - l_2 = s$ szintkülömbséget adja. Itt tekintetbe kell venni a magasabb és mélyebb pontot is; azaz, ha C pontban B pont s-el magasabbnak találtatott, akkor l_x-et úgy kell kiszámitani, hogy most is s-el magasabbnak találtassék.

E kiszámitott l_x magasságra állitjuk be szintmérőnk vizszintes pókszálát az által, hogy látócsövét C mikrometer csavarral hajlitjuk. E beállitás folytán el fog térni a szintező buborékja; ezt bevágatjuk a szintező i igazitó csavarával. Igy a kiigazitás még nem teljes, de az eljárást most folytatni kell. Ugyanis megint az A ponton álló léczet irányozzuk meg bevágatott libellával, ekkor a libella szenvedett kiigazitása folytán leolvasásunk apró mennyiséggel el fog térni l_3-tól, azaz értéke l_5 lesz, és ha az előbb biztositott l_x olvasással s külömbzetbe fogjuk, igy $l_5 - l_x$ nem ád még pontosan s különbzetet, hanem igenis közelebb fekvő számot, mint $l_3 - l_4$ adott. Tehát ujból l_5-el oly l_y értéket számitunk, mely a B ponton álló léczen olvasva a valódi s szintkülömbséget adja. Erre vágatjuk ismét a látócső vizszintes pókszálát C csavarral, a libella buborékjának eltérését ugyancsak i-vel igazitjuk ki. Szóval folytatjuk az eljárást, mig e külső álláspontból műszerünk ugyanazt a szintkülömbséget adja, mit C közép álláspontból adott.

A mikrometer csavar első vizsgálása.

A mikrometer csavar azon leolvasása, melynél a libella tengelye merőleges az alhidáda tengelyén.

A műszer felállitására ismét szilárd, biztos talajt kell kikeresni, hol a műszer libelláját a szintező csavarok egyike fölé állitván, ezzel be is vágatjuk. Ugyanekkor leolvassuk a mikrometer csavar kezdő (c_1) állását. Erre a műszert alhidáda tengelye körül éppen csak 180 fokkal forditjuk tovább, miről a limbus leolvasása útján meggyőződünk. Ha ez állásban libellánk buborékja eltér, bevágatjuk a mikrometer csavarral, melynek állását c_2-vel leolvasva, számitás útján $C_s = \frac{c_1 + c_2}{2}$ nyerjük.

Ez utóbbi olvasásra állitjuk most a mikrometer csavart. Ekkor libéllánk buborékja el fog térni; ezt bevágatjuk a már használt szintező csavarral. A közölt eljárást azonban addig kell ismételni, mig a műszer libelláján a buborék két 180 fokkal külömböző állásban pontosan be nem vág. Csak ekkor áll a mikrometercsavar abban a helyzetben, melyben a libella tengelye merőleges az alhidada tengelyén. Eme *M* állását kell leolvasni és a műszer szekrényében feljegyezni, hogy szükségadtán ismerjük.

A pókszálak vizsgálása.

Ha a mikrometer csavar *M* leolvasását ismerjük, igy képesek vagyunk ezzel az alhidáda tengelynek függőleges, tehát limbus körének vizszintes állást adni.

Szilárd biztos talajon felállva, a földbe szurjuk a háromlábu állványnak két lábát, most a mikrometer csavart *M* állandóra forgatjuk, a libellát pedig ugy helyezzük el, hogy tengelye a két leszoritott lábnak összekötő egyenesével egyenlőközüen álljon. Folytatólag a 3-dik szabad láb előtt foglalunk állást, ugy hogy ez lábaink közzé essék, ekkor saját lábaink egyikével, az állványláb alsó végét, csusztatva a földön, jobbra vagy balra toljuk mind addig, mig a libella buborékja normál pontjára be nem vág. Ezután megforditjuk a műszert alhidadatengelye körül, mig libellája a szabad láb függőleges középsíkjában nem áll; most e harmadik állványlábnak a földbe való szoritása által bevágatjuk körülbelül a libella buborékját. Ezzel kiigazitottuk a felállitás durva hibáit. Szabatosabb beállitása már csak abból áll, hogy a libellát majd az s_1 szintező csavar és s_3 rugóra, majd csak s_2 szintező csavarra állitjuk és búborékját ezekkel be is vágatjuk. Ily módon lehet az alhidadatengely függőleges állását egész szabatossággal biztositani. A szabály szerint felállitott műszeren megvizsgáljuk a függőleges pókszál helyes állását az által, hogy ezt kiakasztott függélyzőnek kifeszitett szálával összehasonlitjuk. A vizszintes pókszál vizsgálására csúcsos jelre irányozzuk, és pedig úgy hogy e jelnek csúcsát épen érintse, és ekkor ide oda forgatjuk a műszert az alhidada tengely körül. A pókszál és a jel folytonos érintkezése helyes állásról tanuskodik.

A szintmérő további vizsgálásai nem oly közel fekvő szükség a bányamérnökre nézve, miért is ezek tárgyában Cséti földméréstan 169. §-ára utalunk.

Használat.

Földalatti mérésre feszitő állványon, nevezetesen a selmeczi feszitőn, vagy háromlábu állványán állitjuk fel. Utóbbi esetben a megelőző vizsgálatnál leirt eljárást követjük.

Rendszerint a középpontból eszközölt mérésmódot használjuk; ekkor pedig 8—9 foknál nagyobb dülésszögü folyosókban a szintmérő műszert már nem alkalmazhatjuk, mert látócsöveinkkel 5 méternél rövidebb irányzat mellett a lécz többé le nem olvasható.

33. §. **Szintmérő léczek.**

Földalatti térségeink korlátolt magassága arra kényszerit, hogy jóval rövidebb szintmérő léczekkel mérjünk, mint a földmérő. Nagyobb pontosságot biztositunk méréseinknek, ha a léczet nem a járópadlóra állitjuk, hol testünk sulyával támasztópontját eltolhatnók, ha erre lépünk, hanem czélszerűbbb a léczet mindig a vezérpont kajmós jelző csavarkájába, l. a 19. ábrát, felakasztani, igy mérésünk is biztosabb, mert a lécz állása mindig függőleges és teljesen nyugodt. Az eddig ajánlatba hozott szintmérő léczek sorából négyet tartunk emlitésre méltónak.

1. A Borchers-féle czéltáblás fémpálczát.
2. A westphali kőszénbányákban alkalmazott üvegléptéket.
3. A selmeczi szintmérő léczet.
4. A selmeczi szintmérő szalagot.

1. *A Borchers-féle czéltáblás fémpálcza*, l. 106. ábrát. BC az 1·4 méter hosszu, 4 *mm* vastag, 15 *mm* széles vaspálcza, felső végén csigolyában forgó vaskajmóval ellátva, a hosszán végig terjed, minden deczméternek ötödik czentiméterjét pedig feltünő pont ismerteti fel. A megirányozás czéljából 14 *cm* átmérőjü, 1·5 vastag vaslemez-tárcsával szereli fel Borchers. Kapcsolására m és n rézhurkok szolgálnak, melyekkel a pálczára fűzhetjük és p kötőcsavarral bármely helyzetben állandósithatjuk. Ugyane tárcsa két t_1 és t_2 négyzetes kivágással van ellátva és pedig úgy, hogy a szabadon függő pálczán egyik átlójuk vizszintes másodika függőleges legyen. A szintmérés fokozására még N nonius van a tárcsán, melynek milliméteres beosztásával a tárcsa helyzete milliméterig leolvasható, sőt még tizedmilliméterig is lebecsülhető. E nonius nullás osztóvonala és $t_1\,t_2$, vizszintes átlója egy vizszintes síkban szokott feküdni.

Használata igen egyszerü; a felakasztott léczen eltolatjuk lemez-tárcsáját addig, mig t_1 vagy t_2 vizszintes átlója szintmérőműszerünk reá irányozott vizszintes pókszála által fedve nem lesz. Ekkor értesitjük a segédet, hogy *p* kötőcsavarral állandósitsa. Rövidebb irányzatok, 8—10 *m*-esek, alkalmazása mellett, t_1 nyilást világitjuk meg hátulról, melyet ezen czélokra bágyadtra csiszolt üveglappal befödtünk, 40—60 *m.* hosszú irányzatokra t_2 nyilást világittatunk meg hátulról és ezt vesszük czélba. Előnye, hogy a tárcsa állása 0·1 *m.* még leolvasható, mig a többi mérőrúdnál a milliméter csak lebecsülhető. Hátránya a tárcsa hosszadalmas beintése, mit bányamécscsel kell végezni; továbbá, hogy leolvasását csak közelről és nem akkor, midőn a látócsővel megfigyeljük lehet foganatositani. Végtére az sem válik előnyére, hogy méréseinkkel csakis a bemért vezérpontot határozhatjuk meg közvetetlenül, nem pedig ennek megfelelő talppontját is. Ha a talp fekvését is akarjuk tudni, akkor külön mérőrudat, 1—2 *m.*-rest kell még magunkkal vinni, melylyel a nonius nullásvonalától le a talppontig mérünk.

2. A wesztphali kőszénbányák hites bányamérnökei, l. 107. ábrát, fél méter hosszú, 12 cm. széles, bágyadtra csiszolt üvegtáblát használnak, ezt *BC* fakeretbe foglalják, felső végén pedig épen a mérték hosszát követő súly-vonalában, *m* pontban kajmóval látják el, melylyel felakasztják. Beosztását fekete olajfestékkel festik reá, amint ezt ábránk mutatja.

Használata alkalmával úgy kell ez üveg-mértéket felakasztani, hogy nullás pontja lefelé álljon, továbbá oly mélyen is függjön, hogy látócsövünk vizszintes irányzó-tengelye ennek beosztott lapját valahol messe. E czélra szolgálnak *N, O, P* hosszabbitó rúdak, ezekkel lejebb bocsáthatjuk a szükséghez képest 0·2, 0·3, 0·5, 0·7, 0·8 vagy 1 méterrel is. A mérés alkalmával a bejegyezendő lécz-hosszúságot most úgy találjuk, hogy az üvegtáblának félméteres hosszát nagyobbitjuk a hozzá toldott rudak összes hosszával és ebből levonjuk az üvegmértéken olvasott hosszúságot. Leolvasása igen kényelmes, ha hátulról megvilágitjuk.

3. *A selmeczi szintmérő lécz.* Ezt szerző abból a czélból szerkesztette, hogy általa úgy a vezérpontok, valamint a talppontok beméréseit minden további mérőrúd nélkül lehetővé tegye. A mérőrúd, l. 108. ábrát, két 1·6 *m.* hosszú, 7 *cm.* széles, 2·5 *cm.* vastag *BC* és *DE* fenyőléczből áll. *BC* felfüggeszthető *F*

kajmóra, mely az összetett léczнek hosszirányú súlyponti vonalában van, ha ez szabadon függ. *DG* és *CH* vasalatja a két lécz egyesitésére való, ezekkel hosszát 1·6 *m*.-től 3 *m*.-ig bármikor változtathatjuk, sőt meg is rögzithetjük. Kitűzött czélunk biztositására oly beosztást kellett alkalmazni, mely a két léczet mindig egész biztosan megkülömböztesse, továbbá úgy kellett a számsort ráirni, hogy ezzel felülről lefelé, vagy alulról fölfelé lehessen mérni. Mind e feltételek kielégitése sikerült azáltal, hogy *BC* léczen a decziméter fehér számmal fekete mezőben felülről lefelé növő sorban lett kitüntetve; mig *DE* léczen a deczimétor fehér alapra irt fekete szám jelöli, melynek sora felfelé nagyobbodik. *BC* léczen a deczimétor végét és kezdetét kilenczven fok alatt képezett csúcs jelöli, ellenben *DE* léczen a reáfestett nagy négyzetek vizszintes átlói jelölik a főosztás kezdő vonalait. Az öt czentiméteres részt *BC* léczen kisebb beugró félnégyzet, *DE* léczen teljes négyzet vizszintes átlója jelöli. A czentiméteres beosztás mindkét léczen, ott, hol ezek egymáshoz simulnak, folytonos sort képez, mely felváltva fehér és fekete sávokból áll.

Használat.

A mérőléczet felfüggesztjük a bemérendő vezérpontban *F* kajmójára, mire saját súlyánál fogva függőleges állást vesz fel, ha szabadon mozoghat. Folytatólag megoldjuk *G* és *H* kötőket és leeresztjük *DE* léczet a mig csak lehet, ha czeruzánkat a járó padlón alája fektetjük. A lécz hosszát ekkor *GH* kötőkkel állandósitjuk. Igy biztositjuk a léczнek szabad függését és alsó távolságát a járó-padlótól vagy talp-kőzettől; ekkor ezt nem kell többé tekintetbe venni, ha az ott létrejött köz a léczнek minden felfüggesztése alkalmával ugyanannyi.

Ennek elérése után megirányozzuk a léczet, látócsövünk vizszintes tengelyállása mellett. Segédünk ekkor a lécz mellső lapja előtt lassan végig halad az égő mécscsel. A mécset megállitjuk, ha ama osztóvonalat legélesebben látjuk, mely látócsövünk vizszintes pókszálával esik össze. A leolvasásnál három eset állhat elő: vizszintes pókszálunk metszheti a léczet, l. 108. ábra, $\alpha\alpha$, $\beta\beta$ vagy $\gamma\gamma$ vonal tájékán; $\alpha\alpha$ és $\beta\beta$ esetben csak az egyik leszen olvasható. Ha az adat épen azt a magassági rendszálat adja, melyre szükségünk van, igy feljegyezzük. Ha pedig a pótló rendszál mérésünk tárgya, igy ezt csak számitás utján találhatjuk azaz ha a lécz teljes hosszuságából az olvasott hosszuságot levonjuk. Tudniillik nagyobb talphágással vájt földalatti folyosókban az idézett eset gyakran állhat elő, hogy a léczet $\alpha\alpha$-nál kell olvasni, midőn $E\alpha$ rendszálra van szükségünk. 108. ábrából következik $E\alpha = BE - \alpha B$. Máskor, ha csak $\gamma\gamma$ vonalon olvasható a lécz és $B\gamma$-át kell ismerni; ugyancsak az ábrából

$$B\gamma = BE - E\gamma.$$

Legkényelmesebb az eset, ha mind a két lécz egyszerre látható, péld. $\beta\beta$ vonalban; ily viszonyok közt $B\beta$ vagy $E\beta$ olvasunk le, a mint föladatunk épen követeli. Végül szólanunk kell még a teljes léczhosszuságnak meghatározásáról. Deczimétereit leolvashatjuk bárhol a léczen, hol mind a kettő együtt látható. Szóval a látócsőben épen látható fekete számu léczen leolvassuk a deczméternek a számát, ehhez adjuk a fehér számsoros léczuek azt a deczméter számot, mely magasabban áll az előbb olvasott számnál, végül hozzáadunk még egy egységet. Ha a lécz véletlen egyedül deczméterekben ki nem fejezhető, akkor a leolvasott számhoz még azon czentiméterek és milliméterek számát kell adni, a mely két leolvasott deczméternek végvonásai közt számlálható. A czentimétert tényleg megszámláljuk, a millimétert szabad szemmel becsüljük.

A selmeczbányai szintmérőszalag.

Az ugynevezett selmeczi szintmérőszalagot szerző első sorban utazással egybekötött mérésekre szerkesztette, hol hosszabb mérőléczuek a czipelése mindig kényelmetlen, főkép kocsin, de még maga a lécz is gyorsan megy tönkre. Szerkezetét a 109—114-ik ábrákban látjuk. PQ közönséges vászonszalag, hossza 3 *m*, szélessége 10 *cm*. A szalag először „horganyfehér“ lakkos olajfestékkel festetett reá, l. 109. ábrát. Deczméterjei felváltva fekete és fehér parallelogrammokkal, valamint a beleirt számokkal lettek kitüntetve. A deczméter további alosztályozására az egyes czentiméterekkel, jobbról-balról 5—5 czentiméteres sorok képeztettek. Igy nemcsak a fél deczméter azonnal látható, de még a czentiméterek beszámlálása, valamint a milliméterek becslése is igen könnyü és tökéletesen biztos.

A harmadik méter vége, l. 111. és 112. ábrát, a vastengelyü G szalagcsévén van megerősitve. Ugyanis a szalag kimélésére és biztos megerősitésére G vastengely hasábos része, két oldalt reácsavart DD fákkal hengerré van kiegészitve. A három alkalmazott 5, 6, 7 csavar eme oldalfák összefoglalására, valamint a szalag oda erősitésére is szolgál.

A szalag kényelmes használatát RR fémtokban való elhelyezése által biztositottuk, l. 109—113. ábrát. A tok hengeralaku, fala két R_1 és R_2 részből áll, egybekötésük az elzáró L tárcsák meg az ott alkalmazott csavarkákkal lett biztositva. A szalagcséve egyik G tengely csapja hosszabb, mi módon ez a tokból annyira kinyulik, l. 109. és 112. ábrát, hogy rajta MN forgató keresztbe szúrt sas-szöggel megerősithető. N a forgató kezelő csapja, M a megállitó vagy kötő csavarkája s megfeszitése által akadályozzuk a szalag le- és felfejtését. Igen fontos továbbá a felfüggesztett mérőszalagnak egyforma és megfelelő kifeszitése, mely czél biztositására FQ szalag kezdetén a ketté hasitott S vassúlynak két félhenger alakú része közzé van szorítva, továbbá 1 meg 2 csavarokkal, valamint 3 és 4 tüskékkel megragadva.

Talpszabályozó mérésekre felakasztjuk a mérőszalagot H fülkével minden vezérpont jelző csavarkájába. A szallagot ekkor S súlyával majdnem a járópadlóig bocsátjuk. Rendszerint kimérjük e közt, alája tett czeruzánkkal vagy más fával is, melyet azonban mindvégig be kell tartani.

Ezzel biztositjuk a mérőszalag függőleges helyzetét. A szalagon leolvasott hosszúsággal egyuttal ama magassági rendszálat kapjuk, melylyel tényleg a talpat mérhetjük be; csak a súly és a járó-padló közötti tér legyen egyenlő minden pontban.

Közönséges szintmérésre, hol csak vezérpontjaink szintkülömbsége forog szóban, a mérőszalagot S súlyával függesztjük fel; e czélból az utóbbit T-nél fúrással felszereltük. Ily módon alkalmazva magassági rendszálaink a vezérpontokat határozzák meg és pedig felülről lefelé haladó olvasásokkal. A mérőszalag tokja ekkor lefelé lóg és távolsága a járó-padlótól tekintetbe nem jön. Ha a mérőszalagot csak 10—15 m-nyi távolságról olvassuk le, ekkor füstnélküli tiszta levegőben megvilágitása hátulról történhetik, a mögéje tartott bányamécsesel. Hosszabb irányzatok bemérésére elülről világitjuk meg. Oly tárnákban, ahol élénk a légcsere, a közönséges mécs lángja mérőszalagunkat könnyen bekormozza, sőt a megvilágitás változó élessége mellett bizonytalan a leolvasásunk is. Ily folyosókban czélszerü a szalag megvilágitására fényszóró bádoglámpát használni; elől üveggel fedett kivágással birjon.

Összehasonlitás.

A mérőszalag minden esetre kényelmesebb, mint a selmeczi szintmérőlécz, pontossága pedig czélszerű kezelés mellett alig külömböző. A szalag egyedüli hátránya az, hogy hanyagul vagy ügyetlenül kezelve jóval könnyebben megyen tönkre, mint a lécz.

MÁSODIK SZAKASZ.

Bányamérések foganatositása.

Bányában használt mérésmódok.

34. §. Rendszer kiterjedtebb bányák mérésére.

A követendő eljárást egyszerü példával ismertetjük.

Legyen 114. ábra a felmérendő bányának függőleges metszete, 115. ábra pedig a vizszintes vetülete. A munkát vagy a külső, vagy a földalatti térségek mérésével kezdjük, azonképen amint az időjárás külső mérésre azonnal vagy később kedvező.

Minden bányának a föld felszinére nyiló pontjait, tároit és aknáit kell mindenekelőtt szabatos külső méréssel meghatározni. Ezért, ha csak lehet, összekötjük e pontokat háromszögeléssel; $l\,B\,H_{1\cdot2}$ és $S_{1\cdot2}$ pontokat 115. ábrában. $P_5\,P_2$ a megmért alapvonal; ez két háromszöggel legyen $P_3\,P_4$ oldalhoz kötve. Máskülönben főtörekvésünk oda irányul, lehetőleg egyszerü és kevés szögpontot tartalmazó, jó metszéseket biztositó háromszöghálót alakitani. Ha B táró-száj közvetlenül nem kapcsolható, mert fekvése rendszerint fedett, akkor poligonoldallal kötjük a hálónak legközelebbi, már e célra választott P_1 szögpontjához; $l_1\,P_1\,B$ kapcsoló vonalat. Ha lehetséges, összekötjük $P_1\,S$ és H pontokat közvetetlenül; igy csak egy háromszög a bemérendő. Csak akkor, ha a háromszögelés túlságos nagy pénzáldozatokkal járna, kapcsoljuk $P_1\,S$ és H pontokat poligonmérés segitségével. Ekkor mindenesetre eljárásunkkal a lehető legnagyobb pontosság biztositandó. Gyakran tehát ellenőrző poligont mérünk be e czélból.

A földalatti mérés alkalmával ugyancsak az emlitett főpontokat, a táró- és akna-szájakat kötjük össze legelső sorban, mely alkalommal a főfolyosókon végig haladva, a legrövidebb útat követjük. Ezek az úgynevezett fő- vagy elsőrangú poligonok, melyeket a legszabatosabb módon gyakran kétszer is mérünk. A

115. ábrában *BCDFH* továbbá *CERS* és *HFRS* egy-egy elsőrangu poligon. Az elsőrangu poligonban, hol ez mellékfolyosóval, siklóval vagy a fejtő helyig terjedő járattal találkozik, bemért vezérpontot hagytunk hátra, honnan az utóbbi folyosókat és lefejtő helyeket meghatározó másodrangu poligonok indulnak ki. A másodrangu poligont egyszerűbb eljárással szoktuk bemérni, amennyiben kisebb pontossággal megelégszünk. Ha ily poligon két elsőrangu pontot köt össze, és záró-hibát mutat, ekkor ezt szerkesztés útján úgy szoktuk kiigazitani, mint a földmérő; l. Cséti földméréstan 123. §., mig elsőrangu poligonnak a hibáit kivétel nélkül számitás utján tüntetjük el. Másodrangu poligon látható 115. ábrában: *nltpx* és *nltvF*.

Ha igy a vizszintes vetületet bemértük, következik a tárók és folyosók szintezése, a lejtőaknák, siklók magasságmérése, végül pedig a függőleges aknák mélység-mérése. Ez az egyedüli mód arra, hogy a legkisebb költséggel a legnagyobb pontosság biztositassék.

A részletes szabályokat ezen mérések foganatositására, valamint az ezekkel járó számitások megejtésére, további tárgyalásainkban fejtegetjük.

35. §. Poligonmérés kompaszszal, fokívvel és zsínórral.

A bányász legrégibb mérésmódja kétségen kivül a kompaszszal foganatositott poligonmérés. Alkalmazása jelenben már korlátoltabb; rendszerint csak oly bányában alkalmazzuk, hol vasut nincs.

A munkát az állandósitott vezérpontok kijelölésével kezdjük. Vezérpontot alkalmazunk akna- és táró-szájakban, vagy azokhoz lehetőleg közel; továbbá rakodókban, a folyosók minden elágazó pontjában és feltáró műveleteknél a vájat végpontjában. Ahol szükséges, a magasságmérésre külön vezérpontokat állandósitunk; pl. szintjelző szöget a táró szája előtt, közel az akna torkolatához, valamint a rakodókban is.

A tulajdonképeni mérés a mérőzsinór kifeszitésével veszi kezdetét, mely czélból ezt a szögpontokban elhelyezett mérőcsavarokra kötjük. Az első csavart vagy közvetetlenül a kezdőpontba tesszük, vagy ennek függélyzője alá; pl. a járó-padlóba, vagy kivert feszitőbe is. E kezdőponttól folytatjuk a zsinór kifeszitését veszitett szögpontokkal a legközelebbi vezérpontig, mely alkalommal ezt majd a folyosó bal, majd jobb oldalára kötjük meg, amint czélszerűbbnek vagy szükségesnek bizonyul. Szabály a zsinórt úgy kötni a mérőcsavarra, hogy ennek összejövő *bd* ágai *C* szögpontban egymást érintve keresztezzék; l. 116. ábrában *bCd* keresztezést. Az egyes oldalak, esetleg zsinór-szakaszok hosszát 25—30 *m*-ig választhatjuk, ha a bemért pontok szintkülömbségeit más módon mérjük be. Másodrangu poligonban az oldal hossza gyakran 50 *m*-re is szabatik. Ez esetben magassági rendszálát a fokívvel meghatározni nem lehet: legfeljebb a Borchers-féle fokivvel.

A magassági viszonyokat mainap rendszerint külön megejtett szintméréssel határozzuk meg. A vizszintes vetület pontosságát, ahol csak lehet, az által fokozzuk, hogy az oldalakat lehetőleg hosszúra nyujtjuk, 80—120 *m*-re. Ily esetben az oldalt több közbevert feszitővel 20—30 *m* hosszú alrészekre osztjuk, melyek hosszát és dülésszögét egyenkint megmérjük. Kivánságunk ekkor, hogy a zsinór szakaszai a kezdő- és végpontot egy függőleges síkban kössék össze. E hosszú oldalak kijelölése a 117. és 118. ábrában látható. *B* és *C* szögpontokból függélyzőt bocsátunk le, folytatólag *defg* pontokon feszitőket veretünk; e feszitőkön kijelöljük a bemérendő vonal függőlegesét oly módon, hogy mindenekelőtt *d* és *g* feszitőkön a mérőzsinórt nagyon lazán kihúzva, addig jobbra vagy balra toljuk, mig a zsinór mind a két *BC* függélyzőt egyazon oldalon könnyedén érinti; ha ez megvan, akkor a zsinórnak ezen helyzete a többi *ef* feszitőn kézi függélyzővel jelölhető ki. Elvégre minden pontba mérőcsavart tétetünk, mely csavarokon a zsinór annak rendje szerint kifeszithető.

A zsinór legnagyobb feszültsége, ha két erős munkás kifesziti, 40 kilogrammal lett megmérve.

A mérés sorrendje.

A kifeszitett zsinórra legelőször a fokivet akasztjuk, mert kezdetben képviseli a zsinór az összekötő egyenest a legtökéletesebben. A fokívet felakasztjuk a zsinór közepére, mit szembecslés útján határozunk meg. A lelógó hajszál helyzetét a fokíven ± 3 szögperczny pontossággal szoktuk megbecsülni. Csak a Borchers-féle fokív tehet itt kivételt, hol a zsinór dülőszöge ± 1 szögperczny pontosságig meghatározható.

A zsinór hosszmérése.

Hosszának mérésére két darab két méter hosszú mérőrudat használunk, melyeket egymás elébe a zsinórhoz szoritva illesztünk. A harczhegységi bányász, amint ezt a hosszmérő eszközöknél emlitettük, zsinór helyett könnyű mérőlánczot használ, mely azonban csak kisebb pontosságot biztosithat, sőt az a hátránya, hogy minden oldalt egyenkint kell kifeszittetni, mely hátrány a hosszmérés egyszerüsitése által ellensúlyozva nincs.

A kompasz felfüggesztése.

Mint befejező teendőt felfüggesztjük a kompaszt a mérőzsinóron; ezt rendszerint úgy tesszük, hogy indexvonalának északi vége mérésünk haladó iránya felé mutasson. A kompaszt nem a zsinór közepén függesztjük fel, sem igen közel a mérőcsavarok valamelyikéhez, mert első esetben mágnestűje sokáig lengne, második esetben tűje igen könnyen helyes irányából eltereltetnék. Mintegy 6–8 *m*-nyi távolságra a mérőcsavartól fel lehet a kompaszt függeszteni.

A feljegyezett csapásszöget mindig a tűnek északi végére viszonyitjuk, miért is a fokokat eme tűvég állása után olvassuk le; a további alrészekre nézve mind a két tűvéget olvassuk, ekkor feljegyezzük e két olvasásnak számtani közepesét. Az adatot órák, fokok és tizedfokokban irjuk az alábbi jegyzőkönyvbe.

A kompaszmérés jegyzőkönyve.

A bemért bánya neve: Isten-áldás-táró.								Jegyzék és vázlatos rajz
Sorsz.	Fokív			Zsinór mm.	Kompasz			
	±	°	′		*h*	°	$^1/_{10}$	
1	+	2	12	26248	16	6	3	140. sz. műszer 7° 14′ nyugati elhajlás.
2	—	1	48	35795	20	7	4	Jankó József mérnöksegéd 1892-ik évi
3	+	3	06	36982	10	5	1	julius 10-ikén.

A jegyzőkönyvbe felveendő a bemért bánya nevén és a felmérés idején kivül, a használt kompasz jelző száma, a mágnestű declinátiója, s a mérnök neve; továbbá minden nevezetesebb adat, mely a térkép szerkesztésére útmutatásul szolgálhat. Ily szempontból igen fontos a felmért poligonnak és az ezzel meghatározott földalatti térségnek vázlatos rajza. E rajzban kötjük a poligon-oldalt végpontjával a folyosó megfelelő oldalfalához; kimutatjuk ugyan itt a térségbiztositás módját falazattal, ácsolattal, tömedékkel, esetleg vaskávákkal. Különösen feljegyzendő a térség kőzete, azaz meddőben vagy az érben haladt-e a folyosó és pedig ennek fekvő vagy fedő részében. Általában a folyosók vagy aknák geologiai viszonyait megfelelő részletességgel kell tanulmányozni és mindent feljegyezni, hogy azt a térképen ki lehessen tüntetni.

A bányamérés tökéletes jegyzőkönyve.

Minden önálló bányáról megfelelően vastag és bekötött könyvbe jegyezzük a reá vonatkozó összes méréseket. E könyv a bánya egyes részei, osztályai vagy érczerei szerint van szakaszokra osztva. Tartalma terjeszkedjék a mérés adataira és az ezekből kiszámitott összrendezőkre. Szokásban van a bemért pontok magasságát a tengerszintre viszonyitani. Aknák, tárószájak, guritók, siklók és folyosók elágazó pontjaiba telepitett vezérpontoknak a rendszálát piros tintával jegyezzük e könyvekbe, hogy gyorsabban feltalálhassuk. Mellékletül készitünk minden egyes főhorizont poligonjából apró mértékű rajzot; pl. 1 : 2000, vagy 1 : 5000, vagy 1 : 10000 szerinti mértékben. Ezekben kimutatunk minden hozzá tartozó guritót, siklót és aknát. A jegyzőkönyv mintáját alább mutatjuk be:

Sorszám	Fokív			Zsinór	Kompasz		Azímut			Vizszintes oldal	Vezérpont	Rendszál mm.			Jegyzet
	±	°	'	mm.	fok	$^1/_{10}$	fok	'	"	mm.		szélesség $\pm x$	hosszúság $\pm y$	magasság $\pm z$	

Némely mérnök e jegyzőkönyvbe még az egész számitást is bejegyezteti; ez czélszerű, de igen terjedelmessé teszi feljegyzéseinket.

36. §. Poligonmérés theodolittal.

Kőszén- vagy vasérczbányákban, hol a termelt nagy tömegek olcsó elszállitása czéljából minden folyosó vasuttal van felszerelve, mai nap a mérést csakis theodolittal ejtjük meg. Az eljárás kétféle. Mérhetünk veszitett szögpontokkal, úgy, hogy minden poligonban a kezdő és végső ponton kivül a többit csakis mérésünk tartamára jelöltetjük ki; vagy mérhetünk úgy is; hogy minden bemérendő pontot állandósitott vezérpontul kijelöltetünk. Ez eljárások elseje gyorsabb és olcsóbb munkát biztosit, minthogy ekkor a vizszintes szögek és oldalhosszúságok mérését úgyszólván egyszerre kell megejteni. Hátránya azonban, hogy a mérést csak a legközelebbi vezérpontból lehet folytatni; ha tehát ily pont elvész, akkor teljes poligonnal kell visszatérni. A mérés csupa vezérpontokkal valamivel költségesebb, de nevezetes előnye az, hogy eljárásunkkal nagyobb pontosság biztosítható, hogy ekkor a szállitás nincsen annyira megakasztva és végtére, hogy bármely vezérpontból uj kiegészitő mérést kiindithatunk.

Mérésünk sorrendje most is a következő: 1. A vezérpontok kijelölése; 2. a vizszintes szögek mérése; 3. az oldalhosszúságok mérése; 4. a szintkülömbségek mérése.

Vezérpontok kijelölése.

Vezérpontot állandósitunk aknák és tárók szájában, vagy azok közvetetlen szomszédságában, továbbá rakodókban, siklók és guritók kiinduló pontjaiban, nemkülönben folyosók elágazó pontjaiban is.

Ha minden szögpontot állandóbb módon kijelölünk, oda iparkodunk, hogy irányzataink legalább 30—60 *m* mérjenek, sőt munkakimélés és a pontosság fokozására az oldalakat, ha lehetséges, 150 *m*-nyire is terjesztjük.

A vizszintes szögek mérése.

Már a földméréstan első részéből tudjuk, hogy mennyire fontos a theodolit alhidáda tengelyét a kijelölt szögpontjainknak mindig éppen a csúcspontjába állitani. E szabály mellőzése nevezetesen rövid szögszáraknál veszedelmes hibaforrás. Számértéke a 119. ábra szerint kiszámitható. Legyen DBC a bemérendő szög, melynek bemérése alkalmával műszerünk nem D csúcspontjában, hanem a (δ) mennyiséggel félreeső E pontban áll. Akkor DE és CE egyenesek kijelölése által a megmért DEC szög van bemutatva, mely $\varphi_1 + \varphi_2$ szöggel kisebb vagy nagyobb mint DBC. Az ábrából következik azonban $\operatorname{tang} \varphi = \frac{\delta}{h}$

Apróbb szögnek tangense egyenlőnek vehető az ív hosszával is. E képlet alapján következik $\delta = 1$ *mm*-nyi külpontosságra

h	10 *m*	25 *m*	50 *m*	100 *m*
φ	20"	8"	4"	2"

Szóval, 20—25 méternél rövidebb irányzatra a műszer beállitó hibája a szög csúcspontjában ne legyen nagyobb $^1/_2$ *mm* esetleg 1 *mm*-nél, ha a szög eredményét 10 másodperczenyi pontosságig akarjuk biztositani.

A műszer felállitása.

Ha veszitett szögpontokkal mérünk, igen czélszerű három selmeczi feszitővel egyszerre dolgozni, amennyiben igy a szögmérés befejezésével azonnal a poligon oldalhosszát, sőt dűlésszögét is lehet mérni; ha az egyik feszitőn a 120. ábrában bemutatott czéltáblás lámpát használjuk. E lámpa úgy legyen szerkesztve, hogy négyzet alaku kivágásának *v v* vizszintes átlója ép oly magasan álljon a feszitőnek *SM* csapja felett, l. 121. ábrát, amint theodolitunk vizszintes forgástengelye áll, ha ugyancsak *SM* csapjára van fűzve.

Igy eljárva bevágatjuk a czéltábla megirányozása alkalmából a theodolit vizszintes pókszálát *v v* átlóra, ekkor leolvashatjuk a limbuson vizszintes szögeink megfelelő adatait, magassági körén pedig a később M_1-től M_2-ig kifeszitendő mérőzsinór dűlésszögét olvashatjuk le. Hosszát utólagosan, l. 121. ábra, *C*-től *D*-ig merjük meg kifeszitett zsinóron, tekintet nélkül M_1 M_2 csapok vastagságára.

Vagy dolgozhatunk három darab háromlábu állványnyal egyszerre. Ekkor a veszitett szögpontot mindig az állványnak köldök-csavaráról lelógó függélyzője jelöli ki, melyet a hosszmérés czéljából mindjárt a járópadlóra viszünk át és azt apró szeggel ki is jelöljük. A szögmérés alkalmával megirányozható az állványról lelógó függélyző, vagy esetleg a függélyző alatt már a járópadlóba vert jelző drótszög is. Ha a poligont csakis kijelölt szögpontokkal mérjük, akkor műszerünk felállitására egy selmeczi feszitővel, esetleg egy háromlábu állványnyal is megfelelhetünk.

A szög mérése.

Földalatti folyosókban minden szöget az egyszerű módon, de legalább két izben mérünk meg.

Legczélszerűbb a következő módon: ha a műszer I. számu noniusát nulla fokra beállitottuk, megkötött alhidáda-tengelyével limbustengelye körül addig forditjuk, mig látócsövünk irányzótengelye a hátulsó szögpontra nem vág; ekkor megkötjük limbusát is, hogy netalán a még szükséges apróbb beigazitásokra a limbuskör forditócsavarát még használhassuk. Folytatólag felszabaditjuk az alhidádakört, hogy tengelye forgatása mellett előre inditsunk irányzatot.

A műszer leolvasása. Fokokra mindig csak egy noniust olvasunk le, rendszerint az egygyel számozottat. Ezt fel is jegyezzük. A perczeket, esetleg másodperczeket azonban mind a két szemben fekvő noniuson kell leolvasni és számtani közepesét mint eredményt bejegyezni. A körületi szöget, mely mérésünk menetrendjének megfelel, minden poligonban úgy találjuk, hogy az előre inditott irányzat olvasásából a hátra inditott irányzatnak az olvasását levonjuk. Ha pedig az előre inditott irányzat olvasása valamikor kisebb mint a hátra inditott irányzaté, ekkor ezt 360, esetleg 400 fokkal kell nagyobbitani, mert ez arra vall, hogy az olvasott nonius eme osztópontot már meghaladta.

A fejtegetett eljárásnál a hátra irányzás alkalmával nullára állitottuk a noniust, igy tehát az előre inditott irányzat olvasása a megmért szöget minden számitás nélkül adja. A második mérést vagy áthajtott látócsővel ejtjük meg, midőn az I. noniust előbb 180, esetleg 200 fokra állitottuk be, vagy eljárhatunk még czélszerűbben úgy is, hogy a mérést most mint szögszorzást folytatjuk. Igy a végső leolvasás a megmért szögnek a kétszeres értékét adja, melyet már csak felezni kell, hogy maga a szög is meglegyen. Ez a legegyszerűbb és leggyorsabb eljárás, mert egy szögnek a kétszeres mérése csakis egy beállitást és két leolvasást követel. Egyedüli hátránya, hogy eredménye a kezdő beállitás pontosságától függ, melynek hibás voltára azonban rá lehet ismerni, ha a második mérés eredménye más mint az első mérésé. Sikerültnek tekinthető egy szögpontban a mérés, ha két eredménye nagyobb eltérést nem mutat, a mekkorát a leolvasás bizonytalansága megszabott. Meg nem tűrhető eltérés esetén egy harmadik vagy negyedik méréssel keressük a hibátlan adatot.

Mint legvalóbbszinü adatot használjuk mindig két sikerült mérésnek számtani közepesét. Bezárt poligonban meggyőződünk még szögmérésünk sikeréről azáltal is, hogy a megmért β körületi szögeinek összegét ezen összeg mennyiségtani feltételeivel is összehasonlitjuk.

Tudniillik $$[\beta] = 180\,(n \pm 2)$$

Mely egyenletben (n) a megmért szögpontok számát jelenti és az összeg (+) jele akkor veendő, ha a külső szögeket mértük, (—) jele pedig a belső szögekre veendő. Ily esetben sikerültnek tekinthető mérésünk, ha $[\beta]$ az előbbi egyenletet $m\sqrt{n}$-ig megközelíti, azaz ha szögmérésünk összes hibája ama szorzattal egyenlő, mely az egyes szögnek (m) mérőhibájából és a szögpontok (n) számából kivont négyzetgyökével képezhető.

Egy állványnyal és három jól begyakorolt segéddel naponta 25—30 szögpont is mérhető; három felállitó készülékkel és igen értelmes segéddel 35—40 megmért szög a legnagyobb napi eredmény. Ekkor azonban hosszakat nem mérhetünk.

Theodolittal megejtett bányamérésnek tökéletes jegyzőkönyvét a tulsó oldalon ismertetünk.

A 122. ábrában bemutatjuk eme mérés jegyzőkönyvéhez a vázlatos rajzot.

A poligonoldalak hosszmérése.

Már említettük, hogy czélszerűbb a vizszintes szögmérést először befejezni és utána a kijelölt vezérpontok közötti távolságot külön munkával meghatározni. Ezzel biztositjuk mérésünk pontosságát jelentősen, minthogy figyelmünk nincs annyifelé megosztva. Egyszersmind elősegitjük igy gyors folyását is, mert nem kell egyszerre annyi eszközt magunkkal szállittatni. Szóval ez az az eljárás, mely fontosabb mérésre hazánk mérnökei által leginkább alkalmaztatik.

A követendő eljárás általában kétféle lehet. 1. Kifeszittetünk 200—400 m zsinórt egyszerre, folytatólag megméretjük az ily poligonszakaszban az oldalakat egymásután. 2. Eljárhatunk úgy is, hogy minden egyes oldalt egyenkint kifeszitjük és hosszát azonnal be is mérjük. Utóbbi eljárás akkor a legelőnyösebb, ha a szállitást megakasztani nem szabad.

A gömörmegyei Vashegyen levő m. kir. vasbányák Péter-

Az oldal kezdő	Az oldal végső	Olvasás hátra °	′	″	Olvasás előre °	′	″	Körületi szög °	′	″	Azimut °	′	″	Oldalhosszuság mm.	Dülő szög °	′	Logarithmus	Vizszintes oldal mm.
														A külső mérés F-el jelölt háromszögelő				
														A külső mérés P_{19}-el jelölt ponigonpont				
F	P_{19}										74	20	32					84744
E	P_{19}	0	—	—	246	37												
P_{19}	1				493	15		246	37	30	140	58	02	18986	2	10	4·27843	18972
																	9·99969	
											39	01	58				4·27812	
P_{19}	1	0	—	—	180	44												
1	2				361	28		180	44		141	42	02	63718	1	40	4·80427	63693
																	9·99982	
											38	17	58				4·80409	
1	2	0	—	—	179	41												
2	3				359	22		179	41		141	23	02	53298	0	50	4·72671	53292
																	9·99995	
											38	36	58				4·72666	
2	3	0	—	—	178	33												
3	4				357	06		178	33		139	56	02	19104	2	35	4·28112	19084
																	9·99956	
											40	03	58				4·28068	
3	4	0	—	—	182	35												
4	5				365	10		182	35		142	31	02	19778	1	40	4·29619	19760
																	9·99982	
											37	28	58				4·29601	
4	5	0	—	—	226	19												
5	6				452	38		226	19		188	50	02	17875	5	10	4·25224	17802
																	9·99823	
											8	50	02				4·25047	

Piszmó tárója, felméretett 1893. aug. hóban N. N. mérnök által.

Logarithmus	Az oldal vetületei		Összrendezők		Vezérpont	Magassági méretsz. az Adria felett
$\triangle y =$ $\sin\alpha =$ $h =$ $\cos\alpha =$ $\triangle x =$	$\pm\triangle x$ cosinus mm.	$\pm\triangle y$ sinus mm.	$\pm x$ absczissa méter	$\pm y$ ordináta méter		mm.
pontja			+ 403·175	+ 460·644	F	566668
. . . .			+ 426·046	+ 542·244	P_{19}	565226
4·07730		+ 11948			1	A tárna szája
9·79918						
4·27812						
9·89030						
4·16842	— 14737		+ 411·309	+ 554·192	1	565550
4·59633		+ 39476			2	Légajtó
9·79244						
4·80409						
9·89475						
4·69884	— 49985		+ 361·324	+ 593·668	2	567380
4·52192		+ 33260				
9·79526						
4·72666						
9·89284						
4·61950	— 41640		+ 319·684	+ 626·928	3	568566
4·08935		+ 21113				
9·80867						
4·28068						
9·88383						
4·16451	— 14605		+ 305·079	+ 639·041	4	
4·08029		+ 12030				
9·78428						
4·29601						
9·89956						
4·19557	— 15688		+ 289·391	+ 651·071	5	569645
3·43678		— 2733				
9·18631						
4·25047						
9·99482						
4·24529	— 17591		+ 271·800	+ 648·338	6	570399

Szabályos folyosókban, hol a vasút emelkedése alig nagyobb 0·01-nál, következőkép járunk el: a vezérpontokat lefüggélyezzük a járópadlóra, hogy ott mérőcsavarokat elhelyezzünk. A mérőzsinórt kifeszitjük most vezérponttól vezérpontig és oldalaink hosszát megméretjük 10 esetleg 20 *m* hosszú, aczélból készitett mérőszalaggal. Igy eljárva, elhanyagolhatjuk a megmért vonal dűlésszögét.

Eljárásunk megitélésére kimutatjuk a bemért hosszegységnek Δ hibáját. Ha ily esetben az egyszázalékos esésnek megfelelő szögét: $0·01 = \text{arc}\,\delta = \text{arc}\,(0^0\,35')$ tekintetbe vesszük. Elhanyagolása által az oldal vizszintes vetülete $\Delta = 1 - \cos\,(0^0\,35')$-el hibás.

Ennek számértéke:

$$\Delta = 1·0000000 - 0·9999482 = 0·0000518$$

Szóval: 100 *m* hosszú oldalnak a hosszúsága 5·2 *mm*-rel hibás, vagyis hosszúságának 1 : 200000 részéig bizonytalan az ily módon megmért adat. E hiba elenyésző, a kétméteres léczekkel megmért zsinórhosszakkal szemben, mely 1 : 4000-ig bizonytalan, miért is minden aggodalom nélkül elhanyagolható.

Minden poligonoldalt kétszer kell megméretni; egyszer előre, másodszor hátra. És csak a két jól egyező mérésnek számtani közepesét szabad bejegyezni. A hosszmérés több beékelt feszitőfával gyors munkát biztosit, de költséges, mert sok fát rontunk el. Azonkivül elzárjuk folyosóinkban hosszabb időre a szállitás útjait. Onnen van, hogy csak oly folyosókban alkalmazzuk, hol szállitás nincs, és hol nagyobb talphágás a fokív használatára kényszerit. Azon eljárások sorából, hol fokívvel és két méter hosszú rudakkal az oldalak hosszát egyenkint és mégis olcsón, valamint gyorsan lehet meghatározni, a salgó-tarjáni részvénytársulat kőszénbányáiban alkalmazott eljárás érdemel nagyobb figyelmet, miért is a 123. ábrában vázoltuk. A bemérendő oldal 1, 2 vezérpontjaiból függélyzőt bocsátunk le. Ezektől valamivel külebb fekvő *C*, *E* pontokban könnyű kecskelábat állitunk fel; olyat, minőt a 12. ábrában részletesen ismertettünk.

Folytatólag a vonal hosszabbitásában a legközelebbi *B* és *F* vasuti talpgerendába kajmós szeget, esetleg mérőcsavart helyeztetünk el. *F* pontban megkötjük a mérőzsinórt, melynek második végét *E*, *C* kecskelábak gerinczfáin és *s*-nél a zsinórfeszitőt becsatolva, *B* végpontig fűzzük. Igy kifeszitjük most a mérőzsinórt könnyedén. Folytatólag félre toljuk a kecskelábakon addig, mig ez mind a két függélyzőt egy oldalról érinti. Ha a zsinór hossza csak 30 méter, akkor kifeszittetjük most erősebben és megméretjük fokívvel és rudakkal; hosszabb, pl. 60 -70 méteres oldalt előbb két részre osztunk. Ezt oly módon végezzük, hogy a lazán feszitett zsinórtól függélyzővel a talpra, esetleg főntjére áttérünk, l. D_1 vagy D_2 pontokba, hol kajmós szöget leveretvén, lefoglaltatjuk és erősebben kifeszittetjük. Ha a táróban esetleg csillék állanak, a zsinórt GK főntjében erősittetjük meg, alátámasztására pedig a kecskelábakat H és J pontokba állittatjuk. Szóval, akkor az eljárást úgy alkalmazzuk, hogy a zsinórral alakitott poligon 180 fokkal megforduljon. Igy a szállitó csille nem eshetik utunkba. Ekkor azonban gondunk legyen könnyű léczekből alakitott kecskelábakról.

A hosszmérés megfelelőnek tekinthető, ha két mérésnek külömbözete nem nagyobb, mint az oldal hosszúságának 4000-red része.

37. §. A poligonmérés rendszál-számitása.

Bányamérések térképrajzolására, de még inkább fontosabb kitűző feladatok vagy határkérdések lehető legpontosabb megoldására a bemért pontok összrendezőit számitjuk ki, melyek segitségével minden kivánt kérdésre számitás útján a valódi adatokkal szolgálhatunk.

Kiterjedtebb mérésre megválasztjuk mindenekelőtt a tengelyrendszer kezdőpontját. Ez rendszerint a bányabirtoknak jelentősebb pontja; pl. akna vagy táró külső nyilása. Régebben mindig a birtok közepe táján választottak kezdőpontot; ujabban inkább a birtoknak legdélibb és legnyugatibb fekvő pontját választjuk kezdőpontúl. Ekkor a vizszintes vetületi síkban csakis igenleges jelü összrendezővel lehet dolgunk.

Önálló kisebb feladat megoldására rendszerint a kitűzendő egyenes vagy kérdésben forgó határvonalnak kezdőpontját használjuk a tengelyrendszer kezdőpontjául.

A kezdőpont függőleges iránya képezi Z tengelyt, utána számitjuk a magasságokat vagy szintkülömbségeket, miért is összrendezőit magassági rendszálaknak nevezzük.

A vizszintes vetület tájékozására ujabban kivétel nélkül kezdőpontunk valódi délllője szolgál. A mágnesi délllő csak rövid időtartamra felelne meg. Onnan van, hogy még kompasz-mérést is a mágnestű declinátiójával a csillagászati délllőre viszonyitunk.

Ez okból a vizszintes sík absczissa-tengelye, melyet x-el jelölünk, kezdőpontunk déltől északnak haladó vonala; tevőleges $+x$ ága északnak, nemleges $(-x)$ ága délnek halad a kezdőpontból. Az ordinata tengely vizszintes és egyszersmint merőleges az absczissa tengelyén, $+y$ keletnek, $-y$ nyugatnak terjeszkedik. Tengelyeinek fekvése folytán az absczissákat szélességi, az ordinatákat hosszúsági rendszálaknak nevezzük, minthogy tényleg a földrajzi szélesség- és földrajzi hosszúságok irányaival egyenlőközüek.

Az azimutszög számitása.

A *kompaszmérés* valamely oldalának α_n azimuth-szögét úgy találjuk, hogy W_n csapásszögéből a mágnestű δ declinátióját levonjuk, ha ez északi sarkával a csillagászati déllőnek északi ágától nyugat felé tér el, és viszont e δ szöget W_n-hez kell hozzáadni, ha a mágnestűn keleti elhajlást megfigyeltünk.

Theodolitmérésnek rendszálszámitása csak annyiban különbözik a kompaszmérés számitásaitól, hogy nála a megmért (β) körületi szögekkel az oldalaknak azimutszögeit alábbi képlettel kell kiszámitani.

Az első oldalnak α_1 azimutszögét csillagászati megfigyeléssel határozzuk meg, úgy mint ezt a felső geodézia utolsó szakaszában tárgyaljuk.

Legyen $\alpha_2\ \alpha_3 \ldots . \alpha_n$ az egymásra következő oldalaknak azimutszöge; $\beta_1\ \beta_2 \ldots . \beta_n$ a poligonoldalaknak megmért körületi szögei. Igy a 124. ábrából következő egyenlet irható fel:

$$\beta_1 - 180 = \alpha_2 - \alpha_1\,;$$

ebből pedig: $\alpha_2 = \alpha_1 + \beta_1 - 180,$

mely törvény a többi oldalra is áll. Ily alapon irható

$$\alpha_3 = \alpha_2 + \beta_2 - 180^0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\alpha_n = \alpha_{n-1} + \beta_{n-1} - 180^0$$

Az általános egyenletből tapasztaljuk, hogy 180 fokot

$$\alpha_{n-1} + \beta_{n-1}$$

-hez kell adni, ha utóbbi összeg kisebb 180 foknál, különben negativ szögre térünk át.

Szóval egyenletünk általános alakja ez:

[19] $$\alpha_n = \alpha_{n-1} + \beta_{n-1} \pm 180^0$$

Szabályunk következőleg hangzik: Valamely poligonoldalnak azimutszögét úgy találjuk, hogy megelőző oldalának azimutszögéhez a szóban forgó két oldal kerületi szögét hozzáadjuk és ezen összegből, ha lehet 180 fokot levonunk; ha nem lehet levonni, akkor hozzá kell adni 180 fokot.

Az oldalak vetületei.

A rendszálakat most úgy számitjuk ki, hogy a poligonnak minden oldalát előbb a három összrendező-tengelyre vetítjük és az egynemü vetületeket algebrai módon összeadjuk. Azaz összeadjuk tekintettel az egyes vetületek előjeleire. Legyen a 125. ábrában: $h_1\, h_2\, h_3 \ldots .\, h_n$ poligonunk oldalhossza; $\gamma_1\, \gamma_2\, \gamma_3 \ldots .\, \gamma_n$ ezen oldalak dűlésszöge; $\alpha_1\, \alpha_2\, \alpha_3 \ldots .\alpha_n$ az egymásután következő oldalaknak azimutszöge. E jelölés alapján kifejezhető ezen oldalak függőleges vetülete:

$$\begin{aligned} \Delta Z_1 &= h_1 \sin \gamma_1 \\ \Delta Z_2 &= h_2 \sin \gamma_2 \\ \Delta Z_3 &= h_3 \sin \gamma_3 \\ &\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots \\ \Delta Z_n &= h_n \sin \gamma_n \end{aligned} \tag{20}$$

Az oldal függőleges vetülete, vagy két végpontjának szintkülömbsége találtatik, ha hosszát dűlésszögének sinusával szorozzuk. Előjelét ekkor + vagy (—)-sal vesszük, azonképen, amint ez mérésünk irányában emelkedett vagy esett.

Az oldalhosszúságnak v *vizszintes vetülete*

$$\begin{aligned} v_1 &= h_1 \cos \gamma_1 \\ v_2 &= h_2 \cos \gamma_2 \\ v_3 &= h_3 \cos \gamma_3 \\ &\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots \\ v_n &= h_n \cos \gamma_n \end{aligned} \tag{21}$$

Szóval: valamely oldalnak *(v)* vizszintes vetületét úgy találjuk, hogy *(h)* hosszát (γ) dűlésszögének cosinusával megszorozzuk.

A két vizszintes tengely vetületeit, azaz ΔX és ΔY találjuk folytatólag, ha *V* vizszintes hosszát α azimutszögének cosinusával és sinusával egyenkint szorozzuk:

$$\Delta X_1 = V_1 \cos \alpha_1 \qquad \Delta Y_1 = V_1 \sin \alpha_1$$
$$\Delta X_2 = V_2 \cos \alpha_2 \qquad \Delta Y_2 = V_2 \sin \alpha_2$$
$$\Delta X_3 = V_3 \cos \alpha_3 \qquad \Delta Y_3 = V_3 \sin \alpha_3$$
$$\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots$$
[22] $\Delta X_n = V_n \cos \alpha_n$ [23] $\Delta Y_n = V_n \sin \alpha_n$

Az absczissa- és ordinátatengely vetületeinek előjele „α azimutszögnek az értékétől függ, azonképen, amint oldalunk az első, második, harmadik vagy negyedik síknegyedben fekszik, úgy mint ezt az alábbi táblában összeállitottuk.

azimut	0°–90°	90°—180°	180°–270°	270°—360°
ΔX	+	—	—	+
ΔY	+	+	—	—

Ha végtére az egynemü vetületeket előjelükkel együtt, kihagyás nélkül a kezdőoldaltól valamely oldalig összeadjuk, akkor az utolsó oldal végpontjának a rendszálát találjuk.

Gauss Frigyes göttingai csillagász röviditett irásmódja szerint:

[24] $$X_n = \Delta X_1 + \Delta X_2 + \ldots . \Delta X_n = \rho \left[\Delta X_\rho \right]_{1}^{n}$$

[25] $$Y_n = \Delta Y_1 + \Delta Y_2 + \Delta Y_3 + \ldots + \Delta Y_n = \left[\Delta Y_\rho \right]_{\rho=1}^{\rho=n}$$

A számitásra meg kell jegyeznünk, hogy 90 foknál nagyobb (α) azimutszöget oly hegyesszöggé kell átszámitani, mely hegyesszög oldalunkat mégis mindig a déllőre viszonyitja. Ezt biztositjuk, ha az előbbi táblázat szerint járunk el.

Az azimut szögértéke	90°-tól 180°	180°-tól 270°	270°-tól 360°
A hegyesszög számitása	180°—α	α—180°	360°—α

Szóval: a második és negyedik síknegyedben levonjuk (α) azimutszöget 180, illetve 360 fokból; a harmadik síknegyedben 180 fokot vonunk le az azimutszögből.

Léteznek a hegyesszög átszámitására táblázatok is, melyeket hazai bányászaink nagy terjedelmüknél fogva, nem igen használnak.

Ugyancsak e szögszámitások kikerülése czéljából inditványba hozatott a kompasznak négy 0°-tól 90°-ig terjedő negyedkörre való beosztása is. De ezt el nem fogadták, mert ekkor le kellene mondani a szög folytonos számitásáról. A mérés alkalmával fel kellene jegyezni minden bemért irányzatnak síknegyedét is.

Szerző e szögreductiók czéljából hallgatóival a 126. ábrában vázolt diagrammot alkalmaztatja, melyen a hegyesszög azonnal leolvasható. Pl. legyen azimutszögünk $\alpha_2 = 134^{0}6$ fok. Ha ezt az alsó számsorban felkerestük, akkor czeruzánkkal *(m)*-ig jutunk; de ugyan e pontig leolvasunk a felső számsor szerint 45·4 fokot, mint hegyesszöget.

Hasonlókép találtatnék $\alpha_3 = 192{\cdot}4$ fokra *(s)* pontban 12·4 fok; nemkülönben $\alpha_4 = 296{\cdot}3$ fokra, *t* pontban 63·7 fok mint hegyesszög. A tényleges számitást a tökéletes jegyzőkönyvben foganatositjuk, úgy mint ezt a theodolitmérés jegyzőkönyvében bemutattuk. A számitás különleges jegyzéke az alábbi táblázatban látható.

1	2	3	4	5	6	7	
Sorszám	h = oldal γ = dűlés W v. β	Logarithmus hz . . . . cos γ	Szám V = vizszintes oldal $\alpha\,x$ azimut	Logarithmus ΔY sin α V cos α ΔX	Szám $\pm \Delta Y$ $\pm \Delta X$	Rendszál $\pm X$	$\pm Y$
1	36·460 3°10′ 149°38′	1·56182 9 99934 1·56116	36·050 30°22′	1·26851 9 70735 1·56116 9 93591 1·49707	+ 18·557 — 3··410		
2							

Az első rovatban irjuk a kiszámitandó oldal jelzőszámát, mely mindig végpontjának jelzőszámával azonos. A második rovatba a megmért oldal hosszát, dűlésszögét és csapásszögét vagy esetleg kerületi szögét irjuk és pedig úgy, hogy ez adatok egymás alá kerüljenek.

A harmadik rovatban kiszámitjuk az oldal vizszintes vetületét, mely czélból először az oldal hosszúságnak logaritmusát, alája pedig dűlésszögének log. cosinusát irjuk. Folytatólag vizszintes vonalat húzunk, alatta pedig e két logarithmus összegét mutatjuk ki.

A negyedik rovatban kimutatjuk most az előbb kiszámitott vizszintes oldal hosszúságának felkeresett számértékét. Alája az oldalnak kiszámitott azimutszögét és ennek a számitásra szükséges hegyesszögét irjuk.

Az ötödik rovatban kiszámitjuk az oldalnak két vizszintes ΔX és ΔY vetületét logarithmusokkal. E czélból minden oldal részére öt vizszintes sorra van szükségünk, melyeket vizszintesen huzott vonallal elkülönitünk. Ugyanis a harmadik rovatból átjegyezzük a vizszintes oldalhosszúságnak logarithmusát, ezt az öt vizszintes sor közbülsőjébe irjuk. Folytatásképen irjuk az azimutszög logarithmus sinusát föléje, alája pedig logarithmus cosinusát. Erre összegezzük a közepére irt log. v.-t egyenkint a föléje és alája irt szögfüggvény logarithmusaival. Igy eredményül fent log. ΔY-ont, lent log. ΔX-et találjuk.

A hatodik rovatba irjuk eme vetületeknek felkeresett számértékeit. Egyuttal kitüntetjük ott ezek előjeleit is, mely czélból minden oldalnak síknegyedét azimutszöge után biráljuk.

A hetedik rovatba elvégre az egynemü vetületeknek algebrai összegét irjuk, mindig a tengelyrendszer kezdőpontjától a szóban forgó oldalnak végpontjáig.

Mint logarithmus-táblát használjuk az egyes vetületek kiszámitására legczélszerübben *F. G.* Gauss-féle ötszámjegyü, Strien Jenőnél Halleban 1890-ben megjelent kiadását, mely úgy a körnek 360 fokra, valamint ennek 400 fokra való beosztására kapható. Csak hosszú záróvonalaknak azimutszögeit, vagy háromszögelések oldalhosszúságait szoktuk a Bremiker C.-féle hétszámjegyü logarithmus-táblával kiszámitani.

38. §. Határozott pontok egyenes összekötője.

A legfontosabb feladataink egyike két bemért pontnak egyenes vonalu összekötőjét hosszúságára és térbeni fekvésére meghatározni.

Általános megoldása a következő: Legyen a 127. ábrában 1 és 2 két térbenfekvő pont, melyek X_1; Y_1; Z_1; és X_2; Y_2; Z_2; rendszálait a megejtett poligonmérés adataiból kiszámitottuk; akkor első sorban e két pontnak *(T)* térbeni távolságát kérdezhetjük.

$$T = \sqrt{\Delta X^2 + \Delta Y^2 + \Delta Z^2}; \qquad \begin{aligned} \Delta X &= X_2 - X_1 \\ \Delta Y &= Y_2 - Y_1 \\ \Delta Z &= Z_2 - Z_1 \end{aligned} \quad \text{ezekkel}$$

$$[26] \qquad T = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2 + (Z_2 - Z_1)^2}$$

Ugyan-e két pont (*Tv*) vizszintes távolsága:

$$[27] \qquad Tv = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2}$$

Minthogy a szóban forgó pontok merőleges összrendezőit ismerjük, minden további számitásra derékszögü sík háromszöget szerkeszthetünk.

A [26] és [27] sz. egyenlet kifejezi a pontok távolságát az egynemü összrendezők külömbzeteinek négyzeteivel; a térbeni távolságot kapjuk, ha a térnek mind a három rendszálával ily módon a négyzetek összegét képezzük és ebből négyzetgyököt vonunk. A vizszintes távolság kifejezésére csakis az absczissák és ordinaták külömbözeteit vonjuk számitásba. A sorrend, melyben két egynemü rendszálat a külömbözet képzésére használjuk nem határoz, csak mindegyiknek saját előjele legyen tekintetbe véve: mert a sorrend megforditása által csak a külömbzet előjele, nem pedig számértéke szenvedhet változást, mely jelváltozás a négyzetre való emelés által érvényre nem kerülhet.

Tudnillik $\qquad (+a)^2 = (-a)^2.$

Az azimutszög számitása.

Eljárásunk a legczélszerűbb, ha az azimutszöget mindig α-val jelöljük és ennek alsó jobb oldalán a szóban forgó oldal kiinduló pontjának a jelző számát mutató-számul irjuk oda; végpontjának a jelző számát a felső jobb oldalán hatvány kitevő módjára kitüntetjük.

Eszerint $\alpha_1{}^2$ az (1, 2) oldalnak azimutszöge, mely ennek

(1) jelü kezdőpontjában megfelel; mig $\alpha_2{}^1$ ugyan-e (1, 2) oldalnak (2) kezdőpontjában megfelelő azimutszöge. E két szög sík poligonban mindig 180 fokkal külömbözik; szóval:

[28] $$\alpha_1{}^2 = \alpha_2{}^1 + 180$$

Hasonlóképen járhatunk el a dülőszög jelölésénél; $\gamma_1{}^2$ és $\gamma_2{}^1$ irhatunk, mélyek nagysága egyenlő, csak előjele különbözik; azaz:

[29] $$+\gamma_1{}^2 = -\gamma_2{}^1$$

A 127. ábrából találjuk (1, 2) oldalnak $\gamma_1{}^2$ dűlésszögét:

[30] $$tg\gamma_1{}^2 = \frac{Z_2 - Z_1}{\sqrt{(X_1 - X_2)^2 + (Y_1 - Y_2)^2}}$$

Szóval: a dűlésszög tangense tört; számlálója *a* végpont magassági rendszála, levonva belőle a kezdőpont magassági rendszálát; nevezője pedig a szóban forgó két pontnak vizszintes távolsága.

Ugyancsak a 127. ábrából következik (1, 2) oldalnak $\alpha_1{}^2$ azimutszöge:

[31] $$\text{tang}\, \alpha_1{}^2 = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1}$$

Az azimutszög tangense is tehát tört által lesz kifejezve; számlálója legyen a végpont ordinatája, levonva belőle a kezdőpont ordinatáját; nevezőjét az absczissák különbzete adja, melyeket ugyancsak oly rendben kell egymásból levonni, mint a számlálóban. Ha számlálóban és nevezőben nem a végső pont összrendezőit irjuk első tagnak, hanem a megforditott rendben irjuk, azzal az összrendezők előjeleit cseréljük fel, mert értéke a [31] egyenletből ered, ha ezt számlálóban és nevezőben (— 1)-el szorozzuk. Ez pedig a kezdőpontnak a végponttal való felcserélésével azonos, vagy másképen szólva, ekkor a szöget 180 fokkal változtatjuk. Ennek pedig a kitűzésnél, tudtunk nélkül megtörténni nem szabad, és azért nagyon fontos, hogy az előbbi szabályt az adatok felirásánál szigoruan kövessük.

A síknegyed felismerése.

Logarithmus táblából a kiszámitott tangensre mindig csak hegyesszöget olvashatunk ki; ez okból fontos, hogy az azimutszög számitásánál a tört számlálójának és nevezőjének előjeleit figyelemmel kisérjük, mert általuk az irány síknegyede ismerhető fel. Ugyanis valamely irány fekszik az

$$\text{ha a tört}\quad \begin{array}{cccc} \text{I.} & \text{II.} & \text{III. és} & \text{IV. negyedben,} \\ \frac{+}{+} & \frac{+}{-} & \frac{-}{-} & \frac{-}{+} \text{ előjelű.} \end{array}$$

Számitásunk alkalmával ez a szabály: a kiszámitott hegyes szöget levonjuk a 180 fok, esetleg 360 fokból, ha irányunk a második vagy a negyedik síknegyedben fekszik. A harmadik síknegyed irányainál 180 fokot adunk a logarithmus könyvből olvasott hegyes szög számértékéhez.

A dűlésszög előjele [30] egyenlet nyomán csakis a számláló összrendezőitől függ, azaz irányunk hág vagy esik a végpont felé, ha ezt szabályunk szoros betartása mellett (+) vagy (−) előjellel találtuk.

Példa: adva vannak a 117. és 118. számú pontok összrendezői. Kérdés, mekkora ezek térbeli és vizszintes távolsága; továbbá összekötőjük azimut- és dűlésszöge.

$$P_{117} \left\{ \begin{array}{l} x = -180 \\ y = +250 \\ z = +240 \end{array} \right. \qquad P_{118} = \left\{ \begin{array}{l} x = -370 \\ y = -650 \\ z = +249{\cdot}1 \end{array} \right.$$

A vizszintes Tv távolság a Gauss-féle logarithmusban lévő négyzettáblázattal így találtatik:

$$\begin{aligned} (Y_{118} - Y_{117})^2 &= (-900)^2 = 810000 \\ (X_{118} - X_{117})^2 &= (-190)^2 = \underline{\ \ 36100} \\ Tv^2 &= 846100, \end{aligned}$$

ha ennek kivont négyzetgyökét a táblázatban felkeressük, akkor $T = 919{\cdot}837\, m$. A térbeni távolságot úgy kapjuk, hogy Tv^2-hez még $(Z_{118} - Z_{117})^2$ hozzáadunk, és ez összegből a négyzetgyököt vonjuk.

$$\begin{aligned} Tv^2 &= 846100 \\ (Z_{118} - Z_{117})^2 &= \underline{\qquad 82{\cdot}8} \\ T^2 &= 846182{\cdot}8 \end{aligned}$$

ennek kivont négyzetgyöke $T = 919{\cdot}882\ m$. Tehát csak 45 *mm* hosszabb a térben haladó vonal vizszintes vetületénél. A 117 szögpontból 118 pontnak induló egyenes összekötőnek $\alpha_{117}{}^{118}$ azimutszög tangense a [31] egyenlet szerint:

$$\operatorname{tang} \alpha_{117}{}^{118} = \frac{-650 - 250}{-370 - (-180)} = \frac{-900}{-190}$$

Ennek logarithmusa:

ötszámjegyü táblából $\log 900 = 2{\cdot}95425$

$\log 190 = 2{\cdot}27875$

$\log \operatorname{tang} \alpha_{117}{}^{118} = 0{\cdot}67549$

Hegyes szöge $\alpha_{117}{}^{118} = 78^0\ 4'\ 45''$

Ugyanez 7 számjegyű logarithmussal:

$\log 900 = 2{\cdot}9542425$

$\log 190 = 2{\cdot}2787536$

$\log \operatorname{tg} \alpha_{117}{}^{118} = 0{\cdot}6754889$

Hegyes szöge $\alpha_{117}{}^{118} = 78^0\ 4'\ 45{\cdot}3''$ tang α-nak a számlálója és nevezője (—) előjelü, ebből tudjuk, hogy a 117 pontból kiinduló és 118 pontban végző egyenes a 3-dik síknegyedben fekszik, miért is előadott szabályunk nyomán a hegyes szöghez 180 fokot kell adni. Azimutszöge lesz tehát: $\alpha_{117}{}^{118} = 258^0\ 4'\ 45{\cdot}3''$.

Az egyenes dűlésszöge [30] egyenlet szerint

$$\operatorname{tg} \gamma_{117}{}^{118} = \frac{249{\cdot}1 - 240}{919{\cdot}837} = \frac{9{\cdot}1}{919{\cdot}837}$$

Ennek logarithmusa 5 számjegyü táblánál:

$$\begin{array}{rl} & 3\cdot \qquad -3 \\ (Z_{118} - Z_{117}) = & 0{\cdot}95904 \\ Tv = & 2{\cdot}96369 \\ \hline & 0{\cdot}99535 - 3 \\ \text{vagy} & 7{\cdot}99535 \end{array}$$

Szöge $\gamma_{117}{}^{118} = 0^0\ 34'\ 0{\cdot}2''$, vagy ha a szög apróságánál fogva tangensét ívével egyenlőnek vesszük, akkor $\log \operatorname{arc} \gamma = 0{\cdot}99535 - 3$ tehát $\operatorname{arc} \gamma = 0{\cdot}009894$ méter, melynek szögértéke $\gamma = 0^0\ 34'$.

Az emelkedést százalékokban úgy találjuk, ha $(Z_{118} - Z_{117}) : Tv$ és még 100-zal szorozzuk, tehát esetünkben $\operatorname{arc} \gamma \times 100 = 0{\cdot}9894$; szóval kereken egy százalék az emelkedése. Előjele (+) azért vonalunknak 117 ponttól 118 pontig hágása van.

39. §. Poligonmérés kompaszszal oly tárókban, hol vasut van lefektetve.

Inkább történelmi mint fontossági szempontból ismertetjük e helyen a bányásznak ama mérésmódját tárókban, melyet megfelelő bányászati theodolit hiányában, vas vagy mágneses mellékkőzet jelenlétében kompaszszal gyakorolt.

Az eljárás azon a tényen alapszik, hogy mágnestűvel a kompasz fordulatait, szögmozgásait mágneses testek jelenlétében is mérhetünk, ha a kompaszt csakis a tűnek forgástengelye körül forditjuk, szállitó mozgását pedig kizárjuk. Igy a tű és a vonzó anyagok kölcsönös távolsága mindig ugyanaz, tehát kölcsönös hatásuk sem lehet más. Szóval, ha a mágnestű forgástengelyével épen a megmérendő szögnek csúcspontjában áll, ekkor azzal két szögszárának iránykülönbségét a leolvasások külömbözeteiből találhatjuk. Megjegyzendő azonban, hogy igy az oldalakat egymásra viszonyitjuk, tehát körületi szöget mérünk, melynek pontossága azonban csak 6 szögperczny, tehát nagyon is alárendelt. Onnan van, hogy mai nap nem alkalmazzuk, vagy legfeljebb csak megközelitő adatok megszerzésére, és ezt is csak akkor, ha theodolittal nem rendelkezünk.

Ily czélból a mérőzsinór ágait úgy feszitjük ki, hogy azok egymást messék, illetve keresztezzék, l. 128. ábrában *BCDFFG* poligont, a megmérendő tárónak vizszintes vetületében. A keresztező pontokban összekötjük az érintkező zsinórágakat, hogy a kompaszt minden szögpontban először a hátra induló, utána az előre haladó zsinórágra akaszthassuk. A tű forgástengelye akkor ép a szög csúcspontjával egy függőlegesbe essék, mely feltevésről apró függélyzővel győződünk meg. Igy a hátra és előre haladó két zsinórágon tett Oh_1, Oe olvasások külömbzete adja a két zsinór által képezett $\alpha \beta$ . . . . hegyes szöget, mely szöggel elvégre minden oldalnak csapás-szögét ki lehet számitani, ha a poligonnak bármely oldalán a valódi csapást kompaszunkkal leolvashattuk. Ez utóbbi oldalt tájékozó oldalnak nevezzük.

A csapás-szög kiszámitása.

Legyen *BC* a tárón kivül kifeszitett tájékozó oldal, melyet oly hosszúra vettünk, hogy kompaszunk, ha *B* pontban felakasztjuk, már oly távolra essék a bányavasuttól, hogy irányának csapószögét biztosan leolvashassuk. Vagy fűzhetjük e mérést ily tájékozó irány megszerzése czéljából oldalfolyosóba is, melyben vasut nincs; szükség esetén fel is szakitlatjuk a vasutnak nehány sinpárját, hogy ott tájékozó oldalt bemérhessünk. Legyen tehát O_t a tájékozó oldal leolvasása, mely ennek valódi csapását adja. Igy bizonyos, hogy a következő *DE* oldal, *BC* oldal csapás-szögétől csak ama szöggel lehet nagyobb vagy kisebb, mely szöggel elfordult, és melyet mi az (1.) szögpontban a hátra forditott O^h és előre inditott O_e olvasáskülömbzetéből ismerünk.

A számitás czéljából $O_e - O_h$ képezendő; szóval az előre inditott O_e olvasásából levonjuk O_h hátra inditott irányzat olvasását. E különbzet előjele (+) vagy (—) leend, a szerint, a mint O_e nagyobb vagy kisebb O_h-nál. Ezt most előjelével együtt a tájékozó oldal csapó-szögéhez adjuk, akkor DE oldal $W_D{}^E$ csapószögét ismerjük. Mennyiségtani kifejezője ez:

$$[32] \qquad W_D{}^E = W_B{}^C + (O_e - O_h)$$

A keresztbe feszitett zsinórokkal foganatositott kompaszmérés jegyzőkönyve:

Sorszám	Fokív		Zsinórhossz *mm*	Kompasz				Külömbzet V hegyesszög			Valódi csapás		Jegyzék
				előre V_e		hátra O_h							
	°	1		fok	1/10	fok	1/10	±	fok	1/10	fok	1/10	
Tájékozó oldal											135	6	*T* old.
1	1	20	40763			135	4						a táró szá-
2				141	7			+	6	3	141	9	ján kivül.
2	1	30	25496			141	3						A kompasz
3				130	2			—	11	1	130	8	declinátiója
3	2	10	27560			130	1						7° 38' nyu-
4				134	8			+	4	7	135	5	gati

A tárgyalt eljárás a Reichelt-féle felfüggesztő-pálczával, l. 55. ábrát, vagy Penkert-felfüggesztővel l. 56. ábrát, kényelmesebb mérést biztosit, minthogy ezekkel a zsinórt csak közönséges módon kell kifesziteni. Egyedüli hátránya az, hogy a kompasz oly szögnek csúcspontjában, hol két zsinór nagyon külömböző dűlésszöggel találkozik, más és más magasságban függ a hátulsó és előre induló zsinórágon; más szóval a mágnestű távolsága vasutjaink vágányától egyazon szögpontnak két felfüggesztésében változó. Igy pedig zsinórágaink iránykülönbségeit biztosan nem mérhetjük.

40. §. Földalatti folyosók szintezése.

Minthogy a szintmérő léczeket és szintmérő műszereket a 32. és 33. §-ban ismertettük röviden tárgyalható eljárásunk a földalatti folyosók mérésére. A pontosság fokozása czéljából mindig a középből inditott vizszintes irányzatokkal mérünk; l. 129. ábrát. A léczet felfüggesztjük a vezérpontok jelző csavaraiban. A műszert majd a selmeczi feszitővel állithatjuk fel, úgy mint ez *I* pontban átható, majd háromlábu állványán, úgy mint K pontban. A Borchers-féle lécz vagy a vesztfáli üveglépték használatával a tárónak föntjét mérjük be, azaz alulról fölfelé terjedő rendszálakkal dolgozunk; mig ellenben a selmeczi szintmérőléczczel vagy szintmérőszalaggal is tetszésünk szerint akár a táró föntjét, akár talpát lehet közvetetlenül bemérni. Az első esetet B pontban, utóbbit C, F és G pontokban látjuk. A mérést a talpra állitott léczczel kisebb biztonságánál fogva nem vesszük tekintetbe. Pontjaink helyzetét a vizszintes vetületi síkban ugyis a már letárgyalt poligon-méréssel határoztuk meg, úgy hogy földalatti szintmérésnél csakis a pontok egymásra viszonyitott magasabb vagy mélyebb fekvése jöhet szóba. Utóbbi czélunk biztositására igen fontos oly szabálynak felállitása, mely az adatnak egyszerű feljegyzése mellett az eredmény kiszámitását minden félreértés vagy hibás következtetés kizárásával biztositsa, és pedig még akkor is, ha felmért pontjaink fekvéséről útbaigazitó vázlatrajzot nem készitettünk. Kivánságunk legegyszerűbben a már felállitott rendszerhez való ragaszkodás által biztositható.

Ugyanis ha a Z-vel jelölt függőleges tengely iránya szerint a kiinduló pontból a végpontig emelkedünk, akkor ez utat $(+Z)$-vel azaz tevőleges magassági rendszállal fejezzük ki; ha pedig a kiinduló ponttól a végpontig lefelé szállunk, azaz ha eséssel haladunk, akkor ezt $(-Z)$-vel, tehát negativ magassági rendszállal hozzuk kifejezésre. Továbbá azt kell még szigorú szabályul felállitani, hogy két szóban forgó pontnak helyes magassági rendszálát „előjelével együtt“ a léczolvasásokból csak úgy lehet kiszámitani, ha mindig a végpont léczolvasásából a kiinduló pont léczolvasását levonjuk, és ekkor mind a két léczolvasásnak előjelét is tekintetbe vesszük.

Felállitott rendszerünk megvilágitására bemutatjuk a 129. ábrában vázolt szintmérést a jegyzőkönyvbe irt számadataival. Könnyebb megértés czéljából bejegyeztük a számadatnak megfelelő $Z_1 \ldots Z_n$ léczleolvasásokat is, melyeket emezek a rajzban képviselnek.

A m. kir. Klinger-táró szintmérése 1892. szeptember 6-án.

Kezdő	Végző	Leolvasás *mm*				Kiszámitott szintkülömbség				A tenger szine felett *m*	Jegyzék
pont jele		±	kezdőpont	±	végzőpont	kezdő pont	végző pont	+ magasabb	— mélyebb		
K az összes tengelyrendszer kezdő pontja										625·432	Vezérpont a táró szája előtt
B	*C*	+	$Z_1 = 1247$	+	$Z_2 = 1136$	*B*	*C*		111		
C		+	$Z_3 = 1045$			*C*	*D*		2410		
D		—	$Z_4 = 1365$			*C*	*F*	297			
	F			+	$Z_5 = 1342$	*C*	*E*		2199		
	E			—	$Z_6 = 1154$	*D*	*G*	2759			
	G			+	$Z_7 = 1394$	*C*	*H*		2129		
	H			—	$Z_8 = 1086$	*D*	*H*	279			
						D	*E*	211			
						C	*G*	349			
						B	*G*	238			

A bejegyzett adatokból látszik, hogy mérésünk első álláspontjával *B* kiinduló ponttól *C* pontig haladtunk; folytatólag áttért a műszer *K* pontba, innen *C* és *D* volt a kiinduló pont olvasása, *EFG* és *H* pedig végső pontok olvasásai voltak.

Egy álláspontból bemért lécz-olvasásokat felülről és alulról vizszintes vonallal határolunk a jegyzőkönyvben. A mérésnél nagy gondot kell mindig arra forditani. hogy műszerünk libellája szabatosan normálpontjára vágjon, mielőtt a látócsővel lécz-olvasást teszünk. Ép igy fontos, hogy minden uj álláspontban legelőször az előbbi álláspontnak valamelyik végpontján oly lécz-olvasást szerezzünk meg, mely az átmenet folytonosságát biztositja. A szintkülömbségek számitásánál az előbb idézett szabályt alkalmaztuk.

Ily alapon találtuk BC szintkülömbségét $BC = Z_2 - Z_1$-ból,

$$CD = -Z_4 - (+Z_3) = -(Z_4 + Z_3)\,;\quad CF = Z_5 - Z_3\,;$$
$$CE = -Z_6 - (Z_3) = -(Z_6 + Z_3)\,;$$
$$DG = Z_7 - (-Z_4) = Z_7 + Z_4\,;$$
$$CH = -Z_8 - (+Z_3) = -(Z_8 + Z_3)\,;$$
$$DH = -Z_8 - (-Z_4) = -Z_8 + Z_4\,;$$
$$DE = -Z_6 - (-Z_4) = -Z_6 + Z_4\,;$$
$$CG = +Z_7 - (+Z_3) = Z_7 - Z_3\,;$$

Az átmenetet *B*-től *G*-re ugy számitjuk ki, hogy a talált egyes szintkülömbségek algebrai összegét képezzük.

$$BG = BC + CG = -111 + 349 = +238 \; mm.$$

Ugyancsak igy:

$$BH = BC + CH = -111 - 2129 = -2240 \; mm.$$

Irányzataink hosszúságaira részint feladatunk, részint folyosóink többé-kevésbbé átlátszó levegője szabja meg a határt. Használt műszereink látócsöveivel a léczet 4—5 *m*-nél rövidebb irányzat mellett leolvasni nem lehet. Talpszabályozásokra a magasságmérés állandositott vezérpontjait fönnebbi okból 10—20 *m*-nyi távolságokra helyezzük egymástól. Tiszta, tehát füst- és ködmentes levegőben az irányzat hosszát 60—70 méterig nyujthatjuk; ekkor leolvasásunk, ha léczeinket elülről megvilágitjuk, még mindig tökéletesen biztos. Szabatos szintmérésre azonban az irányzat hosszát még tiszta levegőben is 25—30 *m*-en túl nem igen alkalmazzuk.

41. §. A szintmérés pontossága.

Jordan, a karlsruhe-i műegyetem tanára kiterjedt kisérleteket tett, melyek a látócsőnek 35-szörös nagyitásánál és a lécz kellő megvilágitásánál az olvasás hibáját $1/3$ milliméterrel eredményezték. Ez adat alapján (l) méter hosszu irányzat Δh leolvasható hibája *mm*-ben kifejezve:

|33| $$\Delta h = 0{\cdot}0475 \sqrt{l} \; .$$

Mely mennyiséget, mint az elérhető legnagyobb szabatosságot kell tekintenünk, ha a leolvasást a látócsővel eszközöljük, és a czentiméteres beosztáson a millimétert 0·5 *mm*-ig becslés útján határozzuk meg. A porosz földmérők szabványai a szintmérés Δh hibahatárt 1000—2000 *m* hosszú vonalakig:

|34| $$\Delta h = 0{\cdot}103 \sqrt{l}$$

milliméterrel szabták meg.

Württembergában a vasutak kir. felügyelősége elsőrendü, tehát a legjobb minőségü szintmérések hibahatárául:

|35| $$\Delta h = 0{\cdot}164 \sqrt{l}$$

millimétert állapitotta meg, mely érték 3·7 kilometer távolságig érvényes.

42. §. Lejtőaknák mérése.

Lejtőaknával rendszerint a telepben haladunk, hol azzal a telepben egymás fölé sorozott érmenetü folyosókat kötjük össze, miért is tengelyvonalával vagy a telep dűlővonalát, vagy ennek átlóját kisérjük. Innen következik, hogy a lejtőakna talphágása sokkal nagyobb, mint a vizszintes szállitásra szánt folyosóké. Dűlésszöge 0·5 foktól 90 fokig minden értékkel birhat. Mérésük nehézsége fokozódik dűlésszögük nagyobbodásával, ez főkép a vizszintes vetületnek meghatározására áll. Ha az eljárás elvét vesszük tekintetbe, igy a mérést háromféle módon ejthetjük meg.

1. Mérhetünk ferde hosszúságokat, vizszintes és dűlésszögekkel együtt.

2. Mérhetünk vizszintes és függőleges hosszúságokat, csakis vizszintes szögekkel együtt.

3. Mérhetünk függőleges hosszúságokat, vizszintes és magassági szögekkel együtt.

Eljárásaink két elseje 45 fokon aluli dűlésszögekre ajánlható. A harmadik eljárás 45 fokon felül biztosit nagyobb pontosságot. 15 foknyi dűlésszögig úgy járhatunk el, mint bármely táróban, sőt a magasságokat szintmérő-műszerrel is mérhetjük. Nagyobb dűlésszögnél alkalmazhatjuk a magasságok vagy szintkülömbségek mérésére felfüggesztett, esetleg szintjelző szögre állitott mérőléczeket, mely esetben léczről léczre libellával felszerelt mérlegelőléczczel kelünk át, vagy használhatjuk e czélra a közlekedő-csövet is.

Első eljárás.

Ez a mérésmód még elődeinkről maradt reánk. Tudniillik ezek lejtőaknában ép úgy mint tárókban zsinórral, fokívvel és kompaszszal folytatták a mérést. Ez eljárásra nézve az a megjegyzésünk, hogy minden adatra a legnagyobb pontosság azáltal biztositható, ha ezt közvetetlenül mérhetjük meg. Az ujabb kor mérnökei oda törekednek, hogy a vizszintes vetületet úgy mint a szintkülömbségeket is, ha csak lehet, közvetetlenül bemérjék. A 130. ábrában vázoltunk ilyen mérésnek foganatositását. B és C a kapcsolandó vezérpontok, melyekben függélyzőket, esetleg megsúlyozott mérőszalagokat akasztatunk fel. Azonkivül feszitőket 1, 3, 4, 5, 6 és 7 pontokban azon czélból, hogy rajtuk a mérőzsinórt 20 foknál kisebb dülőszög alatt kifeszithessük. Zsinórról zsinórra függélyzővel kelünk át; l. a 2 és 8 pontban felakasztott függélyzőt. A mérés most következőkből áll:

A vizszintes vetület meghatározására megmérjük h_1 h_2 és h_3 hosszakat, továbbá a fokívvel eme zsinórágak γ_1 γ_3 γ_2 dűlésszögeit, valamint kompaszszal ezen zsinórágak w_1 w_2 w_3 csapószögeit.

Ez adatokból találjuk a vizszintes vetületi sík két x és y rendszálát:

[36] $X_{BC} = h_1 \cos\gamma_1 \cos w_1 + h_2 \cos\gamma_2 \cos w_2 + h_3 \cos\gamma_3 \cos w_3$.

[37] $Y_{BC} = h_1 \cos\gamma_1\ m w_1 + h_2 \cos\gamma_2 \sin w_2 + h_3 \cos\gamma_3 \sin w_3$.

A mélység B-től C-ig $(-Z_{BC})$ kifejezője:

[38] $Z_{BC} = -(Z_1 + h_1 \sin\gamma_1 + Z_2 + h_2 \sin\gamma_2 + Z_3 + h_3 \sin\gamma_3 - Z_4)$

Az utolsó Z_4 rendszálat (—) jellel kellett a záró jelbe irni, hogy a kiemelt (—1)-el való beszorzás után + legyen az előjele, mely ennek mint felfelé terjedő magassági rendszál tényleg megfelel.

A szintkülömbség meghatározására nagyobb pontosságot biztositunk, ha a közönséges fokív helyett Weiszbachnak léczre állitott és libellával felszerelt fokívét l. a 13. §. használjuk.

Ez esetben a mérést 131. ábra mutatja. Legyen BC meghatározandó két vezérpont $ff \ldots f$ feszitők h_1 és h_2 a Weiszbach-féle fokíves lécz 2, 3 és 4, 5 függélyzők, 5, 6 kifeszitett zsinór. Weiszbach szerint a léczet úgy kellene alkalmazni, hogy $Z_1\ Z_2\ Z_3$ függélyzők egy függőleges síkban legyenek elhelyezve, ekkor a vizszintes vetület csapását csakis egy ily lécznek iránya szerint kell meghatározni. A lécznek 2 méteres hossza ismeretes, ez okból a hosszak mérése az 5—6-ig terjedő zsinór kivételével elmarad, $Z_1\ Z_2\ Z_3$ és Z_4 függélyzők hosszát úgy mérjük, mint az előbbi esetben. w csapás-szöget megmérjük 5—6 zsinórra függesztett kompaszszal. Az összrendezők kifejezői most:

[39] $X_{bv} = \cos w\,(h_1 \cos\gamma_1 + h_2 \cos\gamma_2 - h_3 \cos\gamma_3)$

[40] $Y_{bv} = \sin w\,(h_1 \cos\gamma_1 + h_2 \cos\gamma_2 - h_3 \cos\gamma_3)$

[41] $Z_{bc} = -z_1 - z_2 - z_3 + z_4\,(h_1 \sin\gamma_1 + h_2\, m\gamma_2 + h_3\, m\gamma_3)$

Azon esetre, ha $h_1 = h_2 = h_3 = 2\ m$ utóbbi is kiemelhető minden zárójelből.

Második eljárás.

Ha a Weiszbach-féle fokívet vagy esetleg a Borchers-félét alkalmazni nem akarjuk, és mégis úgy a vizszintes valamint függőleges távolságok mérését biztositani törekszünk, akkor egyik függélyzőről a másodikra vizszintesen kelünk át. Ez esetben ugyancsak czélszerű, ha lehet valamennyi függélyzőt egy függőleges síkba elhelyezni, hogy ezek csapás-szögét csak egyszer kelljen megmérni. Eljárásunkat a 132. ábra vázolja. Ily viszonyok közt megmérjük $z_1\ z_2 \ldots z_5$ magassági rendszálakat közvetetlenül; a függélyzők közötti vizszintes $t_1\ t_2\ t_3\ t_4$ távolságokat és azonkivül még a függélyző közös függő síkjának w csapó-szögét.

Összrendezőinek kifejezői:

[42] $X_{de} = \cos w\,(t_1 + t_2 + t_3 - t_4)$

[43] $Y_{de} = \sin w\,(t_1 + t_2 + t_3 - t_4)$

[44] $Z_{de} = -z_1 - z_2 - z_3 - z_4 + z_5$

Ha a vizszintes vetületet a közölt módon theodolittal akarjuk meghatározni, akkor a műszert egyszer D függélyző alatt kellene felállitani, hogy onnan m és (7)-re irányozunk; utána pedig (7) pontban, hogy D-re és E-re irányozva, mind a két vizszintes folyosó mérését kapcsolatba hozzuk, l. 14. t. 132. ábra. Itt csakis a limbuskörön teszünk olvasást, minthogy magasságszögmérésre ez esetben nincs szükségünk, mert ez legfeljebb ellenőrző adatul szolgálhatna.

Harmadik eljárás.

45 foknál meredekebb lejtőaknát a vizszintes vetület pontossága céljából okvetetlenül theodolittal kell mérni. A műszer ne legyen a kellőnél nagyobb, körei nagysága biztositsa a szögek megkivánt pontosságát. A magassági körnek 8–10 *cm* legyen az átmérője, noniusa egybe essék a kör síkjával; látócsöve kicsiny legyen, hogy szükség adtán 2—3 *m* távolságra azzal tárgyat még bemérhessünk. Czélszerű, ha a látócső vizszintes forgástengelye végén van megerősitve. Továbbá libellája legyen, mely irányzótengelyével egyenlőközüen halad. A theodolitot lejtőaknában háromlábu állványán ritkán lehet felállitani, ekkor vagy oldalkart, vagy még czélszerübben jó feszitőt kell alkalmazni. A megirányozás céljából vagy a 94. ábra, a Hildebrand-féle czéltábla, vagy a 120. ábra, a selmeczi feszitőhöz tartozó czéltábla ajánlható. Jó szolgálatot tehetne ekkor a 95. ábrában bemutatott villanyos lámpa is, ha ezt az állványon kényelmesen úgy helyezhetjük el, hogy világitó szénpatkója, mely 5—6 *mm* hosszú, a kijelölt szög függőlegesének ama pontjába essék, mely pontban theodolitunk vizszintes forgástengelye ezt érinthetné, ha az egy időben ott állhatna.

E nehéz feladat sikeres megoldására ugyancsak fontos, hogy lehetőleg kevés szögponttal, azaz lehetőleg hosszú irányzatokkal ejtsük meg a mérést.

Ha tehát lehetséges, áttérünk az egyik BC folyosóról a mélyebb DE folyosóra egyetlen egy ferde irányzattal, l. 133. ábrát. Hol ez az akna szabálytalan alakjánál fogva lehetetlen, ott az aknában néha több szögponttal kell a mérést megejteni, l. 135. ábrát.

Az első megoldást a 133. és 134. ábrával vázoltuk. A 133. ábra mutatja a szögmérést, a 134. ábra a függőleges irányban megejtett hosszmérést ismerteti.

A szögmérést következőkép foganatositjuk: Felállunk *C* pontban, ez úgy legyen megválasztva, hogy az alsó folyosóig lehetőleg kis ε szög alatt indithassunk irányzatot; mert mentől nagyobb az ε szög, annál pontatlanabb a bemért vizszintes vetület. A mélyebb folyosón kijelölt *D* álláspontot ugyancsak hegyesebb ε_2 szög biztositásával választjuk. Ha igy *C* és *D* pontnak függőlegesében a feszitő-állványt felállitottuk, elhelyezzük *C* pontba a theodolitot, *D* pontban pedig *C* czéltáblát. *B* és *E* pontokba ekkor beosztott szintmérőléczet függesztünk. Folytatólag megirányozzuk *B* pont mérőléczét úgy, hogy látócsövünk irányzótengelye vizszintesen álljon, függőleges pókszála pedig *B* pont függőlegesét fődje.

Ekkor leolvashatjuk a theodolit limbuskörén O_k kezdőirányzatát, mely olvasás, mint már emlitettük, 0-ra való beállitással el is maradhat. *B* ponton felfüggesztett léczen leolvassuk (Z_1) magassági rendszálát, ezzel tudomást szereztünk ama *vv* vizszintes sík fekvéséről, melynek *C* függőlegesben fekvő pontjából irányzatunk kiindult, midőn a *D* pontban álló czéltáblát megirányoztuk. Folytatólag *D* pontra irányozunk; a limbuskör (O_v) olvasása adja most a megmért vizszintes β körületi szöget, igy $\beta_1 = O_v - O_k$ adja.

A magassági körön egyuttal ε szöget olvassuk le.

Ha a mérés látócsövünk mindkét lehetséges fekvése mellett foganatositandó, akkor úgy a vizszintes, valamint a magassági körön mind a két noniust kell leolvasni, és adatul számtani középesüket venni, mint legvalóbbszinü. Szögmérésünk második feladata ezután abból áll, hogy a theodolitot *D* pont alá helyezve, vizszintes forgástengelyével épen ama magasságba állitsuk, mely magasságában azelőtt czéltáblánk megirányozott középpontja állott. Mit legegyszerübben a *D* pontban lebocsátott függélyzőnek hegye szerint itélhetünk meg. A czéltáblát ekkor *C* pontnak a függőlegesébe állitjuk, és megemeljük középpontját V_1 V_1 vizszintes síkig.

Ennek elérése után *D* pontban ismét vizszintes irányzatot inditunk az *E* pontban felfüggesztett léczre, hol Z_4-et olvasunk le. Ép igy megmérjük itt is azt a vizszintes szöget, melyet a *C* és

E pontra inditott irány egymással közbezár, valamint ε_2 magassági szöget is. E két szög a látócsőnek mindkét fekvése mellett mérendő meg, úgy mint ezt a *C* szögpontra vonatkozólag ismertettük.

Elvégre megmérjük *B* és *E* pontoknak szintkülömbségeit függőléczekkel, esetleg függő mérőszalagokkal és vizszintes libellás léczczel, úgy mint ezt a 134. ábra vázolja. E szerint *BE* pontok szintkülömbsége:

[45] $$S_{BE} = Z\alpha + Z\beta + Z\gamma - Z\delta$$

Innen *C* és *D* szögpontjaink *M* szintkülömbsége:

[46] $$M = S_{BE} + Z_4 - Z_1$$

C és *D* pontok V_t vizszintes távolsága pedig:

[47] $$V_t = M \text{ cotg. } \varepsilon_0 \quad \text{ha}$$

[48] $$\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2}$$

Ezeken kivül megmérünk még *BC* és *DE* pontok vizszintes T_1 és T_2 távolságait. Igy minden adatot ismerünk bemért pontjaink összrendezőinek kiszámitására, vagy azoknak megrajzolására.

Szabálytalan lejtőaknában, vagy akkor is, ha a lejtőakna oly hosszú, hogy a levegő, füst és köd tartalmánál fogva egyszerre bemérni nem lehet, több szögponttal dolgozunk, melyek nehánya a lejtőaknában is fekszik. Ily a 135. ábrában vázolt aknában az előbb leirt eljárás csak annyiban módosul, hogy minden már az aknában fekvő *G* és *H* műszer-álláspontban a vizszintes körületi szöget is be kell mérni. Ha a látócső netalán meg nem engedi, hogy vizszintes forgástengelyének V_2 V_2 és V_3 V_3 magassági fekvését irányzattal mérjük be, akkor libellás léczczel térünk át F_1 és F_2 léczekre, azaz ekkor igy szerezzük meg a 135. ábrában kimutatott Z_2 Z_3 magasságokat.

A további hosszmérés már csak annyiból áll, hogy függőleges irányban libellás léczczel, esetleg közlekedő csővel, felfüggesztett léczeken, vagy szintmérőszalagokon FF_1, FF_2, F_2D pontoknak S_1 S_2 S_d szintkülömbségeit mérjük meg. Ezekkel következik:

[49] $$M_1 = S_1 + Z_2 - Z_1$$

[50] $$M_2 = S_2 + Z_3 - Z_2$$

[51] $$M_3 = S_d + Z_4 - Z_3$$

Utóbbikkal elvégre *BG*, *GH* és *HC* oldalaknak V_1, V_2 és V_3 vizszintes vetületeit:

$$V_1 = M_1 \operatorname{cotg.} \gamma_1 ; \quad V_2 = M_2 \operatorname{cotg.} \gamma_2 ;$$
$$V_3 = M_3 \operatorname{cotg.} \gamma_3 .$$

A limbuskörön leolvasott körületi szögekkel kiszámitjuk ezen oldalaknak α_B^G, α_G^H és α_H^D azimutszögeit, mi módon

[52] $\Delta X_{BG} = V_1 \cos \alpha_B^G ; \quad \Delta X_{GH} = V_2 \cos \alpha_G^H ; \quad \Delta X_{HD} = V_3 \cos \alpha_H^D$

[52] $\Delta Y_{BG} = V_1 \sin \alpha_B^G ; \quad \Delta Y_{GH} = V_2 \sin \alpha_G^H ; \quad \Delta Y_{HD} = V_3 \sin \alpha_H^D .$

Ezzel a rendszálszámitás befejezettnek tekinthető.

Megjegyzés a magassági és mélységi szög mérésére. Ha a használt theodolitnak excentrikus fekvésü a látócsöve, akkor még a legmeredekebb irányzat bemérése is kényelmesen foganatositható. De ily műszerrel eszközölt mérésnél tekintetbe veendő látócsövünknek a szög csúcspontján kivüli fekvése. Tudniillik, ha a theodolit alhidáda-tengelye a bemérendő szögnek D csúcspontjában áll, l. 136. ábrát, és mi a látócsővel valamely magasan fekvő B pontra irányzatot inditunk; igy a műszer magassági körén γ_1 szöget olvasunk le, holott (γ) szög a megmérendő. A 136. ábrából, látócsövünk e külpontosságán, továbbá $\gamma \gamma_1$-re és H magasságra alábbi viszony következik:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{H}{DC} .$$

$$DC = \sqrt{CF^2 - e^2} ; \quad CF = H \operatorname{cotg.} \gamma ,$$

tehát $$DC = \sqrt{(H \operatorname{cotg.} \gamma_1)^2 - e^2} \quad \text{ebből:}$$

[54] $$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\operatorname{tg} \gamma^1}{\sqrt{1 - \left(\frac{e}{H \operatorname{cotg.} \gamma_1} \right)^2}}$$

Vagy H szerint feloldva:

[55] $$H = e \frac{\operatorname{tg} \gamma}{\sqrt{1 - (\operatorname{tg} \gamma \operatorname{cotg.} \gamma_1)^2}}$$

Az [54] egyenletből tapasztaljuk, hogy γ és γ_1 szögek viszonya e és H mennyiségek nagyságától függ. Lássuk ennek számbeli értékét két elterjedt műszer méreteire nézve.

Legyen műszerünk leolvasó határa a magassági kör noniusán $\pm$ 30″, látócsövünk (e) külpontossága mérjen az egyik esetben $e = 60$ *mm*, a második esetben $e = 100$ *mm*. Akkor [55] egyenletből azon H magasság kiszámitható, melyen alól γ és γ_1 külömbzete nagyobb, mint leolvasásaink határértéke, azaz melyen alól a megmért adatból [54] egyenlet segitségével a helyes magasságot kellene kiszámitani, és mely értéken felül e külömbözet elhanyagolható.

EH magasság számértékét találjuk alábbi táblában :

Megmért magassági szög		30°	45°	60°
H magasság méter	ha $e = 60$ *mm*	1'3	2'5	5'3
	ha $e = 100$ *mm*	2'2	4'2	8'8

Látjuk tehát, hogy e czélból is előnyös hosszú irányzatokkal mérni, a mennyiben igy szintkülömbségeink rendszerint akkorák lesznek, hogy külpontosan elhelyezett látócsővel is a helyes magassági szöget azonnal leolvashatunk.

43. Függőleges aknák mérése.

Mérésünk eljárása részint az akna felszerelésétől, részint a rendelkezésünkre álló mérőeszközöktől függ. Általában 5-féle képen járhatunk el függőleges aknák mérése alkalmával.

1. Mérhetjük az akna mélységét a szállitókötelen, vagy ha mélysége csak 20—30 *m* és csak hozzávető adatra van szükségünk, akkor még mérőzsinórral is mérhetünk.

2. Mérhetünk aknafüggélyzővel, azaz ennek vizszintes irány alatt kifeszitett drótján.

3. Mérhetjük az akna mélységét a lejáró szakaszban a Borchers-féle aknamérő rudazattal.

4. Foganatositjuk az akna mérését 250 *m* hosszú, aczélból készitett mérőszalaggal.

5. Megmérhetjük az akna mélységét 10—20 *m* hosszú fémszalaggal a szállitó kason.

1. Aknamérés a szállitókötelen.

Legyen 137. ábra *AB* és *GF* két főfolyosó, *CD* a közbülső járat, melyek függőleges aknával állanak összefüggésben.

Mérésünk előkészitése abból áll, hogy *AB* folyosó talpán és vagy 2 *m* mélyebben *mn* magasságban könnyü padlóhidat veretünk. Továbbá *GF* folyosón *cd* feszitőket helyezünk el, hogy erre *cd* vizszintes léczet fektethessük. Folytatólag *(a)* pontban csigát függesztünk fel, hogy rajta kötelet, vagy még czélszerűbben alsó végén megsúlyozott 1'5—1'6 *mm* vastag vasdrótot bocsáthassunk le GE folyosóig, E kifeszitett függőlegesen magassági jeleket alkalmaztatunk. AB és CD folyosók talplapjában, valamint cd léccznek a magasságában is, úgy hogy ott viaszszal bekent zsinegdarabot rákötünk. Elvégre megmérjük a kötél hosszúságát jeltől jelig, mit következőkép foganatositunk:

A mérés czéljából három segédre van szükségünk, egy a hidra áll mn magasságban, a második AB-nek a hidján leülhet, a harmadik B-nél helyezkedik el, hogy a kötelet vagy drótot a szükséghez mérten lassan felhúzza. Az (1) segéd azzal kezdi a mérést, hogy a nála levő két mérőrúd közül az egyiket felső végével a kötélen alkalmazott f magassági jelhez illesztvén, egyszersmind egész hosszában a kötélhez is szoritja. Erre felvontatja a kötelet, mialatt a rudat még folyton a kötélhez szoritva, magasabbra ereszti. Ha a rúd a kötéllel együtt vagy 1 m magasságra felemelkedett, megragadja ezt a 2-dik segéd, ki ugyancsak a kötélhez szoritva emelkedését megengedi és az 1 segédet értesiti, hogy emez elbocsáthassa. Ekkor az 1 segéd a következő rudat illeszti az első alá, ha végük pontosan érintkezik és ő e rudat ismét a kötélhez szoritotta, 2 segédnek felkiált. Utóbbi eltávolitja erre az elsőrudat, melyet az 1 segédnek lenyujt és egyuttal fenhangon beszámlálja. Rögtön utána megragadja a kötéllel felemelkedő 2-dik mérőrudat. Ha az 1 segéd látja, hogy 2 a felbocsátott rudat már biztosan a kötélhez szoritja, utána sorozza a leérkező első rudat harmadik rúdul. Ezentúl ismétlődik a munka a bemérendő végjelig, melynek fekvését az utolsó rúdon olvassuk le. A mélységet találjuk tehát a hangosan beszámlált és feljegyzett teljes rudakból és az utolsó rúdon leolvasott alrészekből.

Nagyobb mélységü aknát, nevezetesen ha ez a napszinre nyilik, elődeink hasonló módon a szállitókötelen mértek meg. Az eljárást 138. ábrában vázoltuk, mely ekkor csak annyiban változik, hogy mérősegédjeink részére az akna csapóajtaja fölött emeltetünk rs állványt, két kecskeláb és nehány deszkából. 1 segéd állást foglal az állvány alatt, 2 leül ennek deszkázatán. A kötelet most nem a harmadik segéd vitlázza fel, hanem ezt vagy lovak végzik, vagy szállitó gépünk. A rudakkal való mérés azonban csak úgy folyik le, mint ezt az előbbi esetben leirtuk.

A kötélen megejtett aknamérés Δh mélységi hibája méterben kifejezhető, ha M az akna megmért mélysége:

[56] $$\Delta h = 0{,}00025\ M.$$

2. Mérés az aknafüggélyzővel.

Kényelmesebb és biztosabb függőleges aknák mérése az ugynevezett aknafüggélyzővel, ha drótját vizszintes irányban szemünk előtt mérhetjük meg, a mennyiben igy a mérés nem csak könnyű szerrel ellenőrizhető, de még sokkal rövidebb idő alatt végre is hajtható.

Segitő eszközei:

1. A huzalcséve, l. 139. ábrát, 35—55 *mm* széles, 150 *mm* átmérőjü *m* tölgyfa-tárcsa, két oldalán 300 *mm* átmérőjü, 0·5 *mm* vaslemez körlapokkal védve. *m* tárcsára felfejtjük az $1\frac{1}{2}$ *mm* vastag és 200—300 *m* hosszú vasdrótot. A drót belső vége hurokká van alakitva, hogy a rajta átfűzött (X) csavarral *m*-hez köthessük. E cséve 15—18 *mm* vastag *d* forgástengelyre van fűzve, melynek egyik vége kúpos csavarrá van alakitva. Ezzel biztositjuk állását a mérés tartama alatt. A csévét *f* forgatóval kezeljük, *g* ennek megállitószöge, melylyel a drót lefejtését bármikor megakadályozhatjuk.

2. A függélyződrótnak *B* vezető csigája, l. 140. ábrát, melylyel a függőleges irányból a vizszintes irányba áthelyezzük. *B* a 20 *mm* széles, 160 *mm* átmérőjü, réz vagy öntött vasból és esztergált tárcsa, ez csavarban végződő *D* tengelyre van felfűzve.

3. Nehány a 141. ábrában bemutatott szintjelző csavar. *T* a csavar hengeralaku 30 *mm* hosszú, 20 *mm* átmérőjü teste, *N* a függélyző-drót fészke, honnan ez többé ki nem csúszhatik, ha a 6 *mm* vastag *K* kötőcsavarral megszoritjuk.

4. A drót kifeszitésére szolgáló súly, l. *D* 142. ábra, melyet hegybe végződő, 7 *kg* nehéz vashengerré alakitottunk.

Hogy a függélyző-drót vége egyhamar el ne szakadhasson, rátekertük *r* vaskarikára; helyzetét itt a beesztergályozott horony biztositja. E *v* karikával fűzzük a drótot *D* súlyzónak csigaalaku felső kajmójára. Igy ki nem oldódik a súly még akkor sem, ha ez leeresztés alkalmával az aknabélelésben valahol megakadna.

A mérés foganatositása:

Becsukott csapóajtó mellett gerendát fektetünk az akna nyilása fölé keresztben, l. G_1 G_2 143. ábra, vagy megerősitjük a drót *B* vezető-csigáját a szállitócsészének egyik *v* vezető-gerendájában is, l. 143. ábrát. *B*-től vagy 15—20 *m*-nyire az *A* drótcsévét erősitjük meg az aknaépületnek bármely kinálkozó fájában.

Ekkor lefejtjük a drótot, végére C súlyzót fűzünk, és igy eresztjük B csigán át az aknába mindaddig, mig C a bemérendő F folyosót valamivel túl nem haladta; mit alólról a mécscsel adott jel által megtudhatjuk. Folytatólag megállitjuk a drótcsévét g szögének keresztbe tűzése által. Ugyanekkor T_1 jelzőcsavart tétetünk a csapóajtó magasságában a drótra. Azután leszállunk az akna R rakodójába, ott felállitjuk kellő távolságban a dróttól m szintmérőműszert, a drótra most t_2 jelzőcsavart tesszük és erre függesztjük fel a selmeczi szintmérő léczet. Igy vizszintes irányzattal először Z_1 léczolvasást szerezünk meg, utána felakasztjuk ugyan-e léczet a rakodó R vezérpontjába is, Z_2 léczolvasás megszerzésére. Utóbbi adatok feljegyzése után kiszállunk a bányából, hogy a drótot szakaszonkint felvitláztassuk, és vizszintes helyzetben A-tól B-ig kifeszitve, mérőrudakkal szabatosan ide-oda megmérhessük. E módon eljárva, óránkint 200 m-nyi mélység a legnagyobb kényelemmel és elővigyázattal mérhető meg. Ez eljárás remélhető hibája: $\Delta h = 0{,}00003\ M$, azaz M mélységnek 0'00003 részére becsülhető.

A bemért adatokból T_1 pontnak R pont fölötti Z_{RT} magasságát következőkép találjuk:

$$Z_{RT_1} = -Z_2 + Z_1 + M$$

Ha esetleg a külső méréssel a csapóajtó magasságán kivül még más pontokat akarunk kapcsolatba hozni, akkor ezeket szintméréssel a felső T_1 jelzőcsavarból kiindulva, könnyen határozhatjuk meg.

3. Aknamérés a Borchers-féle rudazattal.

Borchers mérőrúdja, l. 144. ábrát, 20 darab 1 m hosszú és 5 mm vastag aczéldrót-pálczából áll. A legfelsőbbnek használt rúd egyik végén kajmóval van ellátva, melylyel felakaszthatjuk. A többi rúd vége mind merőlegesen van lemetszve saját hossztengelyére, és 3 cm hosszúságig csavarmenetekkel ellátva. Az egyes méter hosszú pálczáknak hosszirányú kapcsolására az M-el jelölt hengeralaku rézhüvelyek szolgálnak. Szerkezetüket a 145. ábrából látjuk részletesebben. Ugyanis igen fontos, hogy az összetett rúdnak hibátlan kapcsolásáról könnyen meggyőződhessünk. E czélból M rézhüvelyek mindegyike hosszúságuk közepén két szembenfekvő nyilással van ellátva, rajtuk megfigyelhető két-két rúdvégnek szoros érintése, ha hátul a bányamécscsel megvilágitjuk.

Készület a mérésre.

A mérést rendszerint a lejáró szakaszban ejtjük meg, ezért mindenek előtt a rúd részére egyazon függőleges vonal irányában valamennyi aknahidnak (pihenőnek) deszkapadlóját kell 40—50 *mm* átmérőjű fúróval átfúrni. L. 146. ábrát. Továbbá szükséges, hogy e furatok közelében h_1 kezdőpontban és tőle minden 20 *m* után következő h_4 pihenőn, valamint ott is, hol közbeeső folyosók elágaznak, vagy mérésünk végpontjában is egy-egy *m* fahasáb odaszögeztessék, melynek függőleges melső lapjába *c* mérőcsavart furatjuk. Folytatólag összeállitjuk a mérőrudat, mely alkalommal minden egyes kapcsolóhüvelynél meggyőződünk az egyes rudak szoros érintéséről. Az összekapcsolt rudat leeresztjük ekkor az átfúrt h_1 h_2 pihenőkön és felső kajmójával felakasztjuk C_1 mérőcsavarra. Ekkor leszállunk a rúdvéggel megközelitett h_4 pihenőig, itt *z* zsineget kötünk a mérőrúd végére, melyet c_2 mérőcsavaron átvetve, *z* végénél erősen megfeszitjük; ezután egy méter hosszú *K* segitőléptékkel a rúd vége és c_2 jelzőcsavar közötti távolságot milliméternyi pontosságig mérhetjük meg. Ezzel ismerjük c_1 és c_2 mérőcsavarnak felső vizszintes érintőinek $S_{1\cdot2}$ szintkülömbségét. Tudniillik ez annyi, mint a 20 *m* hosszú rúd és *K* mérőpálczával mégmért (t) távolságnak összege.

$$S_{1\cdot2} = 20 + t.$$

Az eljárást folytatjuk igy csavartól csavarig.

Igaz, hogy Borchers módján a mérés nagyon kényelmes és pontos; de előkészitése igen költséges, sőt mérése is több idővel jár, mint bármely más eljárásé. Szóval ez a legköltségesebb és leghosszadalmasabb mérésmód.

4. Aknamérés hosszú aczélmérőszalaggal.

A wesztpháli kőszénbányákban oly óriási szállitás folyik éjjel-nappal, hogy ezt több órán át méréssel beszüntetni nem engedik. Az ottani bányamérnök kényszeritve van tehát munkáját a legrövidebb idő alatt befejezni. Onnan van, hogy aknamérésre 250 *m* hosszú, 12—15 *mm* széles mérőszalagot használnak, melynek szerkezetét a 26. §-ban emlitettük.

A mérés e szalaggal igen egyszerű és minden előkészületeivel együtt alig $^1/_4$ órába telik.

Az aknabélés valamely függőleges oszlopfájába erősitjük meg az aknanyilást jelölő mérőcsavart, azaz magasságának a jelét. E csavarra fűzzük most a mérőszalag kezdőkarikáját. Folytatólag a szállitócsészére állunk a mérőszalag csévéjével együtt, hogy 1 *m*, esetleg 1,5 *m* sebességgel az aknába eresztessünk. Ugyanekkor lefejlik a mérőszalag is a kezünkben tartott csévéről. Minden bemérendő rakodónál megállunk és leolvassuk *n* talpig vagy ennek megfelelő szintjelelésig terjedő szalagrész hosszát, mely egyszersmind az akna mélysége eme pontig.

Pontosabb adatok biztositására tekintetbe veendő ekkor a mérőszalag normál és esetleges hosszat is, azaz a hőmérséklet okozta hosszváltozás számitásba veendő.

5. Aknamérés a szállitókason 10—20 *m* hosszú mérőszalaggal.

Gräfe módja szerint mérhetünk függőleges akna mélységet 10–20 *m* hosszú fémszalaggal is, ha a szállitókötelen két ülést erősitünk meg, vagy esetleg egy üléssel a szállitócsésze tetejével, mint a megfigyelések második álláspontjával. Az eljárást szállitócsészével ismertetjük a 146. ábrában. Az első segéd a mérnökkel együtt a szállitócsésze tetején foglal állást, ekkor mélyebbre eresztjük a csészét mérőszalagunk hosszúságával 10–20 *m*-rel, ezt elérve megállitjuk és *de* pontokban megerősitjük a kötélen 2 segédünk részére a vasból készitett ülését. A segéd itt helyet foglal, megerősiti a csésze *v* vezető-gerendájába az első jelzőcsavart mérésünk kezdőpontjában, és ráakasztja a mérőszalagot. Most lekiáltja 1-nek, hogy kész, mire ez épen a szalag végpontjánál uj mérőcsavart *v* gerendába fúr, és az első bemért hosszat hangosan beszámlálja. A mérnök feljegyezi ezt, és jelet ád, hogy 2 a mérőszalagot a felső csavarról leemelje, a gépész pedig a kast mindkét segéddel 20 *m*-rel mélyebbre, a hátrahagyott jelig leereszsze. A mélyebb jelnél megállitjuk a gépet, felakasztjuk a mérőszalagot az ott hagyott csavaron, és a szalag alsó végét uj csavarral jelöljük meg. Ezt folytatjuk a kijelölt végpontig, hol a méternek esetleges alrészeit, centimetert és millimetert, külön e czélokra magunkkal vitt méterpálczával mérjük be. E módon utánozzuk a mezőn gyakorolt lánczmérést, csak hogy most függőleges irány alatt foganatositjuk.

44. §. Külső és földalatti mérések kapcsolása vagy tájékozása.

Ha bányánk tárón vagy lejtőaknán át a föld felszinével közlekedik, akkor a külső és földalatti mérés kapcsolására vagy tájékozására a poligonmérést és magasságmérést csak szakadatlanul kell folytatni, hogy bemért pontjaink helyzeti viszonya tökéletesen meg legyen határozva. Más feladattal állunk szemben, ha bányánk csak függőleges aknával bejárható. Ekkor a mérés folytonosságát csak függélyzőkkel lehet biztositani, mi módon szögmérésen alapuló tájékozása sokkal kényesebb s nehezebb feladat. Utóbbi esetben a poligonnak és aknafüggélyzőnek egyesitését a 148. ábra módjára hozzuk létre. Tudniillik a külső mérés legközelebbi GH poligonoldalát, esetleg háromszögoldalt GF kapcsolóoldallal kötjük az egyik szállitókötél helyén, rendszerint a felső kötél helyén, a lebocsátott függélyzőig. Ekkor megmérjük GF oldalnak hosszát rúddal és fokívvel, és csapását kompaszszal; vagy ha theodolittal dolgozunk, β szög a megmérendő.

Hogy mérésünkkel az aknaszelvény nagysága, valamint fekvése is meg legyen határozva, e czélból ugyanekkor még az 1-től 8-ig jelölt méreteket szerezzük meg. Fontos, hogy ily igen rövid irányok kapcsolásánál a szögmérést mellőzzük, ezért felmértünk 4, 7, 8 oldalakkal egy háromszöget, mi módon az aknának c sarokpontja meg van határozva. Hasonlóképen járunk el az akna rakodójában a földalatti poligon kapcsolására. Utóbbi esetben GH a földalatti poligonnak lenne első oldala.

A földalatti poligon tájékozása.

Emlitettük már, hogy méréseinket rendszerint a csillagászati délllő után tájékozzuk. Ezt földalatti poligonnak oldalán csak közvetett úton érhetjük el. A tájékozás megoldottnak tekinthető, ha a földalatti poligon első oldalának azimutszögét ismerjük; a mennyiben a többi oldalét a rendszálszámitás [19] egyenletével ki lehet számitani.

Tájékozás mágnestűvel.

Ezen czélból megfigyeljük mágnestűvel a tájékozandó földalatti poligonnak valamely oldalát. Folytatólag ugyanazon mágnestűvel a külső mérésnek oly oldalát figyeljük meg, melynek azimutszöge ismeretes. Igy megtudjuk az utóbbi oldalnak α azimutjából és w csapásából a mágnestűnek (δ) declinátióját megfigyelésünk idejére.

[57] $$\pm\,\delta = w - \alpha$$

Szóval, a mágnestű declinátióját találjuk, ha a megmért csapásszögből az azimutszöget vonjuk le; ez nyugati, ha előjele (+) és keleti ennek elhajlása, ha (—) az előjele.

Folytatólag találjuk a bányában lemért oldalnak w_b csapásszögéből ennek α_b azimutszögét, ha (δ)-át előjelével együtt levonjuk w_b -ból.

[58] $$\alpha_b = w_b - (\pm \delta)$$

Tájékozó mérésre mentől hosszabb földalatti oldal bemérése ajánlható. Műszerül függő kompasz, vagy még ennél is előnyösebben jó mágnestűvel felszerelt theodolit alkalmazandó. Hasonlókép ajánlható, hogy magunkat a kőzetnek netaláni mágnesi befolyása ellen védjük, szokásban van egyazon oldalnak csapásszögét e czélból több pontjain megfigyelni. Rendszerint az oldal két végpontjához közel vagy épen ott, sőt néha az oldal közepén tétetünk megfigyelést. Csak akkor, ha két vagy három ily összetartozó megfigyelés az elnézhető hibahatárokon belül egyezik, lehetünk megnyugtatva, hogy adatunk megbizható.

Tájékozás theodolittal.

Ha földalatti mérést theodolittal, azaz mágnestűnek kizárásával kell tájékozni, akkor eljárásunkat a bányát megnyitó folyosók talphágása, vagy az aknák száma változtatja. A lejtőaknatárótól csakis nagyobb talphágása által külömbözik, mely körülmény feladatunk foganatositását dülőszöge nagyobbodásával neheziti, de az eljárás lényegét nem változtatja. Ezzel legyen indokolva, hogy lejtőaknát következőkben külön nem tárgyalunk.

A körülirt alapon három főesetet külömböztetünk meg:

1. Ha a bánya táróval bejárható.

2. Ha a bánya két függőleges aknával van feltárva.

3. Ha a bánya csakis egy függőleges aknán át közlekedik a napszinével.

1. *Táróval bejárható bányának földalatti mérése a poligonmérés folytatása által tájékozható.* Ugyanis legrövidebb úton összeköljük poligonnal földalatti mérésünket a külső mérésnek, l. 149. ábra, *B C* háromszög, esetleg poligonoldalával, melynek azimutját ismerjük. Oldalaink közvetetlen összefüggése alapján alkalmazzuk a [19] egyenletet;

$$\alpha_C{}^1 = \alpha_B^C + \beta_1 \pm 180^0$$
$$\alpha_1{}^2 = \alpha_C{}^1 + \beta_2 \pm 180^0$$
$$\alpha_2{}^3 = \alpha_1{}^2 + \beta_3 \pm 180^0$$

Látjuk tehát, hogy a földalatti poligonnak első oldala ép úgy mint annak további folytatása akadály nélkül kiszámitható.

2. *Két függőleges aknával feltárt bánya földalatti mérésének tájékozása.* Legyen 150. ábrában A és B a szóban forgó két függőleges akna, melynek A és B tengelypontjait a külső méréssel már meghatároztuk, úgy hogy AB egyenesnek hosszát és α_A^B azimutszögét ismerjük. Ekkor a kapcsolás czéljából A és B tengelypontokban függélyzőt bocsátunk a meghatározandó folyosóig. Itt bemérünk lehetőleg egyszerű, kevés szögpontból álló poligont, mely A-ból kiindul és B pontig terjed. Utóbbi poligonnak A-tól 1-ig terjedő kezdőoldalát használjuk most ideiglenes viszonyitó tengelyül. Ha ezt ξ-vel η-val jelöljük, kiszámithatjuk B végpontnak η_B és ξ_B összrendezőit, azaz $AC = \xi_b$ és $BC = \eta_b$. E két rendszál segitségével találjuk ama φ szöget, melyet AB záróvonal az ideiglenes $A\xi$ tengelylyel képezett. Ezzel pedig az első földalatti A—1 poligonoldalnak $\alpha_A{}^1$ azimutszöge is meghatározható. Tudniillik:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\eta_b}{\xi_b}$$

Ezzel az első földalatti poligonoldalnak azimutja:

[59] $$\alpha_A{}^1 = \alpha_A{}^B - \varphi$$

A földalatti poligon további oldalaknak azimutjait a [19] egyenlet alkalmazásával találjuk.

Kiszámitott példa eme tájékozásra következik 118. és 119. oldalon.

3. *A földalatti mérés tájékozása csakis egy függőleges aknán át.* Ha bányánk csak egy függőleges akna által hozzáférhető, akkor az aknába egyenes csatlakozó vonalat kell levetiteni; azaz két függélyzőt bocsátunk le a bemérendő folyosóig. Aknánk rendes méreteinél e csatlakozó vonal alig lehet hosszabb két méternél; ha tehát ily rövid csatlakozó vonallal a tájékozást egy szögpercznyi pontossággal akarjuk biztositani, igy a hibaszámitás tételei szerint végpontjainak fekvését (δ) hibahatárig kell ismernünk. Ugyanis:

$$\delta = \frac{2000 \times \text{arc } 1'}{\sqrt{2}} = \frac{2000 \times 0{\cdot}00029}{\sqrt{2}} = \delta = 0{\cdot}41\ mm$$

Szóval, a legkedvezőbb esetben kivánságunk az, hogy a lelógó és folytonosan lengő függélyzőnek veszteg-állását 0'4 *mm*-ig biztosan bemérhessük. Gyakran rövidül e levetitett vonal hossza egy méterre, ekkor tehát 0·2 *mm* a pontosság minimális határa. Ezek nyomán megitélhető feladatunk nehézsége, melynek legyőzésén több kiváló bányamérnök fáradozott, hogy egyszerű és biztos megoldást kieszeljen. Eddigelé az ajánlatba hozott eljárások sorából csakis Schmidt Miksa, a freibergi bányászakademiának módja az, mely a gyakorlatban tért hóditott, minthogy egyszerűsége mellett megfelelő pontosságot is biztosit. Schmidt alapeszméje: a szabadon lengő függélyzőt két egymást merőlegesen metsző függőleges síkban megfigyelni, azaz a függélyző legnagyobb kilengéseit két ily síkban elhelyezett léptékkel összehasonlitani, és e kilengések számtani közepeseiből ennek vesztegállását meghatározni. Utóbbi pontba állitjuk a függélyző drótját, hogy kapcsolásunk czéljából szabatosan bemérhessük. Schmidt a vázolt feladatra külön készüléket szerkesztett, 151. ábra, függőleges keresztmetszete, 152. ábra alaprajza, még pedig valódi nagyságának negyed részében kitüntetve. TT_1 köralaku tárcsa öntött vasból, a közepén 25 *mm* átmérőjü B fúrással, melyen belül a függélyző drótja szabadon lenghet CC négy 90—90° foknyira elhelyezett hasáb. E hasábok furataiba letűzzük az összehasonlitásra szolgáló két DD_1 léptéket lefelé nyuló csapjaival. GG négy furat a készülék megerősitésére. SS négy beállitó csavar, melyekkel a K hasábon alkalmazott jelzőtűt a függélyzőnek kipuhatolt vesztegállásába toljuk.

Schmidt készüléke egyszerű, de mindazonáltal alkalmazása több kivánni valót tüntet fel. Nevezetesen, hogy 25 *mm* átmérőjü B furata a függélyző szabad kilengésére igen apró. Továbbá a sárga szinü DD_1 falépték leolvasása; ugyanis osztóvonalai finomak, osztórészei pedig mind egy sorban vannak kitüntetve, megvilágitásuk elölről foganatositandó. Hasonló nehézség, hogy a kapcsolómérésre használt theodolittal a függélyzők kilengéseit csak az egyik lépték síkjában lehet megfigyelni: a második keresztben álló lépték összehasonlitására külön látócső szükséges. Utóbbit rendszerint oly közelre kell a léptékhez elhelyezni, hogy theodolitunk látócsöve szolgálatát megtagadja. Elvégre czélellenes Schmidt készülékén az, hogy a vesztegállást kijelölő tűt négy SS csavarral kell beállitani, mely munka alkalmával segédünk a megfigyelő felé forditott csavart is kezeli. Ekkor megeshetik, hogy segédünk kezével az elfödött léptéket elforditja, mit észre venni sem lehet, ez pedig nagy hibának lehet kútforrása.

Az oldal kezdő	Az oldal végső	Olvasás hátra	Olvasás előre	Körületi szög	Azimut	Oldalhosszuság	Dülő szög	Logarithmus	Vízszintes oldal
j e l e		° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	mm.	° ′		mm.
27	24	A két aknapont . . .			255 33 18				50465
		Bányamérés							
27	100	—	89 04 30	89 04 30	—	8509	7 05	3·92988	8444
100	101	89 04 30	178 09					9·99667	
								3·92655	
100	101	—	90 38	90 38	269 04 30		— —		50507
101	24	90 38	181 15 30	90 37 30					
				90 37 45	89 04 30				
101	24				179 42 15		— —		8557
					17 45				

A közvetitő számitás adataival $\operatorname{tg} \alpha_{27}^{24} = \frac{-41\cdot943}{+7\cdot585} = \frac{\varDelta y}{\varDelta x}$

A hányados előjelei szerint irányzatunk a 4-dik síknegyedben van, tehát

$\alpha_{27}^{24} = 360^\circ - (79^\circ\,44'\,57'') =$

A háromszögelés eredménye . . . .

Szóval a közvetitő számitás eredménye . . . .

sunknak minden azimutját ennyivel kell kisebbiteni, hogy ezzel a valódi

27	100	azimutja $360^\circ - (24^\circ\,41'\,45'') = 335^\circ\,18'\,15''$
100	101	» $269^\circ\,04'\,30 - (24^\circ\,41'\,45'') = 244^\circ\,22'\,45''$
101	24	» $179^\circ\,42'\,15'' - (24^\circ\,41'\,45'') = 155^\circ\,0'\,30''$

bányánk két függőleges aknával bír.

Logarithmus	Az oldal vetületei		Összrendezők		Vezérpont	Magassági méretsz.
$\triangle y =$ $\sin \alpha =$ $h =$ $\cos \alpha =$ $\triangle x =$	$\pm \triangle x$ cosinus mm.	$\pm \triangle y$ sinus mm.	$\pm x$ absczissa meter	$\pm y$ ordináta meter		mm.
A föld felszinén megejtett háromszögelésnek eredménye . . .			210·414 197·827	787·894 759·024	27 24	156·754 156·722
	+ 8444	—	+ 8·441	—	100	A közvetitő számitás
2·91135$_3$ 8·20800 4·70335$_3$ 9·99994 4·703293	— 815	— 50500	+ 7·629	— 50·500	101	
1·64524 7·71294 3·93232 9·99999 3·93231	— 44	+ 8557	+ 7·585	— 41·943	24	
Δy = 1·62166 Δx = 0·87996 tg α = 0·74270	ennek hegyes szöge . . . α = 79° 44′ 57″					
280° 15′ 03″						
255° 33′ 18″						

24° 41′ 45″ nagyobb, mint a háromszögelés, azaz közvetitő számitá-
déllőre viszonyitsuk. — Ennek alapján legyen:

Mind e gyakorlati hiányok mellőzésére szerző a 153.—156. ábrákban bemutatott és úgynevezett selmeczi függélyveszteglőt szerkesztette. 153. a készülék alaprajza, 154. hátulról megtekintett falvetülete, 155. és 156. oldalnézete. *AB* a készülék alaplapja, két (1) és (2) furattal, hol csavarokkal deszkán megerősithető. E alapon áll *mnlk* léptéktartója, alatta fekszik *HS* jelzőrúd. A jelzőrúd feladata a függélyző drótját a kipuhatolt vesztegállásba hozni és ott bemérésünk tartamára állandósitani. Czélunk biztositására *HS* jelzőrúd *M* hüvelynek fúrásába van fűzve, hol ezzel együtt *d* tengelycsapja körül forditható, ha *T* forditócsavart kezeljük. A függélyző megragadására *HS* jelzőrúd végén alkalmazott *s* szoritócsavar szolgál. Hogy továbbá a megfogott függélyzőt *D* léptékhez közelithessük, ezért szabadon mozditható *HS* rúd mindaddig, mig *N* hüvelynek s_2 szoritócsavarát meg nem kötjük. Pontosabb beállitására *P* csavart kezeljük.

Mind a két alkalmazott lépték, l. D_1 D_2 154. ábra, átlátszó fehér másolópapirra van rajzolva, gyorsabb valamint biztosabb leolvasása végett minden czentiméterje más sorban van kitüntetve. A czentiméter alosztályozása 2 *mm* széles sávokból áll, mi módon a fél milliméteres alrész lebecslése feltünően könnyebb, mint ha tiz milliméter széles sávval pótoljuk. Az átlátszó papirlépték két sík üveglap közé van téve, ezekkel együtt elhelyeztük azokat D_1 D_2 lemezkeretbe, miért is a keret egyik függőleges oldalnyilásán betoljuk, hol helyzetét közbe szoritott faékkel biztositjuk. A lépték megvilágitása hátulról eszközölhető, hol a mécs lángját lehulló vizcsöppek ellen *C* lemezernyővel védjük, mit ennek ferde állitása által el is érünk. Használaton kivül leforditjuk *C* ernyőt *i i* tengely csapjai körül, mig léptéke keretéhez nem simul. Ily módon védjük üveglapját, ha e készüléket szállitjuk. További ujitás *T* tükör alkalmazása, ezzel pótoljuk a Schmidt által ajánlott segitő-látócsövet, sőt még azt is biztositottuk, hogy mind a két irányu megfigyelés egyedül a hozzá kapcsolandó poligonoldalnak végpontjából foganatositható E tükörrel feladatunk megoldása szűk rakodókban jóval könnyebb, mint segitő-látócsővel.

A selmeczi függély-veszteglő előnyei következők:

1. Biztos a függélyzö szabad kilengése.

2. A függélyző drótja kényelmesen megragadható, hogy veszteg-állásba hozhassuk.

3. Egyszerű és biztos a függélyző-drót beállitása a kipuha-

tolt veszteg-állásba, miután csak két T és P csavart kell kezelni, nem pedig négyet, úgy mint Schmidt készülékén. E csavarok továbbá hátulról kezelhetők, igy a segitő munkás megfigyelt léptékeinket sem el nem fődi, sem el nem mozdithatja.

4. Léptékeink czélszerűbb beosztása és élesebb kivilágitása fokozza a megfigyelés pontosságát.

5. A megfigyelést megejthetjük egyedül a theodolit látócsövével, melylyel csakis a kijelölt és hozzákapcsolandó vezérpontban kell felállanunk.

A mérés foganatositása.

A függélyzőkkel kijelölendő ED kapcsoló vonal fekvését úgy kell megválasztani, l. 157. ábrát, hogy földalatti irányával a legnagyobb pontosságot biztositsuk. Ugyanis, a mint igazolni fogjuk, a tájékozásra szolgáló szögadatokkal a legnagyobb sikert csak úgy biztosithatjuk, ha azon földalatti F vezérpont, honnan a megfigyelést tesszük, E és D pontokkal lehetőleg egy függőleges síkban fekszik. Minthogy pedig pontjaink megválasztásában a bányában vagyunk leginkább korlátozva, igy ED helyzetét földalatti térségeinknek megfelelően kell megválasztani.

Ha DE fekvése iránt tisztába jöttünk, kijelöljük az akna külszini nyilásán oly módon, hogy irányában gerendát fektetünk le, melyet a drótok leeresztése czéljából vagy két ponton átfuratjuk, vagy alkalmazunk egy selmeczi jelzőcsavart, l. 19. ábra. A gerenda legalább 0·5 m magasabbra emelendő, mint az akna legfelsőbb kávája, hogy a lecsüngő drótokat külső mérésünk utolsó vezérpontjából, l. B pontot 157. ábrában, kényelmesen megirányozhassuk A függélyzők elhelyezésénél még arra is legyen gondunk, hogy ezek távolsága lehetőleg nagy legyen, de mind a mellett azok az akna bélelését sehol sem érintsék. A függélyzők szabad lengéséről meggyőződhetünk, ha lent a rakodóban lengzetük idejét figyeljük meg. Ugyanis a másodperczekben kifejezett t lengzetidő:

$$t = 3{\cdot}1415 \sqrt{\frac{h}{9{\cdot}809}} \qquad [60]$$

hol (h) a függélyzőnek méterekben kifejezett hosszúsága.

Ha mind ezt megfelelően előkészitettük, és a függélyzők a kellő mélységig leeresztve nyugodtan csüngnek, kezdhetjük a külső mérést. Találunk tehát az e czélra kijelölt B vezérpontban a theodolittal, hol legelőször is a hátrahagyott BC háromszögelő oldal végpontját, utána D és E függélyzőket megirányozzuk. Ily módon megszerezünk több méréssel φ_d és φ_e szöget. E két szögnek különbzete: $\varphi_e - \varphi_d = \beta$ a csatlakozásra létesitett BDE háromszögnek egyik β szögét adja.

A tájékozás czéljából most még δ és ε szögeket kell ismerni. Feladatunk fontosságánál fogva az okvetetlenül szükséges adaton kivül még ellenőrző adatról is gondoskodunk; azaz kifeszitett zsinórral, fokívvel és mérőrudakkal megmérjük most ED, DB és ED oldal pontos hosszát.

Ezt azért tesszük, mert DE rendes hosszánál fogva ε és δ szöget theodolittal mérni nem lehet. ε és δ szögek nagyságát a megmért oldalhosszúságokból következőkép számitjuk:

Jelöljük $DE = b$, $BE = d$, $BD = e$-vel. Akkor ismerjük

$$s = \frac{b + d + e}{2}$$

[61] $$\operatorname{tang} \frac{\varepsilon}{2} = \sqrt{\frac{(s - b)(s - d)}{s(s - e)}}$$

[62] $$\operatorname{tang} \frac{\delta}{2} = \sqrt{\frac{(s - b)(s - e)}{s(s - d)}}$$

$\delta + \varepsilon$-nak most $180 - \beta$-át kellene adni, mert $\beta + \delta + \varepsilon = 180$. Ha ily összehasonlitás alkalmával $\delta + \varepsilon$ értéke a mennyiségtanilag szabta értéktől a megengedhető hibahatáron belül eltér, akkor mérésünk sikerültnek tekinthető. Mutatkozó szög hibáit ekkor mind a három szögadatra egyformán osztjuk széjjel, úgy hogy összegük 180 fokot adjon.

A kiigazitott szögekkel kiszámitjuk elvégre DE oldalnak azimutszögét az alábbi módon: α_b^c ismerjük a külső mérés adataiból.

$$\alpha_b^e = \alpha_b^c + \varphi_e\,;$$

$\alpha_b^d = \alpha_b^c + \varphi_d$; Igy a [19] egyenlet nyomán

[63] $$\alpha_d^e = \alpha_b^e + \varepsilon \pm 180 \quad \text{vagy}$$

[64] $$\alpha_d^e = \alpha_b^d + (180 - \delta) \pm 180.$$

Ezzel napszini mérésünk be van fejezve.

Folytatólag leszállunk a bányába a bemérendő rakodóig, hol mindenek előtt L_1 és L_2 léczeket az akna bélelő fáján úgy erősitetjük meg, hogy a selmeczi függély-veszteglő, ha e léczen megerősitjük, megfigyelésünkre kedvező állást foglaljon el. L_1 és L_2

léczek magasságát ez okból a theodolit körülbelüli magasságában választjuk. Ha veszteglő készülékünk oly távol esnék az akna lejáró szakaszától, hogy onnan kezelése nem eléggé kényelmes, akkor mérésünk helyszinén könnyű deszkahíddal rekesztjük el az aknát.

A mérést igy előkészitve meg is ejthetjük.

A kijelölt F vezérpontban felállunk a theodolittal, innen kipuhatoljuk legelőször függélyzőink vesztegállását egymás után. A szabadon lengő függélyzőt összehasonlitjuk a helyesen felállitott veszteglő-készüléknek a velünk szemben álló D_1 léptékkel, hol 15—20-szor a legnagyobb bal- és jobb oldalu kilengését leolvassuk és feljegyezzük. Ugyanezt figyeljük meg D_2 léptéken, ha e czélból T_1 tükörbe tekintünk. A függélyző helyzetét ez alkalommal fél milliméterig kell lebecsülni. Most kiszámitjuk megfigyeléseink minden csoportjára nézve a számtani közepest. A függélyző drótját ekkor HS jelzőrúddal megragadván, először az egyik lépték részére kiszámitott számtani közepesre, utána pedig a második léptékére állitjuk be. Ha több ismételt megfigyeléssel ennek teljes sikeréről meggyőződtünk, akkor függélyzőnk vesztegállását foglalja el. Mindezt ismételjük a második függélyzőnek szabatos beállitása czéljából.

Ennek elérésével megirányozzuk F pontból kapcsolandó folyosónk G vezérpontját, utána E és D pontra inditunk irányzatot. Igy megszerezzük több rendbeli mérésből μ_e és μ_d szögeket. Elvégre megmérjük zsinórral, fokívvel és rúddal FE, FD és ED hosszát úgy mint a napszinén.

Mérésünk adataiból kiszámitjuk úgy mint a napszinén ε_1 és δ_1 szögeket. Felülvizsgált és kiigazitott adataival pedig az első kijelölt GF földalatti oldalnak azimutszögét számitjuk ki.

A levetitett csatlakozó vonal és a kapcsolandó vezérpontnak legkedvezőbb kölcsönös fekvése.

Emlitettük, hogy ε és δ szögeket a megmért három oldal hosszából számitsuk ki, azonban mostani kérdésünk egyszerűbb megfejtése czéljából inkább két oldalt és a megmért szöget használjuk e számitás czéljaira, és nem az előbbi képletet. Ekkor a sinus tétellel:

$$\sin \varepsilon = \frac{e \sin \beta}{b}$$

Ez egyenletből kimutathatjuk külzelékelés által ε-nak változását, ha (e) oldal hibás lenne:

$$\cos\varepsilon\, d\varepsilon = \frac{\sin\beta}{b}\, de$$

és ha utóbbi egyenletet az előbbivel elosztjuk:

$$\text{cotg.}\, \varepsilon\, d\varepsilon = \frac{de}{e} \quad \text{vagy}$$

[65] $$d\varepsilon = \text{tg}\, \varepsilon \frac{de}{e}$$

A 65. egyenlet mondja, hogy kiszámitott ε szögünk hibája annál kisebb, mennél kisebb tg ε számértéke, ez ekkor a legkisebb is, ha $\varepsilon = 0^0$ vagy 180 fok. Szóval a kapcsolást illetve, tájékozásunk pontossága azzal biztositható jelentősen, ha műszerünk F vagy B álláspontját, l. 157. ábrát, úgy választjuk meg, hogy ennek vizszintes vetülete a két D és E függélyzőnek vizszintes vetületével egy egyenes vonalban fekszik. Ez még akkor is érvényes, ha ily helyzet előidézése czéljából DE csatlakozó vonal hosszát 30—40 $^0/_0$-kal kell röviditeni.

Példa. Megmértünk $\beta = 3^0\, 36'$ szöget, azonkivül a három oldal hosszát:

$b = 1\ m$

$d = 7{\cdot}4\ m$

$e = 6{\cdot}5\ m$

Ezekkel $\dfrac{b+d+e}{2} = s = 7{\cdot}45$

továbbá $s - b = 6{\cdot}45$

$s - d = 0{\cdot}05$

$s - e = 0{\cdot}95$

$$K = \sqrt{\frac{(s-b)(s-d)(s-e)}{s}}$$

Logarithmus.

$s-b$	0'80956	K	0'30704 — 1
$s-d$	0'69897 — 2	$s-d$	0'69897 — 2
$s-e$	0'97772 — 1	$\text{tg}\,\frac{\delta}{2}$	0'60807
	0'48625 — 1		
s	0'87216		
K^2	0'61409 — 2	$\frac{\delta}{2}$	$= 76^0\, 8'\, 57''$
K	0'30704 — 1		
$(s-e)$	0'97772 — 1	δ	$= 152^0\, 17'\, 54''$
$\text{tg}\,\frac{\varepsilon}{2}$	9'32932		

$$\frac{\varepsilon}{2} = 12^0\,6'$$

$$\varepsilon = 24^0\,12'$$

Tehát $\varepsilon + \delta = 176^0\,23'\,54''$

Ha $\varepsilon + \delta$-hoz még a megmért β szöget is adjuk, akkor $\varepsilon + \delta + \beta = 179^0\,59'\,54''$ az összeg. Igy háromszögünk szögzárlati hibája 6'' teszen, mit bátran szét lehet osztani, ha tekintetbe vesszük, hogy műszerünk β szögét 10''-el is elhibázhatta. Szögeinket tehát úgy igazitjuk ki, hogy mindegyiket 2''-el nagyobbitjuk.

$$\beta = 3^0\,36'\,2''$$
$$\delta = 152^0\,17'\,56''$$
$$\varepsilon = 24^0\,6'\,2''$$
$$\beta + \delta + \varepsilon = 180^0\,0'\,0''$$

Emlithető még, hogy némely bányamérnök a levetitett *DE* kapcsoló vonalat a bányában állandósitott *GF* vonallal lehetőleg egyenlőközüen vette fel, úgy mint ezt 158. ábránk vázolja. Igaz, hogy igy hosszabb csatlakozó vonal biztositható, de fekvése, a mint ezt a [65] egyenletből tapasztaltuk olyan, hogy mérésünk minden hibája ε és δ szögekben a legnagyobb hibákat idézi elő. Ez okból nem ajánlható.

45. §. Bányamérések pontossága.

A hibaforrásokat, hibaigazitásokat és a pontosság elméleti birálását a hibaszámitás alkalmával tárgyaljuk. E helyen csakis a pontosságot szabályozó rendeletekről legyen szó.

E tekintetben azt kell kijelentenünk, hogy hatóságaink a bányamérnök munkáit még arra nem méltatták, hogy a biztositandó pontosságot rendeletileg megszabják. Poroszországban bányamérésekkel a következő hibahatárokat kell betartani.

1. Külső méréseknél megkivántatik, hogy a poligon záróvonala az oldalhosszúságok összegének 1 : 800 nyolczszázadrészeig közelitse meg a valóságot.

2. A bemért poligonnak szög- vagy iránybeli hibája, melylyel a poligon záróvonala helyes irányától elcsavartatik, kompaszmérésnél 1 : 500 = 0'002, vagy arc 7'-nél kisebb legyen; theodolitmérésnél pedig 1 : 1500 = 0'00006 = arc 12''-ot meg ne haladja. Igy, hogy e két szögmérőnek irányhibái mint 1 : 35-höz aránylanak, azaz a theodolittól 35-ször akkora pontosságot követelnek, mint kompaszméréstől.

3. Aknapontok meghatározására vagy áttörés czéljából megejtett mérésekre kivánatos, hogy a vájatvégek egymást födjék; de esetleges hiba alkalmával ne legyen az irányhiba nagyobb a 2-dik pontozat elsorolt számok felénél.

4. Földalatti szintmérésekre megállapittatik:

a) A zsinórral és fokívvel meghatározott magasságokra vonatkozólag követelik, hogy ezek a megmért zsinór-hosszúságnak 1 : 2500-ig a valóságot megközelitsék, azaz hogy 2·5 *m* hosszú zsinórral a magasságot 1 *mm*-ig biztosan meghatározzák.

b) Látócsöves szintmérővel meghatározott magasságokra az a kivánságuk, hogy hibájuk a távolságnak 1 : 20000 részét meg ne haladja, azaz 20 méteres távolságra kisebb legyen a magassági hiba 1 *mm*-nél.

5. A terület hibái.

A magyar osztr. kataszter szabványai szerint a terület megfelelő pontossággal van meghatározva, ha ez a valóságot 0·5 $^0/_0$-ig közeliti meg. A porosz földmérők szabványai szabatosnak tekintik a terület meghatározását, ha ez a valóságot következő számokig üti meg:

0-tól 1 hectárig	áronként	. . . .	1·4² *m*-ig
1-től 10 „	„	. . . .	0·8² *m*-ig
10 hectáron túl	„	. . . .	0·7² *m*-ig.

Bányatelkek területénél, melyek oldalait poligonmérés útján zsinórral, fokívvel és mérórudakkal pontosan megmértük, a területet pedig nem planimeterrel, hanem számitással határoztuk meg, a hiba fennebbi számok negyed-, sőt ötödrészére becsülhető.

Szóval, közvetetlenül bemért adatokból kiszámitott bányatelkek területhibája $^1/_8$, sőt $^1/_4$ százalékra becsülhető, mely számokkal a hectárnyi nagyságu terület 39 esetleg 25² *m*-ig bizonytalan. Határoló oldalai pedig a *dm*-ekben bizonytalanok, úgy az oldalaknak *dm*-ekben, a telkeknek négyzetméterekben való lekerekitése ajánlható, mert kisebb számnak nem lehet gyakorlati értéke a fent emlitett okokból.

HARMADIK SZAKASZ.

Bányatérképek szerkesztése.

ELSŐ FEJEZET.

Bányatérképek czélja, felosztása, tárgya és kisebbitése.

A bányamérnök legfontosabb feladatai egyike, mérése alapján oly térképek szerkesztése, melyekből minden szakértő fogalmat nyerhet földalatti térségeink kiterjedéséről, összefüggésükről, az ezekkel feltárt ásványkincsről és kisérő mellékkőzetéről. E kivánság kielégitése, nevezetesen kiterjedt birtoknál és szabálytalan, szórványosan lerakódott ásványoknál igen nehéz feladat, melyet csak számos vizszintes, függőleges vagy ferde rajzsíkra vetitett képpel biztosithatunk.

Általában megkülömböztetünk:

1. Vezér- vagy átnézeti térképeket.
2. Részletes vagy különleges térképeket.

46. §. A vezér- vagy átnézeti térkép.

(General- und Übersichtskarte.)

Az igy czimezett térképek feladata egész bányamegyéről vagy legalább nagy bányabirtokról jó általános fogalmat nyujtani, mely okból mértékét oly kicsinyre vesszük, hogy körvonalozott czélunk még biztositható. Ez rendszerint alaprajzra s legfeljebb még nehány függőleges metszetre szoritkozik.

Az átnézeti térképet, úgy mint más vizszintes vetületet, legelőször négyzethálóval födjük be, melynek vékony vonalait déltől északnak, és kelettől nyugatnak tussal vagy kék, esetleg piros szinnel jelöljük ki. E háló oldalai kerekszámu hosszat képviseljenek, rendszerint 100, 200, 400, 500 vagy 1000 méterre szabjuk. Egyes vonalaival kijelöljük mindjárt a készitendő részletlapoknak határvonalait is. E térképeken kitüntetjük úgy mint kataszteri térképeken a földfelület megművelt részeit: ha viszonyaink azt megengedik, akkor még ennek domborulatát vizszintes gyűrűvonalakkal is ki kell tüntetni. Utóbbiakat vagy halvány tussal, vagy festékkel húzzuk ki. Továbbá kitüntetünk épitményeket, nevezetesen tornyokat, kohókat, gyári épületeket és egyéb a tájékozásra fontos műtárgyakat. L. 17. táblát. Hasonlókép ki kell még tüntetnünk közlekedő utakat, vasutakat, hidakat, álló és folyó vizeket, zárt kutatmányokat, bányahatárokat, mélyfuratokat, kutatásokat, behorpadásokat, hányókat, aknákat, tárókat, sőt ha lehetséges feltárt telepeink főszintjeit és fontosabb elvetőit. Egész megyékre terjedő térképekben megkülömböztetünk egyszerű jellel a műveletben lévő és felhagyott bányát, kincstárit és magánbányát; sőt a 17. táblán bemutatott jelekkel felismertetjük még a termelt fémeket is. Ha csak lehetséges, felismertetjük még a felület alkotó kőségeit halvány szinezéssel vagy srafirozással, úgy mint ezt Péch utasitása szerint tesszük. Az átnézeti térkép metszeteiben a telepeket, mellékkőzetét, elvetőit a bánya függőleges határlapjait, a főfolyosókat, aknákat, földalatti vizvezetéseket szoktuk bemutatni. E rajzokban nagyobb mértéket használunk a magasságok ábrázolására, mint a vizszintes távolságokra; egységét, a feladatnak megfelelően 2-, 4-, 10- sőt 20-szor akkorának vehetjük.

Az itt általában elsorolt szabály alkalmazása a 18. táblán látható, hol 159. és 160. ábra érczbányának vizszintes vetületét és függőleges metszetét adja; 161. és 162. ábra pedig egy szénbányának két legszükségesebb vetületeit ismerteti.

Átnézeti térképek mértéke.

A térkép kisebbitése rendkivülien fontos és messzeható tényező, mely egyszer hibásan választva nagy pénzáldozatot nyelhet el. A mennyiben rajzolásaink munkája s költsége a mérték nagyobbodásával négyzetes arányban szaporodik, képeink átnézete pedig nehezedik.

Általános tájékozóul alábbi számokat ismertetünk:

Egész bányamegyék térképeire 1 : 50000-től 1 : 20000-ig választjuk meg a kisebbitést. Egyes bányák képeit, 1 : 10000, 1 : 5000, 1 : 4000, 1 : 2500, 1600 sőt kivételesen 1 : 1000-del is szerkesztjük.

Ugyan-e helyen felemlitjük a selmeczi kir. bányák ujabb helyzetrajzát, mely a kataszter mértékével, t. i. 1 : 2880 = 0·000347-el készült. Přibramban a cs. kir. bányák áttekintő térképe 1 : 5760 kisebbitéssel. A westpháli és saarbrückeni bányák átnézeti térképei törvényszabta kisebbitése 1 : 1600.

47. §. Részletes vagy különleges czélu térképek.

Telepeink ásványtani összetételét, valamint lefejtésüket czélozó földalatti üregeinek összefüggését a legkisebb részletekig csak úgy tanulmányozhatjuk, ha az átnézeti térképnél jóval nagyobb mértékben rajzolt térképeket is készitünk. Onnan van, hogy kiterjedtebb bánya vizszintes vetületének bemutatására több száz részletlapra lehet szükségünk, ennyi néha csak egyedül a vizszintes vetület részletezett bemutatására. Azonkivül készitünk még függőleges metszeteket, melyek síkja majd nyomozó folyosókat követvén, az érczér csapásvonalának merőlegesen indul, vagy haladunk ily síkkal egyenlőközüen a csapásvonallal. Készitünk még úgynevezett lefejtő-térképeket is, rajzsíkuk egyenlőközü a telep síkjával. A részletes térképek sorába tartoznak még: kutató térképek, bányát adományozó vagy határt jelölő térképek, geologi térképek, vagy csak egyes szövevényesebb feladatok megoldására rajzolt különleges térképek.

E részletes térképek mértéke még alaposabb megfontolást követel, mint az átnézeti térkép-é, minthogy nagy számuk még jóval érezhetőbb kiadásokkal jár. Onnan származik ezeknek különböző szerkesztés módja is. Tudniillik legkiválóbb szaktársaink azon fáradoztak, hogy a legkülönbözőbb nehezitő viszonyokra kis mértékkel is a bányásznak tökéletes és világos képet biztositsanak.

Részletes térképek kisebbitése az elsorolt számok közt választható: 1 : 1000, 1 : 800, 1 : 750, 1 : 500, 1 : 400, 1 : 250, 1 : 200, sőt néha 1 : 100 is.

Egyes esetekre rendeletek szabják meg a mérték nagyságát; pl. a magyar általános bányatörvény 50-dik §-a követeli, hogy zárt kutatmányok, valamint bányatelkek adományozó térképein a kataszter kisebbitéseivel, t. h. 1 : 2880-dal készüljenek.

Selmeczen a kincstári bányák részletlapjait, hol minden lapon csak egy bányaszintnek vizszintes vetülete van bemutatva, 1 : 576 a mérték, tehát átnézeti térképüknek ötszöröse. Ugyan-e mértékkel készitenek minden telep részére függőleges metszeteket, melyek síkjával nyomozó vágatot, aknát, guritót vagy szinthágót kisérnek. E geologi metszeteken három egymás fölött fekvő főszintet tüntetnek ki, hol különböző szinek segitségével az előforduló kőséget, a feltárt érczoszlopokat, netaláni vetőlapokat vagy agyagereket mutatnak be.

Ezeken kivül készitenek Selmeczen minden érczér részére lefejtő térképet, 1 : 1440 kisebbitéssel, vagyis az áttekintő térképnek kétszeres egységével. E lefejtő térképek hosszanti metszetek, melyek rajzsikja egyenlőközü a telep egyik határlapjával, rendszerint fedőlapjával. E térképek feladata a fejtőhelyek és pászták bemutatása, az érczlerakodás kiterjedését és minőségét ismertetni, továbbá az ür biztositása vagy betömés módját részletesen ábrázolni.

Přibramban a részletes térkép vizszintes vetületeit 1 : 600-dal rajzolják. E térképek minden lapján egyazon telepnek négy egymásra következő főfolyosóját mutatnak be, melyeknek azonban csakis a felmért poligonjait tüntetik ki, és pedig a legfelsőbbet sárga szinü vonallal, az alatta fekvőt piros, a harmadikat kék, és a negyediket sötétbarna vonallal. Kényszeritve voltak e vonalas ábrázolást választani, hogy telepeik nagy dűlésszögei mellett a főfolyosók egymást el ne födjék, ha többet egy lapon kimutatnak.

A térségi viszonyok részletesebb ismertetését, úgy mint Selmeczen, keresztmetszetekkel és lefejtő térképekkel biztositották.

Hazánk legtöbb kőszénbányáinak részletes térképeire, valamint Saarbrücken és Westphália kőszénbányáiban is 1 : 800-as kisebbitést használnak.

A gömörmegyei Vashegyen úgy a kincstár, valamint a rimamurányi társulat is részletes térképeit 1 : 500-dal késziti.

Egyes független feladat megoldása alkalmával előfordulhat az is, hogy a térkép kisebbitését a meglevő rajzlap szerint határozzuk meg. Legyen $L = 550$ méter lerajzolandó bányánk hosszkiterjedése, $l = 1{\cdot}2\ m$ papirlapunk hossza. Ha a bányát úgy rajzoljuk a papirosra, hogy legnagyobb hossza ennek hosszával essék össze, és ha még $0{\cdot}1\ m$-ert margóra levonunk, marad mint berajzolható hosszúság $l = 1{\cdot}1\ m$. A mérték (k) kisebbitését most úgy találjuk, ha l-et L-lel elosztjuk:

$$k = \frac{l}{L} = \frac{1{\cdot}1}{550} = \frac{1}{500}$$

Ha eredményünk nem kerek szám, akkor a legközelebbi, de kisebb számot kifejező kerekszámu törtet választjuk.

Rajzpapiros.

Bányatérképnek mindenekelőtt nagy legyen tartósága, ez okból csakis a legjobb rajzpapirosra rajzoljuk. Átnézeti térképekül vászonra ragasztjuk, vagy használunk oly papirt, melyet mindjárt a gyártás alkalmával vászonra ragasztottak. Részletes rajzaink lapjait majd vászonra, majd kártyapapirra, sőt tükörüveg vagy czinklemeztáblákra is ragasztjuk. Kártyapapir a legolcsóbb, és ha hátsó lapját gyantás mázzal védjük, megfelel változatlansága is. A tükörtábla költséges és törékeny, czinklemeznek nagy a hő okozta hosszváltozása. Az előkészitett papirlapokra csak akkor szabad rajzolni, ha ez felragasztása után két héten át teljesen megszáradt.

Rajzlapjaink nagysága változó, átnézeti térképeink hossza 1·2—2*m*, magassága 1—1·2 *m*. Részletrajzaink lapjait 0·5—0·8 *m* hosszúsággal, 0·4—0·6 *m* magassággal szoktuk késziteni.

Az átnézeti térképet rendszerint nagy rajzasztal lapjára vonjuk, hol mindig lefödve tartjuk. A részletlapokat szekrényben tartjuk, ezeket úgy vágjuk körül, hogy négyzethálójuk szélső vonalain túl köröskörül 1·5—2 *cm* széles sáv maradjon a felirás részére, melylyel az illető lapnak vizszintes, esetleg magassági helyzetét a lapok összes csoportjában felismertetjük.

49. §. A felmért poligon, esetleg háromszögelő pontoknak rajzba való foglalása.

Első sorban elkészitjük minden mérésnek vizszintes vetületét és csak ezzel, valamint pontjaink szintkülömbségeivel szerkesztünk függőleges vetületet vagy metszetet.

A vizszintes vetület két módon rajzolható meg: 1. Az azimutszögnek mechanikai módon való felrajzolása által. 2. Hogy minden pontot kiszámitott összrendezőivel a térképbe rajzoljuk. A mechanikai eljárást ritkán és csak alárendelt czélu mérések térképeire használjuk, mig a háromszögtani, vagy összrendezőkkel való eljárást felülmulhatatlan pontosságánál fogva, úgyszólván kizárólag alkalmazzuk.

Térképszerkesztés kompaszszal.

Csak alárendelt, önálló, kisebb és kompaszszal felmért poligont rajzolunk mainap kompaszszal. Ily rajzoknak kezdő és végzőpontja rendszerint úgy is adva van. Ha a kezdőpont szabadon választható, akkor úgy választjuk fekvését a rajzlapon, hogy ez ott kényelmesen elférjen és tetsző képet biztositson. A poligonnak hosszanti kiterjedését ekkor kivétel nélkül a papirlap hosszabb szélével vesszük egyenlőközünek. Kompaszszal mért poligonnak főkiterjedését a megmért csapószögek számtani közepeséből szoktuk kiszámitani. Ha ily lapra függő vetületet vagy metszetet kell rajzolni, akkor ennek kiterjedése is számitásba veendő.

Legczélszerűbb a képet ugyanazzal a kompaszszal szerkeszteni, melylyel a mérést megejtettük. Az eljárás abból áll, hogy a kompaszt szögfelrakó táblába fektetvén, táblája élével egyenlőközü fekvésbe hozzuk a rajzlap hosszabb szélvonalával. Ekkor meglazitjuk a kompaszpersely kötőcsavarát, hogy ezt ott addig fordithassuk, mig felszabaditott mágnestüje az elébb kiszámitott átlagos csapásra bevág. Ezzel a kompaszt rajzlapunk hosszabb szélvonala után tájékoztuk, most állandósitjuk helyzetét a kötőcsavarral. A szögrakóval kijelölhetjük ezután a mágnesi déllőt, ha a kompaszt változatlan helyzetü rajzlapon addig forditjuk, mig mágnestűje éjszaki végével 0 fokra be nem vág; utóbbi irányt ekkor vonallal kijelöljük. Folytatólag a felmért poligonnak első oldalát úgy találjuk, ha mérésünk czélszerüen kijelölt kezdőpontját a szögrajzoló egyik élével szabatosan metszük, és egyuttal e pont körül addig forgatjuk, mig mágnestűje a kijelölendő irányra be nem vág. Elérve ezt, finom rajzón vonalat húzunk, és rajta kijelöljük e poligonoldalnak vizszintes hosszát. Igy folytatjuk az eljárást oldalról oldalra poligonunk végpontjáig. A valódi déllőt ily rajzokon a mágnestű declinátiójával tüntetjük ki. Az eljárást sikerrel csak oly helyiségben gyakorolhatjuk, hol nincsen vas, továbbá ha rajzasztalunk független a szoba padlójától.

A poligon összrendezőkkel való rajzolása.

Emlitettük már, hogy minden térképnek vizszintes vetületét legelőször is finoman kihúzott négyzethálóval födjük be, mely háló oldalai összrendező-tengelyeink kezdőpontjától számitott kerekszámu, azaz 50 100 *m* távolságban kijelölt ordinaták és abszcissák. Ezeknek kezdőponti távolságát az illető vonalakon, a lap széle mentén felirt számokkal tüntetjük ki. Igy könnyitjük pontjaink berajzolását, átnézetesebbé tesszük részletlapjaink kölcsönös összefüggését, de még a bányarésznek emlitése jelentésben is a legegyszerűbb. Tudniillik ily czélból, úgy mint vasutnál a szelvényszámot, idézzük itt az ordinatát és absczissát, mi módon fekvése tökéletesen van meghatározva.

A kezdőpontnak megválasztásáról szó lévén a 37. §-ban, miért is ismertnek tekintjük.

Az eljárást pontok berajzolása czéljából legrövidebben példával világitjuk meg. Legyen berajzolandó d pontunk két vizszintes rendszála $X = + 265\ m$ $Y = + 175\ m$. Az illető rajzlapot felkeresvén, l. 18. tábla, 151. ábrát, kitüntetjük $b\,c$ ordináta vonalát oly módon, hogy a 100 és 200 absczissa vonalon, 200-tól a számsor növő irányában, tehát észak felé, b-ig és c-ig még 65 métert mérünk fel. Folytatólag egyenes vonalat húzunk b-től c-ig és erre mérünk rá b-től d-ig 75 métert. Ha d pontot körülkarikáztuk, és jelző betüjét vagy számát melléje irtuk, akkor ki van ez jelölve. Igy eljárva kisebb körzővel a leghosszabb rendszálat nagy kényelemmel lehet felmérni; igaz, hogy eljárásunk pontossága a háló pontosságától függ, de ez könnyen biztositható, ha ennek kijelölésére megfelelő aczélvillát készittetünk, melynek hegyei egyszer s mindenkorra négyzethálónak oldalhosszával változatlanul egyenlő távolságban vannak. Igy kitüntetjük a poligonnak egymásra következő szögpontjait a jegyzőkönyvünkben kiszámitott összrendezők segitségével. Ellenőrzésül megmérjük minden kijelölt poligonoldalnak vizszintes hosszát a körzővel; ha ez más lenne, mint a jegyzőkönyvben van kimutatva, akkor a hiba hollétét kell kipuhatolni és kiigazitani. Rajzainkban csakis felülvizsgált és kiigazitott adatokat szoktunk kitüntetni.

Földalatti üregeink berajzolása.

Ha a tárgyalt módok egyikén a bemért poligonnak vizszintes vetületét megrajzoltuk, foghatunk a földalatti térségek kitüntetéséhez. E czélból már a mérés alkalmával ordinatákat bocsátunk térségeink oldalfalainak majd csak a poligonoldal végpontjaiban, majd ennek belső pontjaiból is. A poligonoldal ekkor absczissatengelyül szolgál. Ha ily ordinaták rövidek, legfeljebb 2 – 3 m-nyiek, úgy hosszúságát rúddal, a szemmérték szerint felvett merőleges irányban mérjük meg. E rend szerint igen rövid összrendezőkkel kitüntetjük az oldalfalaknak kellő számu pontjait, melyeket elvégre folytonos vonalakkal úgy kötjük össze, a hogy azokat felmérésük alkalmával jegyzőkönyvünk vázlatos rajzaiban összekötöttük. Az ily módon létrejött rajzot kihúzzuk most finom fekete tussal vagy ha szükséges, még ki is festjük; szóval az alább tárgyalt módon kikészitjük.

50. §. Bányatérképek kikészitése.

Nem létezik általános és mindenütt elfogadott szabály bányatérképek kikészitésére, hanem egyes vidékeken oly jelölés-módok honosodtak meg, melyek a fennforgó viszonyoknak leginkább megfeleltek, miért is következőkben az elterjedt czélszerű ábrázolás-módokat mind ismertetjük.

Általános jelek.

Térképeink könnyű megértését és átnézetét előmozditjuk nagy mértékben, ha a leggyakrabban előforduló tárgyakat egyszerű és jellemző jelekkel tüntetjük bennük fel, úgy mint ezeket a 19. ábra ismerteti.

Részletes térképen használunk ily jeleket: bemért vezérpontokra, lelőpontokra, földalatti és külső határpontokra, feltárások végpontjaira, földalatti és a napszinére nyiló aknákra, kutató aknákra, lejtőaknákra, szinthágókra, guritókra, földalatti vizvezetékre, vizemelő- és -szállitó vizoszlopos gépre, földalatti légpestre, légajtóra, agyagfa-, fa- vagy kőgátakra, fa és falazott bélelésekre, vizvezető folyosókra, lefejtésekre, vetőkre, az érczérben vagy meddőben haladó folyosókra, a lefejtett telepészre, a betömött telepészre, hatóságilag elrendelt biztonsági pillérekre, hányókra, valamint a bányaüzlethez tartozó, és idegen épületekre.

Ha vizszintes vetületekben mértékünk nagyságánál fogva földalatti folyosóink szélessége is kimutatható, akkor a telep csapóvonalát követő folyosóban vastagabb tusvonallal húzzuk azt az oldalfalat, mely közelebb fekszik telepünk fekűlapjához, mig fedüjét csak vékony vonallal és azonkivül több pontjában alkalmazott apró nyíl által felismerhetjük. A nyíl hegye kijelöli a dűlés irányát, melléje irt száma a dűlés szögét fejezi ki fokokban. Függőleges telepekben, vagy meddőben haladó folyosóknak mindkét oldalfalát csakis vékony tusvonallal szoktuk kitüntetni.

E helyen meg kell jegyeznünk, hogy Péch miniszteri tanácsos utasitása szerint, mely szintén nagy elterjedésnek örvend, ily térképekben mindig az ábrázolt űrnek a felső és baloldali részét kell vastagabb árnyékvonallal kidomboritani, akár érczben, akár meddőben van ez.

Bárminemü aknának vizszintes vagy függőleges vetületét, elejétől végig tussal kell szürkére festeni és bal oldalát sötét árnyékvonallal kidomboritani. Az aknák szinfokozata sötétebb legyen mint bármely más tussal festett folyosónak szine, hogy folyosónak ne nézhessük. Lefejtett telepészeket halvány tussal festünk be; néha vonalozzuk, és pedig egyszerüen, vagy keresztbe rajzolt vonalakkal. Meddő teleprészeket, hátrahagyott gyámokat, vagy biztonsági pilléreket nem festünk be, de utóbbiaknak határvonalait czinóbervonallal tüntetünk ki. Megütött vagy áthatott vetőt, mellékeret vagy ér-szakadékot csapása irányában húzott tusvonással és belőle kiinduló apró nyillal tesszük felismerhetővé. Dűlésszögét fokokban kifejezve irjuk a nyil mellé. A szénbányász vetőlapjait czinóbervonással tünteti ki, mig az érczbányász elvetőit vagy gummigutával vagy az ábrázolt bányaszint jelző festékével szegélyezi. Ugyanily jelölést használnak érczbányák agyagereire vagy mellékereire is.

Térképeink festése a legszükségesebbre szoritkozzék. Halvány karminnal festjük a bányához tartozó épületeket, ugymint: akna- és gépházakat, tiszti- és munkás-lakházakat, puskaportornyot, ércz- és szénraktárakat, előkészitő műhelyeket és kohókat; más épületeket szürkére festünk, vagy tussal vonalozzuk. Bányatelkeink határvonalait esetleg községi vagy egyéb birtokhatárokat finom tusvonással vagy pontvonásos sorral ismertetjük fel; néha e határvonaltól 0·5—1 *mm* távolságban ecsettel vagy kihúzó-tollal még szines sávval is szegélyezzük, l. 18. tábla 159. ábrát.

51. §. Az érczbányász részletlapjainak ábrázolás-módjai.

Ha alaprajzaink szerkesztése szempontjából a lényegesen különböző eljárásokat birálat alá vesszük, akkor az elterjedt és czélszerünek bizonyult ábrázolások sorából négy módot kell emlitenünk.

Az első és Magyarországban legelterjedtebb eljárás Svaiczer Gábor főkamaragróf és selmeczi bányaigazgatótól származik, miért is selmeczi eljárásnak nevezzük. Jellemzője az, hogy a tárók és főfolyosók szegélyszineivel azoknak magassági fekvését megkülönbözteti, meddőségüket vagy érctartalmukat pedig a vágat belső szelvényére alkalmazott szinnel ismerteti. Svaiczer módjával nagyobb súlyát abban helyezi, hogy földalatti térségeink összefüggéséről adjon könnyen felfogható képet, mig telepeink ásványtani tanulmányozásaira kevésbbé terjed ki.

Ismertetésére bemutatjuk a 20. tábla 163. és 164. ábráját egyszerü esetre alkalmazva.

A második eljárás külföldi, ezt leginkább franczia, olasz és német bányászok alkalmazzák. Lényegét abban tapasztaljuk, hogy táróinak és folyosóinak oldalfalait egyerü a vonalzóval és kihúzótollal rajzolt vonallal határolja; tehát nem ugy mint Svaiczer szakadozott, a valóságot utánozó vonallal. A bányaszinteket nem szegélyző szinezéssel külömbözteti meg, hanem a vágatok belső izelvényeinek befestése által, ugy mint ezt a 165. ábra bemutatja. E képek egyszerűsége nem szenved kétséget, térségeinek átnézete nagyobb mint Svaiczer térképein, de a telepeknek ásványtani összetételét csak külön szerkesztett metszetekkel és lefejtő-térképekkel lehet biztositani. Onnan van, hogy hazánk bányászai ezt az eljárást inkább csak átnézeti térképek szerkesztésére alkalmazzák, hol a folyosókat 0·5—1 *mm* vastag szines vonallal egyszerüen kihúzhatják.

A térképrajzolás harmadik módját Přibramban alkalmazták legelőször, l. 20. táblán 165. B. ábrát. Ez tulajdonkép nem egyéb, mint a második, úgynevezett szász-német eljárásnak módositása igen szövevényes térségi viszonyoknak könnyü megértésére. A přibrami érczerek bizonyitják e módositást leginkább. Ugyanis ereik dűlésszöge 70—80 foknyi és egy-egy éren már 30–34 egymás alatt fekvő bányaszinten dolgoznak. Melyek összefüggő megmunkáltatását azzal biztositották, hogy minden részletlapnak vizszintes vetületén az egymás alá sorozott folyosókból négyet tüntettek ki. Eljárásuk szükségessé tette, hogy folyosóikat a szélesség elhanyagolása mellett ábrázolják, azaz hogy rajzaikon csakis a bemért poligon oldalait vékony vonalakkal mutassák be, l. 20. t. 165. B. ábrát. A szinteket e poligonok szineivel külömböztetik meg. A legmagasabb folyosónak poligonját sárga, a másodikat piros, a harmadikat kék, a negyediket barna szinü vonalakkal rajzolják. Azonkivül kitüntetnek bemért vezérpontot jelzőszámával *F* főaknát, 1, 2, 3, 4 guritóit és szinthágóit. Telepjeik ásványtani, nevezetesen geologi tanulmányai czéljából lefejtő-képeket szerkesztenek, melyek rajzsíkja egyenlőközü az ér fedőlapjával, hogy rajtuk a munkahelyek távolságát minden irányban helyesen mérhessék le. Utóbbi képeken kimutatják az érczjárást czinóber vagy karminszinü pontozással, vagy mint ezt Péch Antal lefejtőtérképein bemutatjuk, l. 24. tábla 170. ábrát.

A negyedik eljárás Péch Antal miniszteri tanácsos nagy érdeme, ki rendszerét Selmecz érczereinek szövevényes ásványtani tanulmányozása czéljából állitotta össze. Szerinte öt különböző térképet alkalmazunk egy bánya ábrázolására.

1. Helyzetrajzot, l. 21. tábla 166. ábrát, melylyel a földfelületet ugy mint kataszteri térképen ismertetjük. Azonkivül kitüntetjük rajta szines vonalzással vagy halvány festéssel is a felület alakitó kőségét, vizszintes gyűrűvonalakkal a felület domborulatát, utakat, folyosókat, hányókat, behorpadásokat, hidakat, épületeket, aknák és tárók szájait, és még az $A A_1 B B_1 \ldots K K$ metszősikokat, melyekkel bányáinkat metszük.

2. Átnézeti térképet a földalatti folyosókról és aknákról, l. 22. tábla 167. ábrát. Ezek vizszintes vetületek, rajtuk egyszerü szines vonalakkal mutatjuk be a főszinteket, a guritókat, aknákat és $A A_1 B B \ldots K K$ metszősikokat.

3. A részletlapoknak vizszintes vetületei, l. 23. tábla 168. ábrát. Minden részletlapon csak egy bányaszintet mutatnak be a lap terjedelemig. A bányaszint magassági fekvését nem szinnel, hanem felirással fejezik ki. Igy módunkban áll az ér érczjárását, mellékkőzetét, vetőlapjait, agyagereit és egyéb fontos ásványelemeit szinekkel részletesen bemutatni.

Legelőször a mellékközet különböző fajtáit festik be; syenitet okersárgával, daczitot rétzölddel, zöldkövet berlini kékkel, agyagos eret vagy vetőlapot gummiguttával. A folyosók belső szelvényeit e képeken halvány tussal szürkitik. Elvégre felismertetik a kovaeret halvány karmin szinezéssel, melyen belül az ércztartalmat kisebb-nagyobb czinóber-pontokkal ábrázolják. Aknákat, guritókat a közönséges módon sötétebb tussal festik, lefejtett teleprészeket vonalozzák, érczerek és vetők dűlésszögeit apró nyillal és mellé irt számmal jelölik. A függőleges $A A_1 B B_1 \ldots K K$ metszősikokat ép ugy, mint a két megelőző térképen mutatják be.

4. Függőleges metszetekkel bemutatjuk az egymás alá sorozott térségeket, az érczjárást, a lefejtés valamint az ásványtani összetételt; l. 24. tábla 169. ábrát. E rajzok síkjaival nyomozó folyosókat, guritókat és aknákat követünk, vagy állitjuk merő-

legesen telepünk csapóvonalára. Szinjelzése egyezik az előbbi térképen ismertetett jelzéssel, mely itt is folyosók, üvegek, aknák, kőségek és az érczér megkülönböztetésére szolgál.

5. A fejtések legvilágosabb képeit elvégre az ugynevezett lefejtő térképekkel biztositjuk, l. 24. tábla 170. ábrát. Ezek rajzsíkja egyenlőközü az érczér fedőlapjával; vetületei úgy készülnek, hogy bemért pontjait merőlegesen vetitjük reá. Ily képekkel főkép az ér ércztartalmát lehet behatóan ismertetni, ha a havonkint kivájt tömeget a térképen körvonalozzuk, jelzőszámmal ellátjuk és utóbbi szám idézése mellett rovatos kimutatásban a termelt érczfajtákat, ezek mennyiségét és pénzértékét részletesen gyüjtjük.

Péch eljárását némi módositással a gömörmegyei Vashegyen ugy a rima-murányi vasgyárak, valamint a királyi vasgyárak kiterjedt bányáiban alkalmazzák nagy sikerrel. Ugyanis egyszerűbb települési viszonyaik teszik itt lehetségessé, hogy a folyosók belső szelvényeit, l. 23. tábla 168. ábrát, be nem festik részletlapjaik vizszintes vetületeiben. Ezzel méréseik vezérpontjai és ezeknek jelzőszámai világosabban emelkednek ki. Az áthatott ásványfajták ismertetésére pedig megfelelhetnek igy is, ha a folyosók mind két oldalán szines sávokkal különböztetik meg a mellékkőzetet. Eljárásukkal ugyancsak minden főszintnek képét külön lapon ábrázolják, magassági fekvését a lap felirásával ismertetik.

52. §. A szénbányász részletlapjainak szerkesztés-módjai.

A szénbányász átnézeti térképen kivül rendszerint csak kétféle részletrajzot szerkeszt: vizszintes vetületeket és földismereti metszeteket.

Részletrajzainak vizszintes vetületei átnézeti térképének nagyobb mértékü részei, szerkezetük rendszerint egyszerűbb mint az érczbányász részletlapja, a mennyiben folyosói, siklói, szinthágói mind a telepben haladnak, de még azért is, mert telepjei majdnem mindenütt lefejtésre méltók, tehát lefejtésük méltósága hosszadalmas tanulmányt nem követel.

Szénbányák ábrázolására általában két módot emlithetünk.

1. A magyar-osztrák birodalomban alkalmazott eljárást, mely Svaiczer módjának egyszerűsitése, és 2. a szász-német eljárást, mely a szászországi érczbányákban alkalmazott móddal majdnem egyenlő.

Hazai szénbányászok harmadkori szénfejtéseiket a 25. tábla

171. ábrában vázolt módon térképelik. Az aknától a széntelepig inditott 144.—145. nyomozó-folyosót, valamint *BCD* és *EFG* érmenetü folyosókat ugy mint Svaiczer, szegélyszinekkel ismertetik; a legmagasabbat a legvilágosabb, a legmélyebbet a legsötétebb szinnel. E szinek rendes sora: sárga, piros, kék, barna és fekete. Vegyitett szineket a két alkotó alapszin közzé szoktak sorozni. A folyosók belső szelvényeit halvány tussal festjük be. *ss* siklókat, *tt* szinthágókat ép ugy, mint a telep dűlését követő lejtőaknákat tussal sötétebb szürkére festjük, de szines szegély nélkül.

MN lefejtett teleprészt tussal festjük be, néha még meg is vonalozzuk. *pp* biztonsági pillérek határait czinóber-vonással tüntetjük ki; v_1 v_2 vetőt ugyancsak piros szegélyvonallal és apró nyillal ismertetjük. A szinthágókat, siklókat vagy guritókat szénbányákban római számokkal jelöljük meg; a főfolyosók közti osztófolyosókat, közbüljáratokat az alsóbb rangu pillér képezésére, egymás után arabs számokkal jelöljük, l. 1, 2, 3 osztófolyosót. A főfolyosót pedig az akna szája alatti mélységszám emlitésével ismertetjük; p. 150 méter mélységü főfolyosó.

A *szász-német szénbányász térképe*, l. 25. tábla 172. ábra. Sajátossága az, hogy szegélyszint nem használ, hanem minden telepnek folyosóit, tekintet nélkül magasságára, egy szinnel festi és pedig belső szelvényüket festi be. A telep lefejtett részét ugyanazzal a szinnel egyszerüen vonalozza. Betömött üvegeit keresztező vonalozással tünteti fel. A feltárás évi haladását ugy mint hazánkban szokásos, a bányában jelzővassal, a térképen pedig beleirt számmal tüntetik fel. A meddőben haladó keresztvágatokat, a telep vetőlapjait vagy a telepben elterjedt meddő tömegeket karmin szinnel ismertetik.

Ha egy bányatelep határában több egymás alatt fekvő széntelepet egyszerre fejtünk le, vagy akkor is, ha igen vastag széntelepet több emeletben fejtünk le egyszerre; ily viszonyokra minden telepről vagy lefejtett emeletről külön-külön részlettérképet készitünk, a telepet, esetleg lefejtett emeletet ekkor vagy a használt jelzőszinnel, de még inkább a lap felirásával ismertetjük. A szénbányász inkább csak átnézeti térképen mutat be egyszerre több egymás alatt fekvő fejtést és folyosó-rendszert, mindegyikét más-más szinnel befestve.

A bányásznak egyik főszabálya még az is, hogy folytonos tusvonallal csak felmért bányatérséget szabad megrajzolni; régi térképekről vett, vagy megbizható személyek állitásai szerint rajzolt folyosókat csak pontozott vonalakkal szabad térképeinken bemutatni.

53. §. Függőleges, esetleg dűlő vetületek szerkesztése.

Bányáink üregeit majd átnézeti, majd részletes tanulmányok biztositása végett vetitjük függőleges vagy a telep fedőlapjával egyenlőközüen haladó, azaz dűlő rajzsikra is. E képek főczélja mélységi és magassági viszonyokat szabatosabb módon bemutatni, mint ez egyedül vizszintes vetülettel sikerülne. Ily függőleges vetületben kifejezzük számokkal a legfontosabb magasságokat és mélységeket, a megfelelően választott viszonyitó sikra vonatkoztatva. A viszonyitó sikot, legalább átnézeti térképen ki kell tüntetni a térképen húzott viszintes tengelyvonal által. Átnézeti térképekben a magasságok kifejezésére: 5-, 10-, 20-szorta nagyobb mértéket használunk mint a távolságokra, mig részletrajzaink ilyféle metszetein mind a két kiterjedést egy mértékkel rajzoljuk. Kivételt csak aknákkal teszünk, melyek szélességét mindig túlozva tüntetjük ki.

Függőleges vetületek szerkesztésénél ugy járunk el: minden pontot felvetitünk a kijelölt viszonyitó, nullás magassági tengelyre; e vetitő sugárra mérjük pontunk magasságát vagy mélységét. Rendes talphágásu folyosóban kitüntetjük igy a kezdő- és minden elágazó pontot; az igy kijelölt pontokat összekötjük finom s egyenes tusvonásokkal a talplap megrajzolása czéljából. Folyosóink talplapját csak akkor mutatjuk be több közelebb, azaz 2, 4 vagy 5 méternyi távolságokra sorozott pontjaival, ha térképünknek talpszabályozás a czélja. Függőleges metszetekben ki kell még tüntetni: minden aknát külső nyilásával, rakodóival: tárókat, vizlecsapoló folyosókat, főkép a legnevezetesebb feltáró-folyosókat és lefejtéseket; minden a bányában és külső felületen állandósitott magassági jelet. Szóval ugy járunk el, mint ezt a 26. tábla 173. ábrában vázolt átnézeti, és a 174. ábrában bemutatott részletes metszet ismerteti.

Néha bányánk behatóbb tanulmányozása több és különböző irányu metszeteknek szerkesztéseit teszi szükségessé Leggyakoribb az ugynevezett kereszt-rajz, melynek sikja merőleges telepünk csapóvonalán. Kereszt-rajzokban főkép ama aknákat, fejtéseket és folyosókat kell bemutatni, melyek csapásirányu metszetben el lettek fedve. Gyakran több telepnek szövevényes összefüggését azzal lehet könnyebben megérteni, hogy egy-egy függőleges metszetében két vagy három egymásra következő parallel metszetet tüntetünk ki, mindegyikét más és más halvány szinnel festve, l. 26. tábla 174. ábrát. A rajzsikban fekvőt rendszerint tussal festjük, az előtte fekvőt sárgával, a mögötte lévőt halvány kékkel. A folyosók szinezése hasonlókép összehangzásban álljon az alaprajz szinezésével, azaz egyazon folyosó egyazon szinnel jelölendő. Átnézeti térképen, vagy ha a részletrajz mértéke kicsiny, akkor függővetületben a folyosót úgy jelöljük, hogy rajztollal csakis szines vonalat húzunk.

54. §. Bányatérképek befejező munkája.

Ha a térkép e módok egyikén elkészült, ellátjuk még a szükséges felirással. Minden térkép, mely önálló czimirást kap a bánya nevén kivül, megjegyzés alakjában, még következőkről tegyen emlitést: a bánya-adományozó oklevélről, esetleges kiváltságokról, művelése módjáról, geologiai viszonyairól. Czélszerű még a fedő- és fekü-kőzetről külön metszetet késziteni.

Az alkalmazott irás és a betük nagysága megfeleljen ugy a térkép kisebbitésének, valamint a megnevezett tárgy fontosságának is. Névvel jelölünk minden aknát, tárót és fontosabb bányaszintet, továbbá minden ért, mellékért és vetőt. Számokkal jelölünk: osztó-folyosókat, járatokat, guritókat, siklókat, vezérpontokat vagy magassági jeleket is. Minden vizszintes vetületen ki kell tüntetni a délllőt, ha ez össze nem esik rajzhálónk absczissáival. Ekkor kihúzzuk finom tusvonallal, végére nyilhegyet rajzolunk és még északot irunk melléje. Kompaszmérésnél még meg is emlithetjük a mágnestű declinátióját, ha a csillagászati délllőt külön ki nem tüntettük. Minden térképet el kell még látni pontosan megrajzolt átlós-mértékkel, rá kell irni a készités idejét, valamint készitője nevét.

55. §. Térképek másolása.

Bányatérképet vagy változatlan mértékkel, vagy kisebbitve kell néha lemásitani. Változatlan mértékkel készithetjük a térképet szalmapapiroson, átlátszó rajzvászonon vagy vastag rajzpapiroson is. Utóbbi esetben átrajzolhatjuk másoló-ablakon, vagy átszúrjuk pontjait finom varrótűvel, sőt pantograffal is megrajzolhatjuk.

Az átrajzolás szalmapapirra igen kényelmes és olcsó, csak tartóssága nem elégit ki, ha csak utólagosan vastag rajzpapirosra nem ragasztjuk; azonban felragasztott térképnek pontossága nem felel meg. Ha térképet másoló vászonon készitünk, akkor mindig fénytelen oldalára rajzoljuk. Vászonkép tartósabb mint a papirosra rajzolt, sőt tájékozó képül pontossága is megfelel, de vizzel nem szabad érintkeznie. Az ablakon való átrajzolás pontatlan: a tűvel való átszúrás valamivel jobb, de tönkre teszi az eredeti rajzot.

Ha szükséges, hogy másolatainknak más legyen a mértékök, akkor vagy pantograffal, vagy négyzethálóval készitjük a rajzot. Az eredeti és a másolatnak négyzethálója ekkor a megkivánt mérték arányában álljon. A pontokat összrendezőkkel rajzoljuk a hálóba, mely alkalommal a négyzethálónak legközelebbi oldalára viszonyitjuk azokat. A távolságokat czélszerüen arányositó körzővel mérjük meg.

A pantograffal való rajzolás minden esetre a legkényelmesebb, és ha ujabb keltü függő-pantograffal dolgozunk, akkor rajzaink pontossága is megfelelő

A fényképező sokszorositás nem eléggé pontos a bányamérnök rendes czéljaira, miért is legfeljebb tájékozásra szolgáló képek előállitására használjuk.

MÁSODIK FEJEZET.

A bányamérő-hivatal felszerelése.

56. §. Rajzoló-asztal a kompaszszal való szögrajzolásra.

Régebben minden mérőhivatal a térkép mechanikai szerkesztésére külön rajzoló-asztalt tartott, l. 175. ábrát. Az asztal lába egyszerü *B* márványoszlop, melynek tetején a 10 *cm* vastag 60—80 *cm* hosszu és széles *C* márványtábla van ráragasztva. Az asztalt körül keritő *EE* rézrudak azért vannak ráerősitve, hogy felfelé nyuló részei között a rajzoknak való *D* tükörüvegtáblákat nehány rézékkel megszorithassuk. Az üvegtábla megemelésére *F* csavar szolgál. Egyik főkelléke emez asztalnak az, hogy lába ne érintkezzék a szoba padlójával, miért is *G* födémgerendába beékeltetik. Helyét ugy választjuk a szobában, hogy keletről és délről nyerjen világosságot.

57. §. Rajzasztal térképek kikészitésére.

Legalább egy nagyobb rajzasztalra van szükségünk, l. 176. ábrát, melyen a térképet összrendezőkkel szerkesztjük, kifestjük és teljesen kikészitjük. Ily asztal hossza 2 *m*, szélessége 1·2 *m*, magassága 85 - 90 *cm*-re szabható. Gyakran felszereljük egy-két fiókkal nagyobb térképek eltartására. Tábláját czélszerüen hársfából a Starke-féle mérőasztalhoz hasonló módon alakitjuk.

58. §. Déllőkő a mágnestű napi ingadozásainak megfigyelésére.

Ha méréseinkre kompaszt még gyakran használunk, szükséges a mágnestű napi ingadozásait is megfigyelni. Földszinti helyiségben oszlopot állitva fel ily czélra, emeleten levő helyiségben márványból készitett *b* oldaltartót épitünk a falba, l. 177. ábrát. Kivánatos, hogy északnak vagy délnek nyiló ablakfülkébe helyezzük. *E* oldaltartón 0·4 *cm* hosszu, 0·4 *cm* széles és 8 *cm* vastag márványtáblát erősitünk meg, erre állitjuk a Schablass-féle declinatóriumot, mely alkalommal *c* rézvonalzóját a declinatorium talplapjával érintetjük.

59. §. Kijelölt déllővonal,

hol a függő-kompasznak declinátiója minden mérés előtt megfigyelhető.

A mérőhivatal helyiségében két a déllő irányára merőlegesen álló falon, szemben egymással egy-egy *F* rézkajmót erősitünk meg, l. 178. ábrát. Megerősitését *BC* tölgyfa-táblával tesszük kényelmessé, ugy hogy négy *z* csavarral a falhoz kötjük, a rajta lévő *F* kajmót pedig beállitó-csavarokkal állandósitjuk.

A kifeszitett mérőzsinórnak szabatos beállitása a déllő síkjába csakis utóbbi igazitó-csavarokkal biztositható. A kifeszitett mérőzsinóron megfigyeljük minden mérés előtt kompaszunk declinátióját.

60. §. Bútorzat.

Nagyobb bányának számos részletlapjait rendszerint külön ily czélokra készitett és elzárható szekrényben tartjuk, hol egyszersmind a szükséges iró- és rajzoló-szerek eltartásáról legyen gondoskodva. Hivatalos iratokra és könyvekre rendszerint külön szekrényt készittetünk. Azonkivül szükségünk van egy-két iróasztalra, több székre és műszereink eltartására még egy szekrényre, végül még mosdó-asztal is szükséges.

NEGYEDIK SZAKASZ.

A bányamérnök különleges feladatai.

61. §. Az irány és talphágás kijelölése vagy időnkénti vizsgálása földalatti folyosókban.

A bányász számtalan kényes feladatot csak úgy képes a legczélszerűbb módon megoldani, ha vájandó folyosóival a részükre kiszámitott irányt és talphágást szabatosan követi. Első dolgunk kijelölésüket oly módon foganatositani, hogy a munkás e jelek után a vájat végével előre nyomulhasson, nemkülönben hogy a megbizott altiszt, esetleg bányamérnök ezt időnkint felülvizsgálhassa.

Szóban foroghat táró, lejtőakna vagy függőleges akna kitűzése. Táró vagy lejtőakna kezdetén ideiglenes jelekül vagy két czöveket veretünk a földbe, vagy egy czöveket és egy a táróbélelésnek homlokfáján felakasztott függélyzőt használunk. Állandóbb jelölést úgy foganatositunk, mint ezt az 5. §-ban fejtegettük. Az ellenőrzést és irányjelölést a táró belsejében még inkább elősegitjük, ha a külső jelek második pontját nem *F*-be, l. 179. ábrát, helyezzük, hanem *G* pontba, tehát a tárónak kifelé hoszszabitott irányvonalába. Tudniillik ekkor az irány időnkénti hoszszabitása czéljából műszerünkkel *m* vagy *n* pontban is állhatunk. Ezzel pedig sokkal messzebbre, 1—2 kilométerre is hosszabbithatjuk a tengelyvonalat a táró belsejében, mintha műszerünkkel a tárón kivül állanánk. A munkás részére kijelöljük az irányt a táró homlokfáiba helyezett két függélyzővel. E függélyzők kölcsönös távolságát 6—10 20 *m*-re szabjuk, a mint ezt légoszlopunk átlátszósága megengedi. Közönséges feladatokra felakasztjuk a függélyzőt a homlokfa közepére, tehát úgy, hogy a táró keresztszelvényét mintegy függőleges síkkal két szimetrális részre osztjuk. Csak oly kivételes esetben, hol fával bélelt táró előállitására a lehető legszabatosabb alakot akarjuk biztositani, ott a homlokfa mindkét végpontjába akasztunk függélyzőt, az oszlopfák ferde állását pedig sablonnal vizsgáljuk; azaz ekkor minden oldalfalat külön-külön megvizsgálunk. A vájatvég előhaladásával hosszabbitjuk irányjeleink sorát is időnkint. Ezt kompaszszal és mérőzsinórral, vagy theodolittal foganatositjuk.

Kompaszszal eljárásunk a következő: az utolsó *n*-nel jelölt függélyző mögé és elé, l. 179. ábrát, lehetőleg közel a vájat végéhez, *r* és *s* feszitőket veretünk. Utóbbiakon kifeszittetjük a mérőzsinórt, mely alkalommal ezt mind a két feszitőn addig ide-oda tolatjuk, mig e zsinór *n* pontnak függélyzőjét érinti és egyuttal a kitűzendő irányban is halad, miről a ráakasztott kompasz leolvasása által meggyőződünk. Ha igy a zsinórt a kitűzendő tengelyvonal iránysikjába helyeztük, átvisszük helyzetét kézi függélyzővel a táró valamely homlokfájára, hol a jelzőcsavart ferdén furatjuk a homlokfába. Ekkor a csavar külebb vagy beljebb csavarása által függélyzőnk helyzete a legnagyobb szabatossággal beigazitható a vonal függőleges sikjába.

Pontosabb és kényelmesebb eljárást biztositunk, ha ily kitűzésre nem kompaszt, hanem theodolitot használunk. E czélból felállitjuk ezt, l. 179. ábra, az utolsó (*n*) pontba, onnan visszairányozzuk *G* pontba, és megkötött műszerrel áthajtjuk a látócsövet. Az uj pont kijelölése czéljából a vájatvég közelében vizszintes beosztott léczdarabot erősittetünk valamely ajtófélnek látható homlokfájára. E mértéken leolvassuk azt az osztórészt, melyre látócsövünk függőleges pókszála reá vág. Feljegyezés után forditjuk a műszert alhidáda-tengelye körül, mig irányzó-tengelye ismét *G* pontra nem vág, ezután áthajtjuk látócsövét és leolvassuk az előbb megfigyelt mértéket ujból, ott hol függőleges pókszálunk ezt metszi.

E két olvasás számtani közepesére kell látócsövünk függőleges pókszálát bevágatni, hogy irányzó-tengelye a kitüzendő egyenesnek legpontosabb hosszabbitásába essék. Ekkor beinthetjük a függélyzőcsavart is bármily ajtófélnek homlokfáján, úgy mint ezt az előbbi esetben emlitettük.

A műszer álláspontjaival 50—100 -200 *m*-nyi szakaszokkal követhetjük a vájatvég haladását ily kitüzések alkalmával. E helyen megemlitjük a szt.-Gotthardi alagut kitüzését, hol függélyzőkül elektromos izzólámpákat használtak, melyek 200—200 *m*-nyire voltak elhelyezve. Értekezésre e kitűzés alkalmával elektromos csengőt alkalmaztak.

A vájatvég helyes haladásáról, azaz kitűzött irányunk betartásáról következőkép győződünk meg; a vájatvéghez legközelebb fekvő két függélyzőt lebocsátunk, hogy ezeken végig irányozván a bányamécs lángját a vájat véglapján beinthessük. Ha a beintett mécs ekkor a vájatvégnek függőleges középvonalában áll, ekkor a munkásaink által követett irány helyes. Ellenkező esetben a folyosó egyik oldalát kell kirepesztetni mindaddig, mig a vájat végén beintett mécstől a folyosó oldalfaláig vájatvégünk megszabott fél szélessége rá nem mérhető.

Görbe tengelyü folyosók kitűzése.

Ott, a hol tárókban vonatokkal közlekedünk, az irányváltozásokat átmeneti körívekkel szoktuk megkönnyiteni. Legyen 180. ábra bc és Sd két folyosó, melyet $T_1\,T_2$ körívvel akarunk egyesiteni; akkor a körnek (r) sugara, valamint a két bc és Sd úttengelynek közbezárt φ szöge ismeretes. Ez adatokkal találjuk a köralaku folyosó T_1 és T_2 kiinduló pontját $ST_1 = ST_2$ számitása és kimérése által; tudniillik:

$$ST_1 = r \operatorname{cotg.} \frac{\varphi}{2}$$

Földalatti folyosóban körívet csak rövid, 4—6—8 *m* hosszú szakaszokban szoktunk kitűzni. Kijelölését a hátrafelé hosszabbitott húrról mint absczissa-tengelyről szoktuk foganatositani; l. 180. ábrában 1, 2, 3 és 3, 4, 5 háromszögeket. A mi esetünkben vagy h hosszúsága, vagy a megfelelő α középponti szöge választható szabadon. Legyen $h = 0{\cdot}1\,r$, akkor ábránk nyomán:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{h}{2r} = \frac{0{\cdot}1}{2} = 0{\cdot}05$$

Ebből t a kitűzésre szolgáló ordináta 1—2-ig és 3—4-ig stb.

$$t = h \operatorname{tg} \alpha.$$

Ez kiszámitható és minden pontban merőleges 1—3 irányában rá is mérhető.

Aknák kitűzése.

Függőleges aknák tervezett alakját függélyzőkkel biztositjuk. Derékszögü parallelogrammos keresztszelvénynél úgy járunk el, hogy első káváját a kiszámitott pontban és a megszabott irányban lefektetjük és szelvényén belül a hegység anyagát vízszintes rétegekben eltávolitjuk, lerepesztjük. Időnként meggyőződünk oldalfalainak helyes irányáról, úgy hogy a kezdőkávának mind a négy sarkában függélyzőt bocsátunk le az összehasonlitások céljából. Körszelvényü aknában 8-10 függélyzőt osztunk el egyformán az első káva körvonalában.

A talphágás kijelölése.

Terményeinknek a bányából való olcsó kiszállitása vagy vizeknek lecsapolása czéljából folyosóinknak esést adunk a táró szája felé vagy esetleg az akna felé is. Szállitó-folyosók talphágását leginkább a vizszintes hosszúságnak 1 : 100 részével vesszük, daczára annak, hogy számitásaink vasuti szállitásra 0'004—0'005-esést mint kedvezőbbet eredményeznek. Utóbbi számok azonban abszolut tiszta vágányt tételeznek fel, mit bányában nem biztosithatunk.

Altárókban a hol első sorban nagy mélységre terjedő bányarésznek vizlecsapolása forog szóban, a talphágást sokkal kisebbre szabjuk, azaz 0'001-től 0'00012-ig vesszük. Állitásunkat nehány példával igazoljuk. Freibergben a 13'9 *km* hosszú rothsönbergi altáró talphágása 0'0003. A Harcz-hegységben a 2 mértföld hosszú Ernst-August-altáró 0'00067 hágással. Selmeczbányán a 16 *km* hosszú II-dik József-altáró 0'00036 hágással. Diósgyőrött a 2 *km* hosszú Graenzenstein-altáró 0'0005 hágással. Szászországban a zabenstädti altáró 0'00012 hágással, hol a viz már majdnem megáll, miért is ezt mint legalsóbb határt emlitjük tároink rendes szélessége mellett. A talphágás pontos betartása czéljából 10—20 *m*-nyi távolságokban magassági jeleket állandósittatunk földalatti folyosóinkban. A mérnök felülvizsgáló méréseire függélyző-csavarokat tétetünk a táró föntjébe, mig ellenben a munkás vagy ellenőrző altiszt részére szintjelzőszöget veretünk a talp kőzetébe. Fejes *M* jelzőszöget, l. 181. ábrát, a táró-talplapba helyezünk, *N* fejnélkülit a táró oldalfalába veretünk. A munkásnak talphágásmérőt adunk, l. 30. §.

Határozott esés vagy hágás kitűzésére a talphágás-mérő egyik lába alá (X) vastagságu vaslapot fektetünk. Meghatározására a következő számitást ejtjük meg: legyen (n) a folyosónak 1000 vizszintes méterre kiszabott emelkedése, l a hágást mérő léczne a hossza, akkor $\frac{n}{1000}$ a hosszúság-egység emelkedése; tehát az l hosszegységi léczne (X) emelkedése lesz:

$$X = \frac{n}{1000} l.$$

A mérnök kötelessége a talp helyes vezetéséről időnkint meggyőződni, mely alkalommal látócsöves szintmérőműszert használ.

A telepsík meghatározása.

A telepsík fekvését a térben két a telep egyik határsikjában fekvő egyenes vonal bemérése vagy megrajzolása által jellegezzük. E vonalok egyike vizszintes; ezt csapásvonalnak nevezzük és eltérése a mágnesi délllőtől a csapásszöge, vagy egyszerüen szólva telepünk csapása. Második meghatározója a telep dűlésszöge; ez oly vonalnak a vizszintes viszonyitó-síktól való eltérése, mely ugyancsak a telep egyik határlapjában fekszik és mely merőleges a telep csapásvonalán. Általa a telep legmeredekebb vonala van adva. Rajzainkban úgy ismertetjük, hogy apró nyílhegyet rajzolunk a csapásvonalra merőlegesen; e nyíl hegye mindig a telep mélyebb része felé mutasson; melléje irjuk telepünk dűlésszögét fokokban kifejezve.

62. §. A csapás és dűlés közvetetlen mérése.

Ritkább eset az, midőn telepnek leleplezett határlapján csapását, dűlését közvetetlenül bemérhetjük. Eljárásunk ekkor a következő:

Telepünk fedő- vagy fekülapján kifeszitjük a mérőzsinórt két a kőzet megfelelő furataiba vert karón; ezt oly módon teszszük, hogy e zsinór vizszintesen és még egyenlőközüen is haladjon telepünk bemérendő határlapjával. A zsinór vizszintes helyzetéről fokívvel vagy libellás talpmérőléczczel győződünk meg. E zsinórra akasztjuk a kompaszt és leolvassuk telepünk csapásszögét.

A dűlésszög meghatározása czéljából hasonlóan járunk el; most a zsinórt merőlegesen kell kifeszitni az előbbi zsinór irányára. Merőleges helyzetéről a ráakasztott kompasz olvasásával győződünk meg. Dűlésszögét végtére a ráakasztott fokíven olvassuk le.

Megközelitő adatokra használjuk néha a kézi kompaszt hasonló módon. Ekkor ezt zsinór nélkül, csak úgy szemmérték szerint a telep határlapjához szoritva olvassuk le. Vizszintes helyzetben leolvassuk kompaszon a csapószöget, a telep dűlő vonala irányában leolvassuk műszerünk apró fokívén a telep dülésszögét. Az adat pontosságát fokozzuk némileg azáltal, hogy a kézi kompaszt 1—2 *m* hosszú lécz alátétele mellett fektetjük a kőzetre.

63. §. A csapás és dűlés meghatározása a telepnek három bemért pontja után.

Eljárásunk megbizhatóbb és kényelmesebb, ha a telep egyik határlapjának bármily távol fekvő r pontját bemértük, melyek meggyőződésünk szerint egy síkban fekszenek. Mérésünk adataival kiszámitjuk e pontok három irányú összrendezőit és ezekkel vagy szerkesztés vagy számitás útján határozhatjuk a telep csapását és dűlését.

1. Szerkesztő-eljárás.

Mindenek előtt a három bemért $b\,c\,d$ pontnak vizszintes vetületét készitjük.

$$\text{Legyen: } b\begin{cases} x = 172 \\ y = 352 \\ z = \ \ 52 \end{cases} \qquad c\begin{cases} x = 224 \\ y = 232 \\ z = \ \ 96 \end{cases} \qquad d\begin{cases} x = 112 \\ y = 304 \\ z = \ \ 0 \end{cases}$$

Ez adatokkal nyerjük a 182. ábrában bemutatott alaprajzot.

A csapásvonal kitüntetése czéljából egyenes vonalat fektetünk két bemért pontján át; p. d és b ponton keresztül. E vonalban oly g pontot tüntetünk ki, mely a bemért harmadik, tehát (c) ponttal egyazon magasságban fekszik. Igy c és g ponttal vizszintes vonalat, azaz csapásvonalat találtunk.

Foganatositására egyenes vonalat húzunk d és b pontoknak d^1 és b^1 vizszintes vetületein keresztül. Ezután $d\,b$ egyenest a rajzsíkba $d^1 b^1$ körül forditjuk le. Utóbbi czélra merőlegest emelünk b^1 pontban $d^1 b^1$-re, erre mérjük d és b pontok szintkülömbségeit. Igy találjuk b_3 pontot. Ha ekkor d^1 pontot b_3 ponttal kötjük össze, kimutattuk $d\,b$ egyenesnek leforditott képét.

Folytatólag $d\,b$ vonalban c magasságu pontot úgy találjuk, hogy d és c pontoknak szintkülönbségét a magassági rendszálat kitüntető vonalra, b^1-tól f-ig rámérvén, f ponton át egyenlőközüt húzunk $d^1 b^1$-hez, a hol ez $d^1 b_3$ egyenest metszi, ott van g pontnak g_3-mal jelölt leforditott képe.

Ez utóbbi pontnak g_1 vizszintes vetületét úgy találjuk, hogy g_3-ból merőlegest bocsátunk $d_1\, b_1$-re; ekkor telepünk csapásvonalának $c_1\, g_1$ a vizszintes vetülete. A telep dűlésszögét elvégre úgy találjuk, hogy bemért pontjaink egyikén át függőleges metszősíkot fektetünk, mely sík egyuttal $c^1 g^1$ csapásvonalon is merőleges. E metszet leforditott rajzával találjuk telepünk (γ) dűlésszögét.

Pontosság szempontjából czélszerű oly pontot választani γ dűlésszög meghatározására, melynek a csapásvonalra viszonyitott szintkülönbsége lehetőleg nagy. Ez okból 182. ábrában d pontot választottuk, azaz d^1-en át merőlegest húzunk c^1g^1-re m pontban, ott a hol ezek találkoznak fekszik a dűlésszög csúcspontja; a második szög szárának kimutatására leforditjuk d pontot d^1m vonal körül. Ily czélból d^1K merőlegest emelünk d^1m-re, ezen kimutatjuk c és d pontok valódi szintkülönbségeit, mely a mi esetünkben K pontig terjed; k pontot összekötjük m ponttal, ekkor $kmd^1 = \gamma$ a dűlésszög.

A mélység felé álló nyilat most d^1 felé irányozva tüntetünk ki c^1g^1 vonalnak valamely pontjában, és pedig merőlegesen c^1g^1 irányára.

Ez alkalommal megismerkedtünk a bányásznak sajátságos eljárásával, mely annyiban eltér az ábrázoló mértanban rendesen követett eljárástól, hogy a bányász ily feladatot csakis a vizszintes vetületben old meg. Ekkor a magassági viszonyoknak, a dűlésszögeknek vagy valódi hosszúságok kitüntetésére, ott hol ez szükséges, a szóban forgó vonalakat mindig vetitő síkjával együtt forditja le a rajzsikba. Eljárása határozottan rövidebb és könnyebb mint az ábrázoló mértan rendes módja.

2. A telep csapásának és dűlésének számitó meghatározása.

$$\text{Legyen } D\begin{cases} x_d \\ y_d \\ z_d \end{cases} \qquad B\begin{cases} x_b \\ y_b \\ z_b \end{cases} \qquad C\begin{cases} x_c \\ y_c \\ z_c \end{cases}$$

a három bemért pontnak kiszámitott összrendezője.

Feladatunk egyszerűsitése czéljából az egyik pontot, pl. D pontot választjuk ideiglenes kezdőpontul. Igy B és C pontoknak D pontra viszonyitott összrendezőit úgy találjuk, hogy D pont rendszálait rendre levonjuk az adott pontok egynemü rendszálaiból.

Azaz:

$$D\begin{cases} x = o \\ y = o \\ z = o \end{cases} \quad B\begin{cases} x_1 = x_b - x_d \\ y_1 = y_b - y_d \\ z_1 = z_b - z_d \end{cases} \quad C\begin{cases} x_2 = x_c - x_d \\ y_2 = y_c - y_d \\ z_2 = z_c - z_d \end{cases}$$

Ezzel a feladatot oly síkra vezettük vissza, mely a kezdőpontot és a két adott pontot foglalja magában.

Az elemző térmértanból ismeretes ily síknak egyenlete, mely a két (1) és (2) pontot és a kezdőpontot egybefogja.

[66] $X(Y_1 Z_2 - Y_2 Z_1) + Y(Z_1 X_2 - Z_2 X_1) + Z(X_1 Y_2 - X_2 Y_1) = 0.$

A kezdőpontot magában foglaló síknak általános egyenlete:

[67] $$AX + BY + CZ = 0.$$

Ha folytatólag $\alpha \beta \gamma$-val eme szögeket jelölünk, melyeket síkunk deréklője az X, Y és Z tengely ideglenes végével közbezár, ω-vel e deréklőnek azimutszögét vagy esetleg csapásszögét, ekkor együtthatóinak jelentősége ez:

[68] $$\begin{aligned} A &= \cos\alpha = \cos w \sin\gamma = Y_1 Z_2 - Y_2 Z_1 \\ B &= \cos\beta = \sin w \sin\gamma = Z_1 X_2 - Z_2 X_1 \\ C &= \cos\gamma = X_1 Y_2 - X_2 Y_1 \end{aligned}$$

Föltéve, hogy V síkunk azimut- esetleg csapásszöge, és γ dűlésszöge, mely szög a deréklőnek γ_1 szögével egyenlő. Ezekkel következik [68] egyenletből:

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{B}{A}$$

és tekintettel arra, hogy $V = 90 + \omega$, találtatik:

$\operatorname{tg} V = -\operatorname{cotg.} \omega$ vagy a rendszálak által kifejezve:

$$\operatorname{tg} V = -\frac{A}{B} = -\frac{Y_1 Z_2 - Y_2 Z_1}{Z_1 X_2 - Z_2 X_1}$$

Ha utóbbi egyenletben a számlálót (-1)-el tényleg megszorozzuk:

[69] $$\operatorname{tg} V = \frac{Z_1 Y_2 - Z_2 Y_1}{Z_1 X_2 - Z_2 X_1}$$ mint a csapásszög legkönnyebben emlékezetben tartható kifejezője.

A [69] egyenlet azonnal felirható az egyenes vonal azimutszöge szerint, l. [31] egyenletet.

Tudniillik utóbbi egyenletnek számlálójában az Y a nevezőben az X rendszállal mindig más pontnak Z rendszálával képezünk kettes szorzatokat: e kettős szorzatoknak mutatószámai egyeznek úgy számlálóban mint nevezőben.

A telepsík dűlésszöge.

[68] egyenletből következik:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{A}{C} \cdot \frac{1}{\cos w}$$

a goniometria egyik tétele:

$$\frac{1}{\cos w} = \sqrt{1 + \operatorname{tg} w^2}$$

w értéke azonban:

$$\operatorname{tg} w - \frac{B}{A} \quad \text{ezzel:}$$

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{A}{C} \frac{\sqrt{A^2 + B^2}}{A} = \frac{\sqrt{A^2 + B^2}}{C}$$

Vagy ha az összrendezőkre térünk át:

$$[70] \qquad \operatorname{tg} \gamma = \frac{\sqrt{(Y_1 Z_2 - Y_2 Z_1)^2 + (Z_1 X_2 - Z_2 X_1)_2}}{X_1 Y_2 - X_2 Y_1}$$

A dűlésszög felirása sem nehéz; ez tört, számlálójában két négyzetösszegnek a kivont négyzetgyöke áll. E négyzetek mindegyike a két YZ és ZX síkok rendszálainak ismétlés nélküli ambokat mutatja, melyek különbzete veendő. A tört nevezője pedig az XY vetületi sík ambóinak egyszerű különbzete.

Példa.

Legyen úgy mint a 182. ábrában szerkesztett esetben:

$$d \begin{cases} X = 112 \\ Y = 304 \\ Z = 0 \end{cases} \quad b \begin{cases} X = 172 \\ Y = 252 \\ Z = 52 \end{cases} \quad c \begin{cases} X = 224 \\ Y = 232 \\ Z = 96 \end{cases}$$

Ha a szamitás egyszerűsitése céljából d pontot kezdőpontul választjuk, akkor lesz:

$$b \begin{cases} X_b = 60 \\ Y_b = 48 \\ Z_b = 52 \end{cases} \quad c \begin{cases} X_c = 112 \\ Y_c = -72 \\ Z_c = 96 \end{cases}$$

Ezekkel a csapásszög, esetleg azimutszög:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{Z_c Y_b - Y_c Z_b}{Z_c X_b - X_c Z_b} = \frac{96 \times 48 - (-72)\,52}{96 \times 60 - 112 \times 52}$$

$$\operatorname{tg} \alpha - \frac{8252}{-64}, \text{ ebből } \alpha = 89^0\,33'\,20''.$$

A nevező tagadó jele második síknegyedre vall, igy tehát azimutszögünk értéke:

$$\alpha = 180^0 - (89^0\,33'\,20'') = 90^0\,26'\,40''.$$

A telepsík dűlésszöge.

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\sqrt{(8262)^2 - (64)^2}}{112 \times 48 - (-72)\,60} = \frac{8312}{9696}$$

$$\gamma = 44^0\,22'\,10''$$

Kutatások mérése.

Ezek majd a telep kibúvásának meghatározását czélozzák, majd a telep földalatti felkeresését más, a lelőponttól nagyobb távolságban és czélszerűbben fekvő pontban.

64. §. A telepsík kibúvása.

Sík alaku telep meghatározására három pontját kell ismerni. A kibúvás kipuhatolása czéljából a 183. ábrában bemutatott módot alkalmazzuk.

Legyen telepünk három *abc* mélyfúrás vagy más kutató művelet által felfedezve, akkor felmérjük e pontokat úgy a vizszintes vetület síkban való fekvésre, valamint szintkülönbségükre nézve is. E mérés adataival kiszámitjuk pontjaink összrendezőit; legyen számértékük:

$$a \begin{cases} X = 310 \\ Y = 220 \\ Z = 26 \end{cases} \quad b \begin{cases} X = 520 \\ Y = 470 \\ Z = 135 \end{cases} \quad c \begin{cases} X = 680 \\ Y = 390 \\ Z = 69 \end{cases}$$

Folytatólag felmérjük még a szóban forgó területnek a domborulatát is, melyet tervrajzunkban az 50 50 m-nyi szintkülönbségekben kimutatott vizszintes terepvonalakkal ábrázoltunk. E rajzban meghatározunk mindenek előtt a telepsiknak (a_1) pontot magában foglaló $(a_1\,m)$ csapásvonalát és (γ) dűlésszögét a 182. ábra módjára.

Ha ekkor a dűlésszög szerkesztésére használt $r\,b_1\,K$ háromszögnek $K b_1$ oldalán az 50—50 meternyi szintkülönbségekben vizszintes síkokat tüntetünk ki és ezeket (γ) szögnek $r\,n$ ferde szárával metszésre hozzuk, igy utóbbi 0, 1, 2, 3, n metszőpontokat már csak (γ) szögnek $r\,b_1$ vizszintes szárára kell levetiteni, hogy eme vetületeknek 6, 7, 8, 9 pontjain át csapásvonalakat húzunk, melyek a kimutatott vizszintes terepvonalakkal egy-egy síkban fekszenek, tehát azokkal rendre metszésre is jöhetnek. Igy találtuk a telepsíknak a terepvonalakkal való $\alpha_1\,\alpha_2$, $\beta_1\,\beta_2$, $\delta_1\,\delta_2$ és $\varepsilon_1\,\varepsilon_2$ metszés pontjait, melyek a kibúvó vonalnak mindmegannyi pontjai. Ezeket már csak folytonos vonalba kell kötni, hogy a vastagon kihúzott kibúvásvonalat lássuk.

65. §. Fölfedezett telepkibúvás nyomán uj feltárópontnak a meghatározása.

Legyen a 184. ábrában *B* pont a kibúvás egy felfedezett pontja, mely azonban a patakban és igen szűk völgynek majdnem hozzáférhetetlen helyén fekszik. Akkor lelepleztetjük a telepet *B* pontban annyira, mig itt a dűlés és csapásirányt némi biztossággal meg lehet mérni. Folytatásképen felmérjük a telep felkeresésére tekintetbe vett területet *B* ponttal együtt, úgy hogy felmérésünk alapján a területnek térképét a vizszintes terepvonalakkal megrajzolhassuk. E térképen megválasztjuk kutató-műveletünk további pontját. Ezt oly *ND* függőleges síkban választjuk, mely egyszersmind *BK* csapásvonalon merőleges. Távolságát *B*-től 40 *m*-től 200 *m*-ig szabhatjuk, a szerint, a mint telepünk változatlan sík alakja kisebb vagy nagyobb kiterjedésben remélhető. E keresztmetszetben kitüntetjük a földfelület metsző-vonalát, mely czélból ezt néha még részletesebb szintezésnek is vetjük alá. Kitüntetjük továbbá a metszetben telepünk (γ) dűlésszögét, valamint az esetleg tervezett *D* és *F* pontokból δ talphágással a telepnek inditandó nyomozó táróját is. Ily tárónak a telepig terjedő *DG* és *FH* hosszúsága ekkor a rajzból azonnal lemérhető. Hasonlókép kipuhatolható ily keresztmetszet segitségével oly *M* aknapont vagy fúrásnak a pontja, melylyel a telepet a kivánt mélységben el lehet érni, és mely pont későbbi épitéseinknek vagy külső közlekedésünknek a legkedvezőbb fekvést biztositja. Tervezetünk a valóságnak annál inkább fog megfelelni, mennél inkább megközeliti telepünk alakja a síkot.

66. §. Kutatókörök kijelölése.

Kutató bányamérnöknek legfőbb törekvése a telepek fekvését, kiterjedését és minőségét, a mennyire lehetséges, alaposan tanulmányozni, hogy kutatóköreivel csak értékes területet födjön be, de körei csoportositása alkalmával oda is kell törekednie, hogy minden versenytársat kizárjon. Mind e czélok biztositására iparkodni fogunk telepeink határait, nevezetesen kibúvó vonalait kipuhatolni, hogy értéktelen meddő területet le ne foglaljunk és értékes részét szabadon ne hagyjuk. Versenytársak befészkelődését csak igy zárhatjuk ki, ha a czélba vett területet hézag nélkül fedjük be, de ha egyuttal a kör területét is a lehetőségig kihasználjuk. E kettős czél biztositására irányul az a törekvésünk, hogy köreinket úgy egymás mellé sorozzuk, hogy ama egyenlő oldalu hatszög, mely minden körbe irható minden szomszédkörnek a hatszög-oldalával teljesen egybeessék.

Ily alapon kiszámitottuk a 182 ábrában kirajzolt köröknek ama egyenlőoldalu háromszögnek t oldalhosszúságát, melyeknek csúcspontjait kutatóköreinknek középpontjaiba kell csoportositani, hogy fönnebbi feltételeknek megfeleljünk. Feltéve, hogy r ezen körök közös sugárhosszúsága:

$$\frac{t}{2} = \sqrt{r^2 \quad \left(\frac{r}{2}\right)^2} = r\sqrt{3/4} \quad \text{vagy}$$

[71] $$t = r\sqrt{3} \quad .$$

Körsugaraink törvényszabta hosszúsága: $r = 224$ bécsi öl vagy 424·81 méter.

Ezzel $t = 387{\cdot}979$ bécsi öl vagy $t = 698{\cdot}02$ méter.

A bányahatóságnak beterjesztendő folyamodványban minden kutatókörnek középpontját úgy határozzuk meg, hogy megbizható M vezérponthoz kapcsoljuk, l. 185. ábrában I. és II. körök középpontjait. E czélokra meghatározzuk az összekötő T_1 és T_2 sugaraknak hosszát méterekben, és ezeknek W_1- és W_2-vel jelölt csapásszögeit a kompaszszal. Ez adatokat, ha több kör biztositandó, a folyamodványhoz mellékelt táblázatban szoktuk kimutatni. Minden községnek a határában fekvő kutatóköröket külön kimutatásban kell beterjeszteni. Kutatóköreink fekvése szabatosabb módon biztositható, ha a viszonyitó oldalak fekvését nem az ingadozó mágnesi délllővel határozzuk meg, hanem ha azokat theodolittal kimérjük. Ekkor két biztos és ha lehet minden körnek középpontjából látható M és N vezérpontot kell választanunk, l. 185. ábrát. E két M és N vezérponthoz kötjük minden körnek középpontját. Történhetik ez födetlen területen előlmetszés módjára, midőn MN alapvonalnak a hosszát és a rajta fekvő két α és β szögeknek nagyságát a kérvényben elsoroljuk, vagy oly módon is, hogy minden körnek középpontját MN alapvonalnak csakis az egyik végpontjához kötjük; pl. T_1 és α_1 vagy T_4 és β_1 elsorolása által. Itt czélszerű lesz mindig azt a hosszúságot kapcsolásra használni, melynek kimérése könnyebben foganatositható.

Oly esetben, ha a kör középpontja valamely természet adta jellel összeesnék, külön vezérpontot nem kell választani.

A zárt kutatmány jele: 0'5 *m* széles, 0'6 *m* magas fenyőfatábla, hátulról két bevésett keresztléczczel vetemedés ellen biztositva. Ezt bemázoljuk fehér olajfestékkel, hogy fekete olajfestékes felirással elláthassuk. A 186. tábla mutatja ily jelzőtáblának vázlatos rajzát. Bányászati czélját ráfestett kalapácscsal és feszitőékkel ismertetjük, melyet a tábla legmagasabb sorába helyezünk. Oly kutatásokat, melyek a napszinéről kiinduló műveletekkel nem birnak, azzal ismertetünk, hogy a kalapácsnyelek metsző pontjában még egy lefelé mutató nyilat rajzolunk. Ezután következzék a birtokos megnevezése, továbbá a szó „zárt kutatmány", végül pedig a bányahatóság neve, az engedélyezésnek évszáma és hivatalos jelzőszáma.

Példa. A m. kir. felsőbiber-táró zárt kutatmánya, adományoztatott a besztérczebányai m. kir. bányakapitányság 1893. évi 2375. számával.

E tábla felső szélén reá szegeztetünk 10—15 *cm* széles léczet, melylyel felirását az eső ellen védjük. Ily jelzőtáblát szegeztetünk 16/18 *cm* vastag és 3'5—4 *m* hosszú tölgyfa-, vagy szükség esetén fenyőfa-oszlopnak felső végére. Ezen oszloppal felállitjuk a táblát mindig a kijelölendő körnek a középpontjába és pedig úgy, hogy ott 1 *m* mély gödröt ásatunk, melyben függőlegesen felállitjuk és kövekkel erősen körülveretjük, utóljára pedig még földdel is bedöngöltetjük.

Nem szükséges, hogy feltáró műveletünk kiinduló pontja a kör középpontjával egybe essék, de az sem czélszerű, ha ez oly távol fekszik körünk középpontjától, hogy a bányatelek későbbi fektetése alkalmával területébe nem is foglalható. Onnan származik az a gyakorlati szokás, hogy feltárásunk kiinduló pontját a kutatókör középpontjától legfeljebb 112 bécsi ölre vagy 212 méternyire tervezünk.

Nem ritka végre az az eset is, hogy kutatásaink folyosóival meglévő bányának földalatti pontjából indulunk ki. Ekkor kutatókörünknek a föld felszinén kijelölendő középpontját néha szövevényesebb mérés által kell meghatározni, mely feladat megoldása nehézségbe nem ütközhetik, ha a következő §-okban tárgyalt mérések, számitások és kitűzésekkel tisztában vagyunk, miért is e helyen minden felmerülhető esetet külön nem tárgyalunk.

67. §. Bányahatárok bemérése és kijelölése.

Alapeszmék.

Mielőtt mérnökeink e feladatairól szólanánk, rá kell mutatnunk bányajogositványaink különféleségeire.

Régi bányatörvényeink adományaival csakis az érczbányász kivánságait tartották szem előtt. Onnan van, hogy e régi jogositványok csak egy érczérre adattak. Az adomány alakját korlátolt kiterjedéssel szabták meg és pedig majd minden irányban, úgy mint ezt az erdélyi gömbhatárnál látjuk; vagy korlátolták ezek kiterjedését legalább két irányban, azaz az érczér csapásvonala és vastagsága szerint, úgy mint ezt a felsőmagyarországi hosszmértéknél tapasztaljuk; vagy korlátolták az érczér lefejtését azáltal is, hogy ezt csak vizszintesen haladó és keresztszelvényében megszabott hasábban engedték követni.

A régi adományok e korlátolt kiterjedéseiből és az érczér változó alakjából szövevényes viszonyok fejlődtek, melyek számtalan pőrre és birtokzavarra adtak okot. Uj bányatörvényünk a rend- és birtokbiztosságot czélozván, jogositványai alakját nem az ásványlerakodás alakjához kötötte, hanem határolásukra függőleges síkokat határozott alkalmazni. Adományai nagyságát és alakját pedig ezen függőleges hasáboknak vizszintes metszeteivel szabja meg, azaz vizszintes területekkel. Igy kizárta minden szövevényes összefüggést és lehetségessé tette, hogy egy-egy bánya jogositványában akárhány telepet is lefejtsünk, de még a szénbányász igényeinek is tökéletesebben felelt meg, mint a régi adományok akármelyikével.

Feladatunk a következőkben tehát az leend: átkutatott területen bányajogositványainkat a legczélszerűbben lefektetni, vagy ha térképeinken kijelöltük, ezeket a mezőn, esetleg a föld alatt kitűzni, vagy peres kérdésben döntő mérés által határainkat kihasitani.

A jelenkor bányatelkei.

Földalatti telepek sík bányamérték vagy határköz adományozása által biztosithatók, mig földfelszini ásványlerakodások külső mértékek elnyerése által kerülnek birtokunkba.

A sik bányamérték.

Ez az általános bányatörvény alapján 1854. óta adományoztatik. Alakja derékszögü paralellogramma, 12544 négyzet bécsi ölnyi vagy 45116·4 m^2 területtel.

Oldalaira csak annyi van megszabva, hogy rövidebb oldala 56 bécsi ölnél vagy 106·2 *m*-nél kisebb nem lehet; hosszabb oldalának legnagyobb kiterjedése pedig 224 bécsi ölet vagy 424·8 *m*-t mérhet.

A határköz ugyancsak 1854 óta adományoztatik. Vizszintes vetülete lehet sik háromszög vagy bármily szabálytalan többszög is. Területe azonban kisebb legyen egy sik bányamértéknél, azaz 45116·4 m^2-nél. Általában csak több sik banyamérték által körülzárt teleprésznek kiaknázása czéljából adatik ilyen.

Kivételnek csak ásványszénnél van helye. A szén, a mint tudjuk, nálunk a földbirtoknak egyik részeül tekintendő és igy az adományozható terület is a földbirtok határai által van meghatározva. Ha tehát mértékek fektetése alkalmával az adományozandó terület szabályos sik bányamértékkel többé be nem fedhető, ha mindjárt nagyobb is, mint 45116·4 m_1, akkor ideiglenes törvénykezési szabályaink nemzetgazdasági szempontból megengedik, hogy ily területek mint határközök adományoztassanak.

A külső mérték adományoztatik az általános bányatörvény alapján földfelszini lerakodásokra, ugymint mocsárérczekre, ércztorlatokra, folyammedrekben, torlathegyekben, elhagyott hányókban föntartott ásványokra. Alakja háromszög vagy bármily szabálytalan sokszög is lehet. Területe nem lehet nagyobb 32000 bécsi négyzetöl = 115092·8 m^2-nél. E jogositvány mélysége a föld felszinétől a szilárd kőzetig terjed.

68. §. Sík bányamérték fektetése és kitűzése.

A sik bányamérték fektetése alkalmával követendő elveink röviden szólva ezek legyenek:

1. Főbb bányamértéket úgy kell egymás mellé sorozni, hogy ezekkel a feltárt lerakodást vagy teljesen, vagy legalább legértékesebb részeiben vállalatunknak biztositsuk.

2. Hogy mértékeinkkel az értéktelen, meddő hegységből a lehető legkisebb területrészt födjük be.

3. Az is legyen törekvésünk, hogy veszedelmes versenytársakat, a mennyire lehetséges, kizárjunk.

E szabálynak mikénti alkalmazását bemutattuk a 187. és 188. ábrával, hol harmadkori széntelepeket nyolcz bányamértékkel és egy a földbirtok-határig terjedő „határközzel“ lefoglaltunk.

A kutatás I., II. . . . VI. fúrással, VII. kutatótáróval és a legutoljára *L* pontban lemélyitett aknában ismertette a település viszonyait. Mértékeink fektetését m_1- és m_2-vel kezdtük, mely mértékek 4—5 határvonalát a bazaltkitörésnek *EF* határlapjával fektettük egyenlőközüen. Az 1 és 11 pontok határvonalát *BG* elvetőlapnak csapásvonalához alkalmaztuk, minthogy telepeink eme vonalon túl vagy 150 méterre lettek mélyebbre sülyesztve. Az 1, 2, 3, és 4 pontoknak összekötő határvonalait úgy toltuk el, a hogy ezt az V. és IV. mélyfúrással tett tapasztalatok czélszerűnek igazolták, t. i. e fúrásokkal konstatáltuk a telepeknek kiékelését V.- és VI.-on túl. Elvégre a 10. és 11. pontokat összekötő vonalnak elhelyezésére az e vonal közelében feltalált kibúvás adta meg a helyet.

Bányamértékek kijelölése.

Ha ily módon a bányahatóságilag biztositandó bányamértéket megrajzoltuk és térképünk egyik példányát az adományozásra benyujtott kérvénynyel beterjesztettük, hozzáfoghatunk e telkek kitűzéséhez a mezőn.

Kijelölés czéljából minden összefüggő mértéksorozatnak csakis a szélvonalait szoktuk kitűzni, azaz ezen vonalak szögletpontjaiba állitunk határkövet. Kivételt oly pontban teszünk, mely országútra, patakba, hányókra vagy oly területre esik, hol ily jel felállitása meg nem engedhető, vagy hol ennek változatlan állása nem eléggé biztos. A 188. ábrában ily okból csak az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 és 11 pontban állitottunk jelzőkövet, de 10 pontba nem, mert hányóba esik.

Szabály az adományozó térképben minden oldalnak a hosszúságát és csapásirányát vagy esetleg azimutszögét számokban kifejezve felirni. Több bányamérték részére készitünk e térképen kivül még egy rovatos kimutatást, hol az adomány biztositására használt alapvonalat, l. 188. ábrában, *L* és VII. pontoknak összekötőjét, minden teleknek szögletpontját, oldalát, minden oldalaknak hosszúságát és csapásszögét vagy esetleg azimutszögét, valamint az egyes mértékek területét is kimutatjuk.

A tényleges kitűzést mindig az állandósitott alapvonalból kezdjük. Példánkban felvettük alapvonalát úgy mint szokásban van, *L* aknát és VII. kutatótárónak összekötőjét.

A kitűzésnek mérőmunkáját foganatosithatjuk kompaszszal vagy theodolittal is. Ha a kitűzést kompaszszal ejtjük meg, akkor mindenek előtt a mágnestűnek irányváltozását kell meghatározni, mely bányamértékeink kirajzolása óta ezeknek a mezőn való kitűzéseig lefolyt időben megfigyelhető, mert csak igy felelhetünk meg adományozásunknak. A mágnestű irányváltozását találjuk, ha jogositványunk alapvonalát most felmérjük és e mérés adataiból ennek csapásirányát kiszámitjuk. Legyen W_1 alapvonalunknak az adományozó okmányban elsorolt csapásszöge, W_2 ennek a mostani méréssel talált csapásszöge, akkor

$\pm \delta = W_1 - W_2$ a mágnestűnek irányváltozása, ez (+) vagy (—) előjellel találtatik aszerint, amint W_1 nagyobb vagy kisebb mint W_2. Hogy tehát adományozásunkat oklevelünk értelmében a mezőn kijelölhessük, igy ($\pm\,\delta$)-át „le kell vonni“ az oklevélben minden elősorolt csapásszögből és csak eme kiigazitott csapásirányokat lehet a mezőn kitűzni.

Határpontok közvetetlen kitűzése.

A kitüzést ha csak lehet közvetetlenül foganatositjuk, l. 188. ábrát. Ekkor kiindulunk az alapvonalnak egyik, pl. *L* pontjából egyenes vonalban a kitűzendő pontig, rajzunkban 11 pontig.

E vonal csapásszögét találjuk a szóban forgó pontnak összrendezőivel; a mi esetünkben 11 pont X_{11} és Y_{11} összrendezőivel:

$$\operatorname{tg} \omega_l{}^{11} = \frac{Y_{11}}{X_{11}}$$

Továbbá az egyenes vonalnak vizszintes hosszúságát

$$T_{e-11} = \sqrt{X_{11}{}^2 + Y_{11}{}^2}$$

Ha e hosszúságnak végpontjába érkeztünk, akkor elértük a 11. pontot; ezt tehát hosszméréssel határozzuk meg.

Határpontok poligonnal való kitűzése.

Bányatelekeink ritkán fekszenek áttekinthető sík területen, nagyobbrészt hegyes-völgyes és erdővel födött területen kell kitűzéseinket végezni.

Igy kényszeritve vagyunk az el nem távolitható akadályokat megkerülni, azaz pontjaink fekvését poligonméréssel meghatározni. Ily kitűzés czéljából ugyancsak a kiinduló pontnak és az elérendő végpontnak egyenes összekötőjét kell hosszúságára és csapásszögére nézve ismerni. Ezt találjuk a 188. ábrában bemutatott példára, úgy mint ez imént a végpont összrendezőivel:

$$\operatorname{tg} W_l{}^{11} = \frac{Y_{11}}{X_{11}}$$

$$T_{l-11} = \sqrt{X_{11}{}^2 + Y_{11}{}^2}$$

Utóbbi adatokkal megindulhat a mérés. L pontból poligont inditunk ki, lehetőleg hosszúra nyujtott oldalakkal és a $W_l{}^{11}$ csapásszöget követő irányban, mely alkalommal csakis az el nem kerülhető akadályokat kerüljük meg. E poligonnal mindaddig haladunk $W_l{}^{11}$ irányban, mig a kijelölendő pontot elértnek nem véljük. Ekkor a poligonnak e végpontját, l. 188. ábrában K pontot, erősebb karó leveretése által jelöltetjük meg. Ezt azért tesszük, hogy onnan szükség adtán a mérést folytathassuk.

Mérésünkkel K pontig érkezvén, kiszámitjuk K pontnak X_K és Y_K összrendezőit. Ezekkel találhatjuk most K és 11 pontok összekötőjének T_{K-11} vizszintes hosszúságát és $W_K{}^{11}$ csapásirányát.

$$T_{K-11} = \sqrt{(X_{11} - X_K)^2 + (Y_{11} - Y_K)^2}$$

$$\operatorname{tg} W_K{}^{11} = \frac{Y_{11} - Y_K}{X_{11} - X_K}$$

Ez adatok birtokában lévén, kifeszittetjük a mérőzsinórt K pontból $W_K{}^{11}$ csapásszögnek iránya szerint. A zsinór hegyes vidéken rendszerint ferde irányban halad. Ily okból most a zsinórra fokívet függesztünk, leolvassuk rajta e zsinórnak γ dűlésszögét, hogy ezzel a ferde zsinórra mérendő H hosszúságot találjuk:

$$H = \frac{T_{K-11}}{\cos \gamma}$$

Ha eme hosszúságot a γ szög alatt dűlő zsinórra mértük, akkor megtaláltuk végpontjában a kitűzendő pontot, ábránkban a (11)-dik pontot. Ezt már csak le kell függélyezni, hogy oda karót is verethessünk. A jelző határkövet rendszerint későbben állitjuk oda, ha pontjainkat a bányahatóság is helyesnek találta. Igy folytatjuk a határpontok kijelölését, hogy mérésünket pontról pontra tovább fűzzük; vagy kiindulhatunk minden további pontra ismét csak az alapvonalnak egyik végpontjából. Sík és födetlen területen, vagy csak gyöngén hullámos talajon is az utóbbi eljárás biztosit pontosabb határjelölést, minthogy hibái annyira fel nem szaporodhatnak, mint ha mérésünkkel határvonalaink egész hosszán végig haladunk. Hegyes-völgyes vidéken eljárásunkat a terület nehézségei szerint kell módositani, minthogy egyes völgyek vagy hegygerinczek átkelése nagy nehézségekkel járhat, úgy hogy ily út rövidsége daczára inkább ronthatja eredményünket, mint hosszabb út kedvezőbb talajon.

A kitűzés theodolittal csak annyiban módositja eljárásunkat, hogy e műszerrel kerületi szögeket mérünk, melyek értékével az azimutszöget előbb ki kell számitanunk, hogy bemért pontjaink összrendezőit kiszámithassuk. Az azimutszög számitására a [19] egyenletet használjuk.

Ugyanis:

$$\alpha_1{}^2 = \alpha_0{}^1 + A \mp 180.$$

A hol A a megmért körületi szög $\alpha_0{}^1$ a kiinduló irány azimutszöge $\alpha_1{}^2$ a hozzája kapcsolt oldalnak azimutszöge.

Bányatelkek rovatos kimutatása.

Folytatásképen bemutatunk még oly rovatos kimutatást, melylyel számos bányatelekről, bányamértékből álló adományozásnak számadatait szoktuk beterjeszteni.

A bányatelek sorszáma	A birtokos neve	A határoló szögpontok jelzőszáma	A bányatelep határvonalai: kiinduló pont	végző pont	csapásszög: fok	csapásszög: $^1/_{10}$	Az oldal hosszúsága mm	A bányatelek területe m^2	Jegyzet
81	Rimamurá-	3, 4,	3	4	0	0	60621		Fekszik a
	nyi vasgyár	194, 195,	4	194	270	—	80[illegible]27		gömör-
		5 és 7	194	195	180	—	177820	22424·7	megyei
			195	5	90	—	149531		Vashegyen
			5	7	0	0	117199		
			7	3	270	—	68703		

A selmeczi bányaöl hosszúsága.

E helyen szükségesnek tartjuk a selmeczi bányaölnek hosszúságát megemliteni. Igaz, hogy ujabb adományozásokat azzal többé nem mérünk, de régi adományok peres kérdéseiben felmerülhet még annak a szüksége is, hogy ezzel számitsunk. A selmeczi bányaöl törvényes hossza: 1 bányaöl 2025·95 milliméter. A bécsi ölnek törvényes hossza: 1 bécsi öl 1896·484 milliméter.

69. §. Sík bányamértéknek földalatti kitűzése.

Bányaperekben gyakori feladatunk az, hogy meghatározzuk valjon a szóban forgó bányának bizonyos pontjával meghaladták-e eme bánya függőleges határsíkját vagy sem. Szükségesnek bizonyulhat az is, hogy altáróban vagy más több szomszéd bányán áthaladó folyosóban minden bányahatár a föld alatt is kijelöltessék.

A kérdés kényes természeténél fogva ily feladatot minden esetre számitás útján kell megoldani.

Legyen 189. ábrában $b\,c\,d$ a perben forgó bánya, melyről azt kell meghatároznunk: meghaladtuk-e $c\,d$ folyosóval bányatelkünk függőleges CN határ síkját vagy nem? Ha esetleg meghaladtuk, akkor még az is lehet feladatunk, hogy bányatelkünk Δ határpontját $d\,c$ folyosón meghatározzuk.

A feladat megoldására mindenek előtt a szóban forgó $d\,c\,b\,O$ és N pontokat folytonos méréssel kell összekötni; rendszerint poligonba foglaljuk. E mérés adataival kiszámitjuk pontjaink rendszálait. Ez esetben czélszerű határvonalunknak a bányanyiláshoz legközelebb fekvő O pontját számitásunk kezdőpontjául választani.

Legyen tehát e számitásunk eredménye:

$$O\begin{cases} x = 0 \\ y = 0, \end{cases} \qquad N\begin{cases} x_n \\ y_n, \end{cases} \qquad d\begin{cases} x_\delta \\ y_\delta, \end{cases} \qquad c\begin{cases} x_c \\ y_c \end{cases}$$

Az összrendezőkkel felirhatjuk $d\,c$ pontok egyenes összekötőjét:

$$Y - Y_c = \frac{Y_\delta - Y_c}{X_\delta - Y_c}\,(X - X_c)$$

Továbbá ON határvonalunk egyenletét is:

$$Y = \frac{Y_n}{X_n}\,X$$

E két egyenletnek együttes megoldásából X és Y szerint találjuk Δ metszéspontjuknak X_Δ, Y_Δ összrendezőit.

$$X_\Delta = \frac{Y_c\,(X_\delta - X_c) - X_c\,(Y_\delta - Y_c)}{Y_n\,(X_\delta - X_c) - X_n\,(Y_\delta - Y_c)}$$

$$Y_\Delta = \frac{Y_c (X\delta - X_c) - X_c (Y\delta - Y_c)}{Y_n (X\delta - X_c) - (X_n Y\delta - Y_c)} Y_n$$

Ezzel kiszámitható Δ pontnak távolsága d ponttól vizszintes irányban mérve:

$$T_{d-\Delta} = \sqrt{(X_\Delta - X_d)^2 + (Y_\Delta - Y_d)^2}$$

Ugyan eme egyenesnek csapásiránya, esetleg azimutszöge:

$$\operatorname{tg} \alpha_d' = \frac{Y_\Delta - Y_d}{X_\Delta - X_d}$$

A szóban forgó d pont épen a határsikban fekszik, ha $T_{d-\Delta} = 0$. Ellenben ha $T_{d-\Delta}$ nem nulla, akkor d pont a határon innen vagy túl fekszik, aszerint, a mint α_d^Δ egyenlő α_c^d -vel, vagy 180 fokkal nagyobb amannál. $T_{d\Delta}$-vel ismerjük egyszersmint azt a vizszintes távolságot is, melyet d ponttól α_d^Δ irányában kell kimérni, hogy (Δ) pontba érkezzünk.

70. §. Gömbhatárok meghatározása.

Az Abrudbánya-verespataki bányamegyében a régi bányaszabályzat alapján, mint bányajogositványok 20·5 bécsi ölnyi vagy 38·8 méternyi sugárhosszúsággal gömbök adományoztattak.

Ily gömbalaku bányabirtokokra alábbi határkérdéssel lehet dolgunk.

1. Fekszik-e az adott O pont a szóban forgó gömbhatáron belül vagy kivül?

Gömbhatárnak fekvése biztositva van, ha a gömb középpontját állandositott pontra viszonyitottuk. Szóval, ha az állandositott pontot és a gömb középpontját összekötő egyenes vonalnak hosszúságát, csapásszögét és dűlésszögét ismerjük. Feladatunk megoldása czéljából bemérjük a kérdésben forgó O pontot, azaz poligonnal kapcsoljuk az adománynak V vezérpontjához. Ezután kiszámitjuk úgy a gömb G középpontjának, valamint O pontnak V vezérpontra mint kezdőpontra viszonyitott összrendezőit, a mint ez itt következik.

Legyen h hosszúsága a G és V pont egyenes vonalu összekötőjének W csapásszöge és γ dűlésszöge. Akkor mindenek előtt W csapásszögnek a változását kell ismernünk, hogy ennek az oklevélben elsorolt adatával a mostani értékére lehessen átterni. Ha tehát δ a declinátiónak e kipuhatolt változása, és ha jelenben kisebb a csapás (δ)-val, akkor a kiigazitott csapásszög

$(W - \delta)$. Ezzel találjuk G pontnak V vezérpontra viszonyitott összrendezőit igy:

$$G \begin{cases} X_1 = h \cos\gamma \cos(w - \delta) \\ Y_1 = h \cos\gamma \sin(w - \delta) \\ Z_1 = h \sin\gamma. \end{cases}$$

Továbbá O pontnak V pontra viszonyitott összrendezőit a poligonmérés adataiból találjuk.

$$O = \begin{cases} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{cases}$$

Ezután kiszámitjuk G és O pontok térbeli távolságát:

$$(72) \ldots . T = \sqrt{(X_1 - X_2)^2 + (Y_1 - Y_2)^2 + (Z_1 - Z_2)^2}$$

T távolság lehet kisebb, nagyobb vagy egyenlő gömbünk $r = 38{\cdot}8$ *m* sugárhosszával. Az első esetben O pont a gömbhatáron belül fekszik, a második esetben a gömbön kivül van O pont, a harmadik esetben épen a gömb határlapjának egyik pontja.

2. Nem nyúlik-e egymásba két szomszédos gömbhatár? E kérdés megfejtésére meghatározzuk mind a két gömbhatárnak a középpontjait. Azaz, ha mind a két gömbhatárnak biztositására más vezérpont szolgált, akkor elsőben e két vezérpontot kell folytonos méréssel összekapcsolni, hogy utóbbi adatokkal e két középpontnak összrendezőit meghatározhassuk. A rendszálszámitás alkalmával tekintetbe veendő a mágnestű irányváltozása mind a két adományra nézve, úgy mint ezt a megelőző példában fejtegettük.

Jelöljük e két középpontnak összrendezőit $X_1\ Y_1\ Z_1$ és $X_2\ Y_2\ Z_2$-vel, akkor a két gömbhatár elkülönitett fekvése biztositva van, ha

$$2\,r = \sqrt{(X_1 - X_2)^2 +)Y_1 - Y_2)^2 + (Z_1 - Z_2)^2}$$

Szóval két gömbhatár csak akkor nyúlhatik egymásba, ha középpontjuk kölcsönös távolsága kisebb a gömbhatár átmérőjénél, azaz 77·6 *m*-nél.

3. Ha szomszéd bányának lefejtett ürege a mi gömbhatárunkba esik, feladatunk lehet e lefejtett ürnek köbtartalmát meghatározni, hogy kárpótlásunk igényeit megállapithassuk.

Ily esetben a szóban forgó ürt mindenek előtt megfelelő részletességgel kell felmérni. Ezt legczélszerűbben úgy tesszük, ha az ür legmélyebb pontjában, továbbá 1, 2 esetleg 3 méternyi szintkülönbségekben vizszintes síkokkal metszük olyképen, a mint ezt kisebb nagyobb részletességgel akarjuk ábrázolni. Nagyobb részletesség a rajzra nagyobb mértéket követel.

Mérésünk most abból áll, hogy az ürnek határlapjaiból minden vizszintes metszősíkban a kellő számu pontot bemérjük, és mérésünk adataival úgy a gömböt, valamint az ürt is a 190. és 191. ábra módján megrajzoljuk. 190. függőleges metszet, 191. vizszintes vetület. E rajzban kitüntetünk minden vizszintes metszősíkban a metszővonalnak csakis azt a részét, mely az ürt a gömb belsejében határolja. Igy eljárva számithatjuk köbtartalmát a Simpson-féle szabály szerint, úgy mint ez alább következik. Legyen T_0 a legmélyebb és T_8 a legmagasabb vizszintes metszetnek területe, T_1 T_2 .... T_7 a többi közbeeső metszetnek területe, melyeket rendszerint a planimeterrel mérjük; m a vizszintes metszősíkok közötti szabad magasság vagy szintkülönbség; K a szóban forgó testnek a köbtartalma. E jelöléssel:

$$[74] \quad K = \frac{m}{12}[(T_0 + T_8 + 4(T_1 + T_3 + T_5) + 2(T_2 + T_4 + T_6)]$$

Szóval a metszősíkok közti m távolságnak tizenketted részét kell megszorozni a zárójelben foglalt területek összegével, feltéve, hogy ez összegbe a legalsóbb és legfelsőbb határlapnak területét egyszer vesszük; a páratlan mutatószámu területek összegét négyszer vesszük, a páros mutatószámu területek összegét kétszer kell a szögletes zárójelü főösszegbe venni.

71. §. Köbtartalmi mérések.

A bányamérnök mainap szabálytalan ürnek vagy testnek határait rendszerint vizszintes gyűrűkkel tünteti ki. Nem ritka feladata hányónak, tónak vagy földalatti ürnek a köbtartalmát meghatározni. Külső vagy földalatti mérésekre is két módon szoktunk eljárni bemérendő pontjaink megválasztása alkalmával.

1. Választjuk a pontokat egyenlőközüen egymás mellé, esetleg egymás fölé sorozott függőleges vagy vizszintes síkokban és czélszerüen felosztva.

2. Felosztjuk azokat oly módon a felmérendő talajon vagy földalatti ür határlapján, hogy domborulatát lehetőleg kevés ponttal terveinken szabatosan tüntethessük ki. Az első móddal könnyebbül a rajz szerkesztése, köbtartalmának meghatározása planimeterrel szintén nagyon egyszerű; mig ellenben a második móddal

nagyobb pontosságára és a mérésnek gyorsitására irányul főgondunk. A bemérendő pontokat utóbbi esetben úgy kell kijelölni, hogy a felület dűlésszöge épen e pontokban változzék, továbbá kivánatos még az is, hogy két közvetetlenül egymásra következő pontnak egyenes vonalu összekötője annyira simuljon a felülethez, hogy ennek legnagyobb eltérése térképeink kisebbitett rajzain sehol 0·2 *mm*-nél nagyobb ne legyen. Az ily módon kijelölt pontoknak kölcsönös fekvését úgy a vizszintes vetületi síkban kell meghatározni, valamint a függőleges irányban is; azaz még szintkülönbségeket is be kell mérni.

A bemérés legegyszerűbb és leggyorsabb módja az, ha e pontokat távolságmérővel felszerelt theodolittal vagy busszolaműszerrel jól választott sarkpontból meghatározzuk.

Ha több sarkpontot alkalmazunk, akkor ezeket egymás alatt háromszögekre kell összekötni.

E móddal a szintkülönbségeket rendszerint háromszögtanilag határozzuk meg és pedig az 1 %-tól 3 %-ig hibás távolságuk segitségével, úgy hogy utóbbi adat nem épen igen megbizható. Onnan van, hogy inkább külszini mérésekre használjuk, ha a föld felületén a vizszintes gyűrűket kell kitüntetni.

Kisebb földalatti üregek hozzávető meghatározásaira néha összrendezőkkel is mérünk; tudniillik kifeszitjük a mérőzsinórt, mely absczissa-tengelyül szolgál; ezen kijelöljük rákötött jelekkel a pontokból rábocsátott ordinaták talppontjait, utóljára bemérjük az absczissákat és ordinatákat, melyeket a helyszinén készitett vázlatos rajzba bejegyezünk.

Eljárásunk még czélszerűbb, ha bemérendő pontjainkat egy alapvonal két végpontjához kötjük; ez nevezetesen igen tág és magas földalatti térségek mérésénél ajánlható, főkép ha ezek bejárása még veszélyes is. A mérés történhetik theodolittal vagy látócsöves vonalzóval felszerelt mérőasztalon is. E módon a vizszintes vetületet előlmetszéssel határozzuk meg. A magasságokat pedig az által, hogy műszerünk egyik álláspontjából még a magassági szöget is megmérjük. Bemért adatainknak mennyiségtani összefüggését a 192. ábrából láthatjuk, hol I. és II. műszereink álláspontjait jelöli, AB ezeknek vizszintes összekötőjét, tehát mérésünk alapvonalát, P feladatunk valamely bemért pontja és C ennek vizszintes vetülete, T két műszerünk ferdén bemért távolsága, ε eme irány dőlésszöge, α és β ama vizszintes szögek, melyekkel P pontnak inditott irányzataink az alapvonaltól eltérnek; $\pm\delta$ az a magassági vagy esetleg mélységi szög, mely alatt irányzatunk II.-től P-nek indult,; m_1 az I. pontban álló műszernek magassága AB viszonyitó síkunk felett.

Ez adatokkal következik 192. ábrából:

[75] $$BC = DF = \frac{T \cos\varepsilon \sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$$

M vagyis P pontnak (+) magassága, esetleg (—) mélysége A pontra vonatkoztatva igy fejezhető ki:

[76] $$M = m_1 \pm T \sin\varepsilon \pm DF \operatorname{tg}\delta.$$

Ugy (sin ε), valamint (tg δ) előjele szerint találjuk M magassági rendszálnak előjelét is. Ha álláspontjaink egy vizszintesben fekszenek, akkor $\varepsilon = 0$ fok, ezzel pedig:

$$DF = BC = \frac{T \sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$$

A magassági rendszál:

[77] $$M = m_1 \pm DF \operatorname{tg}\delta.$$

Munkakimélésből a theodolitot úgy állitjuk fel, hogy noniusa limbuskörének nullás pontjára akkor vágjon, ha látócsöve az alapvonal függőleges síkjában áll. Igy leolvasható α vagy β szög, ha P pontot megirányozzuk, minden számitás nélkül a limbuskörön. Igen fontos feladatunk még a bemérendő pontok czélszerű kijelölése és láthatóvá tétele az efféle nagy és néha igen magas földalatti térségben.

Ha az ür gyakori föntjeomlások miatt be nem járható és ennek csak magassági kiterjedését kell megközelitve ismerni, akkor borszesz-lánggal hajtott papirosléggömböt bocsáthatunk fel czérnaszálon, mely léggömbnek lángját ekkor két pontból megirányozzuk. A gömböt többször vissza lehet húzni, hogy más-más pontban felbocsáthassuk, l. 193. ábrában G léggömböt.

Bejárható vájásokban a pontokat bányamécscsel jelöljük ki. A mécset ekkor különböző hosszú rudnak felső végére kötjük, vagy vehetünk hosszabbitó rudat, minőt régebben szintmérőléczekül használtunk, l. 193. ábrában $l_1\,l_2\,l_3$ léczet, hol azzal nagyobb ürnek a bemérése van bemutatva. Igy lehetséges az ürt határoló falakon oly pontokat bemérnünk, melyek megszabott magasságu vizszintes síkokban fekszenek, l. 193. ábrában $P_1\,P_2\,P_3$ pontokat. I. és II. a két műszernek álláspontja, melyekből a kijelölt pontot egyszerre megirányozzuk. A vázolt módon kitüntetjük az ürt berajzolt vizszintes gyűrűkkel. Igy köbtartalmának a meghatározása is egyszerű, minthogy e vizszintes metszeteinek területe planimeterrel megmérhető, köbtartalmuk pedig egyenlő szintkülönbségüknél fogva a Simpson-féle egyenlettel, l. 74. egyenletet, kiszámitható.

72. §. Kiterjedt földrészek felmérése a térnek mind a három kiterjedése szerint.

Nagyobb bányának megnyitása vagy czélszerü ellátása utak, vasutak, siklók, vizvezetékek, tárók, aknák és számtalan más épitményekkel elkerülhetetlenné teszi, hogy térképeinken nemcsak a vizszintes vetülete legyen bemutatva a föld felszinének, hanem ennek domborulata is vizszintes terepvonalakkal. Igy nem ritka feladatunk számos négyzetkilométerre terjedő földfelületen jó magasságmérést megejteni. Hogy ily kiterjedt magasságmérésre a megkivánt pontosságot, valamint okszerű olcsóságot is biztosithassunk, felosztjuk a munkát két mérésre. Az első magasságméréssel meghatározzuk a vezérpontokat, melyek a részletes mérés kiinduló és befejező pontjai. A második magasságméréssel csakis részletpontokat mérünk be.

Igy eljárva csak a vezérpontokat kell szabatosabb méréssel meghatározni. A részletes mérés pontjaira gyorsabb, olcsóbb eljárással is megfelelhetünk, minthogy ezeknek záróhibái a vezérpontok segitségével könnyen kiigazithatók.

Vezérpontoknál ez okból vagy háromszögelő pontokat, vagy szabatos poligonmérések pontjait használjuk, kölcsönös magasságukat jó szintméréssel határozzuk meg. E mérések hibátlanságát azzal biztositjuk, hogy a szintmérést két izben, azaz oda és vissza foganatositjuk. Vagy megmérjük ezt kétszer egy izben is, ha a szintmérőléczet mind a két oldalon beosztjuk, mely két beosztás vagy szinre, vagy az osztórészek alakjára nézve különbözzék, kezdőpontjuk pedig 20—25 *cm*-rel el legyen tolva. Ha ily eljárással két bemért pontnak a szintkülönbségét mind a két oldalon vett léczolvasásból ugyanazzal a számmal találjuk, akkor minden olvasásbeli hiba ki van zárva; miről műszerünk minden álláspontjában meggyőződünk, még mielőtt azt elhagynók. Az ily összefüggő poligonokat alkotó magasmérések hibáit, melyek elkerülhetetlen apró hibákból származnak, felosztjuk úgy a hogy ezt a második résznek 37. §-ban tárgyaljuk.

Mérésünk részletpontjait meghatározzuk akár a sarkponti mérésmóddal, akár előlmetszéssel, akár poligonok pontjaiból is, úgy mint ez a fenforgó viszonyok közt, vagy a rendelkezésünkre álló műszerek mellett célszerűbbnek bizonyul.

Műszerül alkalmazhatunk mérőasztalt, busszolát vagy theodolitot. Rendszerint meghatározzuk ezekkel úgy a vizszintes távolságot, valamint a magasságot is a rajtuk alkalmazott Reichenbach-féle távolságmérővel. A tárgyalt rendszert bemutatjuk a 194. ábrával. E vázlatos képen *bcdef* egy patak, 1, 2. 3, ... 15-ig országút, ES_1 és S_2 háromszögelő pontok, mEO, valamint az országút 1-től 15-ig terjedő pontjai a magasságmérésnek főpontjai — főpoligonjai — mig 1—20-ig, 2—19-ig, 16-5-ig, E—8-ig, 12—13-ig, 26—30—15-ig másodrangu poligonok, azaz a részletes mérés pontjai; S_1 és S_2 sarkpontok és a hozzájuk kapcsolt számnélküli részletpontok; továbbá 1 és 4 pontot S_1 és S_2 alapvonalhoz kötöttünk.

E mérések alapján megszerkesztjük térképeinken az izohipszákat, azaz vizszintes gyűrűket, úgy mint az a Cséti-féle földméréstan 176. §-ban ismertetve van.

A vizszintes terepvonalak kölcsönös szintkülönbségét 1, 2, 5, 10 sőt 20 m-rel is vehetjük; döntő e tekintetben a felmért terület domborodottsága vagy térképünk kisebbitése. E vonalakat kihúzhatjuk halvány tussal, szienna festékkel, vagy kivételesen piros festékkel is. Minden 100-dik méternek a magassági gyűrűjét teljes vonallal tüntetjük ki, mig a közbenfekvőket csak pontozzuk. A jelzőszámokat azzal a szinnel irjuk, a melylyel a vonalat rajzoltuk. E számok nagysága csak akkora legyen, hogy szabad szemmel még leolvashassuk; helyzetük úgy választandó, hogy fontosabb tárgyat vagy jelet ne födjünk velük térképünkön, állásunk merőleges legyen a gyűrű vonalán.

Bányászati áttörések.

1. Már előre meghatározott eset.

Két vagy több adott pontnak összekötése alkalmával megkülönböztetünk két főesetet.

Egybe kapcsolandó két pontunk fekhetik körülbelül egyenlő magasságban vagy nagyobb szintkülönbségben. Az első esetben összekötésük táróval vagy folyosóval foganatositható, mig a második esetben dűlő vagy függőleges akna mélyitendő.

73. §. Két pontnak folyosóval eszközlendő összekötése.

Az egybekötő folyosót mindig egyenes vonalu tengelylyel létesitjük, még akkor is, ha ez utóbbiból a napszinére vagy más folyosóba átmeneti körrel akarunk áttérni. A mennyiben az ily köralaku folyosórészt rendszerint csak az áttörés megtörténte után szoktuk készittetni. Ez nevezetesen 1—2 *km* hosszú vagy még hosszabb áttörések biztos sikerére feltétlenül szükséges.

Ha tehát a két egybekötendő pont már ki van jelölve, akkor első dolgunk ezeket szakadatlan méréssel összekötni. E mérés földalatti része poligonból és még aknamérésből is állhat; mig napszini részére háromszögelés vagy kényszerűségből poligonmérés alkalmazandó. Eljárásunk annál pontosabb legyen, mentől hoszszabb a mérésnek útja és mentől hosszabb a létesitendő folyosó. E feladatok kényes természetével számot vet minden nyugati állam ide vágó szabályzata is, t. i. ezek megengedik a bányamérnöknek, hogy minden ily czélú poligont két izben mérjen és azt fel is számitsa, de másrészt felelőssé teszik a megoldás sikereért. A siker első sorban az összekötő egyenesnek helyes iránykitűzésétől és talphágásának szabatos betartásától függ.

Legyen tehát P_1 és P_2 áttörésünk két kiinduló pontja, $Z_1\, X_1\, Y_1$ valamint $X_2\, Y_2\, Z_2$ ezeknek mérésük alapján kiszámitott összrendezői, ekkor összekötő folyosónk α azimutszöge, ha ezt P_1 pontból kitűzzük, igy fejezhető ki:

$$\operatorname{tg} \alpha_1{}^2 = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X^1}.$$

Az összekötő egyenes valódi H hosszúsága:

$$H = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2 + (Z_2 - Z_1)^2}$$

$\pm \eta$ a talphágása ezer hosszegység után:

$$\pm \eta = 1000 \frac{Z_2 - Z_1}{H}$$ mely kitételnek előjele $(Z_2 - Z_1)$-nek előjelétől függ; (+) hágást, (—) esést jelent. Ha a folyosó tengelyvonalát P_2 pontban tűzzük ki, akkor α azimutszögnek értéke 180 fokkal változik, ugyanakkor η talphágásnak csakis előjele cserélendő fel. Ily tengely kitűzésénél a vizszintes szöget mindig a poligonnak bemért kezdő vagy végső oldalára viszonyitjuk. Szóval ekkor azt a (β) körületi szöget kell a kitűzés kezdőpontjában kimérni, mely esetünknek megfelel.

Legyen α_b bemért első poligonoldalunknak azimutszöge kitűzésünk pontjában, $\alpha_1{}^2$ az összekötő folyosónak kiszámitott azimutja ugyan-e pontban, igy a kitűzésre szükséges β kerületi szöget alábbi egyenletből következőkép találjuk:

$$\beta = \alpha_b - \alpha_1{}^2 + 180.$$

Ha műszerünk leolvasó határa egy első szögpercz és mi a folyosó tengelyvonalát egy szögmásodperczig akarjuk pontosan kitűzni, akkor a műszerrel kijelölt β szögnek pontosabb nagyságáról szögszorzással kell meggyőződnünk. Az ily vizsgálással talált n szögmásodpercznyi hibáját kiigazitjuk oly módon, hogy a (h) méter hosszú, kijelölt irányzatnak függélyzőjét X *mm*-mel félre toljuk.

$X = h \times \rho$, mely képletben

$\rho = 0{\cdot}0048$, vagy

$\rho = 0{\cdot}0016$ aszerint, a mint 360 vagy 400 fokos körosztással számitunk.

A függélyzőt merőlegesen kell félre tolni a kijelölt tengelyvonal irányára és pedig úgy, hogy β szögünk kisebbedjék vagy nagyobbodjék, a mint ezt n''-nel nagyobbnak vagy kisebbnek találtuk.

74. §. Aknák áttörése.

Áttörésünk tárgya lehet lejtőakna vagy függőleges akna. Lejtőakna kitörésénél eljárásunk lényege csak annyiban különböző, hogy ekkor a kitűzendő tengely nagyobb dűlésszöggel bir, mint folyosó létesitése alkalmával.

Függőleges aknák kitörése alkalmával az összekötő egyenes H hosszúsága csakis a kezdő- és végpontnak magassági rendszálai adják. Azaz: $H = Z_2 - Z_1$.

Azimutszöge ez esetben:

$\alpha_1{}^2 = \alpha_2{}^1 = \frac{0}{0}$ foknyi; azaz határozatlan; mert függőleges vonal a vizszintes síkban csak pontot határozhat és nem vonalat.

$\gamma = 90^0$ a dűlésszöge, ezt alábbi egyenlet is igazolja.

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{Z_2 - Z_1}{\sqrt{X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2}} = \infty$$

minthogy nevezője a nullával egyenlő, mely érték csak akkor van biztositva, ha $X_2 = X_1$ és $Y_2 = Y_1$; szóval ha P_1 és P_2 végpontoknak vizszintes vetületei egybe esnek. Ha ily akna létesitésénél az elérendő mélyebb pont már hozzáférhető, akkor feladatunkat azzal szoktuk elősegiteni és könnyiteni, hogy az aknaszelvény „középpontjában“ függőlegesen lefúrunk az akna alsó végéig. E fúráson át lecsapoljuk az aknában összegyülő vizet, hogy az aknát úgy felülről lefelé, valamint alulról fölfelé egy időben kitörhessük. A fúrást mindig az aknaszelvény közzéppontjába kell telepiteni, hogy fúrásunk még akkor is az akna alsó szelvényébe essék, ha emez fölfelé haladása alkalmával keveset csavarodnék, vagy ha a furat keveset eltérne a függőleges iránytól. Igen fontos továbbá, hogy áttörésünk pontjában az akna két találkozó szelvénye szélvonalaival szabatosan összeessék. E kivánságunk főfeltétele, hogy úgy a felső, valamint az alsó kiinduló pontban aknánk szelvényére, azaz négy oldalfala helyesen kitűzessék és irányuk az egész munka lefolyása alatt mindvégig változatlanul folytattassék. Az alsó kiinduló pontban kijelöljük az akna oldalait karókkal vagy jelző-vasszögekkel is, ezeket az aknaszelvény négy szögletpontjába veretjük le. A magasabbik kiinduló pontban négy függélyzőt állandósitunk ugyancsak az aknaszelvény négy szögletpontjában. E jelek után vizsgáljuk folyton az aknaoldalaknak függőleges és sík alakját.

2. Áttörések, hol csak egy pont és az irány vagy más tényező van előre meghatározva.

75. §. Altárók tervezése és kitűzése.

Altárók vagy megyetárók feladata nagyobb telepcsoportokat vagy egész bányamegyéket talplapjuk mélységéig vizeitől felszabaditani, szóval hozzáférhetővé tenni. Onnan van, hogy kiinduló pontjainkul mindig a lecsapolandó telepcsoportnak nevezetesebb pontját, rendszerint egyik aknáját választjuk. Végpontjául, azaz napszini nyilásául a lecsapolásra legalkalmasabb völgyben a legczélszerűbb pontot puhatoljuk ki. Ez utóbbi pont választása alkalmával bányánk szomszédos területe nagy gonddal tanulmányozandó, mit legczélszerűbben táborkari térképek segitségével biztositunk. Azaz e térképeken megjelölünk minden a lecsapolásra czélszerünek látszó völgyet, minden völgyben felkeresünk szintmérés útján oly pontot, mely a tervezett kiinduló pontnál még az esésre szánt mélységgel mélyebben fekszik. Ha e pontokat mind a használt térképben kimutattak, kiválaszthatjuk a legrövidebb és legolcsóbb vonalat.

A végpontnak és kiinduló pontnak gondos megválasztása után kijelöljük e két pontot állandóbb módon, hogy elvégre egybekapcsoló mérésüket a 73. §. útmutatásai szerint végrehajtsuk. E mérés alapján kiszámitjuk akkor az altáró egyenes vonalu tengelyét, melyet megtartunk, ha további vizsgálataink után viszonyainknak megfelel; ellenkező esetben megváltoztatjuk végpontjának fekvését a második ellenőrző mérés előtt úgy, hogy minden kivánt további előnyt biztositsunk.

Több kilometer hosszú altárónak áttörését azzal segitjük elő, hogy több útja mentén fekvő aknát hozzá kapcsolunk Az altárót ily esetben aknától aknáig egyenes vonalban vezetjük, de egészben véve törésekkel birhat, ha a meglevő aknák nem fekszenek mind egy függőleges síkban. Ha ily hasznavehető aknáink nincsenek, akkor a szükséghez mérten nehány uj aknát is mélyitünk, úgy mint ezt a 195. ábrával függőleges metszetben és a 196. ábra vizszintes vetületében ismertettük. Utóbbi esetben az aknákat mind *G B* összekötő egyeneshez sorozzuk, de nem úgy, hogy a táró függőleges középsikja az aknákat messe; czélszerűbb ezeket 8—10 *m*-rel félre tolni, hogy táró és akna között a szállitásra szükséges rakodó helyét találja, l. 196. ábrában *C F* és *D G* rakodókat. E segitő-aknák feladata az, hogy ezekből, ha a táró tervezett mélységét elértük, a táró mindkét tengelyirányában F_2 és F_3 ellenvájatokat meginditsunk. Feltétel tehát ily segitő telepitésénél, hogy *C F* mélység ne legyen nagy, azaz szállitása és vizemelése olcsó legyen; továbbá hogy ez a tárótengelynek oly pontjába telepittessék, honnan a táró kitörését a leghathatósabban elő is mozdithassa. Tudniillik *C F* akna költsége teljesen kárba menne, ha ezt oly pontba telepitjük, hol rakodóját csak akkor érhetjük el, mikor ezt a *B*-től 1-nek haladó vájatvéggel is már elértük. A táró kitörése szempontjából a segitő akna tehát akkor fekszik a legczélszerűbb pontban, ha 2 *F* ellenvájatával ama 1 *F* tárórésznek épen a felét lehet kitörni, melylyel 1 vájat vége *F* aknától akkor áll el, mikor *C F* aknából *F* 2 ellenvájatot megkezdhetjük.

A tárótalp vezetése.

A vizek lecsapolása czéljából *G* kezdőponttól *B* végpontig esést adunk a talpnak. Ezt azonban csakis a befelé haladó, azaz *B*-től *G*-nek haladó vájatokban létesithetjük azonnal, mert a kifelé haladó vájatokban, p. *G*-től 4-nek és *F*-től 2-nek esést kell adni az akna felé, hogy az áttörésig a vizeket az aknában felemelhessük. Innen ered az a talpék, mely két ellenvájatnak találkozása pontjában mindig egy lépcsőfokot képez, l. 195. ábrában a fekete szinü $X2F$ talpéket.

Utóbbit csak az áttörés megtörténte után lehet eltávolitani, mely munkát X-től F felé repesztve végezünk. E munkát a táró utólagos talpszabályozásának nevezzük.

A táró kitűzése.

Már a 73. §-ban emlitettük, mennyire nehéz ily hosszú tárónál tengelyvonalának irányát pontosan meghatározni és hiba nélkül kitűzni. Ez igazolja azt a szokást, hogy ily tárónak függőleges középsikját, ha csak lehet mindig a föld felszinén is részletesen kikarózzuk, még mielőtt kitöréséhez fognánk. Ily kitűzéssel meglátjuk azonnal, mennyivel fog a táró tengelyvonala végpontjától eltérni, ha ezt a kiszámitott irányban kitöretjük. Egyuttal kijelölhetjük ily kitűzött tengely vonala után a tervezett segitő-aknákat is a legbiztosabb módon. Ha a táró függőleges középsikját részletesen kitűztük, be is mérjük pontjait úgy távolságra valamint szintkülönbségre nézve. Eme adatokkal szerkesztjük az altáró függőleges hosszmetszetét, benne kitüntetjük a segitő-aknákat, ezek egyenkinti mélységét, sőt úgy a mint áttörésünk előre halad, kimutatjuk e rajzokban az áthatolt kőzetet, annak rétegzetét és minden egyéb tudnivalót.

Az ily altáró mérését bemutatjuk a 196. ábra módjára; ki legyen itt tüntetve mérésünk háromszöghálója, e háló megmért alapvonala, valamint számitásunk tengelyrendszere. Ha háromszögelés ki van zárva, akkor kell hogy a bemért poligonjaink és az alkalmazott tengelyrendszer kellően ki legyen tüntetve. Különös sraffozással kimutatjuk még azt a BGP derékszögü háromszöget, melynek segitségével a tárótengely azimutszögét kiszámitottuk.

76. §. **Kőszénbányában oly siklónak**

kitűzése, mely adott pontból kiindulva folyton a telepben halad, de a telep dűlésszögénél kisebb szög alatt magasabb szintre emelkedik.

Legyen 197. ábrában BF egy széntelep, BH ama vizszintes sík, mely a BC érmenetü folyosót magában foglalja, δ széntelepünk dűlésszöge, PF a telepen β szög alatt létesitendő szinthágó, μ az elérendő DF érmenetü folyosónak szintkülönbsége. Ily esetben csakis PF szinthágónak W_p^f csapásszögét kell ismerni. E czélból kiszámitjuk 197. ábrából ε szöget. Tudniillik PGl és PKF derékszögü háromszögekből következik:

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{\mu_1}{Pl}; \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{\mu_2}{PK} \quad \text{és } \cos \varepsilon = \frac{Pl}{PK}$$

A két első egyenletnek osztata:

$$\frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \delta} = \frac{\mu_2}{PK} \cdot \frac{Pl}{\mu_2}$$

és minthogy $\mu_1 = \mu_2$, innen:

$$\frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \delta} = \frac{Pl}{PK} = \cos \varepsilon$$

röviden: $$\cos \varepsilon = \operatorname{tg} \beta \operatorname{cotg} \delta$$

Jelöltessék BC folyosónak csapásszöge $W_B{}^C$-vel, igy irható:

[78] $$W_p{}^f = W_B{}^C - 90 \pm \varepsilon$$

ε szög két előjellel azért veendő számitásba, mert két szinthágó lehetséges, mely feltételünknek megfelel.

Fönnebbi feladatnak szerkesztés útján eszközölt megoldása.

Legyen 198. ábrában BC ama érmenetü folyosó, melynek P pontjából a tervezett szinthágó kiinduljon, akkor merőlegest emelünk P pontban, mely az elérendő magasabb teleprész felé terjedjen, l. Pn_1 merőlegest. E vonalat felhasználjuk mint egyik szögszárat δ dűlésszög és β szögnek a kirajzolása alkalmával. Igy találtuk PG és PF szögszárakat. Utóbbi két vonal egyszersmind két metszővonalnak a rajzsikba leforditott képe. És pedig PG a telepsiknak és Pn_1 egyenest magában foglaló függőleges siknak a metszővonala; mig PF ezen függőleges siknak és oly körkúpnak a metszővonala, melynek alkotói a vizszintesnek képzelt rajzsikkal β szöget képeznek. Tudniillik ily körkúp palástjában fekszik minden képzelhető szinthágó, mely P pontból kiindul és β szög alatt felemelkedik.

Feladatunk megoldására ki kell puhatolni ennek a körkúpnak és a telepsiknak két metszésvonalát, azaz ezeknek vizszintes vetületeit. Ezt úgy tesszük, hogy a telepsikot és a körkúpot más 2, 3, vizszintes sikkal metszük, l. 198. ábrában 2, 3-nak PF és PG-vel talált n és m metszőpontjait. E két pontnak felkeressük m_1 és n_1 vizszintes vetületeit. Ha most m_1 ponton át DE vonalat húzunk egyenlőközüen BC-hez, kijelöltük a telepsiknak és 2, 3, siknak metszővonalát vizszintes vetületével. n ponttal kijelöltük ama körnek pontját, melyben 2, 3 sik a körkúpot metszi. Ha tehát Pn_1 sugárral P középpontból 4, 5 kört leirunk, akkor Q és R

pontokban a körkúpnak és a telepsíknak két közös pontját rajzoltuk vizszintes vetületben; e két pontot már csak össze kell kötni P ponttal, hogy PQ és RP vónalakban a létesitendő szinthágónak vizszintes vetülete legyen meg.

77. §. Földalatti pontnak és földalatti folyosónak összekötése a legrövidebb vonalban.

Legyen 199. ábrában $O\,II$ földalatti folyosónk, I a földalatti pont, melyet merőlegesen $O\,II$-re akarunk összekötni. E feladat megoldása czéljából összekötjük $O\,II$ és I pontokat szakadatlan méréssel, mely mérés adataival e pontok összrendezőit kiszámitjuk. Hogy további megoldásunkra a legegyszerűbb egyenletet nyerjük, megválasztjuk a folyosó egyik bemért pontját tengelyeink kezdőpontjául, pl. O pontot. Ezekkel pontjaink rendszálai általában igy fejezhetők ki:

$$O = \begin{cases} X = 0 \\ Y = 0 \\ Z = 0 \end{cases} \qquad I \begin{cases} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{cases} \qquad II \begin{cases} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{cases}$$

Jelöljük továbbá az ismeretlen III pontnak rendszálait X_3-, Y_3- és Z_3-mal. Igy $O\,I\,III$ derékszögü háromszögnek oldalhoszszaira következő egyenletnek kell állani:

$$X_1{}^2 + Y_1{}^2 + Z_1{}^2 = X_3{}^2 + Y_3{}^2 + Z_3{}^2 + (X_1 - X_3)^2 + (Y_1 - Y_3)^2 + \\ + (Z_1 - Z_3)^1$$

Rőviditése után:

[79] $$X_3{}^2 + Y_3{}^2 + Y_3{}^2 = X_1 X_3 + Y_1 Y_3 + Z_1 Z_3$$

III pontnak $O\,II$ egyenesben kell feküdnie; hogy ezt mennyiségtanilag biztositsuk, következő egyenletet kell kielégitenünk:

[80] $$\frac{Y_3}{Y_2} = \frac{X_3}{X_2} \quad \text{és} \quad \frac{Z_3}{Z_2} = \frac{X_3}{X_2}$$

A két [80] egyenlettel kiküszöbölhetjük [79]-ből Y_3 és Z_3 rendszálakat, mi módon

$$X_3 = X_2 \frac{X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2}{X_2{}^2 + Y_2{}^2 + Z_2{}^2}.$$

és [80] segitségével:

[81] $$Y_3 = Y_2 \frac{X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2}{X_2{}^2 + Y_2{}^2 + Z_2{}^2}$$

$$Z_3 = Z_2 \frac{X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2}{X_2{}^2 + Y_2{}^2 + Z_2{}^2}$$

A szóban forgó $I\,III$ összekötő egyenesnek valódi $(H_{1\cdot3})$ hosszúsága:

$$H_{1\cdot3} = \sqrt{(X_1 - X_3)^2 + (Y_1 - Y_3)^2 + (Z_1 - Z_3)^2}$$

Eme földalatti folyosónak $\alpha_3{}^1$ azimutszöge, ha ezt III pontban kitűzzük.

$$\operatorname{tg} \alpha_3{}^1 = \frac{Y_1 - Y_3}{X_1 - X_3}$$

Ugyan-e folyosó $(\delta_3{}^1)$ dűlésszöge:

$$\operatorname{tg} \delta_3{}^1 = \frac{Z_1 - Z_3}{\sqrt{(X_1 - X_3)^2 + (Y_1 - Y_3)^2}}$$

Ugyan-e feladatnak megoldása szerkesztés útján.

Mérésünk adataival kiszámitjuk $O\,II$ földalatti folyosónak és I pontnak összrendezőit, hogy ezekkel, l. 200. ábrát, eme pontoknak $O_1\,II_1$ és I_1 vizszintes vetületét megszerkesszük. Feladatunk megoldása czéljából leforditjuk $O\,II$ folyosót a rajzsikba, függőleges vetitő-sikjával együtt $O_1\,II_1$ vizszintes vetülete körül. Azaz II_1 pontban merőlegest emelünk $O\,II_1$-re, erre rámérjük O és II pontoknak szintkülönbségét II_1-től II_3-ig, utóbbi pontot összekötjük O_1 ponttal, igy megtaláltuk $O_1\,II_3$ egyenesben a leforditott folyosót. Ezután kitüntetjük az I pontot ugyancsak e leforditott vetitő-síkban, azaz merőlegest bocsátunk I_1 pontból $O_1\,II_1$ egyenesnek, merőlegesére mérjük az m ponttól I_3-ig terjedő O és I pontoknak szintkülönbzetét. Most síkot fektetünk I ponton át, mely merőleges $O\,II$ folyosón. Ez utóbbi síknak vágányát a leforditott rajzban úgy találjuk, ha I_3 pontból merőlegest bocsátunk $O_1\,II_3$ vonal irányára; ama III_3 pontban, hol ez utóbbi vonal $O_1\,II_3$ vonalat metszi, találjuk ama merőleges síknak és $O\,II$ vonalnak átdöfés-pontját a harmadik vetületben. III_3-ból vetitő-sugarat bocsátunk $O_1\,II_1$ vonalra III_1-ben, hol ez amazt metszi, ott fekszik szinthágónk kiinduló pontjának vizszintes vetülete, $III_1\,I_1$ szinthágónk vizszintes hossza és iránya. Elvégre merőlegest emelünk I_1 pontban $I_1\,III_1$ irányra, rajta kitüntetjük III és I pontok szintkülönbségét I_1-től I_4-ig, mit a leforditott rajzban I_3-ból m_3-ig lemérhetünk. III_1 pont és I_4 pont összekötése által találtuk a szinthágó (δ) dűlésszögét és III_1-től I_4-ig bemutattuk e szinthágónak valódi hosszúságát.

78. §. Vizszintes folyosónak és függőleges aknának legrövidebb összekötő vágata.

Legyen, l. 201. ábrában, *O II* a földalatti folyosó, *I* pontban a függőleges akna. Ha feladatunknak mértékadó *O, II* és *I* pontjait összefüggő méréssel meghatároztuk és rendszálait kiszámitottuk, kiszámithatjuk *III* pontnak az összrendezőit, melyben vágatunk végződjék; ugyanis a [81] egyenlet-csoporttal, ha benne Z_1 és Z_2 nullának tekintjük, találjuk *III* pontnak rendszálait:

[82]
$$X_3 = X_2 \frac{X_1 X_2 + Y_1 Y_2}{X_2{}^2 + Y_2{}^2}$$

$$Y_3 = Y_2 \frac{X_1 X_2 + Y_1 Y_2}{X_2{}^2 + Y_2{}^2}$$

Eme összekötő vágatnak $T_{1 \cdot 3}$ hosszúsága:

$$T_{1 \cdot 3} = \sqrt{(X_1 - X_3)^2 + (Y_1 - Y_3)^2}$$

Irányának kitűzésére e vágat azimutszöge:

$$\operatorname{tg} \alpha_1{}^3 = \frac{Y_3 - Y_1}{X_3 - X_1}$$

79. §. Két egymással keresztbe haladó folyosónak legrövidebb összekötő aknája.

Ezt az érdekes esetet bemutatjuk a 202. ábrában, hol *O, I* és *II, III* a két földalatti folyosónak bemért végpontját tünteti elénk. Számitásaink egyszerüsitése czéljából felvettük a tengelyrendszer kezdőpontját *O* pontban. Ennek alapján felirhatjuk e vonalaknak egyenleteit, ha végpontjaink összrendezőit a bemért adatokból kiszámitottuk. Tudniillik *O I* egyenes vonalnak meghatározására álljon:

[83]
$$\begin{cases} Y = a_1 X = \dfrac{Y_1}{X_1} X \\ Z = a_2 X = \dfrac{Z_1}{X_1} X \end{cases}$$

II, III egyenes egyenletei pedig:

[84]
$$\begin{cases} Y = \alpha_1 X + \beta_1 = \dfrac{Y_2 - Y_3}{X_2 - X_3} X + \dfrac{Y_3 X_2 - Y_2 X_3}{X_2 - Y_3} \\ Z = \alpha_2 X + \beta_2 = \dfrac{Z_2 - Z_3}{X_2 - X_3} X + \dfrac{Z_3 X_2 - Z_2 X_3}{X_2 - X_3} \end{cases}$$

Legyen továbbá 202. ábrában B és C az a két pont, mely a legrövidebb összekötő aknának megfelel, akkor e két pontnak a rendszálaival az akna H hosszúsága következőkép fejezhető ki:

[85] $$H^2 = (X_b - X_c)^2 + (Y_b = Y_c)^2 + (Z_b - Z_c)^2$$

A legrövidebb aknát biztositjuk az által, ha ezen egyenletet minimumra hozzuk, azaz ha rendszálaival

$$\frac{dH}{dX_b} = 0 \quad \text{és} \quad \frac{dH}{dX_c} = 0.$$

Ha tehát a [85] egyenletet tényleg mind a két X_b és X_c változóra külzékeljük, találjuk:

$$\begin{cases} (X_b - X_c) + (Y_b - Y_c)\dfrac{dY_b}{dX_b} + (Z_b - Z_c)\dfrac{dZ_b}{dX_b} = 0. \\ (X_b - X_c) + (Y_b - Y_c)\dfrac{dY_c}{dX_c} + (Z_b - Z_c)\dfrac{dZ_c}{dX_c} = 0. \end{cases}$$

Ezután lekintetbe kell még venni azt, hogy B pont a II, III vonalban fekszik és C pont az OI vonalnak egy pontja. Ennek biztositására a [83] és [84] egyenletek igy is irhatók:

[87] $$\left.\begin{aligned} Y_c &= a_1 X_c \\ Z_c &= a_2 X_c \end{aligned}\right\} \quad \text{és} \quad \begin{aligned} Y_b &= \alpha_1 X_b + \beta_1 \\ Z_b &= \alpha_2 X_b + \beta_2 \end{aligned}$$

Ha utóbbi egyenletekből a [86] egyenletekben előforduló külzeléki hányadosokat kiszámitjuk, lesz:

[88] $$\begin{aligned} \frac{dY_c}{dX_c} &= a_1 & \qquad \frac{dZ_c}{dX_c} &= a_2 \\ \frac{dY_b}{dX_b} &= \alpha_1 & \qquad \frac{dZ_b}{dX_b} &= \alpha_2 \end{aligned}$$

E külzeléki hányadosok kiszámitott értékeit helyettesitjük most [86] egyenletekbe:

[89] $$\begin{aligned} (X_b - X_c) + (Y_b - Y_c)\,\alpha_1 + (Z_b - Z_c)\,\alpha_2 &= 0. \\ (X_b - X_c) + (Y_b - Y_c)\,a_1 + (Z_b - Z_c)\,a_2 &= 0. \end{aligned}$$

Ha elvégre a [89] egyenletekbe Y_b, Y_c, Z_b és Z_c értékeit a [87] egyenletekből helyettesitjük és az igy talált két egyenletet X_b és X_c szerint feloldjuk, találjuk:

[90] $$\begin{cases} X_b = \dfrac{(a_1\beta_1 + a_2\beta_2)(1 + a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2) - (\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2)(1 + a_1^2 + a_2^2)}{(1 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2)(1 + a_1^2 + a_2^2) - (1 + a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2)^2} \\[2ex] X_b = \dfrac{(a_1\beta_1 + a_2\beta_2)(1 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2) - (\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2)(1 + a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2)}{(1 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2)(1 + a_1^2 + a_2^2) - (1 + a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2)^2} \end{cases}$$

Eme egyenletekben a_1, a_2, α_2, α_1, β_1, β_2 mennyiségek értékeit a [83] és [84] egyenlet szerint következőkép kell tekintetbe venni:

$$a_1 = \frac{Y_1}{X_1} \qquad a_2 = \frac{Z_1}{X_1}$$

$$\alpha_1 = \frac{Y_2 - Y_3}{X_2 - X_3} \qquad \alpha_2 = \frac{Z_2 - Z_3}{X_2 - X_3}$$

$$\beta_1 = \frac{Y_3 X_2 - Y_2 X_3}{X_2 - X_3} \qquad \beta_2 = \frac{Z_3 X_2 - Z_2 X_3}{X_2 - X_3}$$

Ha a fönnebbiek tekintetbe vétele mellett X_b és X_c értékeit a [90] egyenletből kiszámitottuk, megtaláljuk a többi rendszálat a [83] és [84] egyenletekből; Y_b és Y_c valamint Z_b és Z_c rendszálakat. Utóbbi adatokkal pedig minden további kérdésre felelhetünk.

Ugyan-e feladatnak szerkesztésbeli megoldása. A 203. ábrában kijelöltük bc és df földalatti folyosóink vizszintes vetületeit, úgy a hogy ezt mérésünk alapján a kiszámitott összrendezökkel találtuk. Folytatólag leforditjuk mind a két egyenest vetitő-síkjukkal együtt a rajzsíkba, azaz c_1 d_1 és f_1 pontokban vetitő-sugarakat tüntetünk ki, ezekre mértük $c\,d$ és f pontoknak b pont feletti magasságait. Egy-egy vonalnak két végpontját összekötjük egyenessel; igy találtuk b_1 c_3 és $d_3 f_3$-ban e két egyenes leforditott képét.

Feladatunk megoldását azzal kezdjük, hogy s_1 látszólagos metszőpontnak vetitő-sugarait úgy bc valamint fd egyenesek leforditott vetületeiben kimutatjuk, l. 203. ábrában $s_1 s_3$ és $s_1 n_3$ sugarakat. Az utóbbi sugárra mértük $s_1 s_3$-nak a hosszúságát s_1-től s_4-ig. Igy kijelöltük s_4 pontban df egyenesnek leforditott vetitősikjában azt az s pontot, mely bc egyenesben is fekszik. Ha tehát s_4 pontban $s_4 - m_1$ egyenest egyenlőközüen kijelöljük $d_3 - f_3$-mal, akkor oly vonalat találtunk, mely bc egyenest metszi és még df egyenessel is egyenlőközü. Szóval, ha b_1 és m_1 pontokat egyenes vonallal összekötjük, akkor EV egyenessel oly síknak első vágányát jelöltük ki, mely bc vonalat magában foglalja és df egyenessel egyenlőközü; b_1 és m_1 eme vonalak átdöfő pontja a rajzsíkkal. E síkot ezentúl röviden bsm síknak fogjuk nevezni.

Ezután a szabadon választott B pontot jelöljük ki df egyenesben, legczélszerűbben úgy, hogy $d_1 f_1$-ben B_1 pontot kijelöljük. B_1 ponton át $B_1 S_1$ metszősíkot fektetünk merőlegesen EV-re, a rajzsíkba leforditott metszetét $b s m$ síkkal megrajzoljuk; ezután ugyan itt kimutatjuk még a B pontot is. E czélból vetitő-sugarat bocsátunk s_1 pontból $S_1 G_1$-re, irányára rámérjük $s_1 s_3$ hosszat S_1-től S_3-ig; S_3 pontot összekötjük g_1 ponttal. Igy találtuk $S_1 G_1 S_3$ szögszárak által $b c m$ síknak δ dűlésszögét. Ezután kimutattuk B_1 pontból vetitősugár segitségével B_3 pontot. Folytatásképen felmérjük $B_1 B_3$ rendszálnak hosszát B_1-től B_4-ig merőlegesen $B_1 S_1$-re. B_4 ponttal megtaláltuk B pontnak leforditott képét ez utóbbi függőleges vetitő-síkban.

Erre merőlegest bocsátunk B_4-ből $G_1 S_3$ szögszárig, $\varDelta_3$ metszőpontja egyszersmind átdöfő pontja $b s m$ síkkal. Ez utóbbi pontnak $\varDelta_1$ vizszintes vetületét találjuk, ha $\varDelta_3$-ból vetitősugarat inditunk $G_1 S_1$-re. $\varDelta_1$ pontból egyenlőközű vonalat húzunk $d_1 f_1$ egyeneshez I_1 pontban, hol ez $b_1 c_1$ egyenest metszi, megtaláltuk a létesitendő legrövidebb aknánk egyik kiinduló pontját vizszintes vetületében. A második II_1 pontot most úgy találjuk, hogy I pontból merőlegest húzunk $E V$-re, azaz a vágányra, a hol ez $d_1 f_1$ egyenest metszi, ott fekszik aknánk végpontja; igy tehát $I_1 II_1$ az akna vizszintes vetülete. Elvégre meghatározzuk még ezen akna dűlésszögét és valódi hosszát. Leggyorsabban sikerül ez, ha I_1 és II_1 pontokon át vetitősugarakat inditunk $d_3 f_3$-ig; akkor I_3 és II_3 pontok a szintkülönbségét tünteti ki, ezt lemérjük és ráméjük az $I_1 II_1$ egyenesnek $II_1 II_4$ merőlegesére II_4 pontig. $II_4 I_1$ egyenes képviseli az akna valódi hosszát, $II_4 I_1 II_1$ az akna $\delta_1{}^2$ dűlésszögét.

80. §. Feltáró munkánál uj akna és a hozzátartozó folyosóknak meghatározása.

Legyen 204. ábrában RS a nyomozó keresztvágat, melylyel az érczeret P pontban megütöttük és honnan kiindulva RS érmenetű folyosóval részben már le is fejtettük.

Érczerünk mélyebb részét már csak aknával érhetjük el; ez okból Q pontban függőleges aknát terveztünk. E feladat megoldására ismerni kell a tervezett akna mélységét, szájától az érczér T_3 átdöfése pontjáig. Továbbá meg kell határoznunk, hány nyomozó keresztvágat létesithető az aknából az érczér metszőpontjáig, ha ezeknek szintkülönbségeit s-re szabtuk. Elvégre meg kell határozni az egymásra következő keresztvágatoknak a hosszát az aknától az érczérig.

Számitó megoldását egyszerűsitjük, ha RS érmenetü folyosónak egyik bemért pontját, pl. R pontot, kezdőpontul választjuk és erre viszonyitva S pontnak, valamint Q aknapontnak mind a három irányu rendszálait kiszámitjuk. Legyen utóbbi számitás eredménye:

$$R\begin{cases} X = 0 \\ Y = 0 \\ Z = 0 \end{cases} \qquad S\begin{cases} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{cases} \qquad Q\begin{cases} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{cases}$$

A függőleges Q aknatengelynek vizszintes T távolságát RS folyosónak tengelyvonalától következőkép találjuk. Ha RS folyosónak talphágásától eltekintünk, felirhatjuk tengelyének egyenletét:

$$Y = aX = \frac{Y_1}{X_1} X.$$

Az általános $Y = aX + b$ egyenesnek és $C\begin{cases} X_c \\ Y_c \end{cases}$ pontnak vizszintes T távolságát igy fejezhetjük ki:

$$[91] \qquad T = \frac{Y_c - aX_c + b}{\sqrt{1 + a^2}}$$

Szóval a távolságnak tört a kifejezője, mely tört számlálója az egyenesnek a nullára redukált egyenlete, hol az általános X és Y rendszálakat a kérdésben forgó pontnak a rendszálaival helyettesitettük. E tört nevezője az egyenes azimutszögének a secánsa; ezt itt a tangens által szoktuk kifejezni.

Tudniillik:

$$\text{secans}\ \alpha = \sqrt{1 + \text{tg}\ \alpha^2}$$

Ha ezt az általános törvényt esetünkre alkalmazzuk, akkor:

$$T = \frac{Y_2 - aX_2}{\sqrt{1 + a^2}} \text{ tekintettel, hogy } a = \frac{Y_1}{X_1}$$

$$[92] \qquad T = \frac{Y_2 X_1 - Y_1 X_2}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2}}$$

RS folyosónak és Q aknaszájnak sq szintkülönbségét találjuk:

$$sq = Z_2 - Z_1\text{-ből.}$$

Legyen továbbá (δ) érczerünk dűlésszöge; M az akna mélysége szájától az érczérnek T_3 átdőfése pontjáig; akkor irható:

$$\frac{M + sq}{T} = \text{tg}\ \delta, \quad \text{innen:}$$

$$M = T\ \text{tg}\ \delta - sq$$

Ezzel és a tervezett főszinteknek megszabott s szintkülönbségeivel következik a létesithető főszintek n száma.

$$n = \frac{M}{s}$$

Az aknából az érczérig terjedő keresztvágatoknak vizszintes t hosszúsága következik, akkor:

$$t_1 = (M - s) \operatorname{cotg} \delta$$
$$t_2 = (M - 2s) \operatorname{cotg} \delta$$
$$t_3 = (M - 3s) \operatorname{cotg} \delta$$

Ha továbbá mind e keresztvágatoknak valódi T hosszát akarjuk tudni, mely ezeknek (p) százaléknyi talphágásuk mellett megfelel, akkor ezt következőkép fejezhetjük ki.

A talphágásnak megfelelő γ szöge:

$$\operatorname{tg} \gamma = 0{\cdot}01 \times p.$$

$$\text{Ezzel } T = \frac{t \sin \delta}{\sin (\delta - \gamma)}$$

részletesen:

$$T_1 = (M - s) \frac{\cos \delta}{\sin (\delta - \gamma)}$$
$$T_2 = (M - 2s) \frac{\cos \delta}{\sin (\delta - \gamma)}$$
$$T_3 = (M - 3s) \frac{\cos \delta}{\sin (\delta - \gamma)}$$

Mindezeknek $\alpha_q{}^v$ azimutszöge, ha kitörésükre az aknából indulunk ki:

$$\alpha_q{}^v = \alpha_r{}^s + 90^0 \quad \text{és}$$

$$\operatorname{tg} \alpha_r{}^s = \frac{Y_1}{X_1}$$

Ugyan-e feladatnak szerkesztéssel való megoldása.

A 204. ábrában, hol $R_1\,S_1$ folyosónk és Q_1 aknapontnak vizszintes vetülete meg lett rajzolva, $O_1\,T_3$ egyenlőközű vonalat jelölünk ki $R_1\,S_1$ folyosónk tengelyvonalával. Folytatólag rámérjük S és Q pontoknak $s\,q$ szintkülönbségét Q_1-től m-ig. Az igy talált m pontból merőlegest bocsátunk $R_1\,S_1$ egyenesre; ennek n metszőpontjában kitüntetjük az érczér δ dűlésszögét. T_3 pontban, hol emez $Q_1\,m$ egyenest metszi, ott találkozik függőleges aknánk az érczérrel, úgy hogy $Q_1\,T_3\,n$ háromszöggel az aknának és az érczérnek a rajzsikba lefektetett derékmetszetét bemutattuk. Az aknából kiinditandó keresztvágatokat továbbá e metszettel találjuk, ha Q_1 pontból T_3 pont felé haladva az egymás alá sorozandó keresztvágatoknak $s_1\ s_2\ s_3$ szintkülönbségeit $Q_1\ T_3$-ra mérjük és az igy talált 1, 2, osztópontokból t_1 és t_2 vizszintes vonalakat $S_1\ T_3$ egyenesig húzzuk. Ha még a keresztvágatoknak γ talphágását is tekintetbe vesszük, akkor $1\,g$ és $2\,h$ vonalaknak kitüntetése által ezeknek valódi hosszúságait is találtuk. Elvégre g és h pontokon át $I_1\ II_1$ és $III_1\ IV_1$ egyenlőközüket húzunk $R_1\ S_1$ érmenetü folyosóhoz, mi módon ez utóbbi szintekben tervezett érmenetü folyosóknak vizszintes vetületei is ábrázolva vannak.

81. §. Tábla alaku telepek metszővonalai.

Érczelepeink gyakran oly alakuak, hogy fedő- és fekü-lapjuk síknak tekinthető.

Tapasztalataink igazolják, hogy nemes fémek érczlerakodásai ott, hol ezek találkoznak, rendszerint a legfémdúsabbak. Onnan van, hogy a fémbányász a telepmetszeteket nagy gonddal tanulmányozza és mindig fel is keresi.

Feladatunk ismét két módon megoldható; számitással vagy szerkesztéssel. A számitás nagyobb pontosságot biztosit, de ez csak akkor igazolt, ha telepeink tényleg sík alakkal birnak. Mig oly telepeknél, melyek a síkot csak megközelitik, a kisebb pontosságu szerkesztő-eljárás alkalmazása tökéletesen igazolt.

1. A számitó eljárás.

Legyen a 205. ábrában I és II két telepsík, melyek MN metszővonala meghatározandó, akkor e telepek mindegyikén W csapásszöget és δ dűlésszöget kell megmérni. Továbbá szakadatlan poligonnal össze kell kötni azt a két K és P pontot, hol telepeink e két adatait megszereztük.

Legyen tehát K az I érczérnek bemért pontja, W csapásszöge és δ dülésszöge; P pont a II érczérnek bemért pontja, W_1 csapásszöge és δ_1 dűlésszöge.

Akkor a számitás egyszerűsitésére az egyik bemért pontot tengelyrendszerünk kezdőpontjául választjuk, pl. 205. ábrában K pontot. Jelöljük tehát P pontnak K pontra viszonyitott rendszá'ait $X_1\ Y_1$ és Z_1-el.

Ily alapon felirhatjuk az I sík egyenletét következőképp:

[93] $$AX + BY + CZ = 0$$

feltéve azt, hogy

$$[94] \qquad \left.\begin{aligned} A &= \sin W \sin \delta \\ B &= -\cos W \sin \delta \\ C &= \cos \delta \end{aligned}\right\} \text{ jelent.}$$

A Π síknak egyenlete, minthogy P pontot magában foglalja, ez lesz:

[95] $A_1 (X - X_1) + B_1 (Y - Y_1) + C_1 (Z - Z_1) = 0.$

Mely egyenletben ismét:

$$[96] \qquad \left.\begin{aligned} A_1 &= \sin W_1 \sin \delta_1 \\ B_1 &= -\cos W_1 \sin \delta_1 \\ C_1 &= \cos \delta_1 \end{aligned}\right\} \text{ jelent.}$$

A metszővonalnak vízszintes vetületét most úgy találjuk, hogy 93-ból Z rendszálat kiszámitjuk és értékét 95-be helyettesitjük.

Eredménye:

$$[97] \quad Y = -\frac{A_1 C - A C_1}{B_1 C - B C_1} X + \frac{C (A_1 X_1 + B_1 Y_1 + C_1 Z_1)}{B_1 C - B C_1}$$

A metszővonal függőleges vetületére találjuk az egyenletet, ha 93-ból Y értékét kifejezvén, 95-be irjuk.

Eredménye:

$$[98] \quad Z = -\frac{A_1 B - A B_1}{C_1 B - C B_1} X + \frac{B (A_1 X_1 + B_1 Y_1 + C_1 Z_1)}{B_1 C - B C_1}$$

Ha tehát Ω a metszővonal csapásszöge, Δ ennek dűlésszögét jelenti, ekkor:

$$\operatorname{tg} \Omega = \frac{A C_1 - A_1 C}{B_1 C - B C_1}$$

Ha [94] és [96] egyenletekből az értékeket helyettesitjük és röviditjük, ekkor Ω csapásszög:

$$[99] \qquad \operatorname{tg} \Omega = \frac{\operatorname{tg} \delta \sin W - \operatorname{tg} \delta_1 \sin W_1}{\operatorname{tg} \delta \cos W - \operatorname{tg} \delta_1 \cos W_1}$$

Hasonlókép találtatik 98-ból Δ dűlésszög tangense:

$$\frac{\operatorname{tg} \Delta}{\cos \Omega} = \frac{A B_1 - A_1 B}{C_1 B - C B_1}$$

Ismét [94] és [96] egyenletekkel:

$$[100] \qquad \operatorname{tg} \Delta = \frac{\cos \Omega \sin (W_1 - W)}{\operatorname{cotg} \delta \cos W_1 - \operatorname{cotg} \delta_1 \cos W}$$

A [99] és [100] egyenletből látjuk, hogy a metszővonal csapása és dűlése csakis a két telepsík egyenkénti csapásától és dűlésétől függ, nem pedig ama pontok fekvésétől, melyekben megütöttük.

Mint további kérdést, mely itt még szóba jöhet, meg kell határoznunk azt a vizszintes T_0 távolságot, melyben K ponttól az I-ső telepsíkban haladva a metszővonal N pontját elérjük.

Ily czélból ki kell számitanunk N pontnak X_0 és Y_0 rendszálait. Az első következik [98]-ból, ha benne $Z = 0$-nak irjuk és X szerint feloldjuk.

$$X_0 = \frac{B\,(A_1 X_1 + B_1 Y_1 + C_1 Z_1)}{A_1 B - A B_1}$$

Y_0 a [97] egyenletből következik, ha ebbe X_0-nak kiszámitott értékét helyettesitjük

$$Y_0 = -\frac{A_1 C - A C_1}{B_1 C - B C_1} X_0 + \frac{C\,(A_1 X_1 + B_1 Y_1 + C_1 Z_1)}{B_1 C - B C_1}$$

Ezekkel

$$T_0 = \sqrt{X_0{}^2 + Y_0{}^2}$$

Továbbá szükégünk van P pontból T_1 távolságra, mely pontban a metszővonalat PM érmenetű folyosóval elérjük. Ezt úgy találjuk, hogy elsőben 98-ba $Z = Z_1$ irunk és innen azt az X_m-et kiszámitjuk, mely M pontnak megfelel.

$$X_m = -\frac{(C_1 B - C B_1)}{A_1 B - A B_1} Z_1 + \frac{B\,(A_1 X_1 + B_2 Y_2 + C_1 Z_1)}{A_1 B - A B_1}$$

Y_m ismét 97-ből találtatik, ha X_m-et helyettesitünk.

$$Y_m = -\frac{A_1 C - A C_1}{B_1 C - B C_1} X_m + \frac{C\,(A_1 X_1 + B_1 Y_1 + C_1 Z_1)}{B_1 C - B C_1}$$

Ezekkel végtére:

$$T = \sqrt{(X_m - X_1)^2 + (Y_m - Y_1)^2}$$

2. A szerkesztő-eljárás.

Két egymáshoz hajló telepsíknak metszővonalát leggyakrabban rajzolás útján határozzuk meg, minthogy utóbbi eljárásunk nemcsak rövidebb mint a számitás, de pontossága is megfelel a legtöbb esetben.

Feladatunk általánosabb ismertetése czéljából minden telepben a feltáró folyosót más magasságban vettük fel. Legyen 206. ábrában $c\,d$ az egyik síknak, $f\,g$ a második síknak érmenetű folyosója, úgy a hogy ezt mérésünk alapján a vizszintes vetületben megrajzoltuk. Első dolgunk minden telepsikban még egy csapásirányu folyosót kitüntetni. Ezeket mindig úgy határozzuk meg, hogy az ismert érmenetü folyosók egyikével egyazon vizszintes síkban haladjanak. Tudniillik csak oly két vizszintes vonal jöhet metszésre, melyek egyazon magasságban haladnak. Metszőpontjuk a keresett metszővonal vizszintes vetületének egyik pontja. Eme általános útmutatás után következzék az ábrázolt eset rajzoló megoldása.

A 206. ábrában felvettük, hogy *cd* folyosó *Z* szintkülönbséggel magasabb mint *fg*. A megoldást tehát azzal kezdjük, hogy *cd* folyosónak telepsikjában oly érmenetü folyosót tüntetünk ki, mely *fg* folyosóval fekszik egy magasságban. E czélból felrajzoljuk *cd*-nek valamely pontjában eme telepsíknak δ dűlésszögét. Ezt úgy tesszük, hogy *Kv* vizszintes szögszára merőlegesen álljon *cd* egyenesen, második *Kl* szára a mélység felé haladjon, tehát arra, a merre a nyil hegye mutat. Folytatólag rámérünk *cd* egyenesre *K*-tól *h*-ig *Z* szintkülönbséget; *h* végpontjából egyenlőközüt húzunk *Kv*-hez. Ama *l* pontban, hol ez utóbbi a dűlésszögnek ferde szárát metszi, ott találtuk a mélyebb szintü csapásvonalnak egyik pontját. Eme *l* ponton át már csak egyenlőközüt húzunk *cd* egyenessel, hogy *lm*-ben a keresett csapásvonal vizszintes vetülete legyen meg.

Ily módon kitüntettük a csapásvonalat telepünk mélyebb szintjén is.

A második *fg* folyosónak síkjában *Z*-vel magasabb szintü vonalat kell kitüntetni. Ez esetben eljárásunk csak annyiban módositandó, hogy ekkor *O* pontban eme sík δ_1 dűlésszögét magasabb része felé tüntetjük ki, l. *UOq* felé. A csapásvonal *qr* vizszintes vetületét most is *Z* szintkülönbségnek rámérése által találjuk, l. *O*-tól *p*-ig.

Ezzel *cd* és *rq* egyenesek *r* metszőpontja, továbbá *lm* és *fg* egyenesek *m* metszőpontja két oly pont, melylyel a metszővonalnak vizszintes vetületét megtaláltuk.

Ω a csapásszög, ez lemérhető a rajzon szabályaink szerint a déllőtől *mr* metszővonalig értjük. A metszővonal Δ dűlésszögét elvégre úgy találjuk, hogy egyik *m* pontjában merőlegest emelünk, melyre *Z* szintkülönbséget rámérünk, l. *m*-től *S*-ig; *S* pontot összekötjük *r* ponttal. Ekkor *mrS* háromszög Δ szöget adja és *rS* a metszővonal *r*-től *m*-ig terjedő részének valódi hosszát tünteti ki.

82. §. Vetődések.

Ismeretes, hogy telepeink gyakran hatalmas, többé-kevésbbé sík alaku hasadékok által szét vannak metszve és hogy telepeink elmetszett részei eredeti helyzetükből rendszerint kimozdittattak, azaz felemeltettek vagy mélyebbre csúsztak. Telepeinknek ily természetü helyzetváltozását vetődésnek nevezzük. A vetődést okozó hasitólapnak pedig elvető a neve.

Minthogy minden vetődés a telep folytonosságát megszakitja, feltáró folyosóinkkal pedig czélszerű összefüggés biztositandó, ez okból igen fontos oly szabálynak felállitása, melylyel az elvetett telepészt feltáró folyosónk szintjében, minden felesleges kiadás mellőzésével megtalálhatjuk.

83. §. Számitó megoldás.

Legyen 207. ábrában RS tengelyrendszerünk vizszintes vetületi síkja, OF telepünk síkja, mely általában δ_1 szög alatt dűl és W_1 azimutszöget képez OG csapásvonallal. Legyen továbbá KL az elvető sík lapja, δ ennek dűlésszöge és W csapásvonalának azimutja. CO a telepsíknak és az elvetőnek metszővonala, Δ e metszővonal dűlésszöge, Ω ugyanennek azimutja.

Akkor megelőző tárgyalásunk alapján, hol ugyanezt a jelölést használtuk, e két síknak metszővonala a [99] és [100] egyenlet segitségével igy határozható meg:

$$\operatorname{tg} \Omega = \frac{\operatorname{tg} \delta \sin W - \operatorname{tg} \delta_1 \sin W_1}{\operatorname{tg} \delta \cos W - \operatorname{tg} \delta_1 \cos W_1}$$

$$\operatorname{tg} \Delta = \frac{\cos \Omega \sin (W_1 - W)}{\operatorname{cotg} \delta \cos W_1 - \operatorname{cotg} \delta_1 \cos W}$$

A 207. ábrával szabályos vetődést mutatunk be, ugyanis olyat, hol telepünknek ama elmetszett része „fordulat nélkül" csúszott a mélység felé, mely KL elvetőnek fődűrészében van. Itt tehát a telep folytatását képező MP metszővonal CO-val egyenlőközüen mozgott. Ez nevezetes, mert szabálytalan esetre nem lehet szabályt felállitani.

Ha ily esetben CD érmenetü folyosóval OF telepet feltárjuk és telepünk C pontban el van metszve, akkor vetődéssel lehet dolgunk, melynek felkeresése czéljából az elvető leleplezett lapján ennek δ dűlésszögét és W azimutját kell lemérni, hogy fennebbi képletekkel OC metszővonalnak Δ dülésszögét, Ω azimutját kiszámithassuk.

Az elvetett teleprészt mindig úgy törekszünk felkeresni, hogy C pontból az elvetőlapnak csapásvonalát kisérve, tehát a nélkül hogy a szállitó szintet elhagynók, a telepet ismét megtaláljuk, l. 207. ábrában, hol C-től M-ig folytatjuk a feltárást. A rajzban V-vel jelölt és M-től C-ig terjedő távolságot nevezzük a vetődés vizszintes mértékének. Feladatunk rendszerint V-nek a meghatározása. Utóbbi czélból oly adatot kell ismernünk, melylyel emez kifejezhető. Ez leghamarább CP-vel, azaz a vetődés dűlésirányú mértékével, vagy még inkább CN-nel, azaz a vetődés függőleges mértékével sikerül. Tudniillik az utolsó adatot telepünk fedő- és fekü-rétegeiből sikerül leghamarább meghatározni. Ez okból nagy gondot forditunk minden vetődésnél a fedő- és fekü-rétegzet tanulmányozására, sőt magát a megütött elvetőlapot is behatón kell megfigyelni, mert ennek sávos szövezetéről néha még a mozgás iránya is felismerhető. Ez pedig szabálytalan elvetésnél egyedüli útmutatónk lehet.

Legyen összhangzatban a 207. ábrával:

$CM = PO = V =$ a vetődés vizszintes mértéke;

$CP = d =$ a vetődés dülésirányu mértéke;

$CN = m =$ a vetődés függőleges mértéke;

ekkor ezen adatok mennyiségtani összefüggése a következő:

$$m = d \sin \delta$$

$$PN = \frac{m}{\operatorname{tg} \delta}$$

$$PN = V \operatorname{tg} (\Omega - W)$$

Ezekkel:

$$V = m \operatorname{cotg} \delta \operatorname{cotg} (\Omega - W)$$

vagy ha d-t ismerünk:

$$V = d \cos \delta \operatorname{cotg} (\Omega - W)$$

Elvégre kifejezhető V még a metszővonal Δ dűlésszöge által is:

$$V = m \operatorname{cotg} \Delta \sin (\Omega - W)$$

Utóbbi egyenletből tapasztaljuk, hogy a vetődés V vizszintes mértéke változatlan m mennyiségnél, annál nagyobb értékkel bir, minél kisebb Δ, azaz a metszővonal dűlésszöge. Ez pedig δ és δ_1 dűlésszögekkel kisebbedik.

Ily alapon mondhatjuk, hogy a vetődés okozta nehézség és költség nagyobb lesz kisebb dűlésnél, mint meredeken dűlő telepeknél.

84. §. Rajzoló eljárás.

Vetődéseknek rajzolás útján való meghatározása czéljából két főesetet kell megkülönböztetnünk.

1. Ha a telep dűlésszöge 0 foktól 90 fokig bármily értékű, de az elvető dűlésszöge 90 foknál kisebb; tehát hegyesszög.

2. Ha az elvető síkja függőlegesen áll és a telep síkja bármily szög alatt dűl.

Eljárásunkat az első főcsoportba tartozó feladatok egyikével ismertetjük.

Legyen 208. ábrában $m_1 C_1$ telepünk érmenetű folyosója, $C_1 E_1$ telepünk elvetője, a hogy ezeknek vizszintes vetületeit méréseink alapján megrajzoltuk. Fekete rajzokban az elvetőnek fekürészét mindig apró vonalzással tüntetjük ki.

Szabályos esetet feltételezve, tehát olyat, hol a telepnek azon része csúszott mélyebbre, mely elvetőnk fedüjében fekszik. Ily esetben $C_1 D_1$-el az állva maradt teleprészben haladunk és a lecsúszott teleprészt keressük fel.

Ez okból úgy a telep, valamint a telep síkjában is a vetődés függőleges Z mértékével mélyebben fekvő $r_1 O_1$ és $O_1 s_1$ csapásvonalat tüntetünk ki. Ezt ép úgy, mint 81. §-ban fejtegettük, a csapásvonalnak mélyebb szintre való vetitése által szoktuk végbe vinni. Azaz kitüntetjük a telep megmért δ_1 és az elvető δ dűlésszögét, még pedig úgy, hogy szögszárai a mélységet jelölő nyil hegye irányában terjedjenek. Folytatólag rámérünk $C_1 D_1$-re m_1-től n_1-ig és $C_1 E_1$-re p_1-től q_1-ig Z szintkülönbséget. Az így talált m_1 és q_1 pontban merőlegest emelünk a csapásvonalra, hol ezek a dűlésszögnek ferde szárát metszik, tehát r_1 és s_1 pontokban, ott találjuk a mélyebb szintű csapásvonalnak egy-egy pontját. Utóbbi pontokon át egyenlőközüt húzunk a kiinduló szintnek a csapásvonalához. Igy találtuk $r_1 O_1$ és $s_1 O_1$ csapásvonalakat.

O_1 metszéspontjukban találtuk a telepsíknak és az elvetőnek második közös pontját. Ha tehát C_1 pontot O_1-el összekötjük, akkor $C_1 O_1$ egyenessel a metszővonalnak vizszintes vetületét tüntettük ki.

Folytatólag feltáró folyosónk C_1 végpontjából merőlegest inditunk az elvetőnek mélyebb szintű $O_1\ s_1$ csapásvonaláig. Ennek P_1 végpontjában megtaláltuk ama pontot, mely a vetődés előtt C_1 pontnak folytatását képezte, minthogy a sülyedés az elvető dűlés vonalában ment végbe. P_1 pontban megtalálhatnók ugyan az elveszitett telepet, de mi nem akarjuk a szállitó szintet elhagyni, ez okból felkeressük a telepet az elvetőnk $C_1\ E_1$ csapásvonala mentén.

Szabályos vetődést feltételezve, tehát olyat, hol telepünk csakis az elvető $C_1\ P_1$ dűlésvonala szerint sülyedt, azaz forgatást nem szenvedett. Ily esetben világos, hogy P_1 pontból egyenlőközűt kell húzni $O_1\ C_1$ metszővonallal, mig ez $C_1\ E_1$ elvetőt M_1 pontban nem metszi. M_1 pontban felfedeztük az elvetett teleprésznek azon pontját, mely $C_1\ E_1$ szintben fekszik. Ugy hogy $M_1\ H_1$ egyenessel, ha M_1 pontból $C_1\ D_1$-hez egyenlőközüen rajzoltuk, az elvetett telepészt feltáró folyosónk szintjében ábrázoltuk.

A vetődések ellentétes esetét látjuk a 209. ábrában, hol ismét $C_1\ D_1$ a feltáró folyosó, $E_1\ C_1$ az elvető csapásvonala. Ekkor a rajzban bemutatott dűlésirányokat feltételezve, feltáró folyosónkkal a lesülyedt teleprészben vagyunk és az állva maradt, tehát magasabb telepészt kell felkeresnünk.

Ez okból eljárásunk csak annyiban módosul, hogy δ és δ_1 dűlésszögek felhasználásával most $O_1\ r_1$ és $O_1\ s_1$ magasabb szintü csapásvonalakat határozunk meg. Közös O_1 pontjukkal kitüntetjük a telepsík és elvetőnek $C_1\ O_1$ metszővonalát. Ezután felkeressük az elvetőnek magasabb szintü $O_1\ s_1$ csapásvonalában azt a P_1 pontot, mely C_1-nek folytatását képezte. Végül P_1 pontból M_1 pontig egyenlőközüt húzunk $C_1\ O_1$-el. A telep folytatását eszerint M_1 pontban fogjuk találni, ha $E_1\ C_1$ elvetőnek csapásvonalát követve C_1-től M_1-ig a feltárást foganatosítjuk; azaz $M_1\ H_1$ lesz ez esetben az elvetett és felkeresendő teleprész, ha $n_1\ m_1$ csakugyan vetődésünk függőleges mértéke.

2. A vetődés meghatározása, ha elvetőnk függőlegesen áll.

Az elvetőnek függőleges állása eljárásunkban némi módositást követel. A megoldást oly esettel mutatjuk be, l. 210. ábrát, hol $C_1\ D_1$ érmenetü folyosóval $C_1\ E_1$ elvetőt fekülapjában ütöttük meg hamarább; szóval hol feltárásunkkal a telep állva maradt részéből indulunk ki. Ez esetben a telepnek lecsúszott részét keressük, úgy hogy mind a két síkban Z-vel mélyebb szintü csapásvonalat kell kijelölnünk, tehát δ_1 dűlésszöget a mélység felé fogjuk terjeszteni, azaz ép úgy mint a 208. ábrában.

A mélyebb szintü r_1 ponton át $r_1\ O_1$ egyenest egyenlőközüen húzzuk $C_1\ D_1$ csapásvonalhoz; $O_1\ r_1$ e mélyebb szintü csapásvonalnak vizszintes vetülete. Ama O_1 pontban, hol $O_1\ r_1$ az elvetőnek $C_1\ E_1$ csapásvonalát metszi, ott van most a szóban forgó két síknak még egy közös pontja; úgy hogy $C_1\ O_1$ egyenes ez esetben a két sík metszésvonalának vizszintes vetülete. De a 210. ábrából tapasztaljuk, hogy a vizszintes vetületben $C\ O$ metszésvonalnak ferde helyzete nem látható, mert benne fekszik vetitősíkja $C_1\ E_1$ vágányában. Ha tehát $C\ O$ metszővonalnak dűlő helyzetét látni akarjuk, akkor $C\ O$ vonalat az elvetőnek $C_1\ E_1$ csapásvonala körül addig kell forditani, mig ez a rajzsikba nem kerül. Röviden szólva, ennek harmadik vetületét mutatjuk be. E harmadik vetület megrajzolására merőlegest emelünk $C_1\ E_1$-re, bármely q_1 pontjában; erre Z szintkülönbségnek teljes értékét mérjük q_1-től s_3-ig. Folytatólag s_3 ponton át egyenlőközüt húzunk $C_1\ E_1$-el. Hol utóbbi vonal az O_1 pontból reá merőlegesen bocsátott vetitősugarat metszi, eme O_3 pontban találtuk a metszővonal O pontjának harmadik vetületét. C_1 és O_3 pontok összekötője adja a metszővonal harmadik vetületét. Ha elvégre C_1 pontban a dűlésvonalat, vagy más néven a csuszamlás merőleges irányát kijelöltük, ekkor megtaláltuk P_3-ban azt a pontot, mely C pontnak folytatását képezte. Ezután P_3 pontban egyenlőközüt húzunk $C_1\ E_1$ csapásvonalig, igy M_1 pontjában az elvetett teleprésznek azt a pontját fedeztük föl, mely feltáró folyosónk szintjében fekszik. $M_1\ H_1$ egyenes elvégre az elvetett teleprésznek csapásvonala, ha ezt $C_1\ D_1$-el egyenlőközüen húztuk.

85. §. A Schmid-féle vagy Zimmermann-féle szabály.

A megoldott három feladatból, nemkülönben a 207. ábrából is kiviláglik e szabály vetődések felkeresésére, melyet következőkép fogalmazhatunk:

Szabályos vetődés felkeresése czéljából az elvető csapásvonalát követvén, a telep feküjébe hatolunk, l. 207., 208. és 210. ábrát, ha feltáró folyosónk az elvetőnek feküi részében halad, azaz ha műveletünk a telep állva maradt részéből indul ki.

Ellenkező esetben az elvetett teleprésznek felfedezésére telepünk fedőközetébe kell nyomulni, midőn az elvető csapásvonalát követjük. Föltéve, hogy feltáró folyosónkkal az elvető fedőrészében vagyunk, azaz ha feltárásunk a telep sülyedt részéből indul ki, l. 209. és 207. ábrát.

Záradékul még csak azt akarjuk emliteni, hogy oly vetődések felkeresése czéljából, hol az a teleprész, mely az elvetőlapnak fedőkőzetében fekszik, nem mélyebbre süllyedt, hanem az elvető dűlésvonala szerint felemeltetett, ott a fönnebb idézett szabálynak a megforditott iránya szerint lehet a telepet feltalálni; mig ellenben szabálytalan vetődésekre, azaz oly zavarásokra, hol telepeink egyes részei szállitó mozgásokon kivül még forgatásoknak is voltak alávetve, szabályokat felállitani nem lehet.

MÁSODIK RÉSZ.

FELSŐ FÖLDMÉRÉSTAN.

Bevezetés.

A felső földméréstan tárgya és felosztása.

Földünk alakja nem tökéletesen szabályos, egyes pontjaiban magas hegyek emelkednek a tengerek szine fölé, más pontjaiban mélyebben fekvő területei vannak.

Jelen tárgyalásaink feladata lehet az egész Földünk alakjának a meghatározása, vagy csak kisebb-nagyobb részének is; pl. egy-egy ország, megye, esetleg több község felmérése. Mind ez esetekben méréseink meghatározott adataival több adatot még ki is kell számitani. Hogy tehát a szükséges számitásokra, valamint térképeink szerkesztői szabályaira mennyiségtani alapot nyerjünk, e czélból pótoljuk Földünket mértani testtel, melynek „geoid" a neve. A geoid forgatásbeli test, mely úgy jön létre, ha ellipsist rövidebb tengelye körül forgatunk. A forgatott ellipsis képviseli Földünk meridianjait.

Bessel meghatározta a meridian méreteit. Földünknek legsikerültebb tiz fokméréséből 1837-ben a következő számokkal: $a = 6{,}377{,}397 \cdot 154$ méter, mint az ellipsis nagyobb tengelye, mely Földünk aequatori sugarával egyenlő. $b = 6{,}356{,}079 \cdot 962$ méter, mint az ellipsis kisebb tengelye; ez Földünk forgástengelyével esik egybe. E két tengely $(a - b)$ különbzete elosztva a-val adja Földünk (p) lelapulását:

$$[1] \qquad p = \frac{a - b}{a} = \frac{1}{299 \cdot 1528}$$

Utóbbi adatból kitünik, hogy a geoid alkotó ellipsisének kisebb tengelye csakis 1 : 300-dal rövidebb, mint nagyobb tengelye. Ha tehát ily ellipsoidnak nagyobb (a) tengelyét 300 *mm*-rel vesszük, akkor kisebb (b) tengelyét 299 *mm*-re kell szabni, úgy hogy az ily módon kisebbitett geoid a teljes gömbtől csakis 1 *mm*-rel térne el Földünk forgástengelye irányában. Szóval a geoid alakja megközeliti a teljes gömböt annyira, hogy ezt 500 négyzetméternél kisebb földrészek mérése alkalmával gömbnek tekinthetjük, a nélkül hogy feltevésünk által a legnagyobb követelt pontosságot is koczkáztatnók.

Ily mérésekre a gömb sugarának (r) hossza az előbbi két tengely számtani középarányosa:

$$[2] \qquad r = \frac{a+b}{2} = 6{,}366{,}738 \text{ méter}$$

A bányamérnök, kinek mérései 500 négyzet mértföldnél kisebb területre szoritkoznak, az előbb megokolt szempontból Földünk alakját mindig gömbbel pótolhatja; sőt ha mérései 16 négyzetmértföldnél is korlátoltabbak, a felmért földfelületet síknak is tekintheti, mert az a sík, melyre térképeit vetiti és melylyel a felmért földfelületet körülbelüli középpontjában érinteti, még annyira simul a földgömbhöz, hogy legnagyobb eltérése is elhanyagolható.

E rövid ismertetésből tapasztaljuk, hogy kiterjedtebb feladataink megoldására a gömbméréstanra van szükségünk. Ismernünk kell továbbá azokat a szabályokat, melyek segitségével ily nagy földfelületnek térképei a megkivánt pontossággal megszerkeszthetők. A méréseinktől követelt nagy pontosság biztositására jártasak legyünk még a háromszögeléstanban, a hibaszámitásban és a földrajzi rendszálaknak közvetlen meghatározásaiban is.

Tárgyalásaink sorát a bányamérnök feladatai szempontjából öt szakaszra osztjuk:

1. Gömbháromszögek mérése.
2. Földabroszok szerkesztése.
3. Hibaszámitás a legkisebb négyzetösszegek elmélete alapján.
4. A háromszögelés.
5. A földrajzi rendszálak közvetetlen meghatározása.

ELSŐ SZAKASZ.

Gömbháromszögek mérése.

1. §, Alapfogalmak.

A gömbnek metszővonala síkkal kör. Ha a metsző sík a gömb középpontját foglalja magában, akkor metszete a gömb legnagyobb kőrének egyike. A gömbháromszöget mindig ily legnagyobb körökkel alakitjuk, miért is az ily metszetet főmetszetnek nevezzük. Minden főmetszettel a gömböt két egyenlő részre osztjuk. Létezik a gömbön oly pont, melynek távolsága kilenczven fok a felező körvonal valamennyi pontjától; ez az illető alapkörnek vagy főkörnek sarkpontja. Eszerint teljes gömbön minden főkörnek két határozott fekvésü sarkpontja van.

Ha valamely gömböt három ily fősíkkal úgy metszünk, hogy e metsző síkok egybe nem esnek, akkor keletkezik az úgynevezett gömbháromszög, vagy más szavakkal háromlapu testszög az eredménye. A gömbháromszög oldalai ily főmetszeteknek körívei, melyek hosszát meghatároztuk, ha a gömb sugarán kivül ezen íveknek középponti szögeit ismerjük. Onnan van, hogy az oldalakat általában csak szögmértékkel szoktuk kifejezni, mely eljárás nevezetes előnye főkép akkor tapasztalható, ha az ily módon megállapitott sarkponti összrendezőkkel a gömbnek tekintett égboltozaton oly égi testnek helyzetét akarjuk meghatározni, melynek távolságát — sugárhosszát — nem ismerjük.

A szöget, melyet a gömbháromszögnek két oldala, vagy jobban mondva a hozzájuk tartozó két sík közbezár, ezt úgy mérjük, mint bármily két síknak iránykülönbségét. T. i. oly harmadik síknak metszővonalaival, mely mind a két síkon merőlegesen áll. Ha tehát eme szögmérésre használt harmadik metszősíkot a háromszögnek szögpontjába helyezzük, akkor utóbbinak a háromszögoldalakat magában foglaló síkokkal való metszővonalai mint a háromszögoldalaknak érintői találtatnak. Ha pedig ugyan-e harmadik metszősíkot a gömb középpontjába fektetjük, akkor a szögmérésre használt metszővonalai a szóban forgó két háromszögoldalnak alapsíkjában, esetleg egyenlitőjében fekszenek. Ily alapon mondhatjuk, hogy a gömbháromszögnek szögeit az e szögpontokban az oldalakhoz képzelt érintőkkel mérhetjük, vagy megmérhetjük két-két oldalnak alapkörében is.

Ha A, B, C ABC-vel a gömbháromszögnek három szögét jelöljük, akkor előbbiek alapján következik, hogy:

$$A + B + C > 180^0$$

Mert ha a gömbháromszögnek három szögpontján át sikot fektetünk és ezt metszésre hozzuk a háromszögoldalakat magában foglaló síkokkal, akkor síkháromszöget kapunk, melynek minden szöge kisebb ama szögnél, mely ugyan-e szögpontban a gömbháromszögnek felel meg.

A síkháromszögben azonban 180 fok a szögösszeg, igy tehát a gömbháromszögnek három egyenkint nagyobb szöge, ha összeadjuk 180 foknál nagyobb összeget kell hogy adjon. Továbbá belátható az is, hogy gömbháromszögben minden szög addig nagyobbitható, mig a szögszárakat magában foglaló két-két sík egybe nem esik. Utóbbi esetben az egyes szög 180 fokot mérne.

Ezzel igazoltuk, hogy $A + B + C$ vagy a szögösszeg minden gömbháromszögben nagyobb 180 foknál és kisebb $3 \times 180 = 540$ foknál.

Alakra nézve megkülönböztetjük:

1. *A derékszögü* háromszöget, melyben az oldalak által képezett szögek egyike 90 fokot mér.

2. *Negyedkörü* háromszöget, melynek minden oldala 90 foknyi körív.

3. *Ferdeszögü* gömbháromszöget, bármily méretü oldalakkal és szögekkel.

2. §. A gömbháromszögmértan alapegyenletei.

Legegyszerűbben találjuk a gömbháromszögmértan alapegyenleteit az épszögü és sarkponti összrendezők átalakitó egyenleteivel. Legyen 1. ábrában M valamely pont, melyet a közös kezdőpont körül (c) szöggel forditott és egyazon síkban fekvő két ZX és $Z_1 X_1$ derékszögü tengelyrendszerre vonatkoztatunk.

Akkor felirhatjuk a rajzban kimutatott jelölés alapján M pontnak összrendezőit következőkép:

$$[3] \quad \begin{aligned} X &= r \cos \alpha, \quad \text{valamint} \quad & X_1 &= r \cos \beta \\ Z &= r \sin \alpha, & Z_1 &= r \sin \beta \end{aligned}$$

A szögek összefüggése pedig ez:

$$\alpha = c + \beta, \quad \text{ezzel [3]-ból:}$$

$$X = r \cos(c + \beta) = r \cos c \cos \beta - r \sin c \sin \beta$$
$$Z = r \sin(c + \beta) = r \sin c \cos \beta + r \cos c \sin \beta$$

vagy X_1 és Z_1 értékét [3]-ból helyettesitve:

[4]
$$X = X_1 \cos c - Z_1 \sin c$$
$$Z = X_1 \sin c + Z_1 \cos c$$

Hasonlókép találunk:

[5]
$$X_1 = X \cos c + Z \sin c$$
$$Z_1 = Z \cos c - X \sin c$$

E két képletnek legáltalánosabb és a legkönnyebben megjegyezhető irásmódja ez:

[6]
$$\left\{\begin{array}{l} X = X_1 \cos X X_1 + Z_1 \cos X Z_1 \\ Z = X_1 \cos X_1 Z + Z_1 \cos Z_1 Z \\ \qquad\qquad \text{vagy} \\ X_1 = X \cos X X_1 + Z \cos X_1 Z \\ Z_1 = X \cos X Z_1 + Z \cos Z Z_1 \end{array}\right.$$

Feladatunk további megoldására vonatkoztatunk ezután a térben fekvő M pontot, l 2. ábrát, két XYZ és $X_1 Y_1 Z_1$ háromtengelyü rendszerre ama feltevés mellett, hogy Y tengely Y_1 tengelylyel, valamint O kezdőpontjuk is összeessék; X tengely X_1 tengelylyel pedig c szöget zárjon be.

Ha ez esetben középpontjával O pontba OM sugaru gömböt képzelünk és ezt $Z_1 OM$, ZOM, valamint ZOZ_1 pontokat magában foglaló síkokkal metszésre hozzuk, akkor a 2. ábrában bemutatott A, B, C gömbháromszög jön létre, melynek oldalait hasonlóképen mint sík háromszögeknél abc-vel fogjuk jelölni. Ha ugyan eme ábrában $OM = r$ a gömb sugarát, úgy az XY valamint $X_1 Y_1$ síkra is vetitjük, akkor tapasztaljuk, hogy $X_1 OM_3 = A$ szögnek a mértéke, $XOM = B_1 = (180 - B)$ szögnek a mértéke.

A 2. ábrából következik továbbá:

[7]
$$\left\{\begin{array}{l} X = r \sin a \cos B_1 \\ Z = r \cos a \\ Y = r \sin a \sin B_1 \end{array}\right.$$

[8]
$$\left\{\begin{array}{l} X_1 = r \sin b \cos A \\ Z_1 = r \cos b \\ Y_1 = r \sin b \sin A \end{array}\right.$$

A [4] egyenlet alapján irhatjuk:

$$[9] \quad \begin{cases} X = X_1 \cos c - Z_1 \sin c \\ Z = X_1 \sin c + Z_1 \cos c \end{cases}$$

feltevésünk szerint $Y = Y_1$.

A [9] egyenlet eredménye, ha [7]- és [8]-ból a megfelelő értéket vesszük:

$$[10] \quad \begin{cases} r \sin a \cos B_1 = r \sin b \cos A \cos c - r \cos b \cos c \\ r \cos a = r \sin b \cos A \sin c + r \cos b \cos c \\ r \sin a \sin B_1 = r \sin b \sin A \end{cases}$$

A [10] egyenletcsoport r-rel elosztható, ez pedig arról tanuskodik, hogy törvényünk független a sugár nagyságától, azaz minden gömbre érvényes.

Ha végtére tekintetbe vesszük azt, hogy

$B_1 = 180 - B$, azaz hogy
$\sin B_1 = \sin B$ és
$\cos B_1 = -\cos B$ akkor [10] egyenlet

igy irható:

$$[11] \quad \begin{cases} \sin a \cos B = \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A \\ \cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \\ \sin a \sin B = \sin b \cdot \sin A \end{cases}$$

E három egyenlet kifejezi a gömbháromszögmértan három legfontosabb tételét, melyből a többi mind átalakitás útján nyerhető.

Az utolsó egyenlet képviseli a gömbháromszögméréstanban a sinus-tételt, melyre betücsere által az alábbi három esetet igy irhatjuk fel:

$$[12] \quad \begin{cases} \sin a \sin B = \sin b \sin A \\ \sin a \sin C = \sin c \sin A \\ \sin b \sin C = \sin c \sin B \end{cases}$$

A [11] csoport második egyenlete képviseli a gömbháromszögméréstanban a Carnot-féle tantételt, mely betücsere által ismét három egyenletet ád.

$$[13] \quad \begin{cases} \cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \\ \cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B \\ \cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C \end{cases}$$

Elvégre a [11]-dik egyenletcsoport első egyenlete hat egyenletet ád.

$$
[14] \quad \begin{cases}
\sin a \cos B = \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A \\
\sin a \cos C = \cos c \sin b - \sin c \cos b \cos A \\
\sin b \cos A = \cos a \sin c - \sin a \cos c \cos B \\
\sin b \cos C = \cos c \sin a - \sin c \cos a \cos B \\
\sin c \cos A = \cos a \sin b - \sin a \cos b \cos C \\
\sin c \cos B = \cos b \sin a - \sin b \cos a \cos C
\end{cases}
$$

Ha a [14] csoport és a [12] csoport első egyenleteit osztás által egyesitjük:

$$
\begin{aligned}
&\sin a \cos B = \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A \\
&\sin a \sin B = \sin b \sin A \quad \text{következik:}
\end{aligned}
$$

$$
[15] \quad \begin{cases}
\sin A \operatorname{cotg} B = \operatorname{cotg} b \sin c \quad \cos c \cos A \quad \text{és betü-} \\
\quad \text{csere által:} \\
\sin A \operatorname{cotg} C = \operatorname{cotg} c \sin b - \cos b \cos A \\
\sin B \operatorname{cotg} A = \operatorname{cotg} a \sin c - \cos c \cos B \\
\sin B \operatorname{cotg} C = \operatorname{cotg} c \sin a - \cos a \cos B \\
\sin C \operatorname{cotg} A = \operatorname{cotg} a \sin b - \cos b \cos C \\
\sin C \operatorname{cotg} B = \operatorname{cotg} b \sin a - \cos a \cos C
\end{cases}
$$

A [15] egyenletcsoportnak utolsó egyenlete igy is irható:

$$
\sin C \cos B = \frac{\cos b \sin a \sin B}{\sin b} - \cos a \cos C \sin B
$$

És ha a [12] csoport első egyenletéből $\dfrac{\sin a \sin B}{\sin b} = \sin A$ kifejezzük és ide helyettesitjük, akkor

$$
\sin C \cos B = \cos b \sin A - \cos a \cos C \sin B
$$

mely egyenlet igy is irható:

$$
[16] \quad \begin{cases}
\sin A \cos b = \cos B \sin C + \sin B \cos C \cos a \\
\quad \text{és betücsere által:} \\
\sin A \cos c = \cos C \sin B + \sin C \cos B \cos a \\
\sin B \cos a = \cos A \sin C + \sin A \cos C \cos b \\
\sin B \cos c = \cos C \sin A + \sin C \cos A \cos b \\
\sin C \cos a = \cos A \sin B + \sin A \cos B \cos c \\
\sin C \cos b = \cos B \sin A + \sin B \cos A \cos c
\end{cases}
$$

A [16] egyenletcsoport megfelel a [14] csoportnak; a különbség az, hogy [16]-ban oldal áll, a hol a [14]-ben szög állott, és megforditva áll [16]-ban szög ott, hol [14]-ben oldal szerepelt.

Folytatólag a [16] csoport első egyenletét a [12]-dik egyenletcsoport első egyenletével elosztjuk:

$$
\sin A \cos b = \cos B \sin C + \sin B \cos C \cos a
$$

$\frac{\sin A \sin b}{\sin a} = \sin B$ ekkor alábbi csoportot nyerjük:

$$[17] \quad \begin{cases} \sin a \operatorname{cotg} b = \operatorname{cotg} B \sin C + \cos C \cos a \quad \text{és} \\ \sin a \operatorname{cotg} c = \operatorname{cotg} C \sin B + \cos B \cos a \\ \sin b \operatorname{cotg} a = \operatorname{cotg} A \sin C + \cos C \cos b \\ \sin b \operatorname{cotg} c = \operatorname{cotg} C \sin A + \cos A \cos b \\ \sin c \operatorname{cotg} a = \operatorname{cotg} A \sin B + \cos B \cos c \\ \sin c \operatorname{cotg} b = \operatorname{cotg} B \sin A + \cos A \cos c \end{cases}$$

A [17] csoport egyenletei azon háromszögnek a meghatározói, mely mint poláros háromszög tartozik a [15] egyenletcsoport által meghatározott háromszöghez.

Ha továbbá a [16]-dik egyenletcsoportnak az első és harmadik egyenletét következőkép feloldjuk:

$$\cos B \sin C = \cos b \sin A - \sin B \cos C \cos a$$
$$\cos A \sin C = \cos a \sin B - \sin A \cos C \cos b$$

Folytatólag szorozzuk e két egyenletet $\sin C$-vel:

$$[18] \quad \begin{cases} \cos B \sin C^2 = \cos b \sin A \sin C - \sin B \cos C \sin C \cos a \\ \cos A \sin C^2 = \cos a \sin B \sin C - \sin A \cos C \sin C \cos b \end{cases}$$

Ez egyenletek elseje igy is irható:

$$\cos b \sin A \sin C = \cos B \sin C^2 + \sin B \cos C \sin C \cos a$$

Ha az utóbbi egyenletet a [18]-dik csoport második egyenletébe helyettesitjük, igy lesz:

$$\cos A \sin C^2 = \cos a \sin C \sin B - \cos C \cos B \sin C^2 - \\ - \sin B \sin C \cos C^2 \cos a$$

Ezt az egyenletet osztjuk most $\sin C^2$-tel:

$$\cos A = \frac{\cos a \sin B}{\sin C} - \cos C \cos B - \frac{\sin B \cos a}{\sin C} (1 - \sin C^2)$$

Ez egyenlet redukált értéke:

$$[19] \quad \begin{cases} \cos A = \sin B \sin C \cos a - \cos B \cos C \\ \cos B = \sin A \sin C \cos b - \cos A \cos C \\ \cos C = \sin A \sin B \cos c - \cos A \cos B \end{cases}$$

Mely csoport [13]-dik csoportok ellentétes egyenleteit tünteti ki.

3. §. A derékszögü gömbháromszög egyenletei.

Ha a [12]-dik egyenletcsoportban $A = 90$ foknyi szöget jelent, akkor következik az első és második egyenletből:

$$[20] \quad \begin{cases} \sin B = \dfrac{\sin b}{\sin a} \\ \sin C = \dfrac{\sin c}{\sin a} \end{cases}$$

Szóval a két ismeretlen B és C a háromszögnek vele szemközt fekvő oldalával és az átfogóval van itt kifejezve.

A [13]-dik egyenletcsoport első egyenletéből következik $A = 90$ fokra:

$$[21] \quad \cos a = \cos b \cos c$$

Tehát egy oldal a gömbháromszög két oldalával van kifejezve. Ez egyszersmind a Pytagoras-féle tétel pótlója a gömbháromszögnél.

A [14]-dik egyenletcsoportnak 3-dik és 6-dik egyenletéből következik, ha ebben $A = 90^0$, azaz $\cos 90^0 = \cos A = 0$.

$$[22] \quad \begin{cases} \cos B = \dfrac{\text{tg}\, c}{\text{tg}\, a} \\ \cos C = \dfrac{\text{tg}\, b}{\text{tg}\, a} \end{cases}$$

A gömbháromszögnek két hegyesszöge a szögeket két közbe fogó oldalakkal van kifejezve.

Ha végtére a [15]-dik egyenletcsoportnak első és második egyenletében $A = 90$-ben, azaz $\sin A = 1$; $\cos A = 0$ irunk, akkor ered:

$$[23] \quad \begin{cases} \text{tang}\, B = \dfrac{\text{tg}\, b}{\sin c} \\ \text{tang}\, C = \dfrac{\text{tg}\, c}{\sin b} \end{cases}$$

Szóval a 23 egyenletek adják a gömbháromszögnek két ismeretlen hegyesszögét a velük szemközt fekvő és rajtuk fekvő befogó oldalak osztatával.

4. §. Az alapegyenletek átalakitása.

A 2. §-ban leszármaztattuk a gömbméréstannak alapegyenleteit; ezekkel ki lehet ugyan mindent számitani, de hogy a számitást kényelmesebbé tegyük, valamint hogy egyes megoldásokra az eredményt kevesebb munkával biztositsuk, átalakitjuk első sorban a 13 csoport egyenleteit.

Ugyanis:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A.$$

Ebből:

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}; \quad \text{és}$$

$$1 = 1$$

segitségével áttérünk következő két egyenletre:

$$\frac{1 + \cos A}{2} = \frac{\cos a - (\cos b \cos c - \sin b \sin c)}{2 \sin b \sin c}$$

$$\frac{1 - \cos A}{2} = \frac{\cos b \cos c + \sin b \sin c - \cos a}{2 \sin b \sin c}$$

A goniometriából ismeretes, hogy $\frac{1 + \cos A}{2} = \left(\cos \frac{A}{2}\right)^2$ $\frac{1 - \cos A}{2} = \left(\sin \frac{A}{2}\right)^2$ Igy irhatjuk az előbbi két egyenletet:

$$\left(\cos \frac{A}{2}\right)^2 = \frac{\cos a - \cos (b + c)}{2 \sin b \sin c} \quad \text{és}$$

$$\left(\sin \frac{A}{2}\right)^2 = \frac{\cos (b - c) - \cos a}{2 \sin b \sin c}$$

A jobb oldal számlálója különbzet, melyet a következő általános goniometriai egyenlet szerint változtatjuk át szorzattá:

$$\cos Y - \cos X = 2 \sin \frac{X + Y}{2} \sin \frac{X - Y}{2}$$

Ha továbbá a három $a\,b\,c$ oldalnak összegét $2S$-el jelöljük. Igy $2S = a + b + c$. Ezek helyettesitésével találjuk:

$$\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin s \sin (s - a)}{\sin b \sin c}}$$

$$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin (s - b) \sin (s - c)}{\sin b \sin c}}$$

Úgy hogy eme minta szerint betűcsere segitségével alábbi csoportra jutunk:

$$[24] \quad \left\{ \begin{aligned} \sin \frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{\sin (s - b) \sin (s - c)}{\sin b \sin c}} \\ \sin \frac{B}{2} &= \sqrt{\frac{\sin (s - a) \sin (s - c)}{\sin a \sin c}} \\ \sin \frac{C}{2} &= \sqrt{\frac{\sin (s - a) \sin (s - b)}{\sin a \sin b}} \end{aligned} \right.$$

$$[25] \quad \begin{cases} \cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin s \sin (s-a)}{\sin b \sin c}} \\ \cos \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{\sin s \sin (s-b)}{\sin a \sin c}} \\ \cos \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{\sin s \sin (s-c)}{\sin a \sin b}} \end{cases}$$

És végtére a [24] és [25] egyenletcsoport elosztása által ered mint legelőnyesebb egyenlet a [26] csoport:

$$[26] \quad \begin{cases} \operatorname{tg} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin (s-b) \sin (s-c)}{\sin s \sin (s-a)}} \\ \operatorname{tg} \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{\sin (s-a) \sin (s-c)}{\sin s \sin (s-b)}} \\ \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{\sin (s-a) \sin (s-b)}{\sin s \sin (s-c)}} \end{cases}$$

Ha a gömbháromszögnek három oldala ismeretes és ezekkel mind a három szöget akarjuk kiszámitani, akkor eljárásunk a következő: először kiszámitjuk $s = \frac{a+b+c}{2}$, aztán $s - a$, $s - b$ és $s - c$ értékét; folytatólag kiszámitjuk K értékét:

$$K = \sqrt{\frac{\sin (s-a) \sin (s-b) \sin (s-c)}{\sin s}}$$

ezekkel pedig:

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{K}{\sin (s-a)}; \qquad \operatorname{tg} \frac{B}{2} = \frac{K}{\sin (s-b)};$$

$$\operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{K}{\sin (s-c)};$$

Ugyancsak az előbbi átalakitást alkalmazzuk a [19] egyenletcsoport bármely egyenletére:

$$\cos a = \frac{\cos B \cos C + \cos A}{\sin B \sin C}$$

$$1 = 1$$

Ha e két egyenletet egyszer összeadás, másszor levonás által összekötjük, következik:

$$\frac{1 - \cos a}{2} = \frac{-\cos (B + C) - \cos A}{2 \sin B \sin C}$$

$$\frac{1 + \cos a}{2} = \frac{\cos A + \cos (B - C)}{2 \sin B \sin C}$$

Ha úgy mint azelőtt, most $A+B+C=2S$-sel jelöljük. és a szögfüggvények összegeiből és különbzeteiből szorzatokra térünk át, akkor ugyanama általános képleg alapján mint a megelőző példában:

$$\sin\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{-\cos S\cos(S-A)}{\sin B\sin C}}$$

$$\cos\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{\cos(S-B)\cos(S-C)}{\sin B\sin C}}$$

Ha tehát ezt a képleget mind a három oldalra felirjuk, mi egyszerü betücsere által lehetséges igy:

$$[27]\quad\left\{\begin{aligned}\sin\frac{a}{2}&=\sqrt{\frac{-\cos S\cos(S-A)}{\sin B\sin C}}\\ \sin\frac{b}{2}&=\sqrt{\frac{-\cos S\cos(S-B)}{\sin A\sin C}}\\ \sin\frac{c}{2}&=\sqrt{\frac{-\cos S\cos(S-C)}{\sin A\sin B}}\end{aligned}\right.$$

$$[28]\quad\left\{\begin{aligned}\cos\frac{a}{2}&=\sqrt{\frac{\cos(S-B)\cos(S-C)}{\sin B\sin C}}\\ \cos\frac{b}{2}&=\sqrt{\frac{\cos(S-A)\cos(S-B)}{\sin A\sin C}}\\ \cos\frac{c}{2}&=\sqrt{\frac{\cos(S-A)\cos(S-B)}{\sin A\sin B}}\end{aligned}\right.$$

E két egyenletcsoport elosztása által következik:

$$[29]\quad\left\{\begin{aligned}\operatorname{tang}\frac{a}{2}&=\sqrt{\frac{\cos S\cos(S-A)}{\cos(S-B)\cos(S-C)}}\\ \operatorname{tang}\frac{b}{2}&=\sqrt{\frac{-\cos S\cos(S-B)}{\cos(S-A)\cos(S-C)}}\\ \operatorname{tang}\frac{c}{2}&=\sqrt{\frac{-\cos S\cos(S-C)}{\cos(S-A)\cos(S-B)}}\end{aligned}\right.$$

A [27] és [29] egyenletcsoport értéke imaginär értékünek látszik lenni, mert $\cos S$-nek előjele (—). De a mint ezt 1. §. végén igazoltuk, igy $A+B+C$ szögösszeg mindig nagyobb 180-nál és kisebb $3\times180=540$ foknál. Ebből azonban következik, hogy $\frac{A+B+C}{2}=S>90$ foknál és kisebb 270 foknál.

Igy tehát S mindig olyan szögérték, mely a második vagy a harmadik körnegyedbe esik, cosinusa tehát minus előjelű, (—) × (—)-sal pedig (+) ád. Szóval nem létezik eset, hogy imaginär értékkel lehetne dolgunk, ha a függvény sajátos előjelét is tekintetbe vesszük.

5. §. A Gauss-féle egyenletek.

A goniometriából tudjuk, hogy:

$$[30] \quad \begin{cases} \sin \dfrac{A \pm B}{2} = \sin \dfrac{A}{2} \cos \dfrac{B}{2} \pm \cos \dfrac{A}{2} \sin \dfrac{B}{2} \\[2ex] \cos \dfrac{A \pm B}{2} = \cos \dfrac{A}{2} \cos \dfrac{B}{2} \mp \sin \dfrac{A}{2} \sin \dfrac{B}{2} \end{cases}$$

Ha a [30]-as számu egyenletekben először csak az első egyenletnek előjeleit egyenkint vesszük tekintetbe és mind a két egyenletet $\cos \frac{C}{2}$-vel elosztjuk, akkor találjuk a [24] és [25] egyenletcsoportok helyettesitése segitségével:

$$[31] \quad \begin{cases} \dfrac{\sin \dfrac{A+B}{2}}{\cos \dfrac{C}{2}} = \dfrac{\sin (s-b) + \sin (s-a)}{\sin c} \\[4ex] \dfrac{\sin \dfrac{A-B}{1}}{\cos \dfrac{C}{2}} = \dfrac{\sin (s-b) - \sin (s-a)}{\sin c} \end{cases}$$

Folytatólag átváltoztatjuk [31] egyenleteknek jobb oldalu értékét a következőkép:

$s - b = x$; $s - a = y$-nak irható, ezzel:

$\sin (s-b) + \sin (s-a) = \sin X + \sin Y$ mi továbbá igy is fejezhető ki:

$$\sin X + \sin Y = 2 \sin \frac{X+Y}{2} \cos \frac{X-Y}{2}$$

A [24] és [25] egyenletek leszármaztatása alkalmával felételeztünk, hogy $s = \dfrac{a+b+c}{2}$.

Ezzel, valamint a fennebbi feltevéssel

$\left.\begin{matrix} X = s - b \\ Y = s - a \end{matrix}\right\}$ lesz: $\dfrac{X+Y}{2} = s - \dfrac{a+b}{2}$ vagy

$$\frac{a+b+c}{2} = \frac{a+b}{2} = \frac{c}{2}$$

Hasonlókép $$\frac{X-Y}{2} = \frac{a-b}{2}$$

Igy a [31] egyenletcsoportnak elsejét igy irhatjuk. ha nevezőjében $\sin c = 2 \sin \frac{c}{2} \cos \frac{c}{2}$ helyettesitjük.

$$\frac{\sin \frac{A+B}{2}}{\cos \frac{C}{2}} = \frac{2 \sin \frac{c}{2} \cos \frac{a-b}{2}}{2 \sin \frac{c}{2} \cos \frac{c}{2}}$$ vagy rövidítése után:

$$[32] \qquad \frac{\sin \frac{A+B}{2}}{\cos \frac{C}{2}} = \frac{\sin \frac{a-b}{2}}{\cos \frac{c}{2}}$$

Ez Gauss egyik egyenlősége.

A bemutatott átalakitással még három egyenletet találunk, úgymint:

$$[33] \qquad \begin{cases} \dfrac{\sin \frac{A-B}{2}}{\cos \frac{C}{2}} = \dfrac{\sin \frac{a-b}{2}}{\sin \frac{c}{2}} \\[2ex] \dfrac{\cos \frac{A+B}{2}}{\sin \frac{C}{2}} = \dfrac{\cos \frac{a+b}{2}}{\cos \frac{c}{2}} \\[2ex] \dfrac{\cos \frac{A-B}{2}}{\sin \frac{C}{2}} = \dfrac{\sin \frac{a+b}{2}}{\sin \frac{c}{2}} \end{cases}$$

Gauss egyenleteit felirhatjuk könnyen, ha megtartjuk azt, hogy az egyenlet bal oldalán két szögnek a fél összege vagy fél különbzete áll a számlálóban és pedig egyszer a sinus, máskor a cosinus függvény által kifejezve. A nevezőt mindig a harmadik szögnek a fele képezi, mely a számlálónak complementär szögfüggvénye által van kifejezve. Az egyenlet jobb oldala szinte tört, melynek számlálóját a baloldali szögekkel szemben fekvő fél oldalakkal alkotjuk, nevezőjét pedig a harmadik oldalnak a fele adja. A szögfüggvény, melyet a jobb oldal kifejezésére használunk, számlálóban és nevezőben mindig ugyanaz. És arra nézve, vajjon sinus vagy cosinus, valamint összeg vagy különbzet alkalmazandó-e az egyenlet bal oldalán, következő a szabály:

Ha a baloldal számlálójában (+) jelet irtunk, akkor jobboldalán (cos) irandó;
» » » (—) » » » » (sin) »
» » » (sin) a függvény, » » (—) álljon;
» » » (cos) » » » (+) »

6. §. A Neper-féle egyenlőségek.

A [32] és [33] egyenletek még igy is hozhatók összeköttetésbe, hogy [32] [33]-nak második egyenletével és [33]-nak elsejét ugyan-e csoport egyenletével elosztjuk.

Igy származik:

$$[34]\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\operatorname{tang}\frac{A+B}{2}}{\operatorname{cotg}\frac{C}{2}} &= \frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}} \quad \text{és} \\ \frac{\operatorname{tang}\frac{A-B}{2}}{\operatorname{cotg}\frac{C}{2}} &= \frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}} \end{aligned}\right.$$

Két uj egyenlet az eredmény, ha [33]-ból 1-et, [32]-vel és [33]-ból 3-mat 2-vel elosztjuk.

$$[35]\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\operatorname{tg}\frac{a-b}{2}}{\operatorname{tg}\frac{c}{2}} &= \frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{A+B}{2}} \\ \frac{\operatorname{tg}\frac{a+b}{2}}{\operatorname{tg}\frac{c}{2}} &= \frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}} \end{aligned}\right.$$

Neper egyenletei előnyösen adják a gömbháromszög ismeretlen elemeit; ha ennek két oldala és a közbezárt szög van adva, vagy akkor is, ha egy oldal és a rajta fekvő két szöge ismeretes.

7. §. A gömbháromszög szögtöbblete.

Az 1. §. fejtegetéséből tapasztaltuk, hogy minden gömbháromszögben a szögek összege nagyobb 180 foknál; ezt a gömbalakból származó szögtöbbletet szögfölösségnek nevezzük. A menynyiségtani irodalomban ε-val jelölik. Ha tehát a gömbháromszögnek három szögeit A-, B- és C-vel jelöljük, akkor a szögfölösszeg közvetetlen kiszámitására csakis az alábbi egyenletet használhatjuk:

[36] $$\varepsilon = A + B + C - 180.$$

Szabatosabb meghatározások czéljából a földmérő minden háromszögben, ha csak lehet, mind a három szöget szokta megmérni, de azért a [36]-dik egyenletet még sem használhatja háromszögeléseinek birálatára vagy hibaigazitásaira. Ugyanis minden megmért szög, még a legpontosabb is, apró és elkerülhetetlen forrásokból származó hibával van terhelve, igy a három nem egészen biztos szögeredménynyel nem lehet a szögfölösség helyes értékét találni. Onnan van, hogy a földmérő a szögfölösség számértékét rendszerint a háromszög oldalhosszúságaival számitja ki. Ez teszi szükségessé, hogy még az alábbi egyenleteket ismertessük.

A gömbalak okozta szögtöbblet kifejezése, ha két a és b oldalt és a közbezárt C szöget ismerjük.

Gauss két egyenlete, l. [32]- és [33]-át, igy áll:

$$\sin \frac{A+B}{2} = \frac{\cos \frac{a-b}{2}}{\cos \frac{c}{2}} \cos \frac{C}{2}$$

$$\cos \frac{A+B}{2} = \frac{\cos \frac{a+b}{2}}{\cos \frac{c}{2}} \sin \frac{C}{2}$$

Ha az első egyenletet $\cos \frac{C}{2}$-vel, a másodikat sinus $\frac{C}{2}$-vel szorozzuk, lesz:

$$\sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{C}{2} = \frac{\cos \frac{a-b}{2}}{\cos \frac{c}{2}} \cos \frac{C^2}{2}$$

$$\cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{C}{2} = \frac{\cos \frac{a+b}{2}}{\cos \frac{c}{2}} \sin \frac{C^2}{2}$$

E két egyenlet összege, ha az egyenlet jobb oldalán $\cos\frac{a-b}{2}$-et és $\cos\frac{a+b}{2}$-et kifejtjük.

$$[37]\quad \sin\frac{A+B+C}{2}=\frac{\cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{c}{2}}\left[\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}+\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\right]+$$

$$+\frac{\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{c}{2}}\left[\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}-\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\right]$$

A [36] egyenlet nyomán $A+B+C=180+\varepsilon$, tehát $\frac{A+B+C}{2}=90+\frac{\varepsilon}{2}$ vagy $\sin\frac{A+B+C}{2}=\cos\frac{\varepsilon}{2}$. Utóbbi adattal és [37] egyenlet kellő átalakitása után:

$$[38]\quad \cos\frac{a}{2}=\frac{\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}+\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\cos C}{\cos\frac{c}{2}}$$

ε *szögtöbblet értekét a sinus függvénynyel fejezzük ki,* ha a Gauss-féle egyenletek elsejét $\sin\frac{C}{2}$-vel, másodikát $\cos\frac{C}{2}$-vel szorozzuk.

$$\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{C}{2}=\frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}\cos\frac{C}{2}\sin\frac{C}{2}$$

$$\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{C}{2}=\frac{\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}\cos\frac{C}{2}\sin\frac{C}{2}$$

Ezekből következik összeadás útján, ha röviditjük:

$$\cos\frac{A+B+C}{2}=\frac{\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{c}{2}}\left[\cos\frac{a+b}{2}-\cos\frac{a-b}{2}\right]$$

vagy

$$[39] \qquad \sin \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\sin \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2} \sin C}{\cos \frac{c}{2}}$$

Legczélszerűbben kifejezzük a szögfölösséget a tang. függvénynyel, mely czélból a [39] egyenletet [38]-al elosztjuk.

$$[40] \qquad \operatorname{tang} \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\sin \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2} \sin C}{\cos \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} + \sin \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2} \cos C}$$

A gömbháromszögnek szögfölösségét mind a három oldal hosszúságából Huillier igy számitja ki:

A [32] egyenletet összeköti $1 = 1$ egyenlettel először levonás, azután összeadás által. Igy ered:

$$\frac{\sin \frac{A+B}{2} - \cos \frac{C}{2}}{\cos \frac{C}{2}} = \frac{\cos \frac{a-b}{2} - \cos \frac{c}{2}}{\cos \frac{c}{2}} \quad \text{és}$$

$$\frac{\sin \frac{A+B}{2} + \cos \frac{C}{2}}{\cos \frac{C}{2}} = \frac{\cos \frac{a-b}{2} + \cos \frac{c}{2}}{\cos \frac{c}{2}}$$

mely egyenletek osztata:

$$[41] \qquad \frac{\sin \frac{A+B}{2} - \cos \frac{C}{2}}{\sin \frac{A+B}{2} + \cos \frac{C}{2}} = \frac{\cos \frac{a-b}{2} - \cos \frac{c}{2}}{\cos \frac{a-b}{2} + \cos \frac{c}{2}}$$

Folytatólag tekintetbe veendő, hogy $\cos \frac{C}{2} = \sin \frac{180 - C}{2}$ nemkülönben hogy $s = \frac{a+b+c}{2}$ és végtére ha a [41] egyenletnek úgy számlálóit, valamint nevezőit is szorzatokká változtatjuk át, akkor:

$$[42] \qquad \operatorname{tg} \frac{\varepsilon}{4} \cdot \operatorname{cotg} \frac{1}{4}(A+B-C+180) = \operatorname{tg} \frac{s-a}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{s-b}{2}$$

Más egyenletet nyerünk, ha $1 = 1$ egyenletből először a [33] csoport 2-dik egyenletét levonjuk, azután hozzáadjuk és az igy talált egyenletek osztatát felirjuk.

$$\frac{\sin\frac{C}{2} - \cos\frac{A+B}{2}}{\sin\frac{C}{2} - \cos\frac{A+B}{2}} = \frac{\cos\frac{c}{2} - \cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{c}{2} + \cos\frac{a+b}{2}}$$

Ez esetben $\sin\frac{C}{2} = \cos\frac{180-C}{2}$ valamint $s = \frac{a+b+c}{2}$ értékét tekintetbe véve találtatik mint eredmény:

$$[43] \quad \operatorname{tg}\frac{1}{4}\varepsilon \,.\, \operatorname{tg}\frac{1}{4}(A+B-C+180) = \operatorname{tg}\frac{s}{2} \,.\, \operatorname{tg}\frac{s-c}{2}$$

A [42] és [43] egyenlet szorozmánya:

$$\operatorname{tg}\frac{1}{4}\varepsilon^2 = \operatorname{tg}\frac{s}{2} \,.\, \operatorname{tg}\frac{s-a}{2} \,.\, \operatorname{tg}\frac{s-b}{2} \,.\, \operatorname{tg}\frac{s-c}{2}$$

Innen ε szögfölösség első hatványa:

$$[44] \quad \operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{4} = \sqrt{\operatorname{tg}\frac{s}{2} \,.\, \operatorname{tg}\frac{s-a}{2} \,.\, \operatorname{tg}\frac{s-b}{2} \,.\, \operatorname{tg}\frac{s-c}{2}}$$

8. §. A földmérő legkisebb gömbháromszöge.

Hogy ε szögfölösség számértékeiről fogalmat nyerjünk, kiszámitjuk ezt néhány egyenlő oldalu gömbháromszögre.

Ha [44] egyenletben $s = \frac{a+b+c}{2}$ és $a = b = c$, akkor

$$\frac{s}{2} = \frac{3a}{4}\,;\; \frac{s-a}{2} = \frac{s-b}{2} = \frac{s-c}{2} = \frac{a}{4}$$

Mi alapon

$$[45] \quad \operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{4} = \sqrt{\operatorname{tg}\frac{3}{4}a \,.\, \operatorname{tg}\frac{a^3}{4}}$$

Az [45] egyenletbe helyettesitjük a értékét a következő számokkal:

$a = 15$	földrajzi mértföld	$= 1^0$,	ekkor	$\varepsilon = 27{\cdot}2''$
$a = 10$	„ „	$= 40'$	„	$\varepsilon = 12{\cdot}1''$
$a = 5$	„ „	$= 20'$	„	$\varepsilon = 3''$
$a = 1$	„ „	$= 4'$	„	$\varepsilon = 0{\cdot}12''$

E számok igazolják a gyakorló mérnöknek azt a szokását, hogy a föld felszinén bemért háromszöget síknak tekinti, ha oldalai $1\,{}^1\!/_2$ mértföld, vagy 25 kilométernél rövidebbek. Mert ekkor ε kisebb $1''$-nél, úgy hogy az egyes szögadatot legalább ${}^1\!/_3''$-ig biztosan kellene ismerni, a mi a legjobb mérés kiigazitott szögadataival is alig érhető el.

A gömbalak okozta szögfölösséget a gyakorlatban mindig oly képletből számitjuk, melybe az oldalhosszak közvetetlenül behelyettesithetők. Ily czélból kiindulunk a tangensfüggvény sorozatából:

[46] $$\operatorname{tg} X = X + \frac{1}{3} X^3 + \frac{2}{15} X^5 + \ldots$$

Megjegyzendő azonban, hogy X alatt mindig a sugáregységre viszonyitott ívhosszat kell érteni. Ha tehát X a Föld felszinén lett megmérve, akkor ezt még a Földnek $r = 6{,}366{,}738$ m-nyi sugarával kell elosztani.

Onnan van, hogy a [44]-dik egyenletben bemutatott Huillier-féle egyenletet még igy is átalakithatjuk: $\operatorname{tg} \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon''}{4} \cdot \operatorname{tg} 1''$, ha ε apró értékét vesszük tekintetbe.

Hasonlókép irható 46 sorozat nyomán X helyett $\frac{s}{2r}$ $\frac{s-a}{2r}$, $\frac{s-b}{2r}$ és $\frac{s-c}{2r}$.

Ha tehát ezeket a [44]-dik egyenletbe helyettesitjük, igy ezt az alakot veszi fel:

$$\frac{\varepsilon''}{4} \operatorname{tg} 1'' = \sqrt{\frac{s}{2r} \cdot \frac{s-a}{2r} \cdot \frac{s-b}{2r} \cdot \frac{s-c}{2r}}$$

vagy

$$\varepsilon'' = \frac{1}{r^2 \operatorname{tg} 1''} \sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}$$

De minthogy $\sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)} = t$ nem más, mint a szóban forgó háromszögnek a területe, igy végeredményünk következőleg irható:

[47] $$\varepsilon'' = \frac{t}{r^2 \operatorname{tg} 1''}$$

hol tang $1'' = 0{\cdot}0000048481$-al veendő.

MÁSODIK SZAKASZ.

Földabroszok szerkesztése.

9. §. Földabroszok kellékei.

Jó földabrosznak első kelléke, hogy a Földfelületünknek mértanilag arányos és hű rajza legyen. Föltevésünk kielégitése azonban nagy nehézségekbe ütközik, mert Földünk alakja gömb, és mert a gömb felületét sik lapra oly módon vetiteni nem lehet, hogy vagy vonalainak hosszúságai, vagy ezeknek közbezárt szögei eltorzitást ne szenvedjenek. Az pedig lehetetlen, hogy a gömb felületét a sikba közvetetlenül kiteritsük. Igy önként belátható, hogy földabroszaink a Föld felületét, esetleg ennek kisebb-nagyobb részét mértanilag hiven csak korlátolt határig pótolhatják.

10. §. Szerkesztésük alapelvei.

Földabroszaink könnyü és biztos megrajzolására segitő eszközül vonalrendszert használunk, az úgynevezett abrosz- vagy fokhálót. A fokháló vonalai rajzainkon a gömbfelületen képzelt délköröket és egyenlőközüket képviselik. Ha azokat megszerkesztettük, minden egyes hálórészbe a Földfelületen bemért pontok könnyen berajzolhatók földrajzi szélességük és földrajzi hosszúságuk segitségével. Bemért vonalukat úgy találjuk, hogy a jellemző pontokat megfelelően összekötjük. A városok, helységek, folyók, tengerek, hegyek, utak és határvonalak ily módon ábrázoltatnak földabroszainkon.

Feladatunk fontosabb része e szerint mindig a fokháló szerkesztése, mi elvi szempontból két módon foganatosítható.

1. Az egyik eljárás lényege abban áll, hogy a Földgömböt amúgy vetitjük a rajzsikra, a mint ez határozott pontból megtekintve mutatkoznék, ha átlátszó lenne, rajzsikunk pedig határozott helyzetet foglalna el. Tárgyalásaink során fogjuk tapasztalni, hogy az igy készitett abroszok czentrál projectiók, melyek mértani szerkezete a rajzsik és a szempont változtatott fekvése szerint módosul. A következőkben csakis az alkalmazott eljárásokat ismertetjük.

2. A földabroszok második rajzolásmódjánál a Földfelületen képzelt fokhálót lefejthető görbe lapra vetitjük; pl. hengerre vagy kúplapra. melyet valamely alkotó vonala szerint felvágunk és a rajzsíkba kiteritjük. Az ily módon készitett földabrosznak legöngyölithető vetület a neve. A lefejthető vetületek ugyancsak különféle módositásokkal szerkeszthetők. Tárgyalásaink során csakis a tényleg használt eljárásokra szoritkozunk. E két eljárást összehasonlitva, arról győződünk meg, hogy a czentrál projectió pontossága kisebb a lefejthető vetületek pontosságánál, de elvitázhatatlan előnye abban áll, hogy nagy földfelületek képeire igen alkalmas, a mennyiben a szemlélő Földünk gömbalakját igy könynyebben elképzelheti.

Onnan van, hogy a fél Földgömb abroszát rendszerint czentrál vetülettel mutatjuk be. Lefejthető vetületeket inkább egyes világrészek, országok, megyék, vagy még ennél is kisebb területek térképeire használjuk. A czentrál-vetület e szerint természetes átnézeti földabroszt biztosit, azonban rajta nehéz több pontnak a kölcsönös távolságát meghatározni, minthogy távolságai, valamint szögei is eltorzulnak. Ezek csakis hosszabb redukálás után kideríthetők. Ellenben lefejthető vetülettel a távolság- vagy esetleg szögnek közvetetlen lemérése biztositható.

11. §. Czentrál vetületek.

A szempont változtatott fekvése szerint megkülönböztetünk három vetületmódot, úgymint:

1. A steriographi vetület, ha a szempont a Földfelület valamely pontjában fekszik.

2. A merőleges vetület, ha a szempontot véghetetlen távolságra fektetjük a Föld középpontjától.

3. A földközponti vetület, midőn a szemlélő álláspontját a Föld középpontjába telepitjük.

A rajzsík és Földünk forgástengelyének egymáshoz való fekvése változtatja a Földfelületen képzelt fokkálónak a képét az elsorolt vetületmódok mindegyikére. Onnan van, hogy mind a három vetületmódra három-három módositást emlithetünk. T. i. a rajzsík Földünk forgástengelyével 90 foknyi, 0 foknyi, vagy bármely más szöget zárhat be. Más szóval rajzsíkunk egyenlőközüen haladhat Földünk egyenlitőkörével, egyenlőközüen valamely pontnak délkörével, vagy egyenlőközüen valamely pontnak szintkörével is. Ily alapon megkülönböztetjük a fokhálónak 1. az egyenlitőre, 2. a délkörre, 3. a szintkörre vetitett képét. Gyakorlati követeléseinknek azonban csakis oly vetületmódokkal felelhetünk meg, melyek a fokháló képét lehetőleg hiven adják, és melyek vonalzóval vagy körzővel megrajzolhatók. Ez oknál fogva a czentrál vetületek sorából földiróink mai nap csakis a stereographiai vetületeket alkalmazzák, úgy hogy bővebben csak ezeket tárgyaljuk.

12. §. Stereographiai vetület a sarkpontból.

Ha a szempontot Földünk egyik sarkpontjába telepitjük, rajzsikul az egyenlitőt használjuk, akkor létesül ez a Földabrosz. A délkörök képei ez esetben egyenes vonalak, melyek mindannyi a Föld sarkát és ezzel a szempontot foglalják magukban. Minden egyenlőközü kör képe körvonal, közös középpontjuk ama sarkpont képe, mely szemközt fekszik a szemponttal.

Az egyenlőközü körnek vetülete.

E körök vetitését a 3. ábrából látjuk. Ugyanis Földünknek $EP_1 M_1 P_2$ metszetéből, mely délkörnek a sikját foglalja magában. E metszetben látható Földünk P_1 és P_2 sarkpontja, C középpontja, EE_1 egyenlitő sikja. Utóbbit rajzsikul használjuk. MM_1 valamely egyenlőközü kör, fekvése a Fölegömbön φ földrajzi szélesség által van meghatározva. MM_1 egyenlőközü körnek czentrál vetületét EE_1 rajzsikra úgy találjuk, hogy P_1 sarkpontból, hová a szempontot telepitettük, MM_1 körnek minden pontjához látósugarat inditunk és ezekkel EE_1 rajzsikot metszük. Vetitősugaraink ez esetben merőleges tengelyü körkúpot alkotnak, mely kúp rajzsikunkat egyenlőközüen metszi köralaku vezérvonalával. Igy tehát bizonyos, hogy GI metszővonala ugyancsak körvonal, és hogy e körnek $r = GC$ a sugárhossza, melylyel megrajzolható.

3. ábrából következik $r = GC = P_1 C \operatorname{tg} u$; $P_1 C = R$, azaz Földünk sugárhosszával, $u = \frac{90 - \varphi}{2} = 45 - \frac{\varphi}{2}$; mint kerületi szöge $(90 - \varphi)$ központi szögnek. Innen:

$$[48] \qquad r = R \operatorname{tang}\left(45 - \frac{\varphi}{2}\right)$$

Ezzel bármely egyenlőközü kör megrajzolására a szükséges r sugár kiszámitható.

E földabrosz szerkesztése.

A háló megrajzolására kitüntetjük legelőször az egyenlitő képét Földünk megfelelően kisebbitett R sugárhosszával, l. 4. ábrát. Ezzel rajzoljuk e vetület szegélyvonalát. Folytatólag felosztjuk eme kört akkora alrészekre, a mekkorákkal a fokhálót bemutatni akarjuk: pl. 15, 10 vagy 5 foknyi ívekre. Egyszerűség kedveért 4 ábrában 15 fokyira szabtuk az osztórészt. Ez osztó pontokhoz irjuk a felosztás megfelelő számait; a szabadon választott nulláspontból, jobbra és balra indulva, nulla foktól 180 fokig. Mert a földrajzi hosszúságot úgy keletnek, valamint nyugatnak is nullától 180 fokig számitjuk.

Ezután kimutatjuk ugyanez osztópontok segitségével az egyenlőközü köröknek megfelelő sugárhosszúságait. E czélból összekötünk, l. 4. ábrát, 0 foktól 90 fokig minden osztópontot a 180 fokkal jelölt osztóponttal, egyenes vonalu vetitősugár segitségével. E sugarakkal metszük a 90, 90 osztópontoknak átmérőjét. Igy találjuk $cdefg$ pontokban azokat, melyekig Q középpontból a körzőt beállitani kell, ha ezzel a felosztásnak megfelelő egyenlőközüket megrajzolni akarjuk.

Az egyenlőközü körök megrajzolása után ráirjuk földrajzi szélességüket. E jelzőszámot oda szoktuk irni, hol e körök a nullával jelölt kezdő déllőt metszik, l. 4. ábrát. A földrajzi szélességet az egyenlitőtől a sarkpontig számitjuk, tehát 0 foktól 90 fokig. Az északi félgömbön (+), a déli félgömbön (—) az előjele.

A délköri képeket ezután egyenesekkel úgy tüntetjük ki, hogy az egyenlitőnek minden osztópontját, l. 4. ábrában, a Q-val jelölt sarkponttal kötjük össze. Az egyenest azonban csakis a legk sebb egyenlőközü körig húzzuk ki.

A sarkponti vetületmóddal rendszerint Földünk déli és északi felét mutatjuk be, vagy alkalmazzuk csillagászati abroszokra is az északi és déli csillagos ég ábrázolására. Főelőnye az, hogy a sarkponttól az egyenlitőig a félgömbnek minden pontja még világosan bemutatható, mit merőleges vetülettel biztositani nem lehet. További előnye az is, hogy eltorzitó hatása jóval kisebb, mint ha e Földgömb képét merőleges vetülettel szerkesztjük.

Városoknak vagy más bemért pontoknak kitüntetése eme hálóban.

A berajzolandó pontnak λ földrajzi hosszúságával kitüntetjük azt a délllőt, melyben a szóban forgó pontunk fekszik. E munkára használjuk hálónk szegélyvonala mentén alkalmazott fok- és szögpercz szerinti beosztást. Ha utóbbi beosztás segitségével a délllőt irónvonallal kijelöltük, kitüntetjük ezen a pontot azáltal, hogy ennek ismert φ földrajzi szélességével, [48] egyenletből, $r = R \operatorname{tang}\left(45^0 - \frac{\varphi}{2}\right)$ értékét kiszámitjuk, a körzőbe vesszük és abroszunk közös Q középpontjától a sugárra rámérjük.

Csillagászati abroszon kitüntetjük ily sarkponti vetülettel az ekliptikát is. Ez oly kör, melynek síkja az egyenlitővel $23\,{}^1/_2$ foknyi szöget képez. Az alkalmazott vetülettel ennek a körnek is köralaku képe van, l. 4. ábrában $0\,K\,180$ körívet.

Igazolása annak, hogy minden körkúpnak antiparallel metszete ugyancsak körvonalat ád.

A körvonalnak középpontjára viszonyitott egyenlete

$r^2 = X^2 + Y^2$, ha r a sugara, X és Y bármely pontjának abscissája és ordinatája. Idézett egyenlet igy is irható:

[49] $$Y^2 = (r - X)\,(r + X)$$

Ha ez egyenletet az 5. ábrával összehasonlitjuk, irható eredményünk az ott alkalmazott jelölés nyomán igy:

$$Y^2 = cn \times nd$$

Szóval minden pontnak Y ordinatája mértani közepese annak a két hosszúságnak, melyekre az abscissa tengelyben fekvő cd átmérőt amaz ordináta talppontjával felosztjuk. E törvény a körnek legjellemzőbb és kizárólagos tulajdonsága. Ha tehát bezárt görbe vonalnak három pontjaira ezt a törvényt igazoltuk, akkor nem lehet ez más mint körvonal.

Legyen a 6. ábrában $C_1\,D_1$ valamely kúpnak a köralaku vezérvonala, S eme kúp csúcsa, $C_1\,S$ és $D_1\,S$ a rajzsíkban fekvő két alkotó vonala. Ábránk nyomán belátható, hogy $C_2\,D_2 = C_1\,D_1$-el, ha ezt úgy kitüntetjük, hogy $C_1\,S = S\,C_2$ és $D_1\,S = D_2\,S$, mert igy két összevágó háromszöget szerkesztettünk. Továbbá igazság ez is, hogy $M_1 M_2$ metszővonal merőleges a rajzsikon, ha ez ama két siknak közös vonala, melyeket $C_1 D_1$ és $C_2 D_2$ vonalakon át a rajzsikra merőlegesen állithatunk. Ezzel pedig $n M_1$ valamint $n M$ is a köralaku $C_1 M_1 D_1 M_2$ vezérvonalnak az ordinatái, ha $C_1 D_1$ átmérőjét absczissatengelyül választottuk. Igy azonban a [49] egyenlet nyomán irható $(M_1 n)^2 = C_1 n \times D_1 n$ Háromszögeink összevágó alakjából következik azonban, hogy:

$C_1 n = C_2 n$ és $D_1 n = D_2 n$-el, M_1 pont pedig úgy a $C_2 D_2 M_3$ metszővonalnak egyik pontja, valamint a köralaku vezérvonalé is. Igy tehát a [49] egyenlet $C_2 D_2$ és M_1 pontokra is érvényes, szóval: az e pontokat magában záró vonal nem lehet más mint körvonal.

Egyuttal belátható az is, hogy ugyan-e körkúpnak más RT sik szerinti metszete is körvonalat ád, ha síkja $C_2 D_2 M_1$ körnek a síkjával egyenlőközü. Ebből tehát azt az igazságot vonhatjuk le minden körkúpnak a metszetére: hogy bármely RT siknak a metszete körvonalu, ha ez az egyik RS alkotójával ugyanakkora Ψ szöget képez, a mekkora W szöget ez a kúp köralaku vezérvonala a 180 fokkal tovább fekvő SD_1 alkotójával közbezár. Röviden csak azt kell bebizonyitanunk, hogy $\Psi = W$ szöggel, vagy hogy a kúpnak e két metszete egymással antiparallel.

Az ekliptika ábrázolása.

Eljárásunkat a 7. ábrával igazoljuk. Ez Földünknek oly metszetét tünteti elénk, melynek rajzsíkjában $P_1 P_2$ forgástengelye fekszik.

Legyen tehát ugyan-e rajzban $\varepsilon \varepsilon_1$ az ekliptika síkja, mely a rajzsikon merőleges és EE_1 egyenlitővel γ szöget képez. Ha P_1 pontba a szempontot telepitjük, akkor $P_1 \varepsilon$ és $P_1 \varepsilon_1$ a vetitőkúpot képviseli. Szegélyvonalai átdöfik az egyenlitőt mint vetületi síkot G és L pontokban. E szerint GL ama körnek átmérője, melylyel az ekliptika megrajzolható, ha vetületi síkunk azzal antiparallel.

Az antiparallelizmus igazolása a 7. ábra nyomán:

$$W = U, \text{ mert } \varepsilon C = P_1 C \text{ vel.}$$
$$\Psi = 90 - V,\ V = 90 - U, \text{ tehát}$$
$$\Psi = 90 - (90 - U) = U.$$

Szóval: $W = \Psi$-vel.

ρ sugárhossz az ekliptika megrajzolására.

Az előbbi fejtegetéseinkkel igazoltuk, hogy $\rho = \frac{GC + CL}{2}$ úgy mint ezt a 7. ábra kimutatja.

GCP_1 és P_1CL derékszögű háromszögekből következik, ha tekintetbe vesszük, hogy $R = P_1C$ a Földgömb sugárhossza.

$GC = R \operatorname{tang} U$; $CL = R \operatorname{tang} V$; $V = 90 - U$; tehát $\operatorname{tang} V = \operatorname{cotg} U$. Ezzel $\rho = \frac{R}{2}(\operatorname{tang} U + \operatorname{cotg} U)$

Átalakitása czéljából irjuk ezt:

$$\rho = \frac{R}{2}\left(\frac{\sin U}{\cos U} + \frac{\cos U}{\sin U}\right)$$

és röviditése után:

$$\rho = \frac{R}{\sin 2U}$$

U körületi szög $(90 - \gamma)$ központi szögnek a fele, igy

$2U = 90 - \gamma$, ebből

$\sin 2U = \cos \gamma$, tehát végeredményünk:

$$\rho = \frac{R}{\cos \gamma} \tag{50}$$

Az [50] egyenlet értéke szerkesztés útján is meghatározható, ha ε pontban érintőt húzunk a körhöz és ezzel az egyenlitőt metszük, akkor, mint ezt ábránk igazolja, $CE = \rho$-val.

Az ekliptika megrajzolása czéljából kiszámitjuk ρ értékét az [50] egyenlet szerint, vagy lemérjük oly segitőmetszetből, mint ezt a 7. ábrával bemutattuk. Utóbbi esetben lemérünk CE-t, ezzel köríveket rajzolunk, úgy mint a 4. ábrában tettük az egyenlitőnek nullás és 180-as osztópontjából; N_1 metszőpontjukban fekszik ekkor a keresett középpont, mely pontból $OK180$ körív megrajzolható.

13. §. Stereographiai vetület az egyenlitőből.

Földgömbünk keleti vagy nyugati felét úgy szoktuk bemutatni, a hogy mutatkoznék, ha mint átlátszó testet az egyenlitő valamely pontjából láthatnók. A szempontot ekkor az egyenlitőbe helyezzük és ennek délköre, mely merőleges a rajzsíkon, az úgynevezett fődélkör.

Az egyenlőközű kör vetülete.

Követett eljárásunk ismét segitőmetszetből érthető meg leghamarább, l. a 8. ábrát. Ez Földünknek oly metszete, melynek síkja összeesik a fődélkör síkjával. E metszetben EE_1 az egyenlitő, PP_1 Földünk forgástengelye, S a szempont, bc egyenlőközü kör, melynek φ a földrajzi szélessége.

Első sorban igazoljuk a vetitőkúpok antiparallel metszetét. A 8. ábra nyomán:

$$W = U = \frac{\varphi}{2}$$

$$\Psi = 90 - \left(90 - \frac{\varphi}{2}\right) = \frac{\varphi}{2} \quad \text{tehát}$$

$$\Psi = W.$$

Jelen esetben rajzsikunk az a sík, mely merőlegesen áll a 8. ábra metszetén és $P_1 P_2$ forgástengelyt foglal magában. Ez 8. ábrában KP_2 egyenes vonal által lesz képviselve. Emlitett viszonyoknál fogva látjuk GSK vetitőkúpnak metszővonalát, vagy létesitett vetületét GK egyenes által kitüntetve. Ez bc egyenlőközünek a képe és minthogy alakja kör, igy egyszersmind átmérője is. r_2 sugár eme vetületek megrajzolására találtatik a 8. ábra KCS és GCS derékszögü háromszögeiből $SC = R$ földgömbsugár által kifejezve igy:

$$r_2 = \frac{KC - GC}{2}$$

$$KC = R \operatorname{tang}\left(90 - \frac{\varphi}{2}\right); \quad GC = R \operatorname{tang} \frac{\varphi}{2};$$

tehát:

$$r_2 = \frac{R}{2}\left(\operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2} - \operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}\right)$$

vagy ha a teljes φ szögre áttérünk:

[51] $$r_2 = R \operatorname{cotg} \varphi.$$

A délkör ábrázolása.

Feladatunk eme részét bemutatjuk Földünknek az egyenlitő síkja szerint metszett rajzával, l. 9. ábrát. E rajzban látjuk az egyenlitőben fekvő S szempontot; $D_1 D_2$ délkört, mely SO fődélkörtől $90 - \lambda$ szöggel eltér. Látjuk BPN-ben azt a síkot, melyre

$D_1 D_2$ délkört vetitjük, és látjuk még MN egyenesben ama kör átmérőjét, mely $D_1 D_2$ vetületének felel meg. Itt feleslegesnek tartjuk a vetitőkúpoknak antiparallel metszéseit ujból igazolni; mert ha a 9. ábrát a 7. ábrával összehasonlitjuk, akkor tapasztaljuk, hogy ezek mértanilag véve egyenlők. Ezután kiszámithatjuk ρ_2 sugárhosszat a délkörképnek a megrajzolására. A 9. ábra nyomán $\rho_2 = \frac{MP + NP}{2}$.

MPS és NPS derékszögü háromszögekből következik:

$$MP = R \operatorname{tang} V; \quad NP = R \operatorname{tang} U;$$

$$U = 90 - V$$

igy $NP = R \operatorname{cotg} V$; ezzel pedig

$$\rho_2 = \frac{R}{2} (\operatorname{tang} V + \operatorname{cotg} V)$$

röviditve:

$$\rho_2 = \frac{R}{\sin 2V}.$$

Tekintettel arra, hogy V körületi szöge $(90 - \lambda)$ központi szögnek, következik $\sin 2V = \cos \lambda$, vagy:

[52]
$$\rho_2 = \frac{R}{\cos \lambda}$$

A fokháló megrajzolása.

Legczélszerübben szerkesztjük az egyenlitőből vetitett fokhálónak a képét az [51] és [52] egyenletek rajzban való kitüntetése által, l. 10. ábrát. A rajzlapnak kellően megválasztott pontjából megrajzoljuk Földünk kisebbitett sugárhosszúságával a földabrosz köralaku határvonalát, mely egyszersmind a rajzsikban fekvő délkörnek is a képe, l. 10. ábrában $EP_1 3 P_2$ kört. E körön kitüntetjük Földünk P_1 északi és P_2 déli sarkpontját és EE_1 egyenlitő sikját. Továbbá kitüntetjük e délkörön a fokhálónak beosztását, melyet a 10. ábrában 15 foktól 15 fokra szabtuk. Ha valamely osztópontban, l. 45. pontot, $C_1 45$ az érintőt kitüntettük az által, hogy 45 pontban merőlegest emeltünk a sugárra, akkor C_1-től 45 pontig a szóban forgó egyenlőközü körnek r_2 sugárhosszát birjuk. T. i. $C C_1 45$ derékszögü háromszögből következik:

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{R}{C_1 45}, \quad \text{ebből:}$$

$C_1 45 = R \operatorname{cotg} \varphi$, tehát az [51] egyenletnek r_2-vel jelölt értéke.

Eme eljárás ismételt alkalmazása által találtuk *I, II, III, IV, V* középpontokat, honnan az egyenlőközü körök vetületeit körzővel megrajzoltuk.

A délkörvetületek megrajzolása czéljából ábránk egyik P_2 sarkpontjában *mn* érintőt jelölünk ki. P_2 középpontból félkört rajzolunk szabadon választott körsugárral. Ez ábránkban *K*-tól I_1-ig ismét 15-től 15 fokra osztottuk; α, β, γ, δ és ε osztópontokon át sugarakat húztunk P_2 középpontból, a hol ezek az egyenlitőt képviselő *EE* egyenest metszik, l. 10. ábrában 1, 2, 4, 4, 5 metszőpontot, ott találtuk ama középpontokat, melyekből a délkörképek megrajzolhatók, ha a körzőt minden középponttól P_2 sarkpontig megnyitjuk. Állitásunk igazolása következik $CP_2 4$ derékszögü háromszögből, melyben $P_2 4 \times \cos\lambda = R$, tehát [52] egyenlet szerint $P_2 4 = \rho_2 = \frac{R}{\cos\lambda}$.

14. §. Stereographiai vetület a szinkörre.

A földabroszoknak e rajzolásmódja szövevényesebb mint a két megelőzője, daczára annak, hogy a hálózat megrajzolható körzővel. Ez eset lényeges különbsége az, hogy Földünk $P_1 P_2$ forgástengelye *BC* vetületi síkkal, l. a 11. ábrában, β szöget képez. Segitő metszetünkben *S* a szempont, *SG* a szempont függőleges iránya, *BC* az a sik, melyre hálónkat vetitjük, mely egyszersmind *S* pontnak a horizontja vagy szintköre, EE_1 Földünk egyenlitője, mely *SG*-vel β szöget képez. A 11. ábrából következik, hogy SP_2 és SP_1 látósugarak p_2 és p_1 metszőpontjai *BC* vetületi síkkal a földsarkok képeit adják.

A délkörök vetületei.

A délkörképek megrajzolása czéljából igazolni kell ezen vonalaknak köralaku vetületeit, továbbá azt is, hogy e vetületben a délkörök λ földrajzi hosszkülönbsége valódi nagyságával kijelölhető, szóval hogy e szög az alkalmazott vetités által el nem torzul.

A délkörképek köralakját a 12. ábrával igazoljuk, hol *S* a szempont, $D_1 D_2$ annak a délkörnek a síkja, mely a 12. ábrával vázolt metszetnek a rajzsíkján merőleges. Az ábra nyomán $W = U$, mert $QD_1 = QS$-sel.

$$\Psi = 90 - V; \quad V = 90 - U, \text{ tehát}$$
$$\Psi = 90 - (90 - U) = U \quad \text{vagy}$$
$$\Psi = W$$

A másodikat a 11. ábrával igazoljuk.

Legyen $P_2 I$ az az érintő, mely P_2 sarkpontban és metszetünk rajzsíkjában fekszik; $P_2 II$ más délkörnek P_2 ponton át fektetett érintője. A megelőzőkből tudjuk, hogy $IP_2 II$ szög annyi, mint λ vagyis a metszet síkjában fekvő fődélkörnek és más $P_2 II$ érintővel egy síkban fekvő délkörnek a földrajzi hosszkülönbzete. Folytatólag bemutatjuk λ szögnek μ vetületét is. Hogy μ szöget a 11. ábrában lássuk, ezért úgy rajzoljuk ezt az esetet, mintha BC vetületi síkunk nem állana merőlegesen fődélkörünk síkján. Ezt feltételezve, kimutathatjuk M és N pontokban $P_2 I$ és $P_2 II$ érintőknek átdőféspontjait BC vetületi síkkal. Ekkor kétségbe nem vonható, hogy $Mp_2 N = \mu$ szög λ szögnek a vetülete.

$P_2 QS$ háromszögből következik

$$\alpha = \gamma, \text{ mert } P_2 Q = QS; \text{ továbbá}$$
$$\alpha + \gamma + 90 + \beta = 180, \text{ vagy}$$
$$\alpha + \alpha + 90 + \beta = 180, \text{ honnan}$$

[53] $$\alpha = 45^0 - \frac{\beta}{2}$$

$P_2 Q p_2$ háromszögből: $\alpha + \beta = \varepsilon$

Az [53] egyenlet tekintetbe vételével:

[54] $$\varepsilon = \beta + 45 - \frac{\beta}{2} = 45 + \frac{\beta}{2}$$

Minthogy $P_2 M$ érintő merőleges $P_2 Q$ forgástengelyen, így $\alpha = \delta = 90$ és [53] egyenlettel:

[55] $$\delta = 90 - \alpha = 90 - \left(45 - \frac{\beta}{2}\right) = 45 + \frac{\beta}{2}$$

[54] és [55] egyenletből következik, hogy $\varepsilon = \delta$-val. Egyenlő szögeknek egyenlő oldalak felelnek meg. Ez alapon $P_2 p_2 M$ háromszögben $P_2 M = p_2 M$-el. Hasonlókép belátható az is, hogy $P_2 MN$ háromszögnek és $p_2 MN$ háromszögnek M pontnál fekvő szöge derékszög kell hogy legyen; s mert e két háromszögnek közös MN oldala az a metszővonal, mely a vetületi sík és $IP_2 II$ érintősík találkozásának eredménye. Ha pedig $P_2 MN$ és $p_2 MN$ ily derékszögű háromszögek, akkor tang $\lambda = \frac{NM}{P_2 M}$ és tang $\mu = \frac{NM}{p_2 M}$ hányadosok által kifejezhető. Fönnebbi igazolásunk szerint $P_2 M = p_2 M$, minthogy ezzel

a μ és λ szögek tangenseit kifejező hányadosai számlálóban valamint nevezőben megegyezők, igazoltuk azt is, hogy $\lambda = \mu$. Szóval azt, hogy eme vetületben a földrajzi hosszkülönbséget kifejező λ szög változatlan nagyságában jelenik meg. A délkörök megrajzolására az előrebocsátott tételekre támaszkodva megrajzolhatjuk most eme vetületmódnak délköreit, l. 13. ábrában Ji körét, ez az a kör, melyben BM vetületi síkunk, l. 11. ábrát, a Földgömböt metszi. Folytatólag kitüntetjük a Föld két sarkppontjának $p_2 p_1$ képeit. E czélból meghúzzuk 11. ábrában $P_2 S$ és $P_1 S$ látósugarakat; a hol ezek a vetületi síkot metszik, ott találjuk p_1 és p_2 vetületeit. Fekvésüket a háló teljes képén, l. 13. ábrát, úgy találjuk, hogy távolságukat Földünk Q középpontjától 11. ábrában lemérjük és Ji fődéllőn C_1 pontból, l. 13. ábra, p_2-ig és p_1-ig rámérjük. A délkörök szerkesztésére tudjuk most: 1. hogy vetületük körvonal; 2. hogy minden délkör Földünk sarkpontjait metszi, tehát vetülete a sarkpontok vetületeit is zárja magában; 3. ha a sarkpont p_2 vetületében valamely délkörnek $p_2 U$ érintőjét kijelöljük, akkor ez érintőnek λ iránykülönbsége Ji fődéllőtől, ez pedig eme délkörnek és a fődélkörnek földrajzi hosszkülönbsége.

Az idézett 2. pontozatból következik, hogy a délkörképek középpontjai p_1 és p_2 sarkképektől mindig egyenlő távolságokba essenek. E szerint találjuk eme középpontoknak közös RT vonalát úgy, ha a 13. ábrában $p_1 p_2$ távolságot felezzük és G felező pontban RT egyenest merőlegesen jelöljük ki $p_1 p_2$ fődélkörnek síkjára. A 3. pontozat nyomán kitüntetjük most a λ hosszkülönbségü délkört, ha p_2 pontban λ alatt $p_1 U$ érintőt rajzoljuk és erre merőlegesen p_2 pontból sugarat inditunk RT középponti vonalnak 4 metszőpontjáig; ekkor (4) ama kör középpontja, honnan a szóban forgó vetület, azaz gG körív megrajzolható.

Rendszeresen eljárva elkészitjük eme háló délköreit úgy, hogy p_2-ben KL félkört rajzolunk szabadon választott körsugárral. E kört beosztjuk a megállapitott alrészekre; pl. esetünkben 15-től 15 fokra. Az igy talált $\alpha \beta \gamma \delta \varepsilon$ osztópontokon át sugarakat húzunk RT központi vonalnak a metszetéig, l. 13. ábrában g, 1, 2, 3, 4, 5 pontokat. E pontokból megrajzoljuk a délkörképeket, ha mindegyikből körívet irunk le, mely p_2 sarkpontot metszi és ábránk határoló köréig terjed. Hogy a sarkpont képében fekete foltot ne kapjunk, ez okból e délkörképeket csakis a legkisebb egyenlőközü körtől kezdve szoktuk kihúzni.

A délkörképek ρ_3 sugárhossza.

Igazolt eljárásunk nyomán kiszámithatjuk ezután a 13. ábra szerint $p_2 G 4$ háromszögből ρ_3 sugárhosszát:

$$\rho_3 = \frac{p_2 G}{\cos \lambda}$$

A 11. ábra szerint:

$$p_2 G = \frac{p_1 p_2}{2} = \frac{p_2 Q + Q p_1}{2}$$

$p_2 Q S$ háromszögből $p_2 Q = R \operatorname{tang} \gamma$
$p_1 Q S$ „ $Q_1 Q = R \operatorname{cotg} \gamma$

$$p_2 G = \frac{R}{2} (\operatorname{tang} \gamma + \operatorname{cotg} \gamma) = \frac{R}{\sin 2\gamma}$$

A 11. ábra szerint $2\gamma = 90 - \beta$; tehát $\sin 2\gamma = \cos \beta$ ezzel:

[56] $$\rho_3 = \frac{R}{\cos \beta \cos \lambda}$$

Az egyenlőközü körök vetületei.

E vetületmódnak egyenlőközü köreit kétféleképen rajzolhatjuk meg.

1. Kiszámithatjuk képük körsugarait.

2. Megrajzolhatjuk úgy is, hogy segitő ábrával köralaku képüknek átmérőit vagy esetleg három-három pontját e hálónak teljes képében kipuhatoljuk és ezekkel meg is rajzoljuk.

A 14. ábrában látjuk e vetületmódot oly metszettel bemutatva, melynek síkja a Föld forgástengelyét és a szempontot foglalja magában; szóval esetünk fődélkörét. Ábránkban BC a vetületi sik; $P_1 P_2$ Földünk forgástengelye, mely BC-vel β szöget képez; S a szempont, EE_1 az egyenlitő, fG valamely délkör, melynek φ a földrajzi szélessége.

Vetületeink köralakját igazoltuk, ha kideritettük, hogy $\Psi = \delta + \beta$.

NGS háromszögből $\Psi = 90 - \varepsilon$; ε kerületi szöge λ központi szögnek, innen $\varepsilon = \frac{\gamma}{2}$; $\gamma = 180 - \varphi - \beta$; tehát:

[57] $$\varepsilon = 90 - \frac{\varphi + \beta}{2}$$

δ szög kerületi szög, fele α szögnek.

$$\delta = \frac{\alpha}{2}; \text{ azonban}$$

$$\alpha = \varphi - \beta, \text{ igy}$$

$$\delta = \frac{\varphi - \beta}{2}$$

Ezek nyomán:

$$\beta + \delta = \frac{2\beta}{2} + \frac{\varphi - \beta}{2} = \frac{\varphi + \beta}{2}$$

$\Psi = 90 - \varepsilon$, de [57] egyenlet szerint:

$$\Psi = 90 - \left\{ 90 - \frac{\varphi + \beta}{2} \right\} = \frac{\varphi + \beta}{2}$$

Szóval $\Psi = \beta + \delta$, azaz vetitő sugárkúpjaink a vetületi sík által antiparallel irány alatt metszetnek egyenlőközü köreink körlapjaival.

A 14. ábrából látjuk, hogy fq egyenlőközü körnek vetületeire r_3 sugárhosszát mn távolság feléből találjuk.

$$r_3 = \frac{mn}{2} = \frac{qn - qm}{2}$$

$$mq = R \text{ tang } \delta; \quad nq = R \text{ tang } \varepsilon.$$

Fönnebbi fejtegetéseink szerint $\delta = \frac{\varphi - \beta}{2}$ és $\varepsilon = 90 - \frac{\varphi + \beta}{2}$, ezekkel:

$$r_3 = \frac{R}{2} \left(\text{cotg } \frac{\varphi + \beta}{2} - \text{tang } \frac{\varphi - \beta}{2} \right)$$

vagy röviditès után:

[58] $$r_3 = \frac{R \cos \varphi}{2 \sin \frac{\varphi + \beta}{2} \cos \frac{\varphi - \beta}{2}}$$

Az egyenlőközü körök rajzolása.

Az [58] számu egyenlet szerkesztése hosszadalmas, onnan van, hogy az egyenlőközü körök képeit tisztán rajzolás útján ábrázoljuk. E czélból rajzoljuk abroszunk végleges ábrája mellé azt a szükséges metszetet is, melylyel ezt szerkesztjük, l. 15. és 16. ábrát. A segitőmetszet megszerkesztése után kitüntetjük abroszunk határoló körét, l. 16. ábrában *hisuf* kört, melynek sugara egyenlő legyen Földünk kisebbitett R sugárhosszával.

Utána kitüntetjük fn fődélkört, melynek képe egyenes. Ezt követi a sarkpont p_1 képének kitüntetése uf fődéllőben. Folytatólag beosztjuk a fődélkört segitőmetszetünkben, l. 15. ábrát, megállapitott alrészeire, esetünkben 15-től 15 fokra; kitüntetjük az egyenlőközüeket és EE_1 egyenlitőt. Mindezt rendszerint csak ama félgömbön tüntetjük ki, melynek képét be akarjuk mutatni, l. 15. ábrát.

Eddig érve kijelölhetjük az egyenlőközü körök képeit. A 15. ábrával vázolt esetben találjuk bd körnek átmérőjét bS és dS sugaraknak β_1 és γ_1 metszőpontjaiban. Ezeket kitüntettük nf fődélkörön a 16. ábrában, hol távolságuk felezése pontjából eme kör vetülete lett megrajzolva. A második ef egyenlőközüre ε és f pontokban találtuk az átmérőt, l 15. ábrát. Ennek a 16. ábrában kijelölt εf pontjaival megrajzoltuk vetületét az előbbi módon. Utána gh körnek vetületét határoztuk meg. Eme körnek egyik pontját δ pontban találtuk. Más két pontot találunk azon egyenes metszővonal kijelölése által, melyben eme Gh kör BC vetületi sikkal találkozik; szóval az által, hogy 15. ábrában h pontot átvetitettük a 16. ábrába, l. ott h_1 és h_2 pontokat. Igy aztán h, δ és h_2 pontokkal eme körnek két húrját ismertük, melyeknek csak merőleges felezővonalait kellett meghatározni, hogy utóbbiak metszőpontjával a rajzolandó körnek középpontja is meg legyen. Utóbbi eljárást alkalmaztuk a többi egyenlőközü körök vetületeire mindvégig.

Lefejthető vetületek.

15. §. A szó szoros értelmében vett kúpvetület.

Az eljárás alapelvét bemutatjuk a 17. és 18. ábrával. Az ábrázolandó földfelületnek, országnak, esetleg világrésznek közepe táján megválasztjuk abroszunknak úgynevezett normálpontját, l. 17. ábrában N pontot. Ez az ábra mutatja EPE_1 Földünknek délkörsíkja után képzelt metszetét, P a sarkpontja, C középpontja, EE egyenlitője és NN_2 normálpontunk egyenlőközü köre. Az abrosz kúpalaku rajzlapjával érintetjük NN_2 egyenlőközü kört. Fokhálóját eme kúplapon úgy létesitjük, hogy a Földgömbön felosztva gondolt egyenlőközü köröknek és délköröknek síkjait a kúplappal metszésre hozzuk. Folytatólag pedig a kúplapot valamely alkotója szerint felmetszük és a rajzsíkba kiteritjük. Ily módon keletkezik a fokhálónak az a képe, melyet a 18. ábrában látunk. Előnye az, hogy egyenlőközü körei a vetületi kúpnak S-el jelölt csúcspontjából, mint közös középpontból, a körzővel megrajzolhatók. Délkörképei pedig egyenes vonalak, melyek mind S pontban találkoznak.

Fejtegetéseink nyomán következik, hogy eme abroszon a szögek úgy fognak feltünni, a hogy ezeket a Földgömbön lemérhetjük; de hátrányára van a távolságok eltorzulása. Ugyanis térképünk csakis azon pontokra adhatja a kölcsönös távolságot helyesen, melyek az érintett NN_2 egyenlőközüben fekszenek, minden más egyenlőközü körben a pontok nagyobb távolságot mutatnak a valódinál, mert a kúpon létrejövő egyenlőközü körök nagyobbak mint azok, melyek nekik a Földgömbön felelnek meg. Gyakorlati követeléseink a közéletben első sorban a távolságok közvetetlen lemérhetését követelik abroszainktól. A szögek kisebb mértékü eltorzitása inkább engedhető meg mint a távolságoké. E követelésünk eredményezte, hogy a szó szoros értelmében vett kúpvetületet földabroszokra mai nap már nem alkalmazzuk, hanem csakis az alábbi eljárások valamelyikét.

16. §. A Bonne-féle vetület.

Bonne Rigobert franczia földiró (élt 1727—1795-ig) volt az első, ki az alább magyarázandó eljárást leirta, miért is nevén még mai napig is alkalmazzák. Bonne földabroszán kijelöljük mindenek előtt N normálpontot a körülkeritett rajzlap közepén, l. 19. ábrát. N pontban kijelöljük hg délkört, melynek a lefejtett és a rajzsikba kiteritett abroszon egyenes vonal a képe. Folytatólag kiszámitjuk azt a ρ_n körsugarat, melylyel a normálpontnak egyenlőközü köre megrajzolható. Ezt úgy tesszük, mintha vetületünk szigorú kúpvetület lenne. Ha ρ_n a kúpvetület megkivánt sugara, l. 17. ábrát. CNS derékszögü háromszögből kifejezhető:

[53] $$\rho_n = R \operatorname{cotg} \varphi_n$$

Eme hosszt ráméjük gh fődélkörre N ponttól észak felé, ha φ_n (+) előjellel birt. Igy találjuk S pontot, vagyis a vetületi kúpnak a csúcspontját, mely pontból a normálpont egyenlőközüje, úgy mint a többi egyenlőközü kör képe, körzővel rajzolható meg. Ezután kiszámitjuk a megállapitott beosztásnak azt az s ívét, mely a délkörnek felel meg. Ha Földünket gömbalakunak tekinthetjük, akkor

[60] $$s = R\,0{\cdot}01745 \times n$$

Hol R a földgömb sugárhossza, n a beosztás fokokszáma. Utóbbi adatot felmérjük a fődélkörre N ponttól délnek és északnak. Igy találtuk $a\,b\,c\,d\,e\,f$ osztópontokat, mely pontokon át S középpontból a többi egyenlőközü kör vetületét megrajzoltuk. Ezzel biztositottuk abroszunk részére azt, hogy rajta az északtól délnek haladó távolságok a földgömb megfelelő távolságaival egyezzenek.

Folytatólag kiszámitjuk minden kijelölt egyenlőközü körnek azt a (λ) ívhosszát, mely beosztásunknak tényleg felel meg. Használt egyenletünk akkor:

[61] $$\text{arc}\,\lambda = 0{\cdot}01745\,R \cos\varphi \times n$$

Hol n beosztásunk fokszáma, R Földünk sugárhossza, φ a szóban forgó egyenlőközü körnek földrajzi szélessége és 0·01745 egy foknyi ívnek a hosszúsága a hosszúság egységével megrajzolt körben.

Ha tehát a 19. ábrában bemutatott hálóban, mely körülbelül Európa térképének felel meg, a 61. egyenletben $n = 5$-nek irunk és ezt $\varphi = 30^0, 35^0, 40^0, 45^0, 50^0, 55^0$-ra egymásután kiszámitjuk, ekkor találjuk $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6, \lambda_7$ íveket, melyeket az illető egyenlőközükre a fődéllőtől keletnek és nyugatnak kell rámérni, hogy a délkörképeket kijelölhessük.

Délköreink ez esetben — gh kivételével — görbe vonalak. Ezzel abroszunkon a szögek eltorzultak, de a távolságok keletről nyugat felé egyeznek a Földfelületen lemért megfelelő távolságokkal. Szóval az igy szerkesztett abroszon a távolságok minden irányban lemérhetők, de szögek nem.

Bonne eljárását rendszerint az egyes világrészek képeire alkalmazzuk.

17. §. A Sanson-Flamsteed-féle földabrosz.

Sanson Miklós franczia földiró 1650-ben Európa, Afrika, Ázsia és Amerika földabroszaira a következő vetületmódot alkalmazta. Angolországban ugyanezt az eljárást Flamsteed-féle vetületnek nevezték, mert Flamsteed János angol csillagász már 1629-ben a csillagos ég ábrázolására alkalmazta.

Ez esetben a vetületi rajzlappal Földünk egyenlitőkörét gondoljuk érintettnek, mi módon rajzlapunk nem kúp, hanem hengerré alakul át, úgy mint ezt a 20. ábrából látjuk, hol EE_1

az egyenlitő; RS a hengeralaku rajzlap, mely Földünket EE_1-ben érinti, PP_1 Földünk forgástengelye. Ez abroszszal is az a szándékunk, hogy rajta a pontoknak kölcsönös távolságát úgy mérhessük le, mintha csak a Földgömbön mérnők le. A rajzlapot ez okból valamely alkotója szerint felmetszük és síkká kiteritjük. A rajzsíkban folytatólag úgy készitjük a Földfelületen képzelt fokháló képét, mint a Bonne-féle vetületben. A körülkeritett rajzlap (N) középpontján át, keletről nyugatra egyenes vonalat tüntetünk ki; ez képviseli Földünk egyenlitőjét, l. EE_1 a 21. ábrában; mert jelen esetben $\rho_n = R$ cotg φ_n-ban $\varphi_n = 0^0$, azaz cotg $0^0 = \infty$; szóval vetületi rajzlapunk henger. Rajzlapunk ugyancsak (N) középpontjában merőlegest emelünk EE_1 egyenlitőre, l. PP_1 vonalat 21. ábrában. E vonal a fődélkör képe; fölfelé északi, lefelé déli vége terjed.

Ezután kiszámitjuk a délkörnek azt az s ívhosszát, mely beosztásunknak megfelel, pl. $n = 5$-től 5 fokra.

$$\text{arc } s = 0{\cdot}0174533\ R \times (5)$$

Ezt az ívhosszúságot ráмérjük a fődélkört jelölő PP_1 egyenesre N ponttól északnak és délnek. Osztópontjain át egyeneseket húzunk egyenlőközűen EE_1 egyenlitőhöz. Igy kijelöltük egyenlőközű köreink képét oly módon, hogy kölcsönös távolságuk megegyezzék a Földfelületen képzelt körökével, azaz igy a dél északi irányban biztositottuk a távolságok lemérhetését. A többi délkörképek kijelölése czéljából kiszámitjuk minden kijelölt egyenlőközű kör részére azt az arc λ ívhosszát, mely beosztásunknak felel meg, esetünkben $n = 5$-től 5 fokra. Általános kifejezője a [61] egyenlet szerint: $\text{arc } \lambda = 0{\cdot}0174533\ R \cos \varphi \times n.$

E képletben $n = 5$ és φ-nek az értéke rendre 5, 10, 15, 20 . . . . 65-ig helyettesitendő. Igy találjuk $\lambda_5\ \lambda_{10}\ \lambda_{15}\ \lambda_{20}$ . . . . λ_{65} ívhosszakat, melyeket a megfelelő egyenlőközű körnek a képén, a fődéllőtől nyugat és kelet felé haladva, fel kell mérni és az egymásnak megfelelő osztópontokat folytonos vonallal összekötni, hogy a délköröket oly kölcsönös távolsággal kimutassuk, mint ez nekik a Földgömbön megfelel.

Sanson földabroszán lemérhető a pontok kölcsönös távolsága minden irányban, akárcsak a Földgömbön, de szögei eltorzulnak, még pedig annál inkább, mennél távolabb fekszenek a normálponttól. Onnan van, hogy mainap már csak a forró öv világrészeire alkalmazzuk; pl. Afrika vagy Közép-Amerika abroszaira.

18. §. De l' Isle földabrosza.

A francziа születésü De l' Isle Miklós, Oroszország első csillagásza, 1745-ben Oroszország földabroszát a következő módon szerkesztette. A körülkeritett rajzlap közepén kijelöljük $B F$ fődélkört mint egyenes vonalat, mely déltől északnak haladjon, l. 22. ábrát. A fődélkörön kijelöljük N normálpontot, úgy hogy ez lapunk közepébe essék. Folytatólag kitüntetjük N normálpontnak egyenlőközü körét $\rho_n = R \operatorname{cotg} \varphi_n$ sugárhosszúsággal, úgy mint Bonne abroszán. E képletben R Földünk sugárhossza, φ_n a normálpont földrajzi szélessége, mely Oroszországra 55 fokkal vehető. Ezt kisebbitve mérjük a normálponttól északnak, igy találjuk a fődélkörben S középpontot, melyből e kör megrajzolható.

Ezután felosztjuk abroszunknak déltől északnak haladó kiterjedését négy egyenlő részre. Oroszország terjed 40 foktól 70 fokig földrajzi szélesség szerint északnak; tehát $(70 - 40) : 4 = 7\,{}^1/_2$ fok. Úgy hogy déli negyedrészét $\varphi_1 = 40 + 7\,{}^1/_2 = 47^0 + 30'$-nyi szélesség alatt haladó egyenlőközü kör fogja határolni, a legészakibb negyedrészét pedig $\varphi_3 = 70 - 7\,{}^1/_2 = 62^0 + 30'$-nyi szélesség alatt haladó egyenlőközü kör hasitja le.

E körök megrajzolására kiszámitjuk ρ_1 és ρ_2 sugárhosszúságait:

$$\rho_1 = \rho_n + 0{\cdot}0174533\, R \cos \varphi_1\, (n_0) \quad \text{és}$$
$$\rho_2 = \rho_n - 0{\cdot}0174533\, R \cos \varphi_2\, (n_0)$$

Föltéve, hogy a bemutatott esetben $n_0 = 7\,{}^1/_2$, vagyis azon fokok számát jelenti, mennyivel normálpontunk a kijelölendő körtöl északnak vagy délnek fekszik. Az igy talált ρ_1 és ρ_2 sugarakkal megrajzoljuk most, l. 22 ábrában, S pontból C és E pontokon átmenő két osztókört; azaz ama két kört, melyekre nézve a délkörök fekvését kiszámitjuk.

Ez utóbbi számitást úgy foganatositjuk, mint Bonne; azaz:

$$[62] \quad \begin{cases} \operatorname{arc} \lambda_1 = 0{\cdot}0174533\, R \cos \varphi_1\, (m) \quad \text{és} \\ \operatorname{arc} \lambda_2 = 0{\cdot}0174533\, R \cos \varphi_2\, (m) \end{cases}$$

A [62] egyenletben m ama fokoknak számát jelenti, mely szám képzelt fokhálónk szabályos beosztásának felel meg; pl. $m = 5$ vagy 1 fokkal is vehető. Eme ívhosszúságoknak kisebbitett mértékét rámérjük most E ponttól és C ponttól, l. 22. ábrát, keletnek úgy mint nyugatnak is. Két-két összetartozó osztóponton át egyenes vonalat húzunk; ezekkel ábrázoltuk a délköröket. De l' Isle igazolta, hogy az ily módon megrajzolt délkörök még Oroszországnak kiterjedt földabroszán is annyira simulnak a Bonne módján ábrázolt délkörképekhez, hogy eltérésük emezektől a mérnök által megkivánt pontosság feláldozása nélkül elhanyagolható. Onnan van, hogy mainap minden egyes országnak földabroszát De l' Isle módján szoktuk gyakran szerkeszteni.

Az egyenlőközü körök ábrázolására meg kell még jegyeznünk. hogy azt a két osztókört, melylyel a délköröket kijelöltük, a kész abroszon csak akkor szoktuk kitüntetni, ha szabályos beosztásunk többi egyenlőközü körök egyikével összeesnek. Különben csak a szabályos beosztás egyenlőközüit mutatjuk be véglegesen. Rajzolásunkra a Bonne-féle eljárást alkalmazzuk.

19. §. Hengerlapra vetitett földabroszok.

Szerkesztésük alapelve.

1. Földünk egyenlitőkörét hengerrel gondoljuk érintve.

2. A fokháló képét az által létesitjük e hengerlapon, hogy ezt a délkörök és egyenlőközü körök síkjaival metszük.

3. Felvágjuk a hengert egyik alkotója szerint és síkká teritjük ki.

Az ily módon létesitett földabrosznak egyszerü szerkezete szembe ötlő, mert egyenlőközü körei valamint délkörei is egyenes vonalakkal ábrázolhatók, még pedig úgy, hogy ezek egymást merőlegesen metszik. Ebből pedig az következik, hogy ily abroszon a szögek közvetetlenül lemérhetők, mert el nem torzittattak. A hengerlapra vetitett földabrosznak egyedüli hátránya, hogy a pontoknak kölcsönös távolsága közvetetlenül le nem mérhető, hanem csak körülményes redukálás segitségével derithető ki. Ezért hengervetületet csak akkor szerkesztünk, ha abroszunkon szögeknek, nem pedig távolságoknak lemérése a főczél.

20. §. A Mercator-féle földabrosz.

A hengervetületek sorában legfontosabb a Mercator-féle földabrosz, a mennyiben ez a hajózás czéljaira szolgál. Ugyanis Mercator Gebhárd duisburgi földiró 1569-ben a tengerész szükségeit kielégitő oly földabroszt szerkesztett, mely egy lapon az egész Földgömb képét mutatja be és mely rajzon bármely iránynak azimutszöge közvetetlenül lemérhető. A délköröket úgy szerkeszti, mint a közönséges hengervetület, l. 23. ábrát, tehát az-által, hogy EE egyenlitőnek MN érintő hengerlapját a beosztásnak megfelelően képzelt délkörsikokkal metszésre hozza. Ha tehát az R sugaru egyenlitőt m részre osztottuk, akkor a lefejtett abroszon a délkörképek Y-al jelölt kölcsönös távolsága, l. 24. ábrát, igy található:

[63] $$Y = \frac{2\pi R}{m}$$

A kiteritett abroszon megrajzoljuk tehát a 24. ábrával bemutatott hálót az által, hogy rajzlapuk közepén EE_1 egyenest, mint a lefejtett egyenlitő vetületét kihúzzuk és erre elejétől végig Y hosszúságokat rámérünk; az igy nyert osztópontokban merőleges egyeneseket emelünk; ezek képviselik délköreinket.

Az azimutszög lemérését folytatólag azzal biztositjuk, hogy az egyenlőközü körök vetületeit, melyek mind EE_1-el egyenlőközü vonalak, s most oly kölcsönös távolságokra helyezzük el, mint ezt azimutszögeink mennyiségtani kifejezője elénk szabja.

Tudniillik ha 23. ábrában B és C pontok összekötőjének α azimutját földrajzi rendszálakkal akarjuk kifejezni, akkor ez s szélességi és h hosszúsági ivek segitségével sikerül a legegyszerűbben; mert:

[64] $$\operatorname{tang} \alpha = \frac{h}{s}$$

A szerkesztett abrosz részére ugyanezt kell biztositanunk, l. 24. ábrában $B_2\,C_2$ egyenes részére. Onnan van, hogy itt

$\operatorname{tang} \alpha = \dfrac{Y}{X}$ legyen. Szóval miután Y állandó, ez okból kell X-et megfelelően változtatni. Lássuk már most h ivnek hosszúságát, mely φ földrajzi szélességben haladó egyenlőközü körön lemérhető.

Az egyenlőközü körnek r sugárhossza Földünk R sugárhosszúságával igy fejezhető ki:

$$r = R \cos \varphi$$

Ha tehát az egyenlőközü kört is m alrészre osztjuk, akkor ennek egy-egy része:

$$h = \frac{2\pi r}{m} = \frac{2\pi R \cos \varphi}{m}$$

A szélességi iv, mely mint második befogó [64] egyenlet nevezőjét képezi, annyi mint a délkör m-ed része, azaz:

$$s = \frac{2\pi R}{m}$$

A [64] egyenlet nyomán tehát:

$$\text{tang}\ \alpha = \frac{h}{s} = \frac{2\pi R \cos\varphi}{m} \cdot \frac{m}{2\pi R}$$

vagy röviditve tang $\alpha = \cos\varphi$ és a 24. ábra háromszögéből:

$$\text{tang}\ \alpha = \frac{Y}{X}$$

E szerint $\frac{Y}{X} = \cos\varphi$ azaz:

[65] $$Y = X \cos\varphi$$

a szerkesztéssel biztositandó, hogy az azimutszöget lemérhessük. E feltételnek megfelelünk a szerkesztéssel következőkép.

EE_1 vonalnak O osztópontjában, l. 24. ábra, szabadon választott sugárhosszal KL negyedkört rajzolunk. Ezt beosztjuk a megállapitott rendszer szerint, esetünkben 15-től 15 fokra. Az osztópontokat összekötjük eme kör O középpontjával. A hol ez utóbbi körsugarak ST délkörképet metszik, l. 1, 2, 3, 4, 5 pontokat, odáig terjed O ponttól mérve az e beosztásnak megfelelő X távolság.

Mert 24. ábra szerint $O 1 S$ háromszögből következik, hogy $Y = X \cos\varphi$, tehát úgy mint ezt a [65] egyenlet követeli.

Az igy talált X távolságokat ráinérjük most egymásután az egyik szélső délkör vetületére, l. 24. ábrában $X_1 X_2 X_3 \ldots$ és az igy talált osztópontokon egyenlőközüket húzunk EE_1 egyenlitővel. Végtére kitüntetjük felosztásunk jelzőszámait úgy a délkörökön, valamint az egyenlőközüeken is.

A földabrosz egyes pontjait ily hálóba merőleges összrendezőkkel rajzoljuk, melyek lefejtett hosszát ily czélokból különösen kiszámitjuk.

A pontok kölcsönös távolságát ily abroszból közvetetlenül lemérni nem lehet.

HARMADIK SZAKASZ.

Hibaszámitás a legkisebb négyzetösszegek elmélete alapján.

ELSŐ FEJEZET.

21. §. A hibaszámitás feladata és alapelve.

Méréseink hibakiigazitásáról vagy pontossági birálatáról csak oly esetben lehet szó, hol több megfigyelés vagy mérés lett megejtve, mint a mennyi az illető mennyiség meghatározására okvetlenül szükséges.

Tudniillik minden megfigyelés vagy mérés természetéből következik, hogy egy- és ugyanaz az észlelet, ha ismételjük, kisebb-nagyobb mennyiséggel eltérő eredményre vezet, nemkülönben hogy ezen eredmények egyike sem tekinthető teljesen pontosnak a többinek mellőzésével. E szerint több megfigyelt adatból a meghatározandó mennyiségnek legvalóbbszinü értéke csak oly módon található, ha kiszámitásánál valamennyi megfigyelést veszünk tekintetbe. Tegyük fel pl. hogy M ilyen, az emlitett feltevéseknek megfelelő mennyiség és hogy $o_1\, o_2\, o_3 \ldots\ldots o_n$ ugyaneme mennyiségnek több izben megfigyelt értéke, akkor világos, hogy M minden észlelt értéktől különbözni fog; igy tehát minden egyes észlelt adaton bizonyos $v_1\, v_2 \ldots\ldots v_n$ kiigazitás válik szükségessé, hogy ezt M-el egyenlőnek irhassuk.

Kifejtett tételünk tehát ez:

$$M = o_1 + v_1 = o_2 + v_2 = o_3 + v_3 = \ldots\ldots = o_n + v_n$$

Innen:

$$[66] \quad v_1 = M - o_1\,;\; v_2 = M - o_2\,;\; v_3 = M - o_3\,;\; v_n = M - o_n$$

Ily módon találtuk v kiigazitásokat, melyek mindama elkerülhetetlen hibákat foglalják magukban, melyekkel észleleteink terhelve vannak. Értékük részint igenleges, részint nemleges, mi azzal a tapasztalattal egyezik, hogy valamely megfigyelés ép oly valószinüséggel nagyobbnak mint kisebbnek vehető. Mert ha az egyik eset lehetségesebb a másiknál, akkor ez csakis bizonyos állandó okból jöhetne létre. Ekkor azonban észleleteink az esetleges hibákon kivül még állandó hibákkal is birnának. Ha tehát csakis elkerülhetetlen és igen apró hibák képezik tanulmányaink tárgyát, akkor ezek előjele ép oly valószinüséggel (+), valamint (—) is lehet.

E tapasztalati igazságok szerint a megfigyelt mennyiség legvalóbbszinü M értékét úgy kell meghatározni, hogy ez valamennyi megfigyelést a lehetőségig megközelitse, azaz úgy hogy kiigazitásaink a legkisebbek legyenek.

Egyenlő pontosságu észleletekre megfelelünk e követelésnek, ha M-et a megflgyelések számtani közepeséül vesszük. Általáaosan szólva, szabályunk a következő: a több izben megfigyelt mennyiség legvalóbbszinü M értéke csak úgy számitható ki, ha a számitás által v kiigazitások négyzetének összegére a minimális értéket biztositottuk.

E tételek elseje nem szorul igazolásra, de utóbbi állitásunk Encke szerint következőkép bizonyitható:

Legyen (W) a valószinüségnek kifejezője, hogy valamely észlelt mennyiség v-vel hibás, akkor ezt úgy irhatjuk:

[67] $$W = \varphi\,(v)$$

Ez a valószinüségi függvény v hibaeset kifejezése, de határozott értékét egyelőre még nem ismerjük.

22. §. A valószinüségi függvény leszármaztatása.

Szükségesnek tartjuk a valószinüségi számitásnak néhány tételét előre bocsátani. Valószinüség alatt a mennyiségtanban azt a viszonyt értjük, mely valamely eseményre nézve a kedvező és a lehetséges esetek száma között van meg. Ez tehát mindig igazi tört, melynek W értéke az egység és a zerus közé esik, azaz:

[68] $$1 > W > 0$$

E kifejező mondja, hogy W valószinűségnek felső határa az egység, vagyis az az eset, melyben a kedvező esetek száma egyenlő a lehetséges esetek számával, azaz a bizonyosság. W alsó határa a zerus vagy a lehetetlenség.

Továbbá meg kell még jegyeznünk azt, hogy $W = \varphi\,(v)$ egyenletben v minden képzelhető értéket fölvehet, mert csak ily alapon nyerünk a [67] egyenlet részére általános érvényü kifejezést.

Elemezzük ezután a valószinüségi függvény határértékeit.

$W = \varphi\,(v)$ soha sem lehet nullává, mert ez feltételezne hiba nélküli megfigyelést, a mi pedig csak akkor képzelhető, ha maga a hiba $v = \infty$ azaz véghetetlen nagy. Ugyan-e valószinüségi függvény maximál értékét akkor éri el, ha v, azaz a hiba végtelen csekély, mely esetben $W = 1$.

Igy:

[69] $$W_{\text{max.}} = \varphi\,(v)_{\text{max.}} = 1$$

Ezek után a valószinüségi tétel az igen csekély dv hiba megejtésére igy irható:

[70] $$W_1 = \varphi_1\,(v)\,dv$$

E kitétel egészlete $+\infty$ és $-\infty$ határok között ama valószinüséget fejezi ki, hogy az e határok között fekvő hibát megejtettük, mi azonban bizonyos, miért is az egészlet értéke az egységgel egyenlő.

[71] $$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi\,(v)\,dv = 1$$

A 21. §. végén emlitettük, hogy egyenlő pontos megfigyelésekre a megfigyelt mennyiség legvalóbbszinü M értéke a megfigyelések számtani közepével legyen egyenlő, azaz feltevésünk az eddigi jelöléssel igy fejezhető ki:

[72] $$M = \frac{o_1 + o_2 + o_3 + \ldots + o_n}{n}$$

Innen következik:

[73] $$Mn - (o_1 + o_2 + o_3 + \ldots + o_n) = 0$$

Lássuk ezután követelésünknek mennyiségtani kifejezőjét, ha ez alkalommal a [66] egyenletcsoportot vesszük tekintetbe.

$$\begin{aligned} v_1 &= M - o_1 \\ v_2 &= M - o_2 \\ v_3 &= M - o_3 \\ &\ldots\ldots \\ v_n &= M - o_n \end{aligned}$$

Ez egyenletek összege:

$$v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_n = nM - (o_1 + o_2 + o_3 \ldots o_n)$$

vagy a [73] egyenlet alapján:

$$nM - (o) = 0 \quad \text{tehát:}$$

[74] $$[v] = 0$$

Szóval egyenlő pontosságu megfigyeléseknek legvalóbbszinü értékét csak úgy találhatjuk, ha a megfigyeléseken tett v kiigazitásoknak elsőrangu összege a zeróval egyenlő. A [74] egyenletben birjuk tehát a számtani közepesnek a feltételét.

Hogy továbbá M bármely számu és természetü megfigyeléseknek legvalóbbszinü értékét adhassa, e czélból v kiigazitásokkal a hibafüggvény számára a legnagyobb valószinüséget kell biztositani.

Legyen tehát $W_1 = \varphi(v_1)$; $W_2 = \varphi(v_2)$; $W_3 = \varphi(v_3) \ldots W_n = \varphi(v_n)$ ama valószinüségek kifejezője, hogy valamely mennyiségnek az értékét $v_1\, v_2\, v_3$ hibákkal sikerült megfigyelni, akkor ez esetek együttes beálltára az összetett V valószinüséget mennyiségtanilag igy biztositjuk:

$$V = W_1 \times W_2 \times W_3 \times \ldots . \times W_n \quad \text{vagy}$$

$$V = \varphi(v_1) \times \varphi(v_2) \times \varphi(v_3) \times \ldots . \ \varphi\,)v_n)$$

Mely feltétel mit sem változik, ha ennek logaritmusát is vesszük:

$$\log V = \log \varphi(v_1) + \log \varphi(v_2) + \ldots . + \log \varphi(v_n)$$

Hogy az ily módon kifejezett összetett valószinüség részére a maximál értéket biztositsuk, kell minden összeadandónak részletes külzeléki hányadosát venni és az egész összeget nullával egyenlőnek irni.

$$\frac{d \log \varphi(v_1)}{d v_1} + \frac{d \log \varphi(v_2)}{d v^2} + \frac{d \log \varphi(v_3)}{d v_3} + \ldots + \frac{d \log \varphi(v_n)}{d v_n} = 0$$

Szabadságunkban áll továbbá az egymásra következő törtek számlálóját és nevezőjét rendre $v_1\, v_2\, v_3 \ldots . \ v_n$-nel megszorozni. Tehát igy:

$$[75] \quad \frac{v_1\, d \log \varphi(v_1)}{v_1\, d v_1} + \frac{v_2\, d \log \varphi(v_2)}{v_3\, d v_2} + \frac{v_3\, d \log \varphi(v_3)}{v_3\, d v_3} + \ldots . + \frac{v_n\, d \log \varphi(v_n)}{v_n\, d v_n} = 0$$

Ugyanez egyenlettel még a számtani közepese is biztositandó, azaz hogy:

$$[76] \qquad [v] = v_1 + v_2 + v_3 + \ldots . + v_n = 0$$

A [75] és [76] egyenletek együttes megállása azonban csak úgy lehetséges, ha

$$\frac{d \log \varphi(o_1)}{v_1\, d v_1} = \frac{d \log \varphi(v_2)}{v_2\, d v_2} = \frac{d \log \varphi(v_3)}{v_3\, d v_3} = \ldots . = \frac{d \log \varphi(v_n)}{v_n\, d v_n}$$

már pedig ekkor ezeknek valamely (K) állandó értékkel kell birniok.

Ily alapon egész általánossággal irható:

[77] $$K = \frac{d \log \varphi(v)}{v\, d v}$$

Ha a nevezővel átszorozunk:

[78] $$d \log \varphi(v) = K v\, d v$$

És [78] egészlete:

$$\int d \log \varphi(v) = K \int v\, d v$$

Ha eme egészletnek még egyelőre ismeretlen állandóját log C-nek irjuk, akkor lesz:

[79] $$\log \varphi(v) = \frac{K}{2} v^2 + \log C$$

Ha [79] egyenletből az eredeti egyenletre áttérünk, melynek logaritmusa itt áll. És ha C-vel a természetes logaritmusok alapszámát jelöljük, találjuk:

[80] $$\varphi(v) = C \,.\, e^{\frac{K}{2} v^2}$$

A [69] egyenlet elemzése alkalmával hangsúlyoztuk, hogy v kiigazitás kisebbedésével $\varphi(v)$-nek nőnie kell. Ebből következik, hogy a [80] egyenletnek hatványkitevője (—) előjellel birjon. Ily alapon helyes eljárásunk, ha $\frac{K}{2}$ kitevőt $(-h^2)$-vel pótoljuk.

Szóval a valószinüségi függvény helyesebb alakja ez:

[81] $$\varphi(v) = C e^{-h^2 v^2}$$

A [81] egyenletben már csak C állandó ismeretlen. Ennek meghatározására [71] egyenletbe a [81] egyenlet eredményét irjuk. Ezzel:

[82] $$1 = C \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2 v^2}$$

Ezt átalakitjuk ismert egészletté, ha $h^2 v^2 = t^2$-nek irunk, honnan $h v = t$ és $h\, d v = d t$ vagy $d v = \frac{d t}{h}$. Ez adatokkal a [82] egyenletbe visszatérve:

$$1 = \frac{C}{h} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} d t \quad \text{honnan}$$

[83] $$\frac{h}{C} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt$$

Tudomás szerint a [83] egyenlet jobb oldalán egy Euler-féle integrált látunk, melynek értéke:

[84] $$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$$

A [83] és [84] egyenlet összehasonlitása által következik elvégre C-nek határozott értéke:

[85] $$C = \frac{h}{\sqrt{\pi}}$$

Ezzel pedig az egyes valószinüségi függvény határozott értéke [81] szerint:

[86] $$\varphi(v) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 v^2}$$

[86] egyenlet azon valószinüségnek határozott kifejezője, hogy valamely megfigyelésben v hibát ejtettünk.

24. §. A valószinüségi függvény alakja.

A valószinüségi függvény:

$$\varphi(v) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 v^2}$$

fel is rajzolható, ha abban $h = 1$-nek irunk, v-nek pedig az alább elsorolt értéket tulajdonitunk. Ezzel találtatik:

$\pm v$	$\varphi(v)$	$\pm v$	$\varphi(v)$
0	0·564	1·0	0·208
0·2	0·542	1·5	0·059
0·4	0·481	2·0	0·010
0·6	0·394	3·0	0·000
0·8	0·298	∞	0

Ha tehát merőleges tengelyrendszert választunk, l. 25. ábrában OP és QR tengelyt és OP ordinátatengelyen $\varphi(v)$ értékét felmérjük, mely ennek a 0 abscissára megfelel, ekkor kitüntettük

$\varphi(v)$-nek legnagyobb értékét, utána kitüntetjük a többi $\pm v$ absczissák ordinatáit is. Igy ábrázoltuk 25. ábrával hibafüggvényünk változó értékét a hiba nagyságával.

24. §. A hibafüggvény elemzése.

$$\varphi(v) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-h^2 v^2}$$

a valószinüségi függvényben h csak addig állandó, mig megfigyeléseink pontossága nem változik. Idézett egyenletből az is következik, hogy változatlan v hibára $\varphi(v)$ értéke annál inkább kisebbedik, mennél nagyobb h, vagy más szóval, h növekedésével csökken a lehetőség egy- és ugyanazon v hiba megejtésére. Onnan van, hogy Gauss Frigyes e h mennyiséget a szabatosság mértékének nevezte.

Gauss Frigyes, a hires göttingai csillagász az általa 1809-ben fölfedezett hibaszámitás alapelvét a [86] egyenletben fejezte ki, melynek alkalmazása által az összetett V_1 valószinüség oly esetre is felirható, hol minden egyes megfigyelés más $h_1\ h_2\ h_3\ h_n$ pontossággal lett megejtve.

Ugyanis:

$$V_1 = \varphi(v_4) \times \varphi(v_2) \times \varphi(v_3) \times \ldots\ldots \times \varphi(v_n)$$

ha erre a [86] egyenletet alkalmazzuk, akkor:

$$[87] \quad V_1 = \frac{h_1 h_2 h_3 \ldots h_n}{\sqrt{\pi^n}} e^{-(h_1{}^2 v_1 + h_2{}^2 v^2 + h_3{}^2 v_3 + \ldots + h_n{}^2 v_n{}^2)}$$

Vagy ha az összetett valószinüséget egyenlő pontosságu megfigyelésekre V_2-vel jelöljük, igy ez:

$$[88] \quad V_2 = \frac{h^n}{\sqrt{\pi^n}} e^{-h^2 (v_1{}^2 + v_2{}^2 + \ldots\ldots + v_n{}^2)}$$

A [87] és [88] egyenlet maximál értéke akkor áll elő, ha mindeniknek a hatványkitevője minimális értéket ér el; szóval ha különböző pontosságu megfigyelésekre:

$$[89] \quad h_1{}^2 v_1{}^2 + h_2{}^2 v_2{}^2 + h_3{}^2 v_3{}^2 + \ldots\ldots + h_n{}^2 v_n{}^2 = [h^2 v^2]_{\text{min.}}$$

minimummá válik.

Egyenlő pontosságu megfigyelésekre biztositjuk a legnagyobb valószinüséget, ha:

$$[90] \quad v_1{}^2 + v_2{}^2 + v_3{}^2 \ldots\ldots v_n{}^2 = [v^2]_{\text{min.}}$$

Szóval, ha a kiigazitások négyzetösszege minimum.

25. §. A hibaszámitás felosztása.

Gerling a méréstan feladatainál a hibaszámitás szempontjából három főesetet különböztet meg.

1. A meghatározandó mennyiségek függetlenek egymástól és ha ezeket közvetetlenül megmértük, akkor „közvetetlen megfigyelések kiigazitásával van dolgunk.

2. Ha az adatokat közvetetlenül figyeltük meg, de ha ezek egymással mennyiségtani összefüggésben állanak. Ez esetet nevezzük feltételes megfigyelések kiigazitásának.

3. A kipuhatolt adatok függetlenek egymástól, de nagyságuk csak közvetett úton határozható meg. E feladat közvetitő megfigyelések kiigazitásának neveztetik.

26. §. Közvetetlen megfigyelések kiigazitása.

Ha mennyiséget közvetetlenül megfigyelünk és pedig több izben, mint ezt a szóban forgó meghatározás követeli, akkor e fölös számu adatokkal a hibát is megtudhatjuk. Ily mérések vagy egyenlő körülmények közt ejthetők meg; hol tehát minden egyes adatot egyazon észlelő, egyazon műszerrel és változatlan gonddal határozott meg. Vagy foganatosithatjuk ily méréseket változó körülmények közt, ha tudniillik eme tényezők egyike vagy másika változott.

27. §. Egyenlő pontosságu megfigyelések legvalóbbszinü értéke.

Legyen O a meghatározandó mennyiség hibátlan értéke, $o_1\, o_2\, o_3 \ldots . o_n$ eme mennyiség több izben megfigyelt értéke, M ezen mennyiség legvalóbbszinü értéke, $v_1\, v_2\, v_3 \ldots v_n$ az n számu megfigyelésen teendő kiigazitás, hogy megfigyelésünk M értékét adja. E jelölés alapján következik:

$$M = o_1 + v_1 = o_2 + v_2 = o_3 + v_3 = \ldots . = o_n + v_n$$

Továbbá a kiigazitások négyzetei:

$$v_1{}^2 = (M - o_1)^2; \quad v_3{}^2 = (M - o_2)^2; \quad v_3{}^2 = (M_3{}^2 - o_3)^2;$$

$$\ldots . \; v_n{}^2 = (M - o_n)^2 \quad \text{tehát:}$$

$$[91] \quad [v^2] = (M - o_1)^2 + (M - o_2)^2 + \ldots . + (M - o_n)^2$$

A [90] egyenlet nyomán biztositjuk a legnagyobb valószinüséget, ha $[v^2]_{\min}$.

Ezt találjuk:

$\frac{d[v^2]}{dM} = 0$ egyenletből, vagy végrehajtva:

[92] $2(M - o_1) + 2(M - o_2) + \ldots + 2(M - o_n) = 0$

Innen:

[93] $$M = \frac{[o]}{n}$$

A [92] egyenlet, ha szemügyre vesszük, nem egyéb mint $[v] = 0$, vagyis a számtani közepes feltétele.

Az egyes megfigyelés középhibája.

Jelölje $w_1\, w_2\, w_3 \ldots w_n$ az észlelt adatnak ama kiigazitását, melylyel a megfigyelt mennyiség valódi értékére hozható, akkor ez esetben az összetett valószinüség V_2 kifejezőjét a [88] egyenlet nyomán igy kell irni:

$$V_2 = \frac{h^n}{\sqrt{\pi^n}}\, e^{-h^2 [w^2]}$$

A hiba recziprokfogalom a pontossággal; ha tehát az egyiket ismerjük, kifejezhető a második is. A fönnebbi egyenletből találjuk V_2-nek maximál értékét bizonyos h pontosság esetére, ha az első külzeléki hányadost vesszük és nullával egyenlővé irjuk.

$$\frac{d V_2}{d h} = 0$$

A tényleges külzeléki hányados:

$$n\, \frac{h^{n-1}}{\sqrt{\pi}}\, e^{-h^2 [w^2]} - \frac{2 h^n \,.\, h [w^2]\, e^{-h^2 [w^2]}}{\sqrt{\pi}} = 0$$

Ez egyenlet röviditett értéke:

$$n = 2 h^2 [w^2]$$

Ebből a pontosság:

$$h = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{h}{[w^2]}}$$

Tehát ha reciprok értékét mint hibát m-el jelöljük, akkor:

[94] $$m = \frac{1}{h\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{[w^2]}{n}}$$

A hibának vagy pontosságának kifejezésére csak úgy nyerhetünk számértéket, ha legalább két mérést hasonlitunk össze és az egyiknek a hibáját vagy pontosságát egységül választjuk; szóval ily kifejezésekre csak arányszámokat állithatunk fel. Ez okból a dolgon mit sem változtatunk, ha eme arányszámokat bármely állandó számmal osztunk vagy szorzunk. Mert tökéletesen az, ha mondjuk, hogy az egyiknek a pontossága 1, a másodiké 2, vagy az egyiké 4 és a másodiké 8-nak vétetnék.

A számtani közepes hibája.

Ha a számtani közepes hibáját μ-vel jelöljük és a többi adatra az eddigi jelölést megtartjuk, akkor:

[95] $$\pm \mu = O - M$$

vagyis a közepesnek a hibája, a hibátlan mennyiség és a számtani közepes különbzete.

Ez utóbbi adat határozottabb kifejezése céljából felirjuk a megfigyelt mennyiségnek O értékét a megfigyelt adatokkal és ezeknek $w_1\, w_2 \dots w_n$ kiigazitásaikkal. Tudniillik:

$$\begin{aligned} O &= o_1 + w_1 \\ O &= o_2 + w_2 \\ O &= o_3 + w_3 \\ &\dots\dots \\ O &= o_n + w_n \end{aligned}$$

Ez egyenletcsoport összege:

$$n\,O = [o] + [w] \quad \text{honnan}$$

$$\frac{[w]}{n} = O - \frac{[o]}{n}$$

$\frac{[o]}{n}$ azonban nem egyéb, mint M, igy:

$$\frac{[w]}{n} = O - M$$

vagy [95] szerint:

[96] $$\mu = \frac{[w]}{n}$$

A [96] egyenlettel μ-re számértéket nem találhatunk, mert w kiigazitások előjele ép oly valószinüséggel lehet (+) valamint (—) is. Ha tehát minden lehetséges esetet akarunk egyenletünkkel kifejezésre hozni, akkor négyzetösszegére kell áttérni.

Lássuk ennek eredményét, ha elébb csak két megfigyeléssel lenne dolgunk.

Akkor μ^2-nek az értéke, ha w_1 és w_2-nek egyenlő előjeleket tulajdonitunk, ez:

$$\mu^2 = \frac{w_1{}^2 + 2 w_1 w_2 + w_2{}^2}{n^2}$$

A második lehetséges eset az, ha w_1-nek más előjelet tulajdonitunk, mint w_2-nek, ekkor:

$$\mu^2 = \frac{w^{12} - 2 w_1 w_2 + w_2{}^2}{n^2}$$

E két egyenlet összeadása által oly egyenletet nyerünk, mely (μ)-nek az értékét minden lehetséges előjelü kiigazitásokra adja:

$$2\mu^2 = \frac{2 w_1{}^2 + w_2{}^2}{n^2}, \text{ ebből}$$

[97] $$\mu = \frac{\sqrt{w_1{}^2 + w_2{}^2}}{n}$$

Bizonyitásunk még akkor is áll, ha w_1 vagy w_2 ugyancsak két hibaigazitásnak összege lenne. Ezzel pedig]97] egyenlet kettőnél több igazitásra is érvényes, mely alapon tehát egész általánosan azt irhatjuk, hogy:

[98] $$\mu = \sqrt{\frac{[w^2]}{n^2}}$$

Vagy a [94] egyenlet értékével:

[99] $$\mu = \frac{m}{\sqrt{n}}$$

Megjegyzendő azonban, hogy a w kiigazitást sohasem ismerjük. Ez a körülmény kényszerit arra, hogy w kiigazitást [94], [98] és [99] egyenletekben v ismert mennyiséggel pótoljuk.

Az eddig alkalmazott jelölés alapján:

$$O = o_n + w_n \quad \text{és}$$

$$M = o_n + v_n \quad \text{ezek különbzete}$$

$$O - M = w_n - v_n, \text{ mi nem egyéb, mint } \mu.$$

Igy tehát:

[100] $$\mu = w_n - v_n$$

Eme egyenletből: $w_n = v_n + \mu$

Ha folytatólag ezt az egyenletet minden egyes w kiigazitására külön felirjuk és egyenkint négyzetre emeljük, igy lesz:

$$w_1{}^2 = v_1{}^2 + 2\mu v_1 + \mu^2$$
$$w_2{}^2 = v_2{}^2 + 2\mu v_2 + \mu^2$$
$$w_3{}^2 = v_3{}^2 + 2\mu v_3 + \mu^2$$
$$w_4{}^2 = v_4{}^2 + 2\mu v_4 + \mu^2$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\underline{w_n{}^2 = v_n{}^2 + 2\mu v_n + \mu^2} \quad \text{és ezek összege}$$
$$[w^2] = [v^2] + 2\mu[v] + n\mu^2$$

A [94] egyenlet szerint $[w^2] = n m^2$;
[74] egyenlet szerint $[v] = 0$;
[99] egyenlet szerint $\mu^2 = \frac{m^2}{n}$

Ha az utóbb nyert egyenletbe három igazolt értéket helyettesitünk, akkor:

$$n m^2 = [v^2] + 0 + n \frac{m^2}{n}$$

Innen pedig:

$$m = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}} \tag{101}$$

mint az egyes megfigyelés középhibája.

Ha ezt továbbá a [99] egyenletbe helyettesitjük, találjuk a számtani közepes hibáját igy:

$$\mu = \frac{m}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{[v^2]}{n(n-1)}} \tag{102}$$

Méréseink természetéből következik, hogy m az egyes megfigyelés remélhető hibája csakis a megfigyelés élességétől függhet, nem pedig a megfigyelések számától. Mig μ a számtani közepes hibája a megfigyelések számával kisebbedik, még pedig a megfigyelések számából kivont négyzetgyök arányában kisebbedik valószinü értéke. A megfigyelések szaporitása által módunkban áll tehát valamely mennyiség valódi értékét nagyon is megközeliteni. Ugyszintén módunkban áll több megfigyelésből meghatározni azt, mennyire bizható meg a meghatározott számtani közepes.

Több megfigyelésnek minőségi összehasonlitása.

Megfigyeléseink vagy méréseink pontossági értékét összehasonlitások vagy egyéb számitások alkalmából háromféleképen szoktuk kifejezni; ugyanis a h-val jelölt pontossági arány számokkal:

2. Az m-el jelölt középhiba arányszámával, vagy
3. a q-val jelölt nyomatékszámmal is.

Tehát általában igy:

$$h_1{}^2 : h_2{}^2 : h_3{}^2 = \frac{1}{m_1{}^2} : \frac{1}{m_2{}^2} : \frac{1}{m_3{}^2} = q_1 : q_2 : q_3 \tag{103}$$

Ily összehasonlitásokra minden mennyiség egyazon egységben legyen kifejezve; pl. az összehasonlitott mennyiségek mindenike ívmértékben, szögperczekben vagy szögmásodperczekben is.

Példa egyenlő pontosságu megfigyelésekre.

Négyzetmértföldet megközelitő földbirtok felmérése czéljából, az alább emlitendő alapvonal hat izben lett közvetetlenül megmérve.

$$
\begin{aligned}
o_1 &= 425{\cdot}670 \text{ méter} \\
o_2 &= 425{\cdot}683 \quad " \\
o_3 &= 425{\cdot}652 \quad " \\
o_4 &= 425{\cdot}681 \quad " \\
o_5 &= 425{\cdot}685 \quad " \\
o_6 &= 425{\cdot}672 \quad " \quad \text{innen}
\end{aligned}
$$

$$M = \frac{[o]}{n} = \frac{443}{6} = 73{\cdot}8$$

Ily számitásoknál tekintetbe sem vesszük azokat a számjeleket, melyek úgy is minden eredményben egyeznek, minthogy emezek a számtani közepesben sem változhatnak. Ez okból csak az utolsó két tizedesnek a számjegyeit adtuk össze és ezt osztottuk el 6-tal. Az eredmény 73·8 igy *mm*-ekben van kifejezve.

Ezzel felirhatjuk a számtani közepes teljes értékét; ez lesz:

$$M = 425{\cdot}6738 \; m.$$

Lássuk ezután adatunk pontosságát. v kiigazitások kifejezésére ismét csak az eltérő két utolsó deczimált vesszük tekintetbe. Általános egyenletünk:

$v_n = M - o_n$. Ezzel v számértékei:

$$
\begin{aligned}
v_1 &= 73{\cdot}8 - 70 = +\ 3{\cdot}8 \\
v_2 &= 73{\cdot}8 - 83 = -\ 9{\cdot}2 \\
v_3 &= 73{\cdot}8 - 52 = +\ 21{\cdot}8 \\
v_4 &= 73{\cdot}8 - 81 = -\ 7{\cdot}2 \\
v_5 &= 73{\cdot}8 - 85 = -\ 11{\cdot}2 \\
v_6 &= 73{\cdot}8 - 72 = +\ 1{\cdot}8 \\
[v] &= -27{\cdot}6 + 27{\cdot}4 = -0{\cdot}2
\end{aligned}
$$

A kiigazitások elsőrangu $[v]$ összege megközeliti a nullát mérésünk legutolsó egységéig.

Folytatólag áttérünk m-re, vagyis az egyes megfigyelésnek középhibájára:

$$v_1^2 = 14{\cdot}44, \quad v_2^2 = 84{\cdot}64, \quad v_3^2 = 475{\cdot}24$$
$$v_4^2 = 51{\cdot}84, \quad v_5^3 = 125{\cdot}44, \quad v_6^2 = 3{\cdot}24,$$

tehát $[v^2] = 754{\cdot}84$ és $[101]$ egyenlettel:

$$m = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}} = \sqrt{\frac{754{\cdot}81}{5}} = 12{\cdot}2864\ mm$$

A számtani közepesnek μ hibája [102] egyenlettel ez:

$$\mu = \frac{12{\cdot}2864}{\sqrt{6}} = 5{\cdot}016\ mm$$

Ebből tapasztaljuk, hogy az egyes mérés szerint a megmért vonal $\pm$ 12·28 *mm*-ig bizonytalan, mig ellenben a számtani közepes már csak 5 *mm*-ig bizonytalan.

Tekintettel a számtani közepes hibájára kiegészitjük a 0·8 *mm*-t teljes milliméterré, az adatot pedig igy irjuk:

$$M = 424{\cdot}674 \pm 0{\cdot}005\ m.$$

Az ily eredmény után dupla előjellel jegyezett szám felismerteti mindig adatunk megbizhatóságát.

Hosszmérés által meghatározott adatoknak a pontosságát még úgy is szoktuk kifejezni, hogy a hosszegységre redukált hibát tört alakban irjuk. Esetünkben:

$$\frac{\mu}{M} = \frac{5}{425674} = \frac{1}{85135}$$

Szóval a megmért alapvonal hosszúságának nyolczvanötezeregyszáz harminczötöd részéig pontos.

28. §. Különböző pontosságu közvetetlen megfigyelések legvalóbbszinü értéke.

A [103] egyenlettel ismertettük szokásos eljárásunkat több megfigyelésnek minőségi összehasonlitására. Ha tehát ez esetben h-val annak a megfigyelésnek a pontosságát jelöljük, melynek $q = 1$ a nyomatékszáma, akkor más h_n pontosságu megfigyelés q_n nyomatékszáma által [103] egyenlettel igy fejezhető ki:

$$h : h_n^2 = 1 : q_n \quad \text{innen}$$

[104] $$h_n = h\sqrt{q_n}$$

Szóval valamely megfigyelésnek h_n pontossága kifejezhető a nyomatékegység pontossága által, ha ezt eme megfigyelésnek nyomatékszámából kivont négyzetgyökével megszorozzuk.

A megfigyelt mennyiség legvalóbbszinü értékének kiszámitása czéljából [87] egyenletből kell kiindulnunk; e szerint V_1 az összetett valószinüség:

$$V_1 = \frac{h_1\, h_2\, h_3 \ldots . h_n}{\sqrt{\pi^n}}\, e^{-(h_1{}^2\, v_1{}^2 + h_2{}^2\, v_2{}^2 + \ldots . + h_n{}^2\, v_n{}^2)}$$

Ha ez egyenletbe [104] egyenlet alkalmazása által a nyomatékszámokat vezetjük be, igy alakja ez:

[105] $$V_1 = \frac{h^n \sqrt{q_1 q_2 \dots q_n}}{\sqrt{\pi^n}} e^{-h^2 [q v^2]}$$

Ezzel oly egyenletet nyertünk, melyben csak egy pontosság fordul elő, mi módon maximuma, vagy mi egyre megy, hatványkitevőjének minimuma könnyebben meghatározható.

Tudniillik a legnagyobb valószinüség biztositására legyen:

$$\frac{d h^2 [q v^2]}{d M} = 0.$$

Az eredmény kimutatására kell minden v-t, $v_n = M - o_n$ egyenlet szerint helyettesiteni. Igy lesz:

$$h^2 [q v^2] = h^2 \{q_1 (M - o_1)^2 + q_2 (M - o_2)^2 + \dots + q_n (M - o_n)^2\}$$

Ennek első külzeléki hányadosa, ha nullával egyenlővé irjuk:

[106] $$2 q_1 (M - o_1) + 2 q_2 (M = o_2) + \dots + 2 q_n (M - o_n) = 0.$$

Az egyenlet feloldása által találtatik:

[107] $$M = \frac{q_1 o_1 + q_2 o_2 + q_3 o_3 + \dots + q_n o_n}{q_1 + q_2 + q_3 + \dots + q_n} = \frac{[q o]}{[q]}$$

Különböző pontosságu megfigyelésnek legvalóbbszinü M értéke a nyomatékszámokkal úgy találtatik, mint összetett testnek súlyponti rendszála. Ha minden megfigyelést saját nyomatékszámával megszorzunk és eme szorzatok összegét a nyomatékszámok összegével elosztjuk.

Az egyes megfigyelés középhibája.

E hibamennyiség kipuhatolása csak úgy sikerül, ha a [105] egyenletből h-nak recziprok értékét az által kiszámítjuk, hogy külzeléki hányadosát h szerint vesszük és ezt nullával tesszük egyenlővé. A megejtendő számitás és az ezt követő átalakitás, úgy mint ezt egyenlő pontosságu megfigyelésekre [95] egyenlettől [101] egyenletig bemutattuk, el is maradhat, ha meggondoljuk, hogy mostani eredményünk a [101] egyenlettel talált eredménytől csak q-nak a bevezetése által különbözhet, azaz hogy [101]-ben $[v^2]$-et $[q v^2]$-tel kell helyettesiteni, mert kiinduló [105] egyenletünk is csak azzal különbözik [88] kiinduló egyenlettől.

Ez alapon a nyomaték egységü megfigyelésnek m hibája igy irható:

$$[108] \qquad m = \sqrt{\frac{[q v^2]}{n-1}}$$

Más q_n nyomatéku megfigyelésnek m_n jelü hibáját ismét a [103] egyenlet alkalmazása által találjuk.

E szerint:

$$\frac{1}{m^2} : \frac{1}{m_n^{\,2}} = 1 : q_n \,; \quad \text{innen:}$$

$$[109] \qquad m_n = \frac{m}{\sqrt{q_n}}$$

Igy tehát bármely megfigyelésnek m_n középhibáját úgy találjuk, ha a nyomatékegységü megfigyelésnek m hibáját a szóban forgó megfigyelésnek nyomatékszámából vont négyzetgyökkel elosztjuk.

A legvalóbbszinü értéknek a hibája.

Ha a 27. §-ban tárgyalt feladatnak és jelen feladatunknak különbségét fontolóra vesszük, felirhatjuk a kérdésben levő μ hibának értékét azonnal.

E czélból tudniillik [99] egyenletet kell mintául venni, mely egyenletben n helyett $[q]$ irandó, mert a 107. számu M-et kifejező egyenletben nem n, hanem $[q]$ a nevező.

Ezzel:

$$[110] \qquad \mu = \frac{m}{\sqrt{[q]}}$$

vagy ha m-nek értékét [108]-ból vesszük:

$$[111] \qquad \mu = \sqrt{\frac{[q v^2]}{[q]\,(n-1)}}$$

Adott esetben legelső feladatunk megfigyeléseink nyomatékszámait meghatározni, mit folytatásképen nehány esetre bemutatunk.

Példa.

1. Ha valamely szöget három izben mérünk, mindig más és más pontossággal, esetleg más-más műszerrel.

Legyen első műszerünk adata $m_1 = 10''$-ig megbizható,
második „ „ $m_2 = 20''$-ig és
harmadik „ „ $m_2 = 60''$-ig megbizható.

$$\text{ekkor} \quad q_1 : q_2 : q_3 = \frac{1}{m_1^{\,2}} : \frac{1}{m_2^{\,2}} : \frac{1}{m_3^{\,2}}$$

$$q_1 : q_2 : q_3 = \frac{1}{(10)^2} : \frac{1}{(20)^2} : \frac{1}{(60)^2}$$

Vagy ha a jobb oldal minden nevezőjét $(10)^2$-val elosztjuk:

$$q_1 : q_2 : q_3 = \frac{1}{1} : \frac{1}{4} : \frac{1}{36} = 36 : 9 : 1$$

mely értékkel mint egyszerü arányszámmal kérdéseinkre megfelelhetünk.

2. Szögszorzással megmértünk egy szöget három izben, mindig más és más (n) szorzószámmal. Ily esetben az egyes mérés m hibája a leolvasás f határértékével egyenes arányban nő, szorzószámával pedig visszás arányban.

Ezzel:

$$m_1 = \frac{f}{n_1};\ m_2 = \frac{f}{n_2};\ m_3 = \frac{f}{n_3}$$

Tehát:
$$q_1 : q_2 : q_3 = n_1{}^2 : n_2{}^2 : n_3{}^2$$

Szóval a szögnek szorozott mérésénél szögadataink nyomatékszámai a szorzószámok négyzeteivel egyenes arányban nőnek.

Ezt az esetet még számokkal is megvilágitjuk.

Ha O szöget három izben szorozva, mérjük és pedig igy:

$O_1 = 75^0\, 23'\, 42{\cdot}5''$ midőn a szorzószám $U_1 = 2$
$O_2 = 75^0\, 23'\, 38{\cdot}2''$ „ „ $U_2 = 4$
$O_3 = 75^0\, 23'\, 39{\cdot}3''$ „ „ $U_3 = 6$

Ez esetre:

$$q_1 : q_2 : q_3 = (2)^2 : (4)^2 : (6)^2$$ vagy röviditve:

$$q_1 : q_2 : q_3 = (1)^2 : (2)^2 : (3)^2 = 1 : 4 : 9.$$

Szögünk legvalóbbszinü értéke.

Ily esetben rendszerint csak a másodperczekben mutatkozik eltérés és a számitás egyszerüsitésére M értéke leszármaztatásánál csakis azokat a szögegységeket vesszük itt tekintetbe, melyekkel megfigyeléseink a legkisebbiknek a számértékét felülmúlják. Pl. $38{\cdot}2''$ a legkisebb szögmennyiség, igy lesz:

$$o_1 = 42{\cdot}5 - 38{\cdot}2 = 4{\cdot}3''$$
$$o_2 = 38{\cdot}2 - 38{\cdot}2 = 0$$
$$o_3 = 39{\cdot}3 - 38{\cdot}2 = 1{\cdot}2''$$

Ezekkel:

$$M = \frac{[q\,o]}{[q]} = \frac{1 \times 4{\cdot}3 + 4 \times 0 + 9 \times 1{\cdot}2}{1 + 4 + 9} = \frac{15{\cdot}1}{14}$$

Tehát M-et most úgy találjuk 38·2" még $\frac{15 \cdot 1}{14} = 1 \cdot 078''$ nagyobbitjuk. Teljes értéke lesz:

$$M = 75^0\,23'\,39 \cdot 28''$$

Lássuk most az egyes megfigyelések hibáját.

$$v_n = M - o_n \quad \text{ez alapon:}$$

$$v_1 = 39 \cdot 28 - 42 \cdot 5 = -3 \cdot 22''$$

$$v_2 = 39 \cdot 28 - 38 \cdot 2 = +1 \cdot 08''$$

$$v_3 = 39 \cdot 28 - 39 \cdot 3 = -0 \cdot 02''$$

Ez adatokkal kiszámitjuk:

v	q	v^2	qv^2
−3·22	1	10·3684	10·3684
+1·08	4	1·1664	4·6656
−0·02	9	0·0004	0·0036
	$[q] = 14$		$[qv^2] = 15 \cdot 0376$

A nyomatékegység m hibája:

$$m = \sqrt{\frac{[q\,v^2]}{n-1}} = \sqrt{\frac{15 \cdot 0376}{2}} = 2 \cdot 742''$$

A legvalóbbszinü érték μ hibája.

$$\mu = \frac{m}{\sqrt{[q]}} = \frac{2 \cdot 742''}{\sqrt{14}} = 0 \cdot 73''$$

Végül még:

$$m_1 = \frac{2 \cdot 742}{\sqrt{1}} = 2 \cdot 742''$$

$$m_2 = \frac{2 \cdot 742}{\sqrt{4}} = 1 \cdot 371''$$

$$m_3 = \frac{2 \cdot 742}{\sqrt{9}} = 0 \cdot 914''$$

Itt ismételve tapasztaljuk, hogy a legvalóbbszinü adatnak $\mu = 0 \cdot 73''$ hibája kisebb, mint a legpontosabb megfigyelésnek a hibája egymagában, l. m_3-at. Ezek alapján az igy kiszámitott adatnak értékét következőkép irjuk:

$$M = 75^0\,23'\,39 \cdot 28'' \pm 0 \cdot 73''$$

29. §. Függvények valószinü hibája

A földmérőnek, csillagásznak és a természetbúvárnak gyakran oly adatokat kell kiszámitani, melyek értéke több megmért vagy megfigyelt adat nagyságától függ; ekkor igen fontos reánk nézve, ha e kipuhatolt adatok megbizhatóságát ismerjük, azaz ha alaptényezőink pontosságával eredményeink pontosságát kiszámithatjuk. Legyen u ily mennyiség, melynek értékét $t_1\, t_2\, t_3$ megfigyelt mennyiségekkel bármily függvénynyel számitjuk ki. Ezt általában igy fejezzük ki:

$$[112] \qquad u = f\,(t_2\, t_2\, t_3)$$

Ily egyenletnek hibátlan u_1 értékét azonban csak úgy lehetne találni, ha abba minden t megfigyelést hibájával kiigazitva lehetne helyettesiteni. Tehát igy:

$$u_1 = f\,(t_1 \pm m_1\,;\; t_2 \pm m_2\,;\; t_3 \pm m_3)$$

Taylor tantétele szerint felirható ily függvény értéke, ha változóinak hibáit a második hatványig vesszük tekintetbe:

$$[133] \qquad u_1 = f\,(t) \pm m_1 \frac{\delta f\,(t)}{\delta t_1} \pm m_2 \frac{\delta f\,(t)}{\delta t_2} \pm m_3 \frac{\delta f\,(t)}{\delta t_3}$$

A [112] egyenlet nyomán $f\,(t)$ egyenletünknek hibás értéke; ha tehát [113]-ban kifejezett hibátlan értékéből vonjuk le, akkor a számitásnak tökéletlen adataiból származó ε hibáját találjuk;

$$\varepsilon = u_1 - f\,(t) = \pm m_1 \frac{\delta f\,(t)}{\delta t_1} \pm m_2 \frac{\delta f\,(t)}{\delta t_2} \pm \frac{\delta f\,(t)}{\delta t_3}$$

Vagy ha rövidebb irást biztositva $\dfrac{\delta f\,(t)}{\delta t_n} = p_n$-el jelöljük, igy:

$$\varepsilon = \pm m_1\, p_1 \pm m_2\, p_2 \pm m_3\, p_3$$

Minthogy minden megfigyelésnek m hibája ép oly valószinüséggel (+) mint (—) jelü lehet, ez okból úgy mint [97] egyenlet leszármaztatásánál minden lehetséges esetet kell tekintetbe venni, mi itt is csak azzal biztositható, hogy a négyzetösszegre térünk át. Igy:

$$[114] \quad \varepsilon = \sqrt{m_1{}^2 p_1{}^2 + m_2{}^2 p_2{}^2 + m_3{}^2 p_3{}^2 + \ldots} = \sqrt{[m^2 p^2]}$$

Szóval a függvénynek ε hbáját úgy találjuk, ha minden megfigyelt adatnak m középhibáját négyzetre emeljük és ezt a függvénynek hozzátartozó változója szerint részletesen vett különzeléki hányadosának négyzetével szorozzuk; e szorzatokat összeadjuk és ebből négyzetgyököt vonunk. Ez alkalommal szükséges, hogy minden adat egyazon egységben legyen kifejezve, tehát ív mértékben, szögperczekben vagy szögmásodperczekben is.

A [114] egyenletből következik továbbá, hogy minden kiszámitott mennyiség annál hibásabb, minél több megfigyelt adatból lett leszármaztatva. Mert képletünkben minden megfigyelésnek m hibája a végeredmény növesztéséhez járul. Igy fokozódik valamely megmért vonalnak pontossága az által, ha a használt mértérket — mérőrudat vagy mérőszalagot — hosszabbra vesszük, minthogy igy a megfigyelések számát alább szállitjuk.

Fejtegetéseink további megvilágitására kiszámitjuk alábbi elsőrangu függvénynek a hibáját.

1. Legyen $u = a_1 t_1 + a_2 t_2 + a_3 t_3 + \ldots + a_n t_n$, mely egyenletben $a_1\ a_3\ a_3$ szorozó szám, $t_1\ t_2\ t_3 \ldots t_n$ megfigyelt mennyiség.

Ekkor:

$$\frac{\delta u}{\delta t_1} = a_1 ; \quad \frac{\delta u}{\delta t_2} = a_2 ; \quad \frac{\delta u}{\delta t_3} = a_3 ; \quad \frac{\delta u}{\delta t_n} = a_n$$

Ha tehát a megfigyelt adatok hibáit rendre $m_1\ m_2\ m_3\ m_n$-el jelöljük, kifejezhető ε igy:

[115] $\varepsilon = \sqrt{m_1^{\,2} a_1^{\,2} + m_2^{\,2} a_2^{\,2} + m_3^{\,2} a_3^{\,2} + \ldots + m_n^{\,2} a_n^{\,2}}$

2. Előfordulhat az az eset is, hogy minden megfigyelésnél ugyanazt a hibát ejtjük, akkor $m_1 = m_2 = \ldots = m_n$ tehát:

[116] $$\varepsilon = \pm\, m \sqrt{[a^2]}$$

3. Vagy lehet úgy mint a rendes hosszmérésnél a függvénynek minden a szorzója az egységgel egyenlő; ekkor:

$$u = t_1 + t_2 + t_3 + \ldots + t_n \quad \text{és}$$

[117] $$\varepsilon = \pm\, m \sqrt{n}$$

A hosszmérést még két számokkal határozott esetben fogjuk megvilágitani.

4. Ha 100 méter hosszú vonalat úgy mérünk, hogy ötöd részét 20 méter hosszú mérőlánczczal mérjük. Ez esetben egyenletünk $u = a_1 t_1 = 5 \times 20$; mert $a_1 = 5$ és $t_1 = 20\ m$.

A lánczmérés hibája pedig $m_1 = 0{\cdot}02\ m$. Ezekkel:

$$\varepsilon = m \sqrt{a^2} = 0{\cdot}02 \sqrt{(5)^2} = 0{\cdot}1\ m$$

5. Ha más esetben a 100 méter hosszú vonalat úgy mérjük, hogy a 20 méter hosszú lánczot ötször tényleg rámérjük. Egyenletünk ekkor $u = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5$; $m = 0{\cdot}02$ úgy mint azelőtt.

Ezekkel:

$$\varepsilon = m \sqrt{n} = 0{\cdot}02 \sqrt{5} = 0{\cdot}045\ m$$

Szóval a 100 méter hosszú vonalnak mérése 2·5-szer pontosabb, ha ezt 20 méter hosszú lánczczal elejétől végig mérjük, mint ha csak ötöd részét mérjük és teljes hosszát szorzás útján határozzuk meg.

6. Sík háromszögben megmértünk egy oldalt, ennek szemközt fekvő szögét és még egy második szöget is. Mekkora a második szög szemközt fekvő oldalának a hibája, ha ezt a sinus tétellel kiszámitjuk.

Legyen:

$t_1 = A = 35^0\,36' \ldots.\ m_1 = \text{arc } 1' = 0{\cdot}0029$ hibával,

$t_2 = B = 98^0\,45' \ldots.\ m_2 = \text{arc } {}^1\!/_2' = 0{\cdot}0014$ „

$t_3 = b = 265{\cdot}72\ m \ldots.\ m_3 = 0{\cdot}13\ m$ „

Számitásunk egyenletei:

$$a = \frac{b \sin A}{\sin B} \quad \text{és } \varepsilon = \sqrt{[m^2 p^2]}$$

$$p_1 = \frac{\delta a}{\delta A} = \frac{b}{\sin B} \cos A = a \operatorname{cotg} A$$

$$p_2 = \frac{\delta a}{\delta B} = -\frac{b \sin A \cos B}{\sin B_2} = -a \operatorname{cotg} B$$

$$p_3 = \frac{\delta a}{\delta b} = \frac{\sin A}{\sin B} = \frac{a}{b}$$

Ezekkel:

$$\varepsilon_a = \sqrt{(0{\cdot}00029)^2\, a^2 \operatorname{cotg} A^2 + (0{\cdot}00014)^2\, a^2 \operatorname{cotg} B^2 + (0{\cdot}13)^2 \frac{a^2}{b^1}}$$

Ebből a tényezőt kiemelve és cotg A, cotg B valamint b számértékét helyettesitve:

$$\varepsilon_a = a \sqrt{0{\cdot}0^6164 + 0{\cdot}0^74643 + 0{\cdot}0^62506} = a\ 0{\cdot}000679$$

a oldal számitása:

log b	2·4244242
log sin A	9·7650147
	2·1894389
log sin B	9·9949158
log a	2·1945231 innen

$a = 156{\cdot}50\ m$: eme hosszal:

$\varepsilon_a = 0{\cdot}10627\ m.$

Hogy a közvetetlenül megmért b oldalt és a kiszámitott oldalt pontosságára összehasonlithassuk, kiszámitjuk még a hosszegységükre redukált hibát. Igy hiba h_a és h_b értéke:

$$h_a = \frac{\varepsilon a}{a} = \frac{0{\cdot}10627}{156{\cdot}50} = \frac{1}{1472}$$

$$h_b = \frac{m_b}{b} = \frac{0{\cdot}13}{265{\cdot}72} = \frac{1}{2044} \quad \text{tehát:}$$

$$h_a : h_b = \frac{1}{1472} : \frac{1}{2044} = 1\cdot38 : 1$$

Szóval b oldalnak a hosszúsága 38 %-kal pontosabb, mint a kiszámitott és a-val jelölt oldalé.

7. Sik háromszögben megmértünk két szöget: A szöget 1'-nyi pontossággal és B szöget $\frac{1}{2}$-nyi pontossággal. Mekkora a 3-dik C szögnek a hibája, ha ezt az által kiszámitjuk, hogy A és B szög összegét 180 fokból vonjuk le.

Egyenletünk ez esetre lesz:

$$C = 180 - (A + B) \text{ vagy általánosan:}$$

$$u = a_1 t_1 + a_2 t_2 ; \quad a_1 = a_2 = 1$$

$$\varepsilon = \sqrt{[m^2 p^2]}$$

$$p_1 = \frac{\delta u}{\delta t_1} = a_1 = 1 : m; = 1$$

$$p_2 = \frac{\delta u}{\delta t_2} = a_2 = 1 ; \quad m_2 = 0\cdot5$$

Ezekkel:

$$\varepsilon = \sqrt{(1 \times 1)^2 + (1 \times 0\cdot5)^2} = 1\cdot12^1$$

Példánkból tapasztaljuk, hogy igy eljárva, a harmadik C szög eredménye hibásabb, mint a megmért szögek legrosszabbika is. Onnan van, hogy a földmérő a háromszögben mind a három szöget méri meg közvetetlenül, ha nagyobb pontosságot akar biztositani. Ezt háromszögeléseknél tehát nemcsak ellenőrző adatok megszerzése céljából gyakoroljuk, hanem első sorban, hogy méréseinkben nagyobb pontosságot biztositsunk.

30. §. Közvetitő megfigyelések hibaigazitása.

Némely mértani feladatnál csak az a viszony ismeretes, mely bizonyos törvény kifejezésére az állandó és változó tényezők közt fennáll, de az állandók hibátlan számértéke megfigyelések vagy mérések útján határozandó meg. Az ily czélu megfigyelésnek közvetitő megfigyelés a neve.

Feladatunk ismertetésére elsőrangu függvényt választottunk három állandóval és ugyanannyi változóval.

Legyen:

$$u = a X + b Y + c Z$$

az adott függvény, mely $a\,b\,c$ állandókon kivül még X, Y, Z változókkal bir.

Ha függvényünknek megmért u_1 értékére a megfelelő $X_1 Y_1 Z_1$ változóit megfigyeltük, hasonlókép u_2 értékére $X_2 Y_2 Z_2$ változókat és még u_3 értékére $X_3 Y_3 Z_3$ változókat megfigyeltük; akkor emez értékek az adott egyenletbe való behelyettesitése által három egyenletet nyerünk, mely egyenletekből a három ismeretlen $a\,b\,c$ állandók értéke kiszámitható. De igy eljárva, nem találhatjuk $a\,b\,c$ mennyiségek hibátlan értékét, hisz méréseink és megfigyeléseink mindenike hibával jár.

E körülmény kényszeriti a mérnököt arra, hogy ily adatok meghatározására jóval több megfigyelést és mérést ejtsen meg, mint a mennyi a meghatározandók száma. Ily esetben a hibaszámitás a következő.

Jelöljük függvényünk legvalóbbszinü értékét az n-dik megfigyelésre u_n -el, ugyanennek megfigyelt értékét O_n -el és a hozzátartozó változóknak megfigyelt számértékeit $X_n\ Y_n$ és Z_n -el. Ekkor függvényünknek v_n hibája, mely e két eredménynek megfelel, igy irható:

[118] $$v_n = u_n - o_n$$

Ha egyelőre feltesszük, hogy $a\,b\,c$ állandók legvalóbbszinü értékének meghatározása sikerült, igy ezekkel és $X_n\ Y_n\ Z_n$ -el u_n -nek értéke is kifejezhető; tudniillik:

[119] $$u_n = a X_n + b Y_n + c Z_n$$

Ha ezután [119] értéket [118]-ban helyettesitjük, lesz:

$$v_n = - o_n + a X_n + b Y_n + c Z_n$$

Ugyanezt feltételezhetjük megfigyeléseink mindenikére; ez okból fel is irhatjuk:

[120] $$\left\{\begin{array}{l} v_1 = - o_1 + a X_1 + b Y_1 + c Z_1 \\ v_2 = - o_2 + a X_2 + b Y_2 + c Z_2 \\ v_3 = - o_3 + a X_2 + b Y_3 + c Z_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ v_n = - o_n + a X_n + b Y_n + c Z_n \end{array}\right.$$

Ha ez egyenleteket rendre négyzetre emelnők és összeadnók, akkor végeredményül $[v^2] = \varphi\,(a\,b\,c)$ függvényt nyerünk, mely feltevéseinket mind magában foglalja és biztositja.

További kérdésünk már csak az, miképen lehet ez utóbbi egyenletből $a\,b$ és c állandóknak legvalóbbszinü értékét kiszámitani, ha megfigyeléseink n száma bármily nagy szám. Ez úgy sikerül, ha megfigyeléseink egyenlő pontosságát feltételezve, feladatunkra [90] egyenlettel a legnagyobb valószinüséget biztositjuk.

Ez egyenlet szerint legyen:

[121] $$[v^2] = v_1^{\,2} + v_2^{\,2} + v_3^{\,2} + \dots\; v_n^{\,2}$$

v kiigazitásokra $a\,b\,c$ mennyiségek meghatározása által a minimum legyen biztositva. Ennek úgy teszünk eleget, ha:

$$\frac{\delta[v^2]}{\delta a} = 0, \quad \frac{\delta[v^2]}{\delta b} = 0 \text{ és } \frac{\delta[v^2]}{\delta c} = 0$$

kiszámitjuk; azaz ha $[v^2]$-et rendre minden meghatározandóra részletesen külzelékeljük és e külzeléki hányadosokat 0-val egyenlővé irjuk. Általában eljárva eredményünk a [120] egyenletből ez:

[122] $$\begin{cases} v_1 \dfrac{\delta v_1}{\delta a} + v_2 \dfrac{\delta v_2}{\delta a} + v_3 \dfrac{\delta v_3}{\delta a} + \dots + v_n \dfrac{\delta v_n}{\delta a} = 0 \\ v_1 \dfrac{\delta v_1}{\delta b} + o_2 \dfrac{\delta v_2}{\delta b} + v_3 \dfrac{\delta v_3}{\delta b} + \dots + v_n \dfrac{\delta v_n}{\delta b} = 0 \\ v_1 \dfrac{\delta v_1}{\delta c} + v_2 \dfrac{\delta v_2}{\delta c} + v_3 \dfrac{\delta v_3}{\delta c} + \dots + v_n \dfrac{\delta v_n}{\delta c} = 0 \end{cases}$$

[122] egyenletben kifejtjük most a részletesen vett külzeléki hányadosokat [120] egyenletcsoportból.

Eredménye ez:

[123] $$\begin{aligned} \frac{\delta v_1}{\delta a} &= X_1; \; \frac{\delta v_2}{\delta a} = X_2 \dots \frac{\delta v_n}{\delta a} = X_n \\ \frac{\delta v_1}{\delta b} &= Y_1; \; \frac{\delta v_2}{\delta b} = Y_2 \dots \frac{\delta v_n}{\delta b} = Y_n \\ \frac{\delta v_1}{\delta c} &= Z_1; \; \frac{\delta v_2}{\delta c} = Z_2 \dots \frac{\delta v_n}{\delta c} = Z_n \end{aligned}$$

Ezekkel visszatérünk a [122] egyenletcsoportba igy:

[124] $$\begin{cases} v_1 X_1 + v_2 X_2 + v_3 X_3 + \dots + v_n X_n = 0 \\ v_1 Y_1 + v_2 Y_2 + v_3 Y_3 + \dots + v_n Y_n = 0 \\ v_1 Z_1 + v_2 Z_2 + v_3 Z_3 + \dots + v_n Z_n = 0 \end{cases}$$

Elvégre helyettesitjük [124] egyenletek mindenikébe $v_1\, v_2 \dots v_n$ értékét, úgy a hogy [120] egyenletekkel kifejeztük. Ha ezt az első egyenletre bemutatjuk, lesz:

$$\begin{aligned} &X_1 (- o_1 + a X_1 + b Y_1 + c Z_1) + \\ &X_2 (- o_2 + a X_2 + b Y_2 + c Z_2) + \\ &X_3 (- o_3 + a X_3 + b Y_3 + c Z_3) + \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \\ &X_n (- o_n + a X_n + b Y_n + c Z_n) = 0 \end{aligned}$$

Ha a jelzett összegezést végrehajtjuk és $a\,b\,c$ tényezők szerint rendezve felirjuk, akkor eredményünk a Gauss-féle rövidített irásmóddal ez:

[125]
$$\begin{cases} a\,[XX] + b\,[XY] + c\,[XZ] - [oX] = 0 \\ \text{A más két egyenlet betücsere alapján felirható:} \\ a\,[XY] + b\,[YY] + c\,[YZ] - [oY] = 0 \\ a\,[XZ] + b\,[YZ] + c\,[ZZ] - [oZ] = 0 \end{cases}$$

A [125] egyenletcsoporttal visszavittük feladatunkat határozott esetre, mert e szerint mindig annyi az egyenlet, a hány a meghatározandó állandó.

Hasonló módon találjuk az állandók kiszámitására [126] egyenletcsoportot:

[126]
$$\begin{cases} a\,[X^2] + b\,[X^3] + c\,[X^4] = [oX] \\ a\,[X^3] + b\,[X^4] + c\,[X^5] = [oX^2] \\ a\,[X^4] + b\,[X^5] + c\,[X^6] = [oX^3] \end{cases}$$

Ha a meghatározandó alaptörvény ez:

[127]
$$u = aX + bX^2 + cX^3$$

Ily módon eljárva kiszámithatjuk még a hibát is, melylyel egyenletünk a talált állandók használata mellett a valóságtól eltér.

E czélból a [118] egyenlettel v kiigazitásokat határozzuk meg, ezekkel $[v^2]$-et számitjuk, ekkor m a hiba:

[128]
$$m = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-r}}$$

A [128] egyenletben $(n-r)$ különbségben, n az egyenlet megfigyelt értékeinek a száma, r pedig a meghatározott állandók száma. Az eljárás alkalmazását bemutatjuk a Reichenbach-féle távolságmérőn.

31. §. A Reichenbach-féle távolságmérőnek felülvizsgálása.

A Reichenbach-féle távolságmérő egyenletének következő az alakja:

[129]
$$u = a + bY$$

Ha a [125] egyenletcsoporttal kifejezett törvényt ez esetre alkalmazzuk, ekkor alapegyenleteink ezek:

[130]
$$\begin{aligned} an + b\,[Y] &= [o] \\ a\,[Y] + b\,[Y^2] &= [oY] \end{aligned}$$

E két egyenletből következik:

[131]
$$\begin{cases} a = \dfrac{[o]\,[Y^2] - [oY]\,[Y]}{n\,[Y^2] - [Y]^2} \\[2ex] b = \dfrac{n\,[oY] - [o]\,[Y]}{n\,[Y^2] - [Y]^2} \end{cases}$$

Például megvizsgáltuk a bányászakademia műszergyüjteményében levő Winkler-féle busszola műszeren alkalmazott távolságmérőt.

A megfigyeléseket és méréseket úgy foganatositottuk, a mint ezt a Cséti-féle földméréstan 90. oldalán leirva találjuk. Az eredő számadatok és ezeknek a [129]—[131] egyenletekben alkalmazott jelölése kivehető a következő táblából:

Megmért és megfigyelt mennyiségek			Kiszámitott adatok			
o a megfigyelt irányzat megmért hossza méterben	Y a felső és alsó pókszálak közti megfigyelt lécz hossza méterben	ΔY a két egymásra következő léczhossz különbzete méterben	Y^2 a megfigyelt léczhosszak négyzetei	o és Y adatok szorzata	u a meghatározott adatokkal talált távolság	$v = u - o$ a kiszámitott és megfigyelt távolságok eltérése
10	0·059		0·0031	0·56	10·07	+0·07
20	0·118	0·062	0·0139	2·36	20·12	+0·12
30	0·180	0·062	0·0324	5·40	30·14	+0·14
40	0·240	0·060	0·0576	9·60	39·89	−0·11
60	0·365	0·125	0·1332	21·90	60·14	+0·14
80	0·490	0·125	0·2401	39·20	80·39	+0·39
$[o] = 240$ $n = 6$	$[Y] = 1·449$ $[Y]^2 = 2·0996$		$[Y^1] = 0·4803$	$[oY] = 79·02$		

Ezekkel [131] egyenletek mintájára:

$$a = \frac{0·78}{0·782} = 9·999\,; \quad b = \frac{126·42}{0·782} = 162·03$$

Továbbá v kiigazitások négyzetei:

$$\begin{aligned} v_1{}^2 &= 0·0049 \\ v_2{}^2 &= 0·0144 \\ v_2{}^2 &= 0·0196 \\ v_4{}^2 &= 0·0121 \\ v_5{}^2 &= 0·0196 \\ v_6{}^2 &= 0·1521 \\ \hline [v^2] &= 0·2227 \end{aligned} \qquad m = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-r}} = \sqrt{\frac{0·2227}{6-2}} = 0·236$$

Az egyes megfigyelésnek m legvalóbbszinü hibájával találtatnék az első és az utolsó irányzatnak hibája százalékokban kifejezve igy:

$\frac{m}{o_1} \times 100 = \frac{23{\cdot}6}{10} = 2{\cdot}36$ százalék. $\frac{m}{o_1} \times 100 = \frac{23{\cdot}6}{80} = 0{\cdot}295$

Tehát röviden 2 $^1/_3$ és $^1/_3$ százalék között ingadoznak hibáink ha a meghatározott állandókkal számitunk.

32. §. Feltételes észleletek kiigazitása.

Ha $ABC\ldots$ oly megfigyelt mennyiségek, melyekkel egyszersmind bizonyos egyenleteket kell kielégiteni, akkor feltételes észleletekkel van dolgunk. Ez gyakori feladatunk a földméréstanban. Igy ismeretes, hogy minden sik háromszögnek szögösszege 180 fok, a gömbháromszögnek szögösszege pedig (a második résznek 1. §. szerint) 180 + ε. Ugyszintén szükséges, hogy háromszögeléseink oly szögpontjaiban, hol azok teljes kört befednek, a szögek összege 360 fokot adjon. Sik és bezárt poligonban a körületi szögek összege $[\beta] = (n \pm 2)$ 180 fok. Szóval csak ily szögadatokkal biztositjuk háromszöghálóink vagy poligonjaink bezárt alakját, miért is az ily forrásu szöghibáknak szögzárlati hiba a neve. Jellemző e feladatokra nézve még az is, hogy az adott feltételeket kifejező egyenletek γ száma mindig kisebb, mint a meghatározandó n mennyiségek, esetleg szögek száma. Onnan van tehát, hogy e mennyiségeket az adott egyenletekből nem lehet kiszámitani, hanem hogy azokat az elsőtől az utolsóig mind megmérjük. Mert igy eljárva, nem csak hogy ellenőrző adatokat nyerünk, de még adatainknak nagyobb pontosságot is biztositunk, úgy mint ezt a 29. §. 6. és 7. példájával igazoltuk.

Kiigazithatók az ily feltételes megfigyelések kétféle módon:

1. Hogy az adott γ egyenletből γ ismeretlent kiküszöböljük. Igy egy egyenletet nyerünk $(n - \gamma)$ ismeretlennel, mely egyenlet most a feltételeket mind magában foglalja és melynek megfigyelt 0 értékeit úgy igazitjuk ki, mint [125] egyenletcsoporttal ismertettük.

2. Gyakrabban és feladatainknak megfelelően meghatározzuk Korrelánsokkal vagy viszonyitó számokkal.

Ez eljárásunk ismertetésére felirjuk a 0-ra redukált és röviden u-val jelölt γ számu egyenletet az n számu mennyiségre igy:

$$[132] \quad \begin{cases} u_1 = f_1\,(ABC \ldots n) = 0 \\ u_2 = f_2\,(ABC \ldots n) = 0 \\ u_3 = f_3\,(ABC \ldots n) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_\gamma = f_\gamma\,(ABC \ldots n) = 0 \end{cases}$$

Jelöljünk továbbá A-nak észlelt értékét o_1-el, B-nek értékét o_2-vel és igy tovább o_n-el. Akkor világos, hogy e megfigyelt adatok, ha azokat a [132] egyenletcsoportba helyettesitjük, nem adhatnak nullát, hanem rendesen a nullától eltérő Δ_1 Δ_2 és $\Delta\gamma$ értéket fogunk találni. Ez értéket rövidség kedvéért $f(o)$-val jelölve, felirhatjuk igy:

$$[133] \quad \begin{cases} \Delta_1 = f_1(o) = f_1(o_1\, o_2\, o_3 \ldots o_n) \\ \Delta_2 = f_2(o) = f_2(o_1\, o_2\, o_3 \ldots o_n) \\ \Delta_3 = f_3(o) = f_3(o_1\, o_2\, o_3 \ldots o_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Delta\gamma = f\gamma(o) = f\gamma(o_1\, o_2\, o_3 \ldots vn) \end{cases}$$

Ha folytatólag $v_1\, v_2\, v_3 \ldots v_n$-el ama kiigazitásokat jelöljük, melyek, ha $o_1\, o_2\, o_3 \ldots o_n$-hez adjuk, [132] csoportban kifejezett feltevések kielégithetők, akkor ez igy fejezhető ki:

$$[134] \quad \begin{cases} n_1 = f_1(o_1 \pm v_1,\ o_2 \pm v_2 \ldots o_n \pm v_n) = 0 \\ n_2 = f_2(o_1 \pm v_1,\ o_2 \pm v_2 \ldots o_n \pm o_n) = 0 \\ n_3 = f_3(o_1 \pm o_1,\ o_2 \pm v_2 \ldots o_n \pm o_n) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ n\gamma = f\gamma(o_1 \pm o_1,\ o_2 \pm v_2 \ldots o_n \pm v_n) = 0 \end{cases}$$

A Taylor-féle sorból következik [134] csoport határozottabb kifejezője, ha ekkor az igen apró v mennyiségeknek második hatványáig közeledünk:

$$[135] \quad \begin{cases} n_1 = \Delta_1 + v_1 \frac{\delta f_1(o)}{\delta o_1} + v_2 \frac{\delta f_1(o)}{\delta o_2} + v_3 \frac{\delta f_1(o)}{\delta o_3} + \ldots + v_n \frac{\delta f_1(o)}{\delta o_n} = 0 \\ n_2 = \Delta_2 + v_1 \frac{\delta f_2(o)}{\delta o_1} + v_2 \frac{\delta f_2(o)}{\delta v_2} + v_3 \frac{\delta f_2(o)}{\delta o_3} + \ldots + v_n \frac{\delta f_1(o)}{\delta o_n} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ n\gamma = \Delta\gamma + v_1 \frac{\delta f\gamma(o)}{\delta o_1} + v_3 \frac{\delta f\gamma(o)}{\delta o_2} + v_3 \frac{\delta f\gamma(o)}{\delta o_3} + \ldots + v_n \frac{\delta f\gamma(o)}{\delta o_n} = 0 \end{cases}$$

Hogy a leszármazandó törvényt rövidebben ismertessük, bemutatjuk ezt négy adott egyenletre, azaz γ-át négynek vesszük.

A [135] egyenletcsoport egyszerűbb felirása czéljából, továbbá az első egyenletnek az n-dik megfigyelésre részletesen vett külzeléki hányadosát a_n-el jelöljük, a második egyenletét b_n-el, a harmadikét c_n-el és a negyedik egyenletét d_n-el. Szóval a következő helyettesitést hajtjuk végre.

$$\frac{\delta f_1(o)}{\delta o_1} = a_1; \quad \frac{\delta f_1(o)}{\delta o_2} = a_2 \ldots \frac{\delta f_1(o)}{\delta o_n} = a_n$$

$$\frac{\delta f_2(o)}{\delta o_1} = b_1: \quad \frac{\delta f_2(o)}{\delta o_2} = b_2 \ldots \frac{\delta f_2(o)}{\delta o_n} = b_n$$

$$\frac{\delta f_3(o)}{\delta v_1} = c_1 \,;\ \frac{\delta f_3(o)}{\delta o_2} = c_2 \dots \frac{\delta f_2(o)}{\delta o_n} = c_n$$

$$\frac{\delta f_4(o)}{\delta o_1} = d_1 \,;\ \frac{\delta f_4(o)}{\delta o_2} = d_2 \dots \frac{\delta f_4(o)}{\delta o_n} = d_n$$

A tényleges helyettesités [135]-ben:

$$[136] \quad \begin{cases} u_1 = \triangle_1 + v_1 a_1 + v_2 a_2 + v_3 a_3 + \dots + v_n a_n = 0 \\ u_2 = \triangle_2 + v_1 b_1 + v_2 b_2 + v_3 b_3 + \dots + v_n b_n = 0 \\ u_3 = \triangle_3 + v_1 c_1 + v_2 c_2 + v_3 c_3 + \dots + v_n c_n = 0 \\ u_4 = \triangle_4 + v_1 d_1 + v_2 d^2 + v_3 d_3 + \dots + v_n d_n = 0 \end{cases}$$

Folytatólag megengedhető, hogy a [136] csoportnak első egyenletét k_1-el, másodikát k_2-vel, harmadikát k_3-mal és negyedikát k_4-el megszorozzuk. Ez állandó k szorzók segitségével összefüggést létesitünk az adott egyenletek és v kiigazitások között, miért is viszonyitó számoknak vagy Korrelánsoknak nevezzük. Egyuttal megengedhető az is, hogy a [135] egyenletcsoportot v kiigazitásai szerint külzelékeljük. Ezt végrehajtva, lesz:

$$[137] \quad \begin{cases} k_1 a_1 \delta v_1 + k_1 a_2 \delta v_2 + k_1 a_3 \delta v_3 + \dots + k_1 a_n \delta v_n = 0 \\ k_2 b_1 \delta v_1 + k_2 b_2 \delta v_2 + k_2 b_3 \delta v_3 + \dots + k_1 b_n \delta v_n = 0 \\ k_3 c_1 \delta v_1 + k_3 c_2 \delta v_2 + k_3 c_3 \delta v_3 + \dots + k_3 c_n \delta v_n = 0 \\ k_4 d_1 \delta v_1 + k_4 d_2 \delta v_2 + k_4 d_3 \delta v_3 + \dots + k_4 d_n \delta v_n = 0 \end{cases}$$

A [137] egyenletcsoport összege igy irható, ha δv szerint rendezzük:

$$[138] \quad M_1 \delta v_1 + M_2 \delta v_2 + M_3 \delta v_3 + \dots + M_n \delta v_n = 0$$

A [138] egyenlet kifejezője valamennyi feltételnek, hogy tehát feladatunk megoldása alkalmával v kiigazitásokra még a legnagyobb valószinüséget is biztositsuk, igy különböző pontosságu megfigyeléseket feltételezve, még a hibaszámitás [89] számu alapegyenleteit is ki kell elégitenünk. Szóval azt, hogy $[q\,v^2]$ egyenletnek minden kiigazitására részletesen vett külzeléki hányadosoknak összege a nullával legyen egyenlő. Azaz:

$$[139] \quad q_1 v_1 \delta v_1 + q_2 v_2 \delta v_2 + q_3 v_3 \delta v_3 + \dots + q_n v_n \delta v_n = 0$$

Ezek alapján [138] egyenleten kivül még [139] egyenletnek együttes fennállása is biztositandó, mi csak úgy sikerül, ha:

$$M_1 = q_1 v_1 \,;\ M_2 = q_2 v_2 \,;\ M_3 = q_3 v_3 \dots M_n = q_n v_n$$

Vagy [137] egyenletekből minden M-nek értékét kifejezve:

$$\left\{\begin{array}{l} q_1 v_1 = k_1 a_1 + k_2 b_1 + k_3 c_1 + k_4 d_1 \\ q_2 v_2 = k_1 a_2 + k_2 b_2 + k_3 c_2 + k_5 d_2 \\ q_3 v_3 = k_1 a_3 + k_2 b_3 + k_3 c_3 + k_4 d_3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ q_n v_n = k_1 a_n + k_2 b_n + k_3 c_n + k_4 d_4 \end{array}\right. \tag{140}$$

Innen találjuk a kiigazitásokat kifejező egyenleteket:

$$\left\{\begin{array}{l} v_1 = k_1 \frac{a_1}{q_1} + k_2 \frac{b_1}{q_1} + k_3 \frac{c_1}{q_1} + k_4 \frac{d_1}{q_1} \\ v_2 = k_1 \frac{a_2}{q_2} + k_2 \frac{b_2}{q_2} + k_3 \frac{c_2}{q_2} + k_4 \frac{d_2}{q_2} \\ v_3 = k_1 \frac{a_3}{q_3} + k_2 \frac{b_3}{q_2} + k_3 \frac{c_3}{q_3} + k_4 \frac{d_3}{q_3} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ v_n = k_1 \frac{a_n}{q_n} + k_2 \frac{b_n}{q_n} + k_3 \frac{c_n}{q_n} + k_4 \frac{d_n}{q_n} \end{array}\right. \tag{141}$$

A kiigazitásoknak igy talált értékeit helyettesithetjük most a [136] egyenletcsoportnak az első egyenletébe, ekkor:

$$\begin{array}{l} \Delta_1 + a_1 \left(k_1 \frac{a_1}{q_1} + k_2 \frac{b_1}{q_1} + k_3 \frac{c_1}{q_1} + k_4 \frac{d_1}{q_1}\right) + \\ \quad + a_2 \left(k_1 \frac{a_2}{q_2} + k_2 \frac{b_2}{q_2} + k_3 \frac{c_2}{q_2} + k_4 \frac{d_2}{q_1}\right) + \\ \quad + a_3 \left(k_1 \frac{a_3}{q_3} + k_2 \frac{b_3}{q_3} + k_3 \frac{c_3}{q_3} + k_4 \frac{d_3}{q_3}\right) + \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \quad + a_n \left(k_1 \frac{a_n}{q_n} + k_2 \frac{b_n}{q_n} + k_3 \frac{c_n}{q_n} + k_4 \frac{d_n}{q_n}\right) = 0 \end{array}$$

Ha eme egyenletben a jelzett szorzásokat végrehajtva, eredményünket k viszonyitó számok szerint rendezzük és az előforduló összegeket Gauss röviditett irásmódjával kifejezzük, igy lesz:

$$\Delta_1 + k_1 \left[\frac{a\,a}{q}\right] + k_2 \left[\frac{a\,b}{q}\right] + k_3 \left[\frac{a\,c}{q}\right] + k_4 \left[\frac{a\,d}{q}\right] = 0$$

A további három egyenletet betücsere által is fel lehet irni.

$$\left\{\begin{array}{l} \Delta_2 + k_1 \left[\frac{a\,b}{q}\right] + k_2 \left[\frac{b\,b}{q}\right] + k_3 \left[\frac{b\,c}{q}\right] + k_4 \left[\frac{b\,d}{q}\right] = 0 \\ \Delta_3 + k_1 \left[\frac{a\,c}{q}\right] + k_2 \left[\frac{b\,c}{q}\right] + k_3 \left[\frac{c\,c}{q}\right] + k_4 \left[\frac{c\,d}{q}\right] = 0 \\ \Delta_4 + k_1 \left[\frac{a\,d}{q}\right] + k_2 \left[\frac{b\,d}{q}\right] + k_3 \left[\frac{c\,d}{q}\right] + k_4 \left[\frac{d\,d}{q}\right] = 0 \end{array}\right. \tag{142}$$

[142]-ből kiszámitjuk $k_1\, k_2\, k_3\, k_4$ korrelánsokat, minthogy ezek száma mindig annyi, a mennyi az egyenletek száma. Ezeket ismervén, találjuk [141] egyenletekkel az egyes megfigyelések kiigazitásait és pedig úgy, a mint ezt adataink pontossága, mértani összefüggése és a legnagyobb valószinüség követeli.

Feltételes észleletek kiigazitása, feltéve hogy megfigyeléseink egyenlő pontosságuak.

Ekkor egyenleteink annyiban módosulnak, hogy [138] egyenleten kivül a legnagyobb valószinüség biztositására nem [89] egyenletet, hanem [90] egyenlet legyen kielégitve, azaz most csak $[v^2]$ legyen minimum, mert egyenlő pontosság esetén $q = 1$-el vehető mint nyomatékszám.

E feltevés mellett következik v kiigazitások értéke igy:

$$[143]\quad \begin{cases} v_1 = k_1\, a_1 + k_2\, b_1 + k_3\, c_1 + k_4\, d_1 \\ v_2 = k_1\, a_2 + k_2\, b_2 + k_3\, c_2 + k_4\, d_2 \\ v_3 = k_1\, a_3 + k_2\, b_3 + k_3\, c_3 + k_4\, d_3 \\ v_4 = k_1\, a_4 + k_2\, b_4 + k_4\, c_3 + k_4\, d_4 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ v_n = k_1\, a_n + k_2\, b_n + k_3\, c_n + k_4\, d_n \end{cases}$$

Emezekkel pedig a korrelánsok egyenletei ezek:

$$[144]\quad \begin{cases} \Delta_1 + k_1\,[a\,a] + k_2\,[a\,b] + k_3\,[a\,c] + k_4\,[a\,d] = 0 \\ \Delta_2 + k_1\,[a\,b] + k_2\,[b\,b] + k_3\,[b\,c] + k_4\,[b\,d] = 0 \\ \Delta_3 + k_1\,[a\,c] + k_2\,[b\,c] + k_3\,[c\,c] + k_4\,[c\,d] = 0 \\ \Delta_4 + k_1\,[a\,d] + k_2\,[b\,d] + k_3\,[c\,d] + k_4\,[d\,d] = 0 \end{cases}$$

33. §. **Gauss eljárása a korreláns-egyenletek feloldására.**

Kiterjedt háromszögelésnél nem ritka az az eset, hogy az elsőrangu hálóban a megmért adatok kiigazitására 80—100 egyenletünk van, mely egyenletekből ekkor 80—100 korrelánsnak az értékét kell kiszámitani.

Az ily hosszas és szövevényes számitás hibátlan és gyors megoldását feltünően könnyitjük oly eljárással, hol csakis az egyenletek koefficzienseit táblázatokba kell irni és a végrehajtandó osztásokat, szorzásokat logarithmusokkal végezhetjük. Gaussnak ezen rendkivüli elmés eljárását bemutatjuk négy korreláns-egyenletnek feloldása által. Ugyanez a törvény bármily számu egyenletre is kiterjeszthető.

Hogy jelölésünkkel adataink származását is felismerhessük, e czélból az adott alapegyenleteknek a mérés közvetetlen adataival kiszámitott Δ értékét, l. [133] egyenletből, mostan $[a\Delta]$, $[b\Delta]$, $[c\Delta]$ és $[d\Delta]$-val jelöljük azonképen, a mint ez az első, második, harmadik vagy negyedik alapegyenletnek az eredménye. Ezt szem előtt tartva, felirhatjuk a korrelánsok egyenleteit egyenlő pontosságu megfigyelésekre igy:

$$[145] \quad \begin{cases} [a\,a]\,k_1 + [a\,b]\,k_2 + [a\,c]\,k_3 + [a\,d]\,k_4 + [a\,\triangle] = 0 \\ [a\,b]\,k_1 + [b\,b]\,k_2 + [b\,c]\,k_3 + [b\,d]\,k_4 + [b\,\triangle] = 0 \\ [a\,c]\,k_1 + [b\,c]\,k_2 + [c\,c]\,k_3 + [c\,d]\,k_4 + [c\,\triangle] = 0 \\ [a\,d]\,k_1 + [b\,d]\,k_2 + [c\,d]\,k_3 + [d\,d]\,c_4 + [d\,\triangle] = 0 \end{cases}$$

Gauss e négy egyenletből először k_1 korelánst küszöböl ki a levonó eljárást alkalmazván, mely czélból a második, harmadik és negyedik egyenletből mindig az első egyenletet vonja le. Hogy tehát e levonások alkalmával k_1 eltünjék, e végett az első egyenletet először $\left(\frac{a\,b}{a\,a}\right)$-val, másodszor $\left(\frac{a\,c}{a\,a}\right)$-val és harmadszor $\left(\frac{a\,d}{a\,a}\right)$-val kell megszorozni. Eredménye:

$$[146] \quad \begin{cases} \left([b\,b] - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}[a\,b]\right)k_2 + \left([b\,c] - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}[a\,c]\right)k_3 + \\ + \left([b\,d] - \frac{[ab]}{[aa]}[a\,d]\right)k_4 + \left([b\triangle] - \frac{[ab]}{[aa]}[a\triangle]\right) = 0; \\ \left([b\,c] - \frac{[ac]}{[aa]}[a\,b]\right)k_2 + \left([c\,c] - \frac{[a\,c]}{[aa]}[a\,c]\right)k_3 + \\ + \left([c\,d] - \frac{[a\,c]}{[aa]}[a\,d]\right)k_4 + \left([c\triangle] - \frac{[a\,b]}{[aa]}[a\triangle]\right) = 0; \\ \left([b\,d] - \frac{[ad]}{[aa]}[a\,b]\right)k_2 + \left([c\,d] - \frac{[ad]}{[aa]}[a\,c]\right)k_3 + \\ + \left([d\,d] - \frac{[ad]}{[aa]}[a\,d]\right)k_4 + \left([d\triangle] - \frac{[ad]}{[aa]}[a\triangle]\right) = 0. \end{cases}$$

Ezzel kifejeztük a koefficienseket úgy, hogy ezeknek mikénti képezését is felismerhessük, de az eljárás folytatására rövidebb irásmódra van szükségünk, mely a koefficziensnek a származását tünteti ki; ezt Gauss, tekintettel ezeknek képezésére, utóbbi módon foganatositotta:

$$[147]\quad \begin{cases} (b\,b_1\,1)\,k_2 + (b\,c_1\,1)\,k_3 + (b\,d_1\,1)\,k_4 + (b\,\Delta_1\,1) = 0 \\ (b\,c_1\,1)\,k_2 + (c\,c_1\,1)\,k_3 + (c\,d_1\,1)\,k_4 + (c\,\Delta_1\,1) = 0 \\ (b\,d_1\,1)\,k_2 + (c\,d_1\,1)\,k_3 + (d\,d_1\,1)\,k_4 + (d\,\Delta_1\,1) = 0 \end{cases}$$

A [147] egyenletekre ismételten alkalmazza a kiküszöbölésnek előbbi módját.

$$[148]\quad \begin{cases} \left\{(c\,c_1\,1) - \frac{(bc_1 1)}{(bb_1 1)}(bc_1 1)\right\} k_3 + \left\{(c\,d_1 1) - \frac{(bc_1 1)}{(bc_1 1)}(bc_1 1)\right\} k_4 + \\ \qquad + \left\{(c\,\Delta_1 1) - \frac{(bc_1 1)}{(bb_1 1)}(b\,\Delta_1 1)\right\} = 0 \\ \left\{(c\,d_1 1) - \frac{(bd_1 1)}{(b\,b_1 1)}(bc_1 1)\right\} k_3 + \left\{(d\,d_1 1) - \frac{(bd_1 1)}{(b\,b_1 1)}(bd_1 1)\right\} k_4 + \\ \qquad \left\{(d\,\Delta_1 1) - \frac{(bd_1 1)}{(b\,b_1 1)}(b\,\Delta_1 1)\right\} = 0 \end{cases}$$

Ha eme koefficzienseket ugyancsak az előbbi módon rövidebbben irjuk:

$$[149]\quad \begin{cases} (c\,c_1\,2)\,k_3 + (c\,d_1\,2)\,k_4 + (c\,\Delta_1\,2) = 0 \\ (c\,d_1 2)\,k_3 + (d\,d_1\,2)\,k_4 + (d\,\Delta_1 2) = 0 \end{cases}$$

E két egyenletből kiküszöböljük elvégre k_3-at is az előbbi módon, ekkor az eredmény:

$$[150]\quad \left\{(d\,d_1\,2) - \frac{(cd_1 2)}{(c\,c_1 2)}(cd_1 2)\right\} k_4 + \left\{(d\,\Delta_1\,2) - \frac{(cd_1 2)}{(c\,c_1 2)}(d\Delta_1 2)\right\} = 0$$

Vagy rövidebben irva:

$$[151]\quad (d\,d_1\,3)\,k_4 + (d\,\Delta_1\,3) = 0$$

Ebből:

$$k_4 = \frac{-(d\,\Delta_1\,3)}{(d\,d_1\,3)}$$

[149] első egyenletéből:

$$k_3 = \frac{(c\,\Delta_1\,2) - (c\,d_1\,2)\,k_4}{(c\,c_1\,2)}$$

[147] első egyenletéből:

$$k_2 = \frac{-(b\,\Delta_1 1) - (b\,d_1 1)\,k_4 - (b\,c_1 1)\,k_3}{(b\,b_1 1)}$$

És [145] első egyenletéből:

$$k_1 = \frac{-(a\,\Delta) - (a\,d)\,k_4 - (a\,c)\,k_3 - (a\,b)\,k_2}{(a\,a)}$$

Ezzel igazoltuk azt a szabályt, melyet táblázat alakjában a következőkép alkalmazunk:

Sor	Első oszlop					Második oszlop				Harmadik oszlop			Negyedik oszlop	
1	aa	ab	ac	ad	$a\Delta$	bb	bc	bd	$b\Delta$	cc	cd	$c\Delta$	dd	$d\Delta$
2	aa	ab	ac	ad	$a\Delta$	$\frac{ab}{aa}ab$ —	$\frac{ab}{aa}ac$ —	$\frac{ab}{aa}ad$ —	$\frac{ab}{aa}a\Delta$ —	$\frac{ac}{aa}ac$ —	$\frac{ac}{aa}ad$ —	$\frac{ac}{aa}a\Delta$ —	$\frac{ad}{aa}ad$ —	$\frac{ad}{aa}a\Delta$ —
3		$\frac{ab}{aa}ab$	$\frac{ab}{aa}ac$	$\frac{ab}{aa}ad$	$\frac{ab}{aa}a\Delta$	$(bb_1 1)$	$(bc_1 1)$	$(bd_1 1)$	$(b\Delta_1 1)$	$(cc_1 1)$ $\frac{bc_1 1}{bb_1 1}bc_1 1$	$(cd_1 1)$ $\frac{bc_1 1}{bb_1 1}bd_1 1$	$(c\Delta_1 1)$ $\frac{bc_1 1}{bb_1 1}(b_1 1\Delta)$	$(dd_1 1)$ $\frac{bd_1 1}{bb_1 1}bd1$	$(d\Delta_1 1)$ $\frac{bd_1 1}{bb_1 1}(b\Delta_1 4)$
4			$\frac{ac}{aa}ac$	$\frac{ac}{aa}ad$	$\frac{ac}{aa}a\Delta$	$(bb_1 1)$	$(bc_1 1)$ $\frac{bc_1 1}{bb_1 1}(bc_1 1)$	$(bd_1 1)$ $\frac{bc_1 1}{bb_1 1}(bd_1 1)$	$(b\Delta_1 1)$ $\frac{bc_1 1}{bb_1 1}(b\Delta_1 1)$	$(cc_1 2)$	$(cd_1 1)$	$(c\Delta_1 2)$	$(dd_1 2)$ $\frac{cd2}{cc_1 2}cd2$	$(d\Delta_1 2)$ $\frac{cd_1 2}{cc_1 2}c\Delta_1 2$
5				$\frac{ad}{aa}ad$	$\frac{ad}{aa}a\Delta$			$\frac{bd_1 1}{bb_1 1}(bd_1 1)$	$\frac{bd_1 1}{bb_1 1}(b\Delta_1 1)$	$(cc_1 2)$	$(cd_1 2)$ $\frac{cd_1 2}{cc_1 2}cd_1 2$	$(c\Delta_1 2)$ $\frac{cd_1 2}{cc_1 1}(c\Delta_1 2)$	$(dd_1 3)$	$(d\Delta_1 3)$
6													$(dd_1 3)$	$(d\Delta_1 3)$
7														

$$k_4 = \frac{-(d\,\Delta_1\,3)}{(d\,d_1\,3)}$$

$$k_3 = \frac{-(c\,\Delta_1\,2) - (c\,d_1\,2)\,k_4}{(c\,c_1\,2)}$$

$$k_2 = \frac{-(b\,\Delta_1\,1) - (b\,d_1\,1)\,k_4 - (b\,c_1\,1)\,k_3}{(b\,b_1\,1)}$$

$$k_1 = \frac{-(a\,\Delta) - (a\,d)\,k_4 - (a\,c)\,k_3 - (a\,b)\,k_2}{(a\,a)}$$

34. §. Példák feltételes megfigyelések kiigazitására.

1. *példa.* Sík háromszögben kiigazitandó a szögek hibás zárlata, ha minden egyes szöget más meg más pontossággal mértünk. Jelöljük a három megmért szöget o_1 o_2 és o_3-al, ezeknek nyomatékszámát q_1 q_2 és q_3-al.

A kielégitendő függvény az, hogy:

$$(1) + (2) + (3) - 180 = 0.$$

Ha azonban $o_1 + o_2 + o_3 - 180 = \Delta_1$, akkor korreláns-egyenletünk:

$$\Delta_1 + k_1 \left[\frac{aa}{q}\right] = 0$$

Innen:

$$k_1 = \frac{-\Delta_1}{\left[\frac{aa}{q}\right]}$$

$$a_1 = \frac{\delta f_1(o)}{\delta o_1} = +1; \quad a_2 = \frac{\delta f_1(o)}{\delta o_2} = +1$$

$$a_3 = \frac{\delta f_1(o)}{\delta o_3} = +1$$

Ezekkel:

$$k_1 = \frac{-\Delta_1}{\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \frac{1}{q_3}}$$

És az egyes szögadatok kiigazitása [141] egyenlet alapján:

$$v_1 = k_1 \frac{1}{q_1}; \quad v_2 = k_1 \frac{1}{q_2}; \quad v_3 = k_1 \frac{1}{q_3}$$

2. *példa.* Lássuk a szögigazitás szabályát, ha valamely háromszögben mind a három szöget egyenlő pontossággal mértük. Ez esetre:

$$q_1 = q_2 = q_3 = 1, \quad \text{tehát:}$$

$$k_1 = \frac{-\Delta_1}{3} \quad \text{és}$$

$$v_1 = v_2 = v_3 = k_1 = \frac{-\Delta_1}{3}$$

Szóval, ha sík háromszögben mind a három szöget egyenlő pontossággal mérjük, akkor a szögeknek zárlati hibáját azzal tüntetjük el, hogy minden egyes szögadatot ezen hiba harmadrészével változtatunk, tehát hogy azt mind a három szögadatra egyformán szétosztjuk.

3. *példa*. Egyszerü sík háromszöghálóban a szöghibák kiigazitása. Feladatunk ismertetésére a lehető legegyszerűbb alakot választottuk, mely teljes hálónál előfordulhat, l. 26. ábrát. $P_1 P_2$ az alapvonal, melynek (1)-el jelölt háromszögéhez még négy további háromszöget oly módon csatoltunk, hogy utolsója az alapvonalra visszatér.

A jelölést Poroszország katasztérétől vettük át, mint legegyszerűbbet. Minden háromszögben a három egymásra következő oldalt $a\,b\,c$-vel, a velük szemközt fekvő szöget $\alpha\beta\gamma$-val jelöljük, mely betükhöz még az illető háromszögnek a jelzőszámát is irjuk. A számitás kiinduló oldala minden háromszögben az (a) oldal, szemközt fekvő szöge α; a következő szög megjelölésénél az óramutató mozgásirányát követjük. Az oldalaknak és a szögeknek ily összhangzó jelölése feleslegessé teszi azt, hogy az oldalak jelzőbetüit a rajzba irjuk, mi már ama okból is kivánatos, mert minden átmeneti oldalnak tulajdonkép két jelzőbetüje van, azonképen a mint azt az első vagy a következő háromszögnek tulajdonitjuk. A szögek jelzőszámait sem szoktuk a rajzban kiirni; ezt már a háromszög jelzőszáma ismerteti.

Teljes háromszöghálóban, tehát olyfélében, hol az oldalhosszak számitása alkalmából az alapvonalból kiindulva legalább egy körúton mehetünk a hálón végig, mig alapvonalra visszatérünk; a háló bezárt alakja háromféle egyenlettel biztositandó.

1. Ez egyenletek első fajtájával minden egyes háromszögnek a bezárt alakját kell biztositani. Ebből tehát annyi van, a mennyi a háromszög, úgy mint ezt a 26. ábra részére kiigazitottuk.

$$[152] \quad \begin{cases} f_1 = \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 - 180 = 0 \\ f_2 = \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 - 180 = 0 \\ f_3 = \alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 - 180 = 0 \\ f_5 = \alpha_4 + \beta_4 + \gamma_4 - 180 = 0 \\ f_5 = \alpha_5 + \beta_5 + \gamma_5 - 180 = 0 \end{cases}$$

2. Másfajtáju egyenlekkel biztositjuk szögcsomópontokban a a háló bezárt alakját, l. 26. ábrában P_1 pontot. Eme pontban azt követeljük, hogy:

$$[153] \quad \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 + \beta_5 - 180 = 0$$

3. Biztositandó az ugynevezett oldalegyenletekkel az, hogy az oldalhosszuságok számitása egyazon oldalnak a számértékét változatlanul adja, bármily lehetséges uton számitjuk ki az adott hálóban.

E feltétel tehát annyi alapegyenletet szolgáltat, a hány utat követhetünk az oldalhosszak számitása czéljából. A 26. ábrában tehát csak egy ily út lehetséges. Tudniillik a számitást következőleg foganatosithatjuk a sinus tétellel:

$$\frac{P_1 P_3}{P_1 P_2} = \frac{\sin \gamma_1}{\sin \alpha_1}; \quad \frac{P_1 P_4}{P_1 P_3} = \frac{\sin \gamma_2}{\sin \alpha_2}; \quad \frac{P_1 P_5}{P_1 P_4} = \frac{\sin \gamma_3}{\sin \alpha_3};$$

$$\frac{P_1 P_6}{P_1 P_5} = \frac{\sin \gamma_4}{\sin \alpha_4}; \quad \frac{P_1 P_2}{P_1 P_6} = \frac{\sin \gamma_5}{\sin \alpha_5}$$

Ha az ily módon talált öt egyenletet szorzás utján összekötjük, akkor a jobboldalu törtnek a számlálójában és nevezőjében ugyanazoknak az oldalaknak a szorzata áll, értéke tehát az egység. Ezzel az oldalszámitást biztositó egyenlet ez:

[154]
$$1 = \frac{\sin \gamma_1 \sin \gamma_2 \sin \gamma_3 \sin \gamma_4 \sin \gamma_5}{\sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \sin \alpha_3 \sin \alpha_4 \sin \alpha_5}$$

A 32. §-ban tapasztaltuk, hogy ugy [143] valamint a [144] egyenlet felállitása czéljából minden adott alapegyenletet, minden benne előforduló adatra részletesen kell külzelékelni. Hogy tehát e külzeléki hányadosoknak kiszámitását könnyitsük és ezekre egyszerűbb számértéket biztositsunk, az oldalegyenletnek a logarithmusára térünk át.

A [154]-el ismertett egyenletfajtának mindenike igy irható:

[155]
$$\begin{cases} 0 = \log \sin \gamma_1 + \log \sin \gamma_2 + \log \sin \gamma_3 + \log \sin \gamma_4 + \\ + \log \sin \gamma_5 - \log \sin \alpha_1 - \log \sin \alpha_2 - \log \sin \alpha_3 - \log \\ \sin \alpha_4 - \log \sin \alpha_5 = F \end{cases}$$

Lássuk tehát a [155] egyenletnek részletesen vett külzeléki hányadosát valamely (α_n) mennyiségére. Ezt általában igy irhatjuk le:

[156]
$$\frac{\delta F}{\delta \alpha_n} = \frac{\delta \pm \log \sin \alpha_n}{\delta \alpha_n} = \frac{\pm 1}{\sin \delta_n} \cos \alpha_n = \pm \operatorname{cotg} \alpha_n$$

Ha még azt is tekintetbe vesszük, hogy nem természetes logarithmusokkal számitunk, hanem Brigg-félével, igy [156] egyenletnek eredménye még az átváltoztató M tényezővel szorozandó. Egyuttal áttérhetünk hosszmértékről szögmásodperczes értékre is, ha az igy nyert adatot 206265-el elosztjuk. Szóval:

[157]
$$\frac{\delta F}{\delta \alpha_n} = C \operatorname{cotg} \alpha_n$$

szögmásodperczekben, hol $C = \frac{0{\cdot}43429}{206265}$.

De még [157]-nek a számitása kényelmesebb, ha azt logarithmusokkal foganatositjuk.

Kiigazitásaink czéljából az oldalegyenletnek α_n adata szerint részletesen vett külzeléki hányadosát mindig igy számitjuk:

[158] $$\log \frac{\delta F}{\delta \alpha_n} = \log \operatorname{cotg} \alpha_n + 1\cdot32335 - 10$$

Lássuk ezt határozott számra alkalmazva; legyen a szóban forgó szög $\alpha_n = 48^0\, 30'\, 12''$, akkor:

$$\log \operatorname{cotg} \alpha_n = 9\cdot94675$$
$$\log C = 1\cdot32335 - 10$$
$$\log C \times \operatorname{cotg} \alpha_n = 1\cdot27010$$

Ha ennek számát kikeressük:

[159] $$C \times \operatorname{cotg} \alpha_n = 18\cdot62''$$

melyet (+) vagy (—) előjellel kell számitásba venni, azonképen a mint α_n az oldalszámitást biztositó [154] alapegyenletnek a számlálójában vagy nevezőjében áll.

Kisebb terjedelmü hálóban megelégszünk azzal, ha a [158] egyenlettel kiszámitott adatot csak az első tizedes jegyig ismerjük. Ezt pedig kisebb fáradsággal úgy kapjuk, ha a szóban forgó, tehát példánkban $48^0\, 30'\, 12''$ szögadatnak logarithmus-sinusát hétszámjegyü táblában felkeressük s onnan ezen szögfüggvénynek szögmásodperczenkinti változását leolvassuk.

Ez, a mint meggyőződhetünk $48^0\, 30'\, 12''$ szögre 18·6, tehát megközelitve annyi, mint [159]-ből.

4. *példa.* Gyakori feladatunk háromszögeléseknél, hogy az alapvonalnak közvetetlenül megmért hosszából két, vagy két és félszer akkora háromszögoldalra kell áttérnünk, hogy utóbbit mint hosszabb alapvonalat az oldalszámitás czéljaira használhassuk. Hogy ekkor a megkivánt pontosságot biztositsuk, oda törekszünk első sorban, hogy az átkelésre használt háromszögekben jó metszéseket biztositsunk, azaz a számitásra használt szögek mindenike nagyobb legyen 30 foknál és kisebb 150 foknál. Háromszögelő mérnökeink leginkább a 27. ábrával bemutatott kapcsolásmódot alkalmazzák, mert igy a legkisebb munkával a legjobb eredmény biztositható. *a b* a megmért vonal, *B C* a kiszámitott vonal, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 és 8 a megmért szögek. A számitás alkalmával kiszámitjuk *a C*, *a B*, *b C*, *b B* oldalak hosszát a sinustétellel, de *B C*-nek a hosszát a Carnot-tétellel származtatjuk le és pedig úgy *a B C*, valamint *b B C* háromszögekből. Ha ekkor *B C*-nek két izben kiszámitott értéke a kellő szabatossággal egyezik, használjuk e két eredménynek számtani közepesét,

mint BC-nek legvalóbbszinü hosszát. A sinus-tételt BC-nek számitására azért nem alkalmazzuk, hogy BCb vagy aCB rendszerint 30 foknál kisebb szögeket ne kelljen használni.

BC-nek kellő pontossága azonban csak igy biztositható, ha megmért szögadatainkat úgy igazitjuk ki, a hogy ezt mértani összefüggésük és a legnagyobb valószinüség követeli, szóval feltételes megfigyelések módjára. Legyen mérésünk eredménye:

$(1) = bCa = 38^0\,01'\,02{\cdot}8''$	$(4) = baB = 71^0\,13'\,50{\cdot}5''$
$(2) = Cba = 85^0\,56\;\;04{\cdot}9$	$(5) = aBb = 60^0\,09\;\;49{\cdot}8$
$(3) = baC = 56^0\,02\;\;56{\cdot}0$	$(6) = Bba = 48^0\,36\;\;06{\cdot}5$
Összeg $= 180^0\,00'\,03{\cdot}7''$	Összeg $= 179^0\,59'\,46{\cdot}8''$
$\Delta_1 =$ hiba $= \quad + 3{\cdot}7''$	$\Delta_2 =$ hiba $= \quad - 13{\cdot}2''$

$$(8) = Cab = 127^0\;16'\;51''$$
$$(3) + (4) = 127\;\;16\;\;46{\cdot}5$$
$$\Delta_3 \text{ hiba } \qquad -4{\cdot}5$$
$$(7) = CbB = 134^0\;32'\;09{\cdot}1''$$
$$(2) + (6) = 134\;\;32\;\;11{\cdot}4$$
$$\Delta_4 = \text{hiba} \quad + 2{\cdot}3''$$

Hálónk alapegyenletei:

$$f_1 = (1) + (2) + (3) - 180 = 0$$
$$f_2 = (4) + (5) + (6) - 180 = 0$$
$$f_3 = (3) + (4) - (8) = 0$$
$$f_4 = (2) + (6) - (7) = 0$$

Ez alapegyenleteknek minden előforduló adatra részletesen vett külzeléki hányadosait mindig táblázatba irjuk:

1. tábla.

A szög jelzőszáma	1	2	3	4	5	6	7	8
$\frac{\delta f_1(o)}{\delta o_n} = a_n$	$+1$	$+1$	$+1$					
$\frac{\delta f_2(o)}{\delta o_n} = b_n$				$+1$	$+1$	$+1$		
$\frac{\delta f_3(o)}{\delta o_n} = c_n$			$+1$	$+1$				-1
$\frac{\delta f_4(o)}{\delta o_n} = d_n$		$+1$				$+1$	-1	

Ezekkel képezhetjük a korrelánsegyenleteknek együtthatóit, melyeket ismét táblába szoktunk jegyezni.

II. tábla.

Jel	a	b	c	d	Δ
a	$+3$	0	$+1$	$+1$	$+3{\cdot}7''$
b	0	$+3$	$+1$	$+1$	$-13{\cdot}2$
c	$+1$	$+1$	$+3$	0	$-4{\cdot}5''$
d	$+1$	$+1$	0	$+3$	$+2{\cdot}3$

Jegyzet: az első vizszintes sorban (a)-nak a szorzatai állanak, azaz $[a\,a]$, $[a\,b]$, $[a\,c]$, $[a\,d]$ és $[a\,\Delta]$; a második vizszintes sorban b-nek szorzatai, tehát $[a\,b]$, $[b\,b]$, $[b\,c]$, $[b\,d]$ és $[b\,\Delta]$ igy tovább, a harmadik vizszintes sorban c-nek, a negyedikben d-nek szorzatai állanak.

A korrelánsok meghatározására a 33. §-ban fejtegetett eljárást alkalmaztuk, l. III. táblát. Együtthatóink csekély számértékei logarithmus nélkül is eléggé kényelmes számitást biztositottak, mely okból logarithmusokat ez esetben nem használtunk.

Az egyes megfigyelések v kiigazitásait az I. táblával irjuk fel legbiztosabban. Itt magunknak azt jegyezzük meg, hogy ez minden adatnak függőleges rovatából kiolvasható, föltéve, hogy ennek bejegyezett részletes külzeléki hányadosát k_1 k_2 k_3 vagy k_4-el kell szorozni azonképen, a mint ez az első, második, harmadik vagy negyedik vizszintes sorban áll. E szerint lesz:

$$\begin{array}{ll} v_1 = k_1 \qquad\quad = -0{\cdot}4'' & v_4 = k_2 + k_3 = 5{\cdot}12'' \\ v_2 = k_1 + k_2 = -2{\cdot}78'' & v_5 = k_2 \qquad\quad = 5{\cdot}23'' \\ v_3 = k_1 + k_3 = -0{\cdot}51'' & v_6 = k_2 + k_4 = 2{\cdot}85'' \\ \text{Összeg } -3{\cdot}69'' & +13{\cdot}20'' \end{array}$$

$$v_7 = -k_4 = +2{\cdot}38\,; \quad v_8 = -h_3 = +0{\cdot}11''$$

Ha elvégre eme számadatokat tizedmásodperczig lekerekitjük, és ezekkel megmért adatainkat kiigazitjuk, igy az eredmény:

$$\begin{array}{ll} (1)_0 = 38^0\ 01'\ 02{\cdot}4'' & (4)_0 = 71^0\ 13'\ 55{\cdot}6'' \\ (2)_0 = 85\ \ 56\ \ 02{\cdot}1 & (5)_0 = 60\ \ 09\ \ 55{\cdot}0 \\ (3)_0 = 56\ \ 02\ \ 55{\cdot}5 & (6)_0 = 48\ \ 36\ \ 09{\cdot}4 \\ \text{Összeg} = 180^0\ -\ - & \text{Összeg} = 180^0\ -\ - \end{array}$$

III. tábla.

aa	ab	ac	ad	Δ_1	bb	bc	bd	Δ_2	cc	cd	Δ_3	dd	Δ_4
3	0	1	1	$+3{\cdot}7$	3	1	1	$-13{\cdot}2$	3	3	$-4{\cdot}5$	3	$\overset{+}{2{\cdot}3}$
	0	0	0	0	$\frac{0}{-}$	$\frac{0}{-}$	$\frac{0}{-}$	$\frac{0}{-}$	$\pm\frac{1}{3}$	$\pm\frac{1}{3}$	$\pm 1{\cdot}23$	$\pm\frac{1}{3}$	$\pm 1{\cdot}23$
		$+\frac{1}{3}$	$+\frac{1}{3}$	$+1{\cdot}23$	3	1	1	$-13{\cdot}2$	$\overset{+}{2{\cdot}66}$	$\overset{-}{0{\cdot}33}$	$\overset{-}{5{\cdot}73}$	$\overset{+}{2{\cdot}66}$	$\overset{+}{1{\cdot}07}$
			$+\frac{1}{3}$	$+1{\cdot}23$		$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-4{\cdot}4$	$\pm\frac{1}{3}$	$\pm\frac{1}{3}$	$\pm 4{\cdot}4$	$\pm\frac{1}{3}$	$\mp 4{\cdot}4$
							$\frac{1}{3}$	$-4{\cdot}4$	$\overset{+}{2{\cdot}33}$	$\overset{-}{0{\cdot}66}$	$\overset{-}{1{\cdot}33}$	$\overset{+}{2{\cdot}33}$	$\overset{+}{5{\cdot}47}$
										$\frac{(0{\cdot}66)^2}{2{\cdot}33}$	$\frac{0{\cdot}66 \times 1{\cdot}33}{2{\cdot}33}$	$\pm 0{\cdot}19$	$\pm 0{\cdot}376$
												$\overset{+}{2{\cdot}14}$	$\overset{+}{5{\cdot}094}$

$$K_1 = \frac{-3{\cdot}7 - k_4 - k_3}{3} \qquad K_2 = \frac{13{\cdot}2 - k_4 - k_3}{3} \qquad K_3 = \frac{1{\cdot}33 - 0{\cdot}66\, K_4}{2{\cdot}33} \qquad K_4 = \frac{-5{\cdot}094}{2{\cdot}14}$$

$$K_1 = -0{\cdot}40'' \qquad K_2 = 5{\cdot}23'' \qquad K_3 = -0{\cdot}11'' \qquad K_4 = -2{\cdot}38''$$

$$(7)_0 = 134^\circ\, 32'\, 11{\cdot}5''$$
$$(8)_0 = 127^\circ\, 16'\, 51{\cdot}1''$$

A szög jelzőszámának alsó részéhez irt nullával figyelmeztetjük a mérnököt, hogy ez már az adatnak kiigazitott értéke.

Elvégre közöljük még BC-nek a hosszát, ha $ab = 205{\cdot}490$ méter.

$$aC = \frac{ab \sin (2)_0}{\sin (1)_0}; \quad bC = \frac{ab \sin (3)_0}{\sin (1)_0}; \quad aB = \frac{ab \sin (6)_0}{\sin (5)_0};$$
$$bB = \frac{ab \sin (4)_0}{\sin (5)_0}$$

$$BC_1 = \sqrt{aC^2 + aB^2 - 2\, aC\, aB \cos (8)_0} = 462{\cdot}5750$$
$$BC_2 = \sqrt{bC^2 + bB^2 - 2\, bC\, bB \cos (7)_0} = 462{\cdot}5745$$

E két eredmény tehát csakis fél milliméternyi különbzetet mutatott.

Elvégre még a kiigazitott adatoknak megbizhatósága érdekel. Egyenlő pontosságu föltételes megfigyelések m hibáját igy találjuk:

[160] $$m = \sqrt{\frac{[v^2]}{\beta}}$$

hol β az adott alapegyenletek száma. A négyzettáblákkal találtuk:

$v_1{}^2 = 0{\cdot}1600$	$v_5{}^2 = 27{\cdot}3529$	$[v^2] = 75{\cdot}5148$
$v_2{}^2 = 7{\cdot}7284$	$v_6{}^2 = 8{\cdot}1225$	
$v_3{}^2 = 0{\cdot}2601$	$v_7{}^2 = 5{\cdot}6644$	$\beta = 4$
$v_4{}^2 = 26.2144$	$v_8{}^2 = 0{\cdot}0121$	

$$m = \sqrt{\frac{75{\cdot}5148}{4}} = 3{\cdot}79''$$

Szóval a kiigazitott szögadataink csakis $\pm\, 4''$-ig ütik meg a valóságot.

35. §. Szabatos szintmérések összehasonlitása.

Legyen C a leolvasott léczmagasságnak ama hibája, mely akkor lenne megejthető, ha irányzatunk hossza a hosszegységgel vétetnék. Ekkor az i méter hosszú irányzatnak m hibája ez:

$$m = Ci$$

A [117] egyenlet alapján felirható a H méter hosszú vonalnak szintmérő μ hibája, ha bemérésére i méter hosszú irányzatok alkalmazása mellett a műszert N-szer kell felállitani:

$$\mu = Ci\sqrt{N}$$

vagy ha tekintetbe vesszük, hogy $N = \frac{H}{i}$

[161] $$\mu = C \sqrt{i} \sqrt{H}$$

Ily szabatos szintmérésre megszabjuk rendszerint az irányzat hosszát úgy, hogy ez műszerünk látócsövének és a felmérendő talaj domborulatának megfeleljen.

Innen következik, hogy szintmérésünk μ hibája egyenes arányban nő a vonal hosszának négyzetgyökével. Továbbá több szintezett vonal összehasonlitása alkalmával kifejezzük ezeknek q_1 q_2 nyomatékszámait:

[162] $$q_1 : q_2 = \frac{1}{\mu_1{}^2} : \frac{1}{\mu_2{}^2} = \frac{1}{H_1} : \frac{1}{H_2}$$

Szóval több szintezett vonalnak nyomatékszáma arányos úthosszúságuk recziprok értékével.

36. §. **Eljárás szabatos szintmérés végrehajtása alkalmával.**

A mérésre Stampfer nagyobb szintmérő műszere, vagy más hasonló szerkesztmény ajánlható, ha látócsöve 25—30-szorosan nagyit, libellája osztóvonalankint 10″—4″ pontosságot biztosit az irányzótengely vizszintes beállitására. Ezzel előre-hátra 25—30 *m* hosszú irányzatokkal mérünk. A szintmérőlécz sík területen 3 *m*-re, hullámos területen 4 *m*-re szabható. A lécz beosztása rendszerint deczi- és czentiméterekre terjed, kivételesen felosztjuk czentimétereit még 2 milliméter széles sávokra is; l. 28., 29. és 30. ábrát.

A méterhosszú beosztás ekkor 0·1 *mm*-ig legyen biztos, mire nézve időnkint felülvizsgáljuk. Mérés alkalmával a léczet, alsó végén lévő vasgömbjével, l. *D C* 28. ábra, vassarura támasztjuk. Nyugodt és függőleges állását azzal biztositjuk, hogy háromlábu állvány fejéhez támasztva, ott meg is ékeljük és függőlegességét a léczre erősitett szelenczés libellával megfigyeljük. A lécz leolvasása alkalmával becsüljük a vizszintes pókszálnak helyzetét a látócsőben szemlélt léczképen 0·5, esetleg 0.33 *mm*-ig. Gyakran három kifeszitett vizszintes pókszálat alkalmaztatunk ily látócsőben. Ha látócsövünk azonban csak egy vizszintes pókszállal bir, akkor ezen két olvasást teszünk; a második olvasás előtt forditjuk a látócsövet hosszanti tengelye körül 180 fokkal. Az ily módon megszerzett három, esetleg két léczleolvasásnak számtani közepese 0·5—0·3 *mm* egyezzék az egyszerü leolvasás adatával. Mérésünk ellenőrzésére és hibáinak kiigazitása czéljából szintmérésünk egyes útrészeivel bezárt poligonokat képezünk, l. 31. ábrát, vagy akkor is, ha csak két *B* és *C* pontnak szintkülönbsége meghatározandó, igy a szintkülönbséget legalább kétszer mérjük; l. 32. ábra, t. i. oda és vissza.

Az ily poligonról vázlatos rajzot is készitüuk, l. 31. ábrát, hol az egyes útszakaszoknak s azoknak mikénti bemérését nyilakkal és reáirt jelzőszámokkal ismertetjük, sőt feljegyzéseink számadataival a legegyszerűbb módon összefüggésbe hozzuk. A szabatos szintmérés sikerültnek tekinthető, ha $m = 2-3$ *mm* a kilométerenkinti eltérése, vagy zárlati hibája.

Technikai feladatra megejtett szintmérés még igen jó, ha $m = 6-10$ *mm* a kilométerenkinti eltérése. Utóbbi esetben az irányzat hossza még 50—60 *m*-re is fokozható. Igy eljárva, napi munkánk 6—7 kilométer hosszú vonalnak a szintmérése.

37. §. **Szabatos szintmérések hibakiigazitása.**

Eljárásunk ismertetése czéljából tárgyaljuk a 31. ábrában vázolt esetet, hol a megmért útszakaszokkal három bezárt poligont alakitottunk, mely poligonok egyes oldalakkal összefüggésben állanak.

Jelöljük $s_1\ s_2 \ldots s_{12}$-vel az egyes útszakaszoknak megmért szintkülönbségeit, $h_1\ h_2 \ldots h_{12}$ eme szakaszoknak lekerekitett úthosszúságait, $\Delta_1\ \Delta_2\ \Delta_3$ a bezárt három poligonnak magassági hibáit.

A vázolt mérés adataival három függvényt kell kielégiteni. Ha a 31. ábrában mérésünk útirányait a nyilhegygyel felismertettük, akkor minden adatot a nyilhegygyel ellentétesen (—) kell számitásba venni, midőn valamely poligonban elejétől végig haladunk. E szabály szemmel tartásával felirhatjuk mennyiségtani feltételeinket igy:

$$[163] \quad \begin{cases} f_1 = s_1 + s_2 + s_3 + s_4 = 0 \\ f_2 = s_5 + s_6 + s_7 + s_8 - s_3 - s_2 = 0 \\ f_3 = s_9 + s_{10} + s_{11} + s_{12} - s_8 - s_7 = 0 \end{cases}$$

Minthogy különböző pontosságu feltételes kiigazitásokkal van dolgunk, igy most a [141] és [142] egyenlet szerint kell eljárnunk. E czélból legelőször minden egyes függvénynek minden benne előforduló mennyisége szerint részletesen vett külzeléki hányadosát kell leszármaztatni, mely eredményt ismét a túloldali IV. táblázatba jegyeztünk.

IV. tábla.

Az adat jelzőszáma	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\frac{\delta f_1}{\delta o_n} = a_n$	$+1$	$+1$	$+1$	$+1$								
$\frac{\delta f_2}{\delta o_n} = b_n$		-1	-1		$+1$	$+1$	$+1$	$+1$				
$\frac{\delta f_3}{\delta o_n} = c_n$							-1	-1	$+1$	$+1$	$+1$	$+1$
$\frac{1}{q}$	h_1	h_2	h_3	h_4	h_5	h_6	h_7	h_8	h_9	h_{10}	h_{11}	h_{12}

Ezekkel felirhatjuk a három korreláns egyenletet:

$$(h_1 + h_2 + h_3 + h_4) K_1 - (h_2 + h_3) K_2 + \varDelta_1 = 0$$

$$-(h_2 + h_3) K_1 + (h_2 + h_3 + h_5 + h_6 + h_7 + h_8) K_2 - (h_7 + h_8) K_3 + \varDelta_2 = 0$$

$$-(h_7 + h_8) K_2 + (h_7 + h_8 + h_9 + h_{10} + h_{11} + h_{12}) K_3 + \varDelta_3 = 0$$

Ha innen K_1 K_2 K_3 számértékét kiszámitottuk, találjuk [141] szerint az egyes adatoknak (v) kiigazítását:

$v_1 = h_1 K_1$	$v_7 = h_7 (K_2 - K_3)$
$v_2 = h_2 (K_1 - K_2)$	$v_8 = h_8 (K_2 - K_3)$
$v_3 = h_3 (K_1 - K_2)$	$v_9 = h_9 K_3$
$v_4 = h_4 K_1$	$v_{10} = h_{10} K_3$
$v_5 = h_5 K_2$	$v_{11} = h_{12} K_3$
$v_6 = h_6 K_2$	$v_{12} = h_{12} K_3$

v értéke minden egyes adatra azonnal felirható, ha IV. táblázatban az első vizszintes sornak minden bejegyezett értékét K_1-el, a második sornak értékeit K_2-vel, a harmadikéit K_3-al megszorozzuk és az ily módon minden függőleges sorból vett adatoknak algebrai összegét még $\frac{1}{q}$-nak ama számértékével szorozzuk, mely az illető rovatnak legmélyebb vizszintes sorában áll.

Számbeli példa.

Kiterjedtebb területnek szintmérése céljából felmértük a kiinduló főpontokat magában záró vonalakat 11 útszakaszszal úgy, hogy ezek, l. 33. ábrát, három bezárt poligont képeztek.

Mérésünk eredményét alábbi számokban ismertetjük, melyek a szintkülönbséget *mm*-ben fejezik ki:

$s_1 = -12783$	$s_5 = -19622$	$s_9 = +7645$
$s_2 = -8652$	$s_6 = -8731$	$s_{10} = +8521$
$s_3 = +10576$	$s_7 = +20972$	$s_{11} = +13286$
$s_4 = +10991$	$s_8 = +18236$	

Ábránk nyomán találjuk az alapegyenleteket igy:

$$s_1 + s_2 + s_3 + s_4 = 0$$
$$s_5 + s_6 + s_7 + s_8 - s_3 = 0$$
$$s_9 + s_{10} + s_{11} - s_4 - s_8 = 0$$

A számadatokkal találjuk alábbi zárlati hibákat:

$$\Delta_1 = 132\ mm;\ \Delta_2 = 289\ mm;\ \Delta_3 = 225\ mm.$$

A részletesen vett külzeléki hányadok táblázata:

Az adat jelzőszáma	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
a	+1	+1	+1	1							
b			−1		+1	+1	+1	+1			
c				−1				−1	+1	+1	+1
Távolság *km*	0 9	1·2	1 5	0 6	1·8	2·1	1·5	2·4	1·2	1 5	1 8

Ezekkel felirhatók a korrelánsok egyenletei.

$$4{\cdot}2\,K_1 - 1{\cdot}5\,K_2 - 0{\cdot}6\,K_3 + 132 = 0$$
$$-1{\cdot}5\,K_1 + 9{\cdot}3\,K_2 - 2{\cdot}4\,K_3 + 279 = 0$$
$$-0{\cdot}6\,K_1 - 2{\cdot}4\,K_2 + 7{\cdot}5\,K_3 + 225 = 0$$

Az egész egyenletcsoport együtthatói 3-mal oszthatók, innen röviditett alakjuk:

$$1{\cdot}4\,K_1 - 0{\cdot}5\,K_2 - 0{\cdot}2\,K_3 + 44 = 0$$
$$-0{\cdot}5\,K_1 + 3{\cdot}1\,K_2 - 0{\cdot}8\,K_3 + 93 = 0$$
$$-0{\cdot}2\,K_1 - 0{\cdot}8\,K_2 + 2{\cdot}5\,K_3 + 75 = 0$$

Ez egyenleteket a 33. §-ban tárgyalt módon feloldjuk, mely művelet eredményét a 285 oldali táblázatban láthatjuk.

E kiigazitások számértéke lesz:

$$v_1 = 0{\cdot}9\,K_1 = -51{\cdot}9$$
$$v_2 = 1{\cdot}2\,K_1 = -69{\cdot}0$$
$$v_3 = 1{\cdot}5\,(K_1 - K_2) = -7{\cdot}5$$
$$v_4 = 0{\cdot}6\,(K_1 - K_3) = -3{\cdot}6$$
$$\text{Összeg} = -132{\cdot}0\ mm$$

+ 1·4	− 0·5	− 0·2	+ 44	+ 3·1	− 0·8	+ 93	+ 2·5	+ 75
+ 0·14613	− 0·69897 − 1	− 0·30103 − 1	+ 1·64345	+ 0·1787 −	+ 0·0714 −	− 15·71 +	+ 0·0286 −	− 6·286 +
	+ 0·25181 − 1	+ 0·85387 − 2	− 1·19629	+ 2·9213	− 0·8714	+ 108·71	+ 2·4714	+ 81·286
		+ 0·45593 − 2	− 0·79835	+ 0·46583	− 0·94022 − 1	+ 2·03617	+ 0·2598 −	− 32·409 +
					+ 0·41461 − 1	− 1·51066	+ 2·2116	+ 113·695
$K_1 = \frac{-44 + 0{\cdot}2\,k_3 + 0{\cdot}5\,k_2}{1{\cdot}4}$				$K_2 = \frac{-108{\cdot}71 + 0{\cdot}8714\,k_3}{2{\cdot}9213}$			+ 0·34471	+ 2·05576 0·34471
							log K_3 = 1·71105	
$K_1 = -57{\cdot}53$ *mm*				$K_2 = -52{\cdot}52$ *mm*			$K_3 = -51{\cdot}41$ *mm*	

$$
\begin{aligned}
v_5 &= 1{\cdot}8\,K_2 &&= -\ \ 94{\cdot}6\\
v_6 &= 2{\cdot}1\,K_2 &&= -\ 110{\cdot}4\\
v_7 &= 1{\cdot}5\,K_2 &&= -\ \ 78{\cdot}8\\
v_8 &= 2{\cdot}4(K_1 - K_3) &&= -\ \ \ \ 2{\cdot}7\\
& &&= -\ 286{\cdot}5\\
(-v_3) & &&= +\ \ \ \ 7{\cdot}5\\
& \text{Összeg} &&= -\ 279\ mm.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
v_9 &= 1{\cdot}2\,K_3 = -\ \ 61{\cdot}7\\
v_{10} &= 1{\cdot}5\,K_3 = -\ \ 77{\cdot}1\\
v_{11} &= 1{\cdot}8\,K_3 = -\ \ 92{\cdot}5\\
& \qquad\qquad\ \ -\ 231{\cdot}3\\
(\ \ v_8) &= 2{\cdot}7\\
(-v_9) &= 3{\cdot}6 = +\ \ \ 6{\cdot}3\\
& \text{Összeg} = -\ \ 225\ mm.
\end{aligned}
$$

A kiigazitott szintkülönbségek tehát ezek:

$s_1{}^0 = -\ 12834{\cdot}9$	$s_6{}^0 = -\ 8841{\cdot}4$
$s_2{}^0 = \ \ 8721{\cdot}0$	$s_7{}^0 = +\ 20893{\cdot}2$
$s_3{}^0 = +\ 10568{\cdot}5$	$s_8{}^0 = +\ 18233{\cdot}3$
$s_4{}^0 = +\ 10987{\cdot}4$	$s_9{}^0 = +\ 7583{\cdot}3$
$s_5{}^0 = -\ 19716{\cdot}6$	$s_{10}{}^0 = +\ 8443{\cdot}9$

$$s_{11} = +\ 13193{\cdot}5.$$

MÁSODIK FEJEZET.

Mérések hibaigazitása a hibaszámitást megközelitő módokon.

38. § Az eljárás igazolása.

Megmért adataink pontossága nem mindig oly magasrangu, hogy hibájuk kiigazitására megokolva lenne a hibaszámitás hoszszas és költséges szabályait szigoruan alkalmazni. Poligonokra például fel sem állithatunk oly egyenleteket, melyekkel az oldalak hosszúságát és a körületi szögek nagyságát némiképen kifejeznők. Ez igazolja szaktársainknak ama gyakorlati szokásukat, hogy másodrangu, esetleg harmadrangu háromszöghálókban, valamint poligonokban is a megmért adatoknak elkerülhetetlen hibáit egyszerűbb eljárásokkal igazitják ki, mely eljárásokkal a hibaszámitás szabályait módositva alkalmazzák, vagy csak annyiban megközelitik, a mennyiben ez bizonyos esetben igazolva van.

39. §. Másodrangu hálók hibaigazitása.

Költség és munkakimélést czélozva, közbesitünk az elsőrangu háromszöghálónak két-két szomszédpontja közzé több másodrangu pontot, l. 34. ábrában E_{100} és E_{101} elsőrangu és $M_1\, M_2 \ldots M_6$ másodrangu pontot. E másodrangu pontokkal szakadatlan lánczot alakitunk, úgy mint ezt hat háromszöggel bemutattuk. Minden háromszögben megmérjük a három $\alpha\beta\gamma$ belső szöget, azonkivül viszonyitjuk szögmérés által az első és utolsó háromszögnek egyik oldalát az elsőrangu oldalra, azaz megmérjük 34. ábrában φ_1 és φ_2 szöget is. Eme eljárással képesek vagyunk megmért hálónkat kisebb részekben kiigazitani és a kiigazitott szögekkel az elsőrangu oldalból a másodrangu oldalak hosszát nem csak a legrövidebb, de egyuttal a legpontosabb módon is meghatározni.

Az ily lánczalaku hálórésznek teljesen bezárt alakját következő egyenletekkel biztositjuk, ha úgy mint ez rendszerint lehetséges, a másodrangu háromszögeket sik idomuaknak tekinthetjük; tudniillik ha az oldalak hosszúsága 25 kilométernél kisebb. Az egyes háromszög bezárt alakja feltételez:

$$[164]\quad \left\{\begin{array}{l} \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 - 180 = 0 \\ \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 - 180 = 0 \\ \alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 - 180 = 0 \\ \alpha_4 + \beta_4 + \gamma_4 - 180 = 0 \\ \alpha_5 + \beta_5 + \gamma_5 - 180 = 0 \\ \alpha_6 + \beta_6 + \gamma_6 - 180 = 0 \end{array}\right.$$

A poligon bezárt alakja követeli, hogy:

$$[165]\quad \varphi_1 + \alpha_1 + \beta_2 + \beta_3 + \alpha_3 + \beta_4 + \beta_5 + \beta_6 + \varphi_6 - \\ - 180^0\,(5 - 2) = 0.$$

Ha megmért adatainkat a [164] egyenletcsoportba helyettesitjük, találjuk ezeknek szögzárlati hibáit; jelöljük ezeket $h_1\, h_2\, h_3\, h_4\, h_5\, h_6$-tal. Ha továbbá a [165] egyenletből talált szögzárlati hibát a poligonban hp-vel jelöljük. A kiigazitás alkalmával tekintetbe kell venni a szögmérés módját is. Tudniillik alkalmazhatnók a szögszorzást vagy az egyszerü szögmérést a műszernek teljes körjárataival. Rendszerint az utóbbit alkalmazzuk, mert egyszerűbb és olcsóbb, ha műszerünk leolvasó pontossága a megszabott hibahatárt közvetlenül biztositja. Az utóbbi eljárást feltételezve, minden szögpontban bármely szöget két irányzat leolvasásának különbzeteiből találjuk. Ily alapon $M_2 M_4$ és M_6 pontoknak a kerületi szögei $E_{100} M_2 M_4 M_6 E_{101}$ poligonban csak egy-egy szögnek tekinthető.

Tehát nem úgy mint a szögszorzásnál, hol M_1 szög $\alpha_1 \beta_2$ és β_3 összege, tehát három külön megmért szögnek eredménye. Szóval ha a kiigazitás alkalmával a poligonnak minden egyes szögét (p)-vel változtatjuk, ekkor ezt a második háromszög kiigazitásánál csak $\frac{1}{3}(p)$-vel szabad számitásba venni, mert M_2 poligonpontban a 2-dik számu háromszögnek csak β_2 szöge szerepel a poligonszög alkotójául. Ugyanez okból kell a 3-dik háromszögben β_3 és α_3 szöget egyenkint $\frac{1}{3}(p)$-vel változtatni, tehát együttvéve $\frac{2}{3}(p)$-vel.

Ha továbbá minden háromszögben az egyes szögnek ama czélu változtatását, hogy a háromszög magában véve bezárt idomot képezzen, a háromszögnek zárójelbe irt jelzőszámával jelöljük, akkor ezeknek egyenkinti zárlata a 34. ábrában bemutatott hat háromszögre igy biztositható:

$$[166] \quad \left\{ \begin{array}{l} 3\,(1) + \frac{1}{3}(p) + h_1 = 0 \\ 3\,(2) + \frac{1}{3}(p) + h_2 = 0 \\ 3\,(3) + \frac{2}{3}(p) + h_3 = 0 \\ 3\,(4) + \frac{1}{3}(p) + h_4 = 0 \\ 3\,(5) + \frac{2}{3}(p) + h_5 = 0 \\ 3\,(6) + \frac{1}{3}(p) + h_6 = 0 \end{array} \right.$$

A poligonnak bezárt alakja van biztositva, ha:

$$[167] \quad 5\,(p) + (1) + (2) + 2\,(3) + (4) + 2\,(5) + (6) + h_p = 0$$

Az igy kifejezésre hozott kiigazitásokat a leggyorsabban találjuk, ha [166]-ból [167] egyenletnek minden egyes adatát (p)-nek és h_p-nek kivételével kiszámitjuk és eme eredményeket [167]-be helyettesitjük; tehát igy:

$$[168]\quad \begin{cases} (1) = -\dfrac{3h_1 + (p)}{3} \\ (2) = -\dfrac{3h_2 + (p)}{3} \\ 2(3) = -\dfrac{6h_3 + 2(p)}{3} \\ (4) = -\dfrac{3h_4 + (p)}{3} \\ 2(5) = -\dfrac{6h_5 - 2(p)}{3} \\ (6) = -\dfrac{3h_6 - (p)}{3} \end{cases}$$

Ezeknek összege irható [167]-ben:

$$5(p) - \frac{3(h_1 + h_2 + 2h_3 + h_4 + 2h_5 + h_6)}{3} - \frac{8(p)}{3} + h_p = 0$$

Innen:

$$(p) = \frac{3}{7}\left\{(h_1 + h_2 + h_3 + h_4 + h_5 + h_6) + (h_3 + h_5) - h_p\right\}$$

Az igy talált (p) értékkel megyünk [168] egyenletekbe, honnan (1)(2) .... (6) kiigazitásokat találjuk. Ezekkel következnek az egyes háromszögek kiigazitott szögei igy:

$\alpha_1 + (1) + \frac{1}{3}(p)$	$\alpha_4 + (4)$
$\beta_1 + (1)$	$\beta_4 + (4) + \frac{1}{3}(p)$
$\gamma_1 + (1)$	$\gamma_4 + (4)$
$\alpha_2 + (2)$	$\alpha_5 + (5) + \frac{1}{3}(p)$
$\beta_2 + (2) + \frac{1}{3}(p)$	$\beta_5 + (5) + \frac{1}{3}(p)$
$\gamma_2 + (2)$	$\gamma_5 + (5)$
$\alpha_3 + (3) + \frac{1}{3}(p)$	$\alpha_6 + (6)$
$\beta_2 + (3) + \frac{1}{3}(p)$	$\beta_6 + (6) + \frac{1}{3}(p)$
$\gamma_3 + (3)$	$\gamma_6 + (6)$
$\varphi_1 + (p)$	$\varphi_2 + (p)$

Fönnebbi egyenletekből világosan látni szögadataink mikénti kiigazitásait, mely eljárással tulajdonkép a hibaszámitás szigorú szabályait egyszerüsitve követjük.

Folytatólag kiigazitjuk az E_{100} és E_{102} elsőrangu háromszögpontok között elterülő háromszögláncban a szögadatokat. Eljárásunk most csak annyiban különböző, hogy itt φ_2 szögnek az előbb kiigazitott értékét többé változtatni nem szabad. Onnan van, hogy ily esetben a φ_3-as szöget meg sem mérjük, hanem egyszerüen kiszámitjuk és pedig úgy, hogy E_{100} pontban az elsőrangu háromszögnek már kiigazitott szögéből φ_2 kiigazitott szögadatát vonjuk le. Hasonlókép kiszámitjuk φ_4 szöget az E_{101} és E_{102} pontok közötti lánczolatban.

Igy eljárva, eltüntettük a szögmérés elkerülhetetlen apró hibáit, melyek folytán háromszögeink mindannyian nyitott idomot képezne; azaz ha ki nem igazitott szögekkel az oldalakat kiszámitjuk, akkor ezekre annyi eltérő értéket találnánk minden egyes oldalra, a hány úton ennek hossza kiszámitható.

Az eljárást az oldalhosszúságok mikénti számitására a háromszögelésnél ismertetjük részletesebben.

A kiegészitő hálórészek szögkiigazitása másodrangu hálókban.

Végül még csak azt kell emlitenünk, hogy az ily módon lánczalaku hálókkal összekötött elsőrangu pontok között még több közbesitett másodrangu szögponttal lehet dolgunk, l. 34. ábrában M_{12} és M_{13} másodrangu pontokat, melyek háromszögei részben az egyik, részben a második lánczhoz vannak kapcsolva. Eme másodrangu hálót kiegészitő részeknek szögigazitását utoljára hagyjuk, mert elkülönitve kevesebb fáradsággal végezhetjük és kisebb kiterjedésük ezt az egyszerüsitést megengedhetőnek igazolja.

Eljárásunk ismertetésére 35. ábrában a szóbanforgó pontokat nagyobb mértékü rajzzal vázoltuk. Egyszerü irásmód czéljából megszámoztuk a háromszögeket 1-, 2-, 3-, 4-el, a szögek jelölésére ismét $\alpha\beta\gamma$ betüket alkalmaztunk minden háromszögben, úgy mint ezt a 34. §-nak 3. példájában ismertettük.

A négy háromszögnek bezárt alakja feltételez négy egyenletet, úgymint:

$$[169] \qquad \left\{\begin{array}{l} \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 - 180 = 0 \\ \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 - 180 = 0 \\ \alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 - 180 = 0 \\ \alpha_4 + \beta_4 + \gamma_4 - 180 = 0 \end{array}\right.$$

Ha továbbá s_2-vel M_2 pontban s_8-al M_8 pontban azt a körületi szöget értjük, melyet a kiigazitott lánczalaku hálónak $M_4 M_2$; $M_2 M_8$ és $M_8 M_{10}$ oldalai egymással közbezárnak, akkor ezekre ez a feltétel:

$$[170] \quad \begin{cases} \beta_1 + \gamma_2 - s_2 = 0 \\ \beta_2 + \beta_3 + \gamma_4 - s_8 = 0 \end{cases}$$

Az által, hogy megmért szögadatainkat [169] egyenletekbe helyettesitjük, ezeknek $h_1\, h_2\, h_3\, h_4$ jelölt szögzárlati hibáit találjuk. [170] egyenletek a megmért adatok helyettesitése által Δ_2 és Δ_8 hibát szolgáltatják. Utóbbiak birtokában felirhatjuk (1), (2), (3) és (4), vagyis az első, második, harmadik és negyedik háromszögnek a szögkiigazitását.

$$[171] \quad \begin{cases} (1) = -\left[h_1 + \frac{1}{2}\Delta_2\right] : 3 \\ (2) = -\left[h_1 + \frac{1}{2}\Delta_2 + \frac{1}{3}\Delta_8\right] : 3 \\ (3) = -\left[h_3 + \frac{1}{3}\Delta_8\right] : 3 \\ (4) = -\left[h_4 + \frac{1}{3}\Delta_8\right] \end{cases}$$

Ezeknek számértékével a kiigazitott szögek találtatnak:

$$[172] \quad \left\{ \begin{array}{l|l} \alpha_1 + (1) & \alpha_3 + (3) \\ \beta_1 + (1) + \frac{1}{2}\Delta_2 & \beta_3 + (3) + \frac{1}{3}\Delta_8 \\ \gamma_1 + (1) & \gamma_3 + (3) \\ \alpha_2 + (2) & \alpha_4 + (4) \\ \beta_2 + (2) + \frac{1}{3}\Delta_8 & \beta_4 + (4) \\ \gamma_2 + (2) + \frac{1}{2}\Delta_2 & \gamma_4 + (4) + \frac{1}{3}\Delta_8 \end{array} \right.$$

A [171]-ben kifejezett kiigazitás feltételezi, hogy szögeinket az egyszerü mérésmódon a műszer teljes körforgatásai mellett mértük, szóval hogy minden körjáratban az irányzatokat egyszerüen leolvastuk. Tudniillik csak ez esetben igazolt az, ha minden h_n hibát mind a három szögre egyformán osztunk szét és még azonkivül a Δ-val jelölt hibának felét vagy harmadrészét azokra a szögekre, melyek a kerületi szöget ketten vagy hárman képezik.

Ezzel az eljárással ismét a hibaszámitás szigorú törvényeit röviditve alkalmazzuk, mely alkalommal azonban az oldalegyenleteket tekintetbe nem vettük.

40. §. Általános szabály poligonok kiigazitására.

A poligonmérés nem nyujt annyi ellenőrző egyenletet, mint a háromszögelés, hogy ezekkel a poligon alakját, azaz oldalainak és szögeinek hibáját némikép megitélhetnők. Onnan van, hogy a hibaszámitásnak megmért poligonok kiigazitására nincs nagy jelentősége; sőt igazolható az is, hogy általa némely esetekben meg sem felelhetünk a valóság követelményeinek. Ez okból a bányász poligonban nagyobb pontosságot gyakran csak több sikerült ellenőrző méréssel biztosithat; ekkor pedig ezeknek eltérései rendszerint oly csekélyek, hogy tulajdonképen mindegy, bármely módon semmisitjük meg az ily elenyésző hibát.

A gyakorlatban ugyanez okból megközelitő méréseknek hibáit rajzolás útján szoktuk eltüntetni, úgy mint a földmérő, l. Cséti földméréstan 276—279. oldalán. Pontosabb mérésekre számitó-eljárásokat alkalmazunk, de itt is az eljárást úgy módositjuk, hogy azzal a mérés valószinü hibáit, lehetőleg kevés fáradsággal törekszünk kiküszöbölni. Mindazonáltal czélszerü a hibaszámitás követelését ismerni, hogy a röviditett eljárások sorából feladatunk részére mindig a legmegfelelőbbet alkalmazhassuk.

41. §. Poligonban a szöghibák kiigazitása a hibaszámitás szabályaival.

Theodolittal mért poligonban kiszámitjuk az r-dik poligonoldalnak α_r azimutszögét a β-val jelölt körületi szöggel két módon, úgymint:

[173] $$\alpha_r = \alpha_{r-1} + \beta_{r-1} - 180 \quad \text{vagy}$$

[174] $$\alpha_r = \alpha_1 + \overset{r-1}{[\beta]} - (r-1)\,180$$

Az azimutszög $d\alpha$ hibáját a [174] egyenletnek külzeléke adja, ha ezt β körületi szögek szerint vesszük.

$$d\alpha = d\beta_1 + d\beta_2 + d\beta_3 \ldots + d\beta_{r-1}$$

Ugyancsak az r-dik azimutszögnek hibája a hibaszámitás [116] egyenlete szerint igy is fejezhető ki, ha a körületi szögeket egyenlő és ε-val jelölt hibával megmérni sikerült.

[175] $$\varepsilon_{\alpha_r} = \varepsilon \sqrt{(r-1)}$$

A szögmérés sikerét a két leggyakoribb esetben következőkép vizsgáljuk. Bezárt poligonban összeadjuk a kerületi szögeket, hogy a mértanilag megszabott szögösszeggel összehasonlitsuk. Tudniillik az (r) oldalu poligonban legyen:

[176] $$[\beta] = 180\,(r \mp 2)$$

Mig ellenben háromszögpontból kiinduló és ily pontban végződő poligonnak szögmérését úgy vizsgáljuk, hogy K háromszögoldalnak pontosan ismert azimutszögéből és a megmért körületi szögekkel az utolsó r oldalnak γ_r azimutját kiszámitjuk, l. 36. ábrát. Ugyaneme oldalnak pontos α_r azimutját még úgy is találhatjuk, ha V háromszögoldalnak ismert azimutjából és közvetetlen szögméréssel ezt meghatározzuk.

E két adattal következik az r-dik oldal $\varepsilon_{\alpha r}$ tájékozó hibája:

[177] $$\varepsilon_{\alpha_r} = \alpha_r - \gamma_r$$

A [175] és [177] egyenletek összehasonlitásából következik poligonunk szöghibája:

$$\varepsilon_{\alpha_r} = \alpha_r - \gamma_r = \varepsilon\sqrt{(r-1)}$$

Innen:

[178] $$\varepsilon = \frac{\alpha_r - \gamma_r}{\sqrt{(r-1)}}$$

Holott az r oldalu bezárt poligonban a szögmérés hibáját β körületi szögekkel igy fejezzük ki:

[179] $$\varepsilon = \frac{[\beta] - 180(r-2)}{\sqrt{r}}$$

Földalatti poligonban felülvizsgáljuk a szögmérést a mágnestűvel is, ha mérésünkkel csak hozzávető adatokat akarunk biztositani. Pontos adatokra legalább egy, esetleg két ellenőrző mérést hajtunk végre. Ha ily esetben a talált ε szöghiba ama pontosságnak felel meg, melyet műszerünk biztosithat, csak akkor szoktuk a poligonnak szöghibáit valamely czélszerü módon kiigazitani. Folytatólag kiszámitjuk r oldalu nyitott poligonban az n-dik oldalnak hibás tájékozását, vagyis azt, mennyire hibás az n-dik oldalnak azimutja. Ezt alábbi módon végezzük.

Legyen α_n az n-dik oldalnak azimutszöge, ha ezt a poligon kezdőoldalából kiindulva számitjuk; α_n^1 ugyanennek az oldalnak azimutja, ha ezt poligonunk végső oldalából kiindulva számitjuk. Esetünkben e két adatnak más nyomatékszámot kell tulajdonitani. Jelöljük az egyiket q_1-el, a másodikat q_2-vel. Kifejezésükre használjuk eme szögadatok számának recziprok értékét:

$$q_1 : q_2 = \frac{1}{n} : \frac{1}{r-n}$$

Ha az n-dik oldalnak legvalószinübb azimutját α_{no}-el jelöljük, akkor ezt a hibaszámitás [107] egyenletével igy irhatjuk fel:

[180] $$\alpha_{no} = \frac{\frac{1}{n}\alpha_n + \frac{1}{r-n}\alpha_n^1}{\frac{1}{n} + \frac{1}{r-n}}$$

Továbbá belátható az is, hogy az azimutszögnek a poligon két végpontjából kiinditott számitás többel nem különbözhet, mint az r oldalu poligonnak összes ε_r szöghibájával. Ily alapon irható:

[181] $$\varepsilon_r = \alpha_n^1 - \alpha_n$$

[181]-ből következik:

[182] $$\alpha_n^1 = \alpha_n + \varepsilon_r$$

Ha ezután [182]-nek értékét [180] egyenletbe helyettesitjük és ezt kellően röviditjük, azt találjuk, hogy:

[183] $$\alpha_{no} = \alpha_n + \frac{n}{r}\varepsilon_r$$

Hasonló úton, ha [181] α_u szerint feloldjuk és [180]-ban helyettesitjük:

[184] $$\alpha_{no} = \alpha_n^1 - \frac{r-n}{r}\varepsilon_r$$

Utóbbi egyenletekből tapasztaljuk azt, hogy α_n-et még $\frac{n}{r}\varepsilon_r$ kell kiigazitani, ha a kérdéses poligonoldalnak legvalóbbszinü azimutját akarjuk kifejezni. Ép igy kell α_n^1-nek értékét még $-\frac{r-n}{r}\varepsilon$ -el változtatni α_{no} kifejezésére.

A hibaszámitással ki is számithatjuk α_{no}-nak a hibáját. Tudniillik kifejezésére a [111] egyenletet használjuk; eszerint:

$$\mu = \sqrt{\frac{[q v^2]}{[q](t-1)}}$$

Esetünkben $t = 2$-vel, tehát $t - 1 = 1$.

A [183] és [184] egyenletből találjuk a legvalóbbszinü értéknek v_1 és v_2 kiigazitásait igy:

[185] $$v_1 = \frac{n}{r}\varepsilon_r\,; \qquad v_2 = -\frac{r-n}{r}\varepsilon_r$$

Ezekkel:

$$\mu_n = \sqrt{\frac{\frac{1}{n}\frac{n^2}{r^2}\varepsilon_r^2 + \frac{1}{r-n}\frac{(r-n)^2}{r^2}\varepsilon_r^2}{\frac{1}{n}+\frac{1}{r-n}}}$$

A hibát kifejező egyenletnek röviditett eredménye ez:

[186] $$\mu_n = \frac{\varepsilon_r}{r}\sqrt{n\,(r-n)}$$

Tekintetbe véve azt, hogy körületi szögeinket mindig egyenlő pontossággal mérjük, kifejezhetjük ε_r-et az r oldalu poligonban a szögmérésnek egyes ε hibájával is:

$$\varepsilon_r = \varepsilon\sqrt{r}$$

Ezt [185]-ben irva, lesz:

[187] $$\mu_n = \varepsilon\sqrt{\frac{n\,(r-n)}{r}}$$

Ha a talált eredményt 10 oldalu poligonra alkalmazzuk, akkor [187]-ben $r = 10$-nek veendő, n helyett rendre 1, 2 ... 10 irunk az egyenletbe. Ezekkel:

$$\begin{array}{ll} \mu_1 = \varepsilon\ 0{\cdot}95 & \mu_6 = 1{\cdot}54\ \varepsilon \\ \mu_2 = \varepsilon\ 1{\cdot}26 & \mu_7 = 1{\cdot}44\ \varepsilon \\ \mu_3 = \varepsilon\ 1{\cdot}44 & \mu_8 = 1{\cdot}26\ \varepsilon \\ \mu_4 = \varepsilon\ 1{\cdot}54 & \mu_9 = 0{\cdot}95\ \varepsilon \\ \mu_5 = \varepsilon\ 1{\cdot}58 & \mu_{10} = 0 \end{array}$$

Szóval a szöghiba legkisebb a két kezdőoldalban és legnagyobb a középső oldal azimutjában, hol ez az egyszerü szögmérésnek másfélszeres hibahatárát is meghaladhatja.

Hogy egyuttal a hibaszámitással az azimutszögnek mikénti kiigazitásáról tökéletesebb fogalmat nyujtsunk, értékesitettük a [185] idézett két egyenletet ugyancsak 10 oldalu poligonra. Minden egyenlettel csak a poligon felére számitván a kiigazitásokat. Ennek eredménye:

$$\begin{array}{ll} v_1 = 0{\cdot}1\ \varepsilon_r & v_6 = 0{\cdot}4\ \varepsilon_r \\ v_2 = 0{\cdot}2\ \varepsilon_r & v_7 = 0{\cdot}3\ \varepsilon_r \\ v_3 = 0{\cdot}3\ \varepsilon_r & c_8 = 0{\cdot}2\ \varepsilon_r \\ v_4 = 0{\cdot}4\ \varepsilon_r & v_9 = 0{\cdot}1\ \varepsilon_r \\ v_5 = 0{\cdot}5\ \varepsilon_r & \end{array}$$

E bemutatott számok arról tanuskodnak, hogy a hibaszámitás szigorú szabályai szerint eljárva, az első és utolsó poligonoldalnak azimutszögét a legkisebb kiigazitásban részesitjük. Továbbá, hogy az azimutszögnek a kiigazitását a végektől a közép felé fokozatosan nagyobbra vesszük. Legnagyobb értéke az összes ε_r szöghibáknak a fele; annyival változtatjuk a poligon középső oldalának azimutszögét. Eme eljárás további megitélése czéljából megemlitjük még, hogy földalatti folyosóink felmérése alkalmával nagyobbrészt 180 fokot megközelitő körületi szögeket mérünk. De még külső méréseink alkalmával is a pontosság fokozására, a hol csak lehet, a meghatározandó pontoknak egyenes összekötőjében iparkodunk poligonjainkkal haladni. Mindezeknél fogva igazoltnak tartjuk az ily eszményi poligonnak két sajátos hibaesetét is tekintetbe venni.

1. Ha úgy mint a 37. ábrában KB a megmért poligon, mely ha felrajzoljuk vagy kitűzzük, a meghatározandó KC egyenes irányát követi, de valódi C végpontjára nem talál.

2. Ha ismét KB a megmért és felrajzolt vagy kitűzött poligon, mely most ép oly hosszú záróvonalat biztosit, mint a meghatározandó KC egyenes, l. 38. ábrát, de ha ez a valódi C végpontra rá nem talál.

Az első esetben kétségbe nem vonható az, hogy mérésünk zárlati hibája csakis a hosszúságok hibás méréséből eredhet. A második esetben a hiba csakis a szögek hibás mérésének tulajdonitható. A mint azonban láttuk, a hibaszámitás ily eseteket nem vesz tekintetbe. Mérnökeink ez okból inkább a hibaszámitásból leszármaztatott, egyszerüsitett eljárásokat alkalmazzák, már csak azért is, mert itt még a mérésmód is némiképen tekintetbe vehető.

42. §. Megközelitő eljárások poligonok hibaigazitásaira.

A poligonok hibaigazitásaira felállitott gyakorlati eljárásokkal első sorban azt vesszük tekintetbe, hogy bemért poligonjainknak úgy pontosabb felrajzolása czéljából, valamint ezeknek kitűzésére is mindig a pontoknak összrendezőit szoktuk kiszámitani. Főtörekvésünk tehát oda irányul, hogy a bemért adatokból kiszámitott összrendezőket úgy változtassuk, hogy poligonjaink záródjanak, de hogy ezekkel méréseinket el ne rontsuk. Általános szempontból eljárhatunk kétféleképen.

1. Kiszámithatjuk az összrendezőket felmérésünk adataival. Az összrendezőkkel talált zárlati hibát pedig úgy tüntethetjük el,

hogy összrendezőink kiigazitása alkalmával a hosszakat és a szögeket egyszerre változtatjuk.

2. Kiigazithatjuk legelőször a szögeket, hogy az összrendezőket már javitott szögekkel számithassuk. Ezután eltüntetjük az összrendezőkkel talált zárlati hibát az által, hogy a megmért hosszúságokat is kiigazitjuk.

43. §. Kompaszszal megmért egyágu poligonnak kiigazitása.

Ha a bemért poligon megbizható vezérpontból kiindul és ugyanily pontban végződik, akkor e két pont közti távolságot, valamint az egyenes összekötőnek azimutját eme pontok összrendezőjéből ismerjük.

Eljárásunk mint a 42. §. két esetében a következő. A bemért poligonoldalak v vizszintes hosszúságaival és ezeknek α azimutszögeivel, kiszámitjuk ezeknek az absczissa- és ordinátatengelyre vetitett és $\Delta\sigma$, valamint $\Delta\eta$-val jelölt vetületeit, hogy elvégre eme vetületek egynemü összegeiből, azaz $[\Delta\sigma]$ és $[\Delta\eta]$-ból a poligonnak kezdőpontjára viszonyitott végpontját összrendezőivel ismerjük. Ha az igy talált absczissa és ordinata más, mint a végpontnak mint vezérpontnak megfelel és ha ezeket $[\Delta X]$, valamint $[\Delta Y]$-al jelölünk, akkor ismerjük:

$$[188] \qquad \begin{cases} [\Delta X] - [\Delta\sigma] = h_x \text{-ből és} \\ [\Delta Y] - [\Delta\eta] = h_y \text{-ból} \end{cases}$$ mérésünk zárlati hibáját az X és az Y tengely irányában. Ezt most azzal kivánjuk eltüntetni, hogy az oldalaknak minden hosszegységét az igen csekély e hosszúsággal változtatjuk; továbbá minden oldalnak azimutszögét pedig az igen csekély ε szögértékkel igazitjuk ki.

Jelölésünk alapján kifejezhető valamely poligonoldalnak vetülete az absczissa- és ordinata-tengelyre igy:

$$[189] \qquad \begin{cases} \Delta\sigma = s \cos\alpha \\ \Delta\eta = s \sin\alpha \end{cases}$$

Ha továbbá az egyes vetületnek a kiigazitását az absczissatengelyben v-vel, az ordinatatengelyben u-val jelöljük, akkor ily vetülete kiigazitott értékét következő módon fejezhetjük ki:

$$\Delta\sigma + v = (s + s\,e)\cos(\alpha + \varepsilon) \quad \text{és}$$
$$\Delta\eta + u = (s + s\,e)\sin(\alpha + \varepsilon)$$

A szögkiigazitó ε mennyiség csekély értékét tekintetbe véve, irhatjuk:

$$\text{[190]} \qquad \begin{cases} \cos(\alpha + \varepsilon) = \cos\alpha - \varepsilon \sin\alpha \\ \sin(\alpha + \varepsilon) = \sin\alpha + \varepsilon\cos\alpha \end{cases}$$

Ezekkel következik a kiigazitott vetület mind a két tengely irányában igy:

$$\Delta\sigma + v = (s + s\,e)(\cos\alpha - \varepsilon\sin\alpha)$$
$$\Delta\eta + u = (s + s\,e)(\sin\alpha + \varepsilon\cos\alpha)$$

A jelzett szorzást végrehajtva:

$$\text{[191]} \qquad \begin{cases} \Delta\sigma + v = s\cos\alpha + s\,e\cos\alpha - \varepsilon s\sin\alpha - e\varepsilon s\sin\alpha \\ \Delta\eta + u = s\sin\alpha + e\,s\sin\alpha + \varepsilon s\cos\alpha + e\varepsilon s\cos\alpha \end{cases}$$

Ha [191]-be a [189] egyenletnek értékeivel visszatérünk, igy:

$$\text{[192]} \qquad \begin{cases} \Delta\sigma + v = \Delta\sigma + e\Delta\sigma - \varepsilon\Delta\eta - e\varepsilon\Delta\eta \\ \Delta\eta + u = \Delta\eta + e\Delta\eta + \varepsilon\Delta\sigma + e\varepsilon\Delta\sigma \end{cases}$$

Ha [192] röviditjük és mind a két egyenletben a jobb oldalnak utolsó tagját mint másodrangu csekély mennyiséget elhanyagoljuk, akkor összrendezőink kiigazitásait következőkben találjuk:

$$\text{[193]} \qquad \begin{cases} v = e\Delta\sigma - \varepsilon\Delta\eta \\ n = e\Delta\eta + \varepsilon\Delta\sigma \end{cases}$$

Ha végtére még tekintetbe vesszük, hogy v kiigazitásoknak összege nem lehet más, mint a poligon végső hibájának vetülete az X tengelyre, melyet h_x-el jelöltünk, ép úgy, hogy $[u]$ nem más, mint h_y; ekkor képesek vagyunk a kiigazitásra szolgáló két alapegyenletet felirni.

E czélból h_x-et h_y már csak ellenkező előjellel kell számitásba venni, hogy ez a hiba megsemmisitessék. Igy lesz:

$$\text{[194]} \qquad \begin{cases} -h_x = [v] = e[\Delta\sigma] - \varepsilon[\Delta\eta] \\ -h_y = [u] = e[\Delta\eta] + \varepsilon[\Delta\sigma] \end{cases}$$

A [194] talált két egyenletből kiszámitjuk e és ε kiigazitók értékeit:

$$\text{[195]} \qquad e = \frac{-h_y[\Delta\eta] - h_x[\Delta\sigma]}{[\Delta\eta]^2 + [\Delta\sigma]^2}$$

$$\text{[196]} \qquad \varepsilon = \frac{-h_y[\Delta\sigma] + h_x[\Delta\eta]}{[\Delta\eta]^2 + [\Delta\sigma]^2}$$

A kiigazitók ismeretével kiszámíthatjuk most minden egyes vetületnek a kiigazitását. Az ordinátatengely vetületeit tehát eme kiigazitásokkal részesitjük:

$$
[197] \quad \begin{cases} u_1 = e\triangle\eta_1 + \varepsilon\triangle\sigma_1 \\ u_2 = e\triangle\eta_2 + \varepsilon\triangle\sigma_2 \\ n_3 = e\triangle\eta_3 + \varepsilon\triangle\sigma_3 \\ \dots\dots\dots \\ u_n = e\triangle\eta_n + \varepsilon\triangle\sigma_n \end{cases}
$$

Az absczissatengely vetületeit pedig alábbi kiigazitások illetik:

$$
[198] \quad \begin{cases} v_1 = e\triangle\sigma_1 - \varepsilon\triangle\eta_1 \\ v_2 = e\triangle\sigma_2 - \varepsilon\triangle\eta_2 \\ v_3 = e\triangle\sigma_3 - \varepsilon\triangle\eta_3 \\ \dots\dots\dots \\ v_n = e\triangle\sigma_n - \varepsilon\triangle\eta_n \end{cases}
$$

A kiigazitások eme módjával csakis oly méréseknek felelhetünk meg, hol minden oldalnak tájékozó szögét vagy azimutját függetlenül mértük meg, tehát úgy mint kompaszszal vagy busszolaműszerrel.

44. §. Theodolittal megmért egyágu poligonok kiigazitása.

Theodolittal a poligon körületi szögeit mérjük, azaz itt minden szöghibával nemcsak a hibás szögnek a poligonoldala lesz helyes irányából kiforditva, hanem minden további oldal is; ezzel igazoljuk szaktársainknak ama törekvését, hogy esetről esetre a poligon alakját veszik tekintetbe és a kiigazitást mindig úgy iparkodnak foganatositani, hogy a körületi szögek lehetőleg keveset változzanak. Inkább a hosszúságokat részesitik nagyobb kiigazitásokban, mert ezzel kisebb helyváltozását biztositanak a bemért pontokra.

1. *eljárás.* Ha a bemért n poligonoldalnak $(n - 1)$ körületi szögeit úgy igazitjuk ki, hogy az α-val jelölt azimut szögei felváltva ε és 2ε-val változzanak; akkor ezeket igy kell helyettesitenünk:

$$
\alpha_1 + \varepsilon;\ \alpha_2 + 2\varepsilon;\ \alpha_3 + \varepsilon;\ \alpha_4 + 2\varepsilon \dots\dots \alpha_{n-3} + \varepsilon;\ \alpha_{n-2} + 2\varepsilon;
$$
$$
\alpha_{n-1} + \varepsilon
$$

E feltételünk biztositására β-val jelölt kerületi szögeket az alább felirt módon kell változtatnunk:

$$
\begin{array}{ccccccc} \beta_1; & \beta_2; & \beta_3; & \beta_4 \dots\dots & \beta_{n-3}; & \beta_{n-2}; & \beta_{n-1} \\ +\varepsilon & +\varepsilon & -\varepsilon & +\varepsilon & +\varepsilon & -\varepsilon & -\varepsilon \end{array}
$$

Szóval a poligonnak két első körületi szögét ε-val nagyobbitjuk, mig a két utolsó szöget ε-val kisebbitjük, a többi egymásra következő körületi szögből majd levonjuk, majd hozzáadjuk ε szögváltozást. Ha a poligonnak n oldalszáma páros szám, akkor ezen eljárás alkalmával azt a két körületi szöget, melyeknek $\left(\frac{n}{2}+1\right)$-ső oldala közös oldal; ε szögváltozást egyenlő előjellel kell számitásba venni; azaz ily esetben az $\frac{n}{2}$-dik és $\frac{n}{2}+1$ oldalnak azimutszögét vagy ε-val vagy 2ε-val változtatjuk. Ez azért szükséges, hogy az első és utolsó poligonoldal azimutszögét ne 2ε-val, hanem csak ε-val igazitsuk ki.

Ha az eddig alkalmazott jelölést megtartjuk, úgy az egyes vetületeknek kiigazitásait a következőképen irhatjuk fel:

Kiigazitások az ordinátatengely vetületein:	Kiigazitások az absczissatengely vetületein:
$u_1 = e\Delta\eta_1 + \varepsilon\Delta\sigma_1$	$v_1 = e\Delta\sigma_1 - \varepsilon\Delta\eta_1$
$u_2 = e\Delta\eta_2 + 2\varepsilon\Delta\sigma_2$	$v_2 = e\Delta\sigma_2 - 2\varepsilon\Delta\eta_2$
$u_3 = e\Delta\eta_3 + \varepsilon\Delta\sigma_3$	$v_3 = e\Delta\sigma_3 - \varepsilon\Delta\eta_3$
. . . .	. . . .
$u_{n-2} = e\Delta\eta_{n-2} + 2\varepsilon\Delta\sigma_{n-2}$	$v_{n-2} = e\Delta\sigma_{n-2} - 2\varepsilon\Delta\eta_{n-2}$
$u_{n-1} = e\Delta\eta_{n-1} + \varepsilon\Delta\sigma_{n-1}$	$v_{n-1} = e\Delta\sigma_{n-1} - \varepsilon\Delta\eta_{n-1}$

[199]

Rövidebb irás biztositására jelöljük ez esetben:

$$X = \Delta\sigma_1 + 2\Delta\sigma_2 + \Delta\sigma_3 + 2\Delta\sigma_4 \ldots\ldots + 2\Delta\sigma_{n-2} + \Delta\sigma_{n-1}$$
$$Y = \Delta\eta_1 + 2\Delta\eta_2 + \Delta\eta_3 + 2\Delta\eta_4 \ldots\ldots + 2\Delta\eta_{n-2} + \Delta\eta_{n-1}$$

Ezzel kifejezhetjük a poligonnak az X és Y tengely irányában megsemmisitendő h_x és h_y értékeit a [199] egyenletcsoportok összegével:

$$[200] \qquad \begin{cases} -h_y = e[\Delta\eta] + \varepsilon X \\ -h_x = e[\Delta\sigma] + \varepsilon Y \end{cases}$$

E két egyenlet feloldása által találjuk:

$$[201] \qquad \begin{cases} e = \dfrac{-h_y Y - h_x X}{[\Delta\eta]Y + [\Delta\sigma]X} \\[2ex] \varepsilon = \dfrac{-h_y[\Delta\sigma] + h_x[\Delta\eta]}{[\Delta\eta]Y + [\Delta\sigma]X} \end{cases}$$

e és ε kiigazitó mennyiségek ismeretével kiszámithatjuk az egyes vetületeknek kiigazitásait [199] egyenletek segitségével.

2. *eljárás.* Ha [201] egyenletekben ε szögigazitónak nevezőjét szemügyre vesszük, azt tapasztaljuk, hogy X és Y mennyiségek nagyobbitása által ε számérték kisebbedik. E tény oda utal, hogy az azimutszögek kisebb kiigazitása céljából ne változtassuk

minden második oldalnak azimutját 2ε-al, hanem csakis a poligonnak nehány leghosszabb oldalát igazitsuk igy ki. Tudniillik a hosszú oldal $\triangle\sigma$ és $\triangle\eta$ vetülete jelentékenyebben növeszti az X és Y-al jelölt összeget, mint ha 2ε rövidebb oldalak vetületeivel megszorozzuk.

Igy eljárva, hibaigazitásunk még mindig megfelelőnek mondható, ha csak két egymásra következő oldalnak körületi szögeit sehol ε-nál nagyobb változtatásban nem részesitjük, valamint ha az első és utolsó oldalnak azimutszögét mindig csak ε-nál igazitjuk ki.

A számitást ekkor is a [201] és [199] egyenletekkel foganatositjuk. Eljárásunkban egyedüli különbség az, hogy X és Y értékek tagjait most mintegy belátásunk szerint módositjuk.

3. *eljárás.* A 41. §. végén kimutattuk azt, hogy a hibaszámitás szabályai szerint eljárva, a poligon két végső oldalának azimutszögét a legkisebb kiigazitásban kell részesiteni, továbbá hogy ez oldalaktól kiindulva, az azimutszögek kiigazitása folyton növekedjék a poligon középső oldaláig, melynek azimutját az összes szöghibák felével változtatjuk. Minthogy ez elv alkalmazása által [201] egyenletben X és Y értéke a legnagyobb, ez okból biztosithatjuk ε szögigazitóra a lehető legkisebb értéket.

Eljárásunk tehát az leend, hogy α_1-hez $+\,\varepsilon$ adunk, α_2-hez $+\,2\varepsilon$ adunk, α_3-hoz $+\,3\varepsilon$ adunk és igy tovább a poligon közepéig, onnan kezdve levonunk mindig egy-egy ε kiigazitót.

Szóval a kiigazitott azimutszögek sorát igy irhatjuk fel:

$$\alpha_1 + \varepsilon;\ \alpha_2 + 2\varepsilon;\ \alpha_3 + 3\varepsilon;\ \alpha_4 + 4\varepsilon + \ldots\ldots + \alpha_{n-3} + 3\varepsilon;$$
$$\alpha_{n-2} \times 2\varepsilon;\ \alpha_{n-1} + \varepsilon.$$

Ezt elérjük körületi szögek következő változtatása által:

$$\beta_1 + \varepsilon;\ \beta_2 + \varepsilon;\ \beta_3 + \varepsilon;\ \beta_4 + \varepsilon\ \ldots\ldots$$

A két összrendező tengelyre vetitett hosszak kiigazitásai ezek után igy fejezhetők ki:

$$[202]\left\{\begin{array}{ll|ll}
u_1 = e\triangle\eta_1 & + \varepsilon\triangle\sigma_1 & v_1 = e\triangle\sigma_1 & - \varepsilon\triangle\eta_1 \\
u_2 = e\triangle\eta_3 & + 2\varepsilon\triangle\sigma_2 & v_2 = e\triangle\sigma_2 & - 2\varepsilon\triangle\eta_2 \\
u_2 = e\triangle\eta_3 & + 3\varepsilon\wedge\sigma_3 & v_3 = e\triangle\sigma_3 & - 3\varepsilon\triangle\eta_3 \\
u_4 = e\triangle\eta_4 & + 4\varepsilon\triangle\eta_3 & v_4 = e\triangle\sigma_4 & - 4\varepsilon\triangle\eta_4 \\
\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\
u_{n-3} = e\wedge\eta_{n-3} & + 3\varepsilon\triangle\sigma_{u-3} & v_{n-3} = e\triangle\sigma_{n-3} & - 3\varepsilon\triangle\eta_{n-3} \\
u_{n-2} = e\triangle\eta_{n-2} & + 2\varepsilon\triangle\sigma_{n-2} & v_{n-2} = e\triangle\sigma_{n-2} & - 2\varepsilon\triangle\eta_{n-2} \\
u_{n-1} = e\triangle\eta_{n-1} & + \varepsilon\triangle\sigma_{n-1} & v_{n-1} = e\triangle\sigma_{n-1} & - \varepsilon\triangle\eta_{n-1}
\end{array}\right.$$

A végeredmény rövidebb felirása czéljából most is:

$$X = \triangle\sigma_1 + 2\triangle\sigma_2 + 3\triangle\sigma_3 + \ldots + 3\triangle\sigma_{n-3} + 2\triangle\sigma_{n-2} + \triangle\sigma_{n-1}$$
$$Y = \triangle\eta_1 + 2\triangle\eta_2 + 3\triangle\eta_3 + \ldots + 3\triangle\eta_{n-3} + 2\triangle\eta_{n-2} + \triangle\eta_{n-1}$$

Ez alapon a kiigazitók egyenleteit ismét igy irhatjuk:

$$[203] \quad \begin{cases} -h_x = e[\triangle\sigma] - \varepsilon X \\ -h_y = e[\triangle\eta] + \varepsilon Y \end{cases}$$

Honnan:

$$[204] \quad \begin{cases} e = \dfrac{-h_y Y - h_x X}{[\triangle\eta] Y + [\triangle\sigma] X} \\ \varepsilon = \dfrac{-h_y [\triangle\sigma] + h_x [\triangle\eta]}{[\triangle\eta] Y + [\triangle\sigma] X} \end{cases}$$

45. §. Kétágu vagy esetleg teljesen bezárt poligonok hibaigazitása.

Ha a poligon alakja olyan, mint ez 39. ábrából felénk tekint, azaz hogy benne két bc és dc főágat megkülönböztetünk, melyek db végpontok összekötőjével majdnem derékszögü vagy hegyesszögü háromszöget alkotnak, akkor eljárásunk módositást követel.

Ily esetben ugyanis c töréspontnak az összrendezőit két izben kell kiszámitani. Először b vezérpontból kiindulva, másodszor d vezérpontból. Legyen az első számitás eredménye X_{c1} Y_{c1}, a második számitásé X_{c2} és Y_{c2}. A valódi c pont, ha más feltevés ezt meg nem határozza, a két kiszámitott c_1 és c_2 pont között keresendő. A kiigazitást mind a két tengelyre vetitett hosszakban e szerint úgy kell végrehajtani, hogy felrajzolt esetünkben bc_1 ágnak a vetületei kisebbedjenek, ha dc_2 ágnak a vetületeit nagyobbitjuk. Vagy röviden szólva, a két poligonrész kiigazitásait ellenkező előjellel kell a számitásba venni.

Ezek alapján felirhatjuk:

Zárlati hibánkat az absczissatengely irányában:

$$h_x = \sigma_{c1} - \sigma_{c2}$$

Ugyan ez áll az ordinátatengely irányában is:

$$h_y = \eta_{c1} - \eta_{c2}$$

Kompaszmérést feltételezve, felirhatjuk ezután bc ágra nézve a kiigazitásokat a 43. §-ban igazolt [193] egyenlettel:

$$[205]\quad \begin{cases} u_{1b} = e\triangle\eta_{b1} + \varepsilon\triangle\sigma_{b1} & v_{b1} = e\triangle\sigma_{b1} - \varepsilon\triangle\eta_{b1} \\ u_{2b} = e\triangle\eta_{b2} + \varepsilon\triangle\sigma_{b2} & v_{2b} = e\triangle\sigma_{b2} - \varepsilon\triangle\eta_{b2} \\ u_{3b} = e\triangle\eta_{b3} + \varepsilon\triangle\sigma_{b3} & v_{3b} = e\triangle\sigma_{b3} - \varepsilon\triangle\eta_{b3} \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ u_{cb} = e\triangle\eta_{bc} + \varepsilon\triangle\sigma_{bc} & v_{cb} = e\triangle\sigma_{cb} - \varepsilon\triangle\eta_{cb} \end{cases}$$

Hasonlóképen felirhatjuk $d\,c$ poligon részére a változtatott előjellel veendő kiigazitásokat:

$$[206]\quad \begin{cases} u_{1\delta} = -e\triangle\eta_{1\delta} - \varepsilon\triangle\sigma_{1\delta} & v_{1\delta} = -e\triangle\sigma_{1\delta} + \varepsilon\triangle\eta_{1\delta} \\ u_{2\delta} = -e\triangle\eta_{2\delta} - \varepsilon\triangle\sigma_{2\delta} & v_{2\delta} = -e\triangle\sigma_{2\delta} + \varepsilon\triangle\eta_{2\delta} \\ u_{3\delta} = -e\triangle\eta_{3\delta} - \varepsilon\triangle\sigma_{3\delta} & v_{3\delta} = -e\triangle\sigma_{3\delta} + \varepsilon\triangle\eta_{3\delta} \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ u_{c\delta} = -e\triangle\eta_{c\delta} - \varepsilon\triangle\sigma_{c\delta} & v_{c\delta} = -e\triangle\sigma_{c\delta} + \varepsilon\triangle\eta_{c\delta} \end{cases}$$

[205] és [206] egyenletek összegeivel felirhatjuk a kiigazitókat meghatározó két alapegyenletet igy:

$$[207]\quad \begin{cases} -h_y = e\left\{[\triangle\eta]_{bc} - [\triangle\eta]_{dc}\right\} + \varepsilon\left\{[\triangle\sigma]_{bc} - [\triangle\sigma]_{dc}\right\} \\ -h_x = e\left\{[\triangle\sigma]_{bc} - [\triangle\sigma]_{dc}\right\} - \varepsilon\left\{[\triangle\eta]_{bc} - [\triangle\sigma]_{dc}\right\} \end{cases}$$

Mely egyenletek feloldása által a kiigazitó mennyiségeket találjuk:

$$[208]\quad \begin{cases} e = \dfrac{-h_y\left\{[\triangle\eta]_{bc} - [\triangle\eta]_{dc}\right\} - h_x\left\{[\triangle\sigma]_{bc} - [\triangle\sigma]_{dc}\right\}}{([\triangle\eta]_{bc} - [\triangle\eta]_{dc})^2 + ([\triangle\sigma]_{bc} - [\triangle\sigma]_{dc})^2} \\ \varepsilon = \dfrac{-h_y\left\{[\triangle\sigma]_{bc} - [\triangle\sigma]_{dc}\right\} + h_x\left\{[\triangle\eta]_{bc} - [\triangle\eta]_{dc}\right\}}{([\triangle\eta]_{bc} - [\triangle\eta]_{dc})^2 + ([\triangle\sigma]_{bc} - [\triangle\sigma]_{dc})^2} \end{cases}$$

Ezeknek kiszámitott számértékével mehetünk [205] és [206] egyenletekbe, az egyes vetületeken végrehajtandó kiigazitók meghatározása céljából.

Theodolittal megmért poligonok adataira az eljárás annyiban módositandó, hogy a kiigazitásokat minden poligonágnak a vetületein majd a [199], majd a [202] egyenlet szabályai szerint végrehajtjuk, mely esetben a kiigazitók meghatározására szolgáló két alapegyenlet igy irható fel:

$$[209]\quad \begin{cases} -h_y = e\left\{[\triangle\eta]_{bc} - [\triangle\eta]_{dc}\right\} + \varepsilon\,(X_{bc} - X_{dc}) \\ -h_x = e\left\{[\triangle\sigma]_{bc} - [\triangle\sigma]_{dc}\right\} - \varepsilon\,(Y_{bc} - Y_{dc}) \end{cases}$$

Ezek feloldása által:

$$[210]\quad \begin{cases} e = \dfrac{-h_y(Y_{bc} - Y_{dc}) - h_x(X_{bc} - X_{dc})}{(Y_{bc} - Y_{dc})([\Delta\eta]_{bc} - [\Delta\eta]_{dc}) + (X_{bc} - X_{dc})([\Delta\sigma]_{bc} - [\Delta\sigma]_{dc})} \\ \varepsilon = \dfrac{-h_y([\Delta\sigma]_{bc} - [\Delta\sigma]_{dc}) + h_x([\Delta\eta]_{bc} - [\Delta\eta]_{dc})}{(Y_{bc} - Y_{dc})([\Delta\eta]_{bc} - [\Delta\eta]_{dc}) + (X_{bc} - X_{dc})([\Delta\sigma]_{bc} - [\Delta\sigma]_{dc})} \end{cases}$$

Bezárt poligonoknál ugyancsak eme módon kell eljárnunk. Vannak esetek, hol a poligon alakja nem olyan, hogy jogosan két különböző és mintegy ellenkező irányban haladó szakaszra oszthatjuk. akkor azt vizsgáljuk, hogy az eddig tárgyalt eljárások melyikével biztosithatunk kisebb ε mennyiséget a szögadatok kiigazitására, melyet aztán alkalmazzunk.

47. §. Rövidebb eljárások megmért poligonok hibaigazitásaira.

Ha poligont jó műszerrel a legszabatosabb módon mérünk, akkor záróhibáját is oly elenyésző értékre szorithatjuk, hogy jóformán egyre megy, bármily eljárással igazitjuk ezt ki. E nézetből kiindulva a legtöbb mérnök az előbbinél egyszerűbb módokat is alkalmaz, ha ezek a hibák leghelyesebb megsemmisitésére nem is azt a valószinüséget biztositják, mint az elsorolt eljárásokkal.

1. *eljárás.* Az ordináták h_y hibáját és az absczissák h_x hibáját még úgy is lehet a megmért poligonban kiigazitani, hogy azokat minden egyes vetületen az oldalhosszúsággal arányosan megsemmisitjük.

Ily alapon felirhatjuk az n-dik oldalnak u_n kiigazitását az ordinátatengelyre vetitett hosszúságán:

$$[211]\qquad u_n = \frac{-h_y}{[s]} \cdot s_n$$

Feltéve, hogy s_n-el az n-dik oldalt jelöltük és $[s]$-el az oldalhosszaknak absolut összegét értjük.

Az absczissák kiigazitása lesz:

$$[242]\qquad v_n = \frac{-h_x}{[s]} \cdot s_n$$

2. *eljárás.* A megmért poligonnak zárlati hibáját X és Y tengelye irányában még úgy is lehet eltüntetni, hogy azt minden oldal vetületén vetületének hosszúságával arányosan semmisitjük meg. Az eddig használt jelekkel kifejezhetjük az n-dik oldalnak két kiigazitását igy:

Az ordinátatengely irányában:

$$[213]\qquad u_n = \frac{-h_y}{[\Delta\eta]} \cdot \Delta\eta_n$$

Az absczissatengely irányában:

[214] $$v_n = \frac{-h_x}{[\Delta \sigma]} \cdot \Delta \sigma_n$$

Megjegyzendő, hogy $[\Delta \eta]$ és $[\Delta \sigma]$ alatt ez esetben az egynemü vetületeknek nem algebrai, hanem abszolut összegét kell értenünk. Nehogy negativ vetület, mely egészen vagy részben az összegben megsemmisülhet, e hibafelosztásnál tekintetbe ne vétessék.

A kiigazitás [213] és [214] egyenletek szerint inkább az oldalak hosszát változtatja, mint a szögeket, mi nem mindig helyes. Mert ha poligonunk legkiterjedtebb része az absczissatengelylyel haladna egyenlőközüen, rövidebb része pedig csak nehány oldalból állana, 90 vagy 270 foknyi azimuttal haladna, ily esetben ez az eljárás a záróhiba teljes értékét csak e nehány rövidebb oldalon semmisitené meg, mi módon a poligont nem igazolható mértékben eltorzitanók. A [211] és [212] egyenlet alkalmazása a hibát inkább a szögek változtatása által semmisiti meg, mint a hosszúságokon. Egészben véve helyesebb ez az eljárás, mint ha kiigazitásainkra a [213] és [214] egyenletet követjük. Tudniillik [211] és [212] egyenletekkel szétosztjuk a hibát az egész poligonra, nem pedig csak nehány rövidebb oldalának vetületeire.

3. *eljárás.* Megsemmisithetjük poligonunk zárlati hibáját mind a két vetületi tengely irányában az által, hogy minden oldalnak vetületét az oldalhosszúság és vetületének hosszúságával változtatjuk arányosan. Ekkor az n-ik oldalnak vetületét az ordináta tengelyén u_n-el változtatjuk:

[215] $$u_n = \frac{-h_y}{[s] + [\Delta \eta]} \cdot (s_n + \Delta \eta_n)$$

Az n-ik oldal vetületét az absczissatengelyen v_n-el változtatjuk:

[216] $$v_n = \frac{-h_x}{[s] + [\Delta \sigma]} \cdot (s_n + \Delta \sigma)$$

[215] és [216] egyenletnek nevezőjében $[s]$ valamint $[\Delta \sigma]$ és $[\Delta \eta]$ alatt abszolut összeget kell érteni. Ez az eljárás a hibákat ismét inkább az oldalak változtatásával semmisiti meg, mint a szögek kiigazitásával. A számitás valamivel fáradságosabb, mint a két megelőző eljárással, de előnye az, hogy mind a két módszernek jó oldalait egyesiti magában. Eme három eljárás általában

hosszúra nyujtott, azaz a záróvonalat követő poligonok kiigazitására ajánlható. Alkalmazásuk tehát annál indokolatlanabb, mennél kerekebb a poligonnnk alakja. A 43., 44. és 45. §-ban ismertetett eljárások főelőnye az, hogy e és ε kiigazitók számértékeivel fogalmat nyerünk adataink változtatásáról, azaz fogalmat eljárásunk eltorzitó befolyásáról.

47. §. Felmért poligon pontossága.

A 43., 44. és 45. §-ban idézett egyenletek segitségével kiszámithatjuk ama e és ε mennyiségeket, melyek segitségével poligonjainkat zárlatra hozzuk. Ugyan-e mennyiségek még arra is szolgálnak, hogy szerintük, méréseink sikerét birálgassuk. Igy megitéljük e-nek számértékével a hosszmérés pontosságát. E tekintetben kivánatos, hogy $e = 0{\cdot}001$ vagy $0{\cdot}002$ hosszegységet meg ne haladjon, ha poligonjaink oldalait kifeszitett zsinórokon 2 drb. 2 méter hosszú rudakkal mértük.

A szögmérés birálatára ε értéke ád felvilágositást. Gauss F. G. (a porosz kataszter főnöke) szerint követelhető, hogy theodolittal mért poligonban is kedvező, tehát sikabb területen arc ε kisebb legyen 0·00015-nél; hegyes-völgyes területen arc ε kisebb legyen 0·0003-nál. Ha e számokat régi szögmértékben adjuk, akkor 31″ és 62″ tekinthető a kataszter által bemért poligonok határértékeül.

A porosz bányamérők szabványai kompaszmérésekre arc $\varepsilon = 0{\cdot}00125$-el, azaz $\varepsilon = 4' + 19''$-el és földalatti theodolitmérésre: arc $\varepsilon = 0{\cdot}00007$ azaz $\varepsilon = 15''$-et követelnek.

48. §. Poligoncsomósodások hibaigazitása.

Előfordul az is, hogy több háromszögpontból poligont kiinditunk, mely poligonok valamely P_m pontban találkoznak; ily esetet poligoncsomósodásnak nevezünk; P_m pont a csomópont. Feladatunk ekkor P_m pontot a megejtett mérések adataiból úgy meghatározni, hogy azzal a valódi helyét a legnagyobb valószinüségig megközelitsük.

Legyen 40. ábrában $Z_1\, Z_2\, Z_3\, Z_4\, Z_5$ az öt bemért poligon, melyek mindenike más $P_a\, P_b\, P_c\, P_d$ és P_e háromszögelő pontból kiindulván, P_m csomópontban találkozik. Akkor mindenek előtt a szögmérés sikeréről győződünk meg, mely czélból minden háromszögelő pontban a kiinduló háromszögoldalnak ismert $w_a\, w_b\, w_c$

w_d és w_e azimutszögével a csomópont bármely $P_m N$ oldalának azimutszögeit kiszámitjuk. E számitások mindenike más és más számértéket eredményez méréseink elkerülhetetlen hibái következtében. Jelöljük $P_m N$ oldalnak kiszámitott azimutjait $w_1\, w_2\, w_3\, w_4$ és w_5-el. További feladatunk $P_m N$ oldalnak legvalóbbszinü w_{mn} azimutszögét meghatározni. Ez alkalommal tekintetbe veendő minden adatnak megbizhatósága is. Ezt kifejezhetjük a legtermészetesebb alapon, ha ez azimutszögeknek $q_1\, q_2\, q_3\, q_4\, q_5$ nyomatékszámait egyenes arányba állitjuk az illető poligonnak $n_1\, n_2\, n_4\, n_4$ és n_5 oldalszámával kifejezett recziprok értékével.

Szóval ha irunk:

$$q_1 = \frac{1}{n_1}\,;\quad q_2 = \frac{1}{n_2}\,;\quad q_3 = \frac{1}{n_3}\,;\quad q_4 = \frac{1}{n_4}\,;\quad q_5 = \frac{1}{n_5}$$

Ezzel w_{mn} a hibaszámitás [107] egyenlet nyomán:

$$w_{mn} = \frac{\frac{1}{n_1} w_1 + \frac{1}{n_2} w_2 + \frac{1}{n_3} w_3 + \frac{1}{n_4} w_4 + \frac{1}{n_5} w_5}{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} + \frac{1}{n_5}}$$

Az egyes poligonoknak a legvalóbbszinü $\varepsilon_1\, \varepsilon_2\, \varepsilon_3\, \varepsilon_4$ és ε_5 szöghibáit most igy találjuk:

$$\varepsilon_1 = w_{mn} \quad w_1\,;\ \varepsilon_2 = w_{mn} - w_2\,;\ \varepsilon_3 = w_{mn} - w_3\,;\ \varepsilon_4 = w_{mn} - w_4\,;$$
$$\varepsilon_5 = w_{mn} - w_5$$

E szöghibákat felosztjuk elvégre minden poligonban egyformán a maga szögeire.

Az összrendezők számitása.

A kiigazitott azimutokkal és a mérésből eredő oldalakka kiszámitjuk minden oldalnak vetületét úgy az absczissa-, valamint az ordinátatengelyre.

Az igy talált vetületekkel kiszámitjuk P_m csomópontnak úgy az X, valamint az Y rendszálait, még pedig mind az öt háromszögelő pontból kiindulva.

Jelöljük e számitás eredményét:

$$\left\{\begin{matrix} X_1 & X_2 & X_3 & X_4 & X_5 \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 & Y_4 & Y_5 \end{matrix}\right. \text{-el,}$$

akkor P_m csomópontnak legvalóbbszinü X_m és Y_m összrendezőit az előbbi öt eltérő eredménynyel a hibaszámitás [107] egyenlete segitségével igy találjuk:

$$X_m = \frac{[qX]}{[q]}; \quad Y_m = \frac{[qY]}{[q]}$$

Nyomatékszámul minden poligonban e poligonoldalhosszak összegének reciprok értékét vesszük. Ha tehát az oldalhosszak összegét az öt poligonban $L_1\ L_2\ L_3\ L_4\ L_5$-el jelöljük, igy nyomatékszámaink ezek:

$$q_1 = \frac{1}{L_1}; \quad q_2 = \frac{1}{L_2}; \quad q_3 = \frac{1}{L_3}; \quad q_4 = \frac{1}{L_4}; \quad q_5 = \frac{1}{L_5}$$

Ezekkel:

$$X_m = \frac{\frac{1}{L_1} X_1 + \frac{1}{L_2} X_2 + \frac{1}{L_3} X_3 + \frac{1}{L_4} X_4 + \frac{1}{L_5} X_5}{\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3} + \frac{1}{L_4} + \frac{1}{L_5}}$$

$$Y_m = \frac{\frac{1}{L_1} Y_1 + \frac{1}{L_2} Y_2 + \frac{1}{L_3} Y_3 + \frac{1}{L_4} Y_4 + \frac{1}{L_5} Y_5}{\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3} + \frac{1}{L_4} + \frac{1}{L_5}}$$

Elvégre kifejezzük az egyes poligonoknak mind a két összrendezőtengely irányában értett h_x és h_y hibáit.

$$h_{1y} = Y_m - Y_1; \quad h_{2y} = Y_m - Y_2; \quad h_{3y} = Y_m - Y_3;$$
$$h_{4y} = Y_m - Y_4; \quad h_{5y} = Y_m - Y_5.$$
$$h_{1x} = X_m - X_1; \quad h_{2x} = X_m - X_2: \quad h_{3x} = X_m - X_3;$$
$$h_{4x} = X_m - X_4; \quad h_{x5} = X_m - X_4$$

E hibákat kiigazitjuk ezután minden egyes poligonnak összrendezőin úgy, a hogy ezt a 43. §-tól a 46. §-ig ismertettük.

Áttörő feladatok alkalmával a bányamérnök a két szóban forgó pont között gyakran két vagy három mérést is foganatosit. Ily esetben ugyancsak az előbbi módon kell eljárnunk, ha az egyik végpontnak a legvalóbbszinü helyét akarjuk kiszámitani. Egyszerű számtani közepest a talált egynemü rendszálakból csak akkor szabad venni, ha minden uj mérés alkalmával ugyanazt a poligont csak ismételve mértük.

49. §. Több bezárt és egymáshoz kapcsolt poligonnak hibaigazitása.

Földalatti mérések alkalmával nem ritka eset, hogy elsőrangu poligonjaink több bezárt, de nehány közös oldallal összefüggő poligont képeznek, úgy mint ezt 41. ábrában rövidség kedveért a-val és b-vel jelölt két bezárt poligonnal bemutattuk. Itt tulajdonképen három poligont mértünk meg, melyeket a rajzban $p_1 p_2 p_3$ nyillal megkülönböztetünk.

Ily poligonok zárlati hibáit oly módon igazitjuk ki, hogy előbb a szöghibákat megsemmisitjük. A kiigazitott szögekkel kiszámitjuk a poligonpontok összrendezőit és legvégül kiigazitjuk az összrendezők hibáit is.

1. A szöghibák kiigazitása.

Jelöljük a poligonban a megmért belső körületi szögeket β_a-val, b poligonban ugyan-e szögeket β_b-vel; ekkor kifejezhetjük e két poligonnak a sík-mértan szabta szögösszegeivel, h_a és h_b szöghibáját:

[217] $$\begin{cases} h_a = 180^0 (n_a - 2) - [\beta_a] \\ h_b = 180^0 (n_b - 2) - [\beta_b] \end{cases}$$

Feltéve, hogy n_a-val és n_b-el a szögpontoknak számát a és b poligonban jelöljük; továbbá, hogy $[\beta_a]$-val a megmért belső szögét a poligonban, $[\beta_b]$-vel ugyanezt b poligonban értjük. A szögmérést egyenlő pontossággal foganatositván, felosztjuk minden poligonban a talált hibát valamennyi szögére egyformán.

Jelöljük tehát (a)-val minden egyes szögnek kiigazitóját a poligonban, (b)-vel ugyanezt b poligonban, akkor eme szögigazitók számitása alkalmával még azt is kell tekintetbe venni, hogy p_1 poligonban úgy változtassuk a szögeket, hogy a két szomszédos poligonnak kiigazitott belső szögei minden poligonpontban 360 foknyi összeget adjanak. Ezt az 1-ső számu szögpontra igy fejezzük ki: $\beta_{1a} + k_1 + \beta_{1b} + k_1 = 360$ fokot adjon; ha ez utóbbi czélu kiigazitott p_1 poligonnak minden pontjára nézve $2(k_1)$-el jelöltük. Ez alapon felirhatjuk továbbá a szögkiigazitásra szolgáló három alapegyenletet, ha a szögpontok számát:

n_a-val a poligonban,
n_b-vel b poligonban,
n_1-el p_1 poligonban jelöljük.

Ugyanis p_1 poligonban biztositjuk minden poligonpontra a két szomszédos β_{1m} és β_{2m} szögeknek 360 fokra való zárlatát a következő egyenlettel:

$$n_1 (a) + n_1 (b) + 2 n_1 (k_1) = 0$$

Minthogy ez egyenlet n_1-el osztható, ebből azt tapasztaljuk, hogy eme feltevés biztositására függetlenül az oldalak számától csakis alábbi egyenletet kell kielégíteni.

[218] $$(a) + (b) + 2(k_1) = 0$$

Tudniillik ezt minden „két szomszédos poligonhoz tartozó" szögpontra kell biztositani.

Más két egyenlettel biztositjuk a két a-val és b-vel jelölt poligonnak teljesen bezárt alakját.

[219] $$\begin{cases} n_a(a) + n_1(k_1) + h_a = 0 \\ n_b(b) + n_1(k_1) + h_b = 0 \end{cases}$$

Az első egyenlettel kifejezzük, hogy a poligonban mind az n_a számu szöget (a) igazitóval változtatjuk: továbbá még azt is, hogy p_1 poligonnak mind az n_1 számu szögpontjában az a poligonhoz tartozó szöget még (k_1)-el is változtatjuk. E változások összege kell, hogy a talált h_a hibával együtt nullát adjon, ha a hibákat eltüntetni akarjuk. A [218] és [219] egyenletek feloldása által találjuk (a), (b) és (k_1) kiigazitókat a következőkép:

[220] $$(a) = \frac{(2n_b - n_1)h_a + n_1 h_b}{N}$$

[221] $$(b) = \frac{(2n_a - n_1)h_b + n_1 h_a}{N}$$

[222] $$(k_1) = \frac{-n_b h_a - n_a h_b}{N}$$

[223] $$N = n_1(n_a + n_b) - 2n_a n_b$$

A számitás sikerét megvizsgáljuk még alábbi egyenlettel:

[224] $$(k_1) = \frac{-(a) - (b)}{2}$$

Szóval közös poligonpontokban minden szöget a rendes változáson kivül még a két szomszédos poligon megváltozóinak számtani közepeseivel is kell változtatnunk.

Számbeli példa. Legyen a 41. ábrával vázolt két polígonban $n_a = 9$, $n_b = 8$, $n_1 = 2$ szögponttal. A mérés adataival talált szögzárlati hiba:

$$h_a = 2^1 + 45'' = 165''$$
$$h_b = -(2^1 + 32'') = -152''$$

A [223] egyenletből:

$$N = -110$$

[220] és [221] egyenletekből:

$$(a) = \frac{165\,(16-2) - 2 \times 152}{-110} = -18{\cdot}236''$$

$$(b) = \frac{152\,(18-2) + 2 \times 165}{-110} = +19{\cdot}109''$$

$$(k_1) = \frac{-8 \times 165 + 9 \times 152}{-110} = \frac{+48}{-110} = -0{\cdot}436''$$

Vizsgálatképen [124] szerint:

$$k_1 = \frac{+18{\cdot}236 - 19{\cdot}109}{2} = -0{\cdot}436''$$

Ezek alapján kiigazitandó *a* poligonban minden szög $-18{\cdot}236''$-el, *b* poligonban minden szög $+19{\cdot}109''$-el igazitandó ki.

A p_1 poligonnak két 2 és 3 számu közös szöge úgy *a* valamint *b* poligonban még ezeken kivül $(k_1) = -0{\cdot}436''$-el is kiigazitandók. Számszerint *a* poligonban $(a) + (k_1) = -18{\cdot}236 - -0{\cdot}436 = -18{\cdot}672''$ és *b* poligonban $(b) + (k_1) = +19{\cdot}109 - -0{\cdot}436 = +18{\cdot}673''$ a kiigazitó mennyiség.

A szögkiigazitó eljárást még a 42. ábrában vázolt három szomszédos poligonra is ismertetjük.

Ha ugyanezt a jelölést megtartjuk, akkor a három *a*-val, *b*-vel és *c*-vel jelölt és összefüggő poligonok szögzárlati hibáit igy találjuk:

$$[225] \quad \begin{cases} h_a = 180\,(n_a - 2) - [\beta_a] \\ h_b = 180\,(n_b - 2) - [\beta_b] \\ h_c = 180\,(n_c - 2) - [\beta_c] \end{cases}$$

A közös szögpontokban a szögzárlat feltételei:

$$[226] \quad \begin{cases} (a) + (b) + 2\,(k_1) = 0 \\ (b) + (c) + 2\,(k_2) = 0 \end{cases}$$

A teljes poligonok szögzárlata biztosittatik mind a három poligon részére:

$$[227] \quad \begin{cases} n_a\,(a) + n_1\,(k_1) + h_a = 0 \\ n_b\,(b) + n_1\,(k_1) + n_2\,(k_2) + h_b = 0 \\ n_c\,(c) + n_2\,(k_2) + h_c = 0 \end{cases}$$

[227] egyenletnek középső egyenletéből látjuk legjobban eljárásunk miként igazitja ki a közös szögpontokban a szögeket úgy, hogy mindkét oldalt fekvő poligonnak zárlata is biztosittassék.

2. A rendszálak kiigazitása.

A kiigazitott körületi szögekkel kiszámitjuk minden poligonoldalnak azimutját, hogy oldalait a dél-északi és kelet-nyugati összrendező-tengelyekre vetitsük. Jelöljük $\Delta\sigma$- és $\Delta\eta$-val a két vetületét minden kiszámitott oldalnak. Továbbá $[\Delta\sigma]_1$, $[\Delta\sigma]_2$ és $[\Delta\sigma]_3$-al az absczissatengelyre vetitett oldalaknak algebrai összegét $p_1\,p_2\,p_3$ poligonban, l. 41. ábrát. Hasonlókép jelöljük $[\Delta\eta]_1$, $[\Delta\eta]_2$ és $[\Delta\eta]_3$-al az ordinátatengelyre vetitett oldalnak algebrai összegeit $p_1\,p_2$ és p_3 poligonokban. Legyen A_x és A_y valamint B_x és B_y ama zárlati hibák kifejezője, melyet a és b poligonokban az X és Y tengelyek irányában találunk, akkor ezeknek számértéke igy fejezhető ki. Az absczissatengely irányában:

$$[228]\qquad \begin{cases} [\Delta\sigma]_1 + [\Delta\sigma]_2 = A_x \\ [\Delta\sigma]_1 + [\Delta\sigma]_3 = B_x \end{cases}$$

Az ordinátatengely irányában:

$$[229]\qquad \begin{cases} [\Delta\eta]_1 + [\Delta\eta]_2 = A_y \\ [\Delta\eta]_1 + [\Delta\eta]_3 = B_y \end{cases}$$

Ha folytatólag $v_1\,v_2$ és v_3-al az absczissák kiigazitását $p_1\,p_2$ és p_3 poligonban jelöljük, igy A_x és B_x absczissahibák megsemmisitésére kielégitendő:

$$[230]\qquad \begin{cases} v_1 + v_2 + A_x = 0 \\ v_1 + v_3 + B_x = 0 \end{cases}$$

Hasonlót biztositunk az ordinátatengely irányában, ha $u_1\,u_2$ és u_3-mal $p_1\,p_2$ és p_3 poligonnak a kiigazitásait jelöljük:

$$[231]\qquad \begin{cases} u_1 + u_2 + A_y = 0 \\ u_1 + u_3 + B_y = 0 \end{cases}$$

Itt három ismeretlenre két egyenletünk van. Hogy tehát feladatunkat megoldhassuk, felállitjuk a hibák felosztására az alábbi szabályt. Minden egyes részletpoligonban felosztjuk a fentebb kimutatott $v_1\,v_2\,v_3$ és $u_1\,u_2\,u_3$ kiigazitásoknak értékeit arányosan az illető poligon oldalainak összes hosszúságával. Legyen tehát $L_1\,L_2$ és L_3 az oldalaknak összes hosszúsága $p_1\,p_2\,p_3$ poligonban. Továbbá (a_x) és (b_x) a hosszegység változása a és b poligonokban az absczissatengely irányában; (a_y) és (b_y) a hosszegység változása az ordináta tengelye irányában ugyancsak a és b poligonok bezárása czéljából.

Ezekkel $p_1\,p_2\,p_3$ poligon kiigazitásai igy irhatók fel:

$$[232] \quad \begin{cases} v_1 = L_1 (a_x) + b_x) \\ v_2 = L_2 (a_x) \\ v_3 = L_3 (b_x) \end{cases} \qquad \begin{aligned} u_1 &= L_1 [(a_y) + (b_y)] \\ u_2 &= L_2 (a_y) \\ u_3 &= L_3 (b_y) \end{aligned}$$

Egyszerűbb irását biztositjuk azzal, hogy tekintetbe vesszük az alábbi viszonyokat:

$$[233] \quad \begin{cases} L_a = L_1 + L_2 \quad \text{és} \\ L_b = L_1 + L_3 \end{cases}$$

[232]- és [233]-mai kifejezhető a [230] és [231] egyenletcsoport igy:

$$[234] \quad \begin{cases} L_a (a_x) + L_1 (b_x) + A_x = 0 \\ L_b (b_x) + L_1 (a_x) + B_x = 0 \\ L_a (a_y) + L_1 (b_y) + A_y = 0 \\ L_y (b_y) + L_1 (a_y) + B_y = 0 \end{cases}$$

E négy egyenlet feloldása által találjuk (a_x), (b_x) és (a_y), (b_y) kiigazitókat az absczissa és ordináta tengelye irányában mind a két poligon részére.

Rövidebb irást biztositjuk, ha $L = L_a L_b - L_1 L_1$-nek iratik. Ezzel az absczissák kiigazitói hosszegységenként:

$$[235] \quad \begin{cases} (a_x) = \dfrac{- L_b A_x + L_1 B_x}{L} \\ (b_x) = \dfrac{L_1 A_x - L_a B_x}{L} \end{cases}$$

Az ordinaták kiigazitói hosszegységenként:

$$(a_y) = \frac{- L_b A_y + L_1 B_y}{L}$$

$$(b_y) = \frac{L_1 A_y - L_a B_y}{L}$$

Ezekkel kiszámitjuk $p_1 p_2 p_3$ poligonok kiigazitóit mind a két tengely iránya szerint.

Az absczissák kiigazitói [232] szerint:

$$\begin{aligned} v_1 &= L_1 [(a_x) + (b_x)] \\ v_2 &= L_2 (a_x) \\ v_3 &= L_3 (b_x) \end{aligned}$$

Az ordinaták kiigazitói [232] szerint:

$$\begin{aligned} u_1 &= L_1 [(a_y) + (b_y)] \\ u_2 &= L_2 (a_y) \\ u_3 &= L_3 (b_y) \end{aligned}$$

Elvégre kiigazitjuk minden egy poligonban az egyes oldalaknak a vetületeit, a 43. §-tól a 46. §-ig fejtegetett eljárások egyikével.

Jegyzet. Ha a poligon kiigazitására elsorolt eljárásokon végig pillantunk, meggyőződünk szövevényes szabályairól, melyek némely esetben még eltorzitó hatásukról sem nyujtanak eléggé világos fogalmat. Ha tehát a mérnöknek valamely feladat sikeres megoldására a szabatos mérés fontos, akkor a poligon meghatározása alkalmával minden esetre ez biztositandó első sorban.

NEGYEDIK SZAKASZ.

A háromszögelés, tekintettel Földünk gömbalakjára.

50. §. Országmérések czélja.

Országok két inditó okból szoktak felméretni.

1. Oly térképek szerkesztése czéljából, melyekben az ország összes földbirtoka határvonalaival, útjaival, vizeivel, azaz termékeny és terméketlen területeivel a kellő szabatossággal ki legyen tüntetve. E felvételek képezik a megadóztatás alapját és biztositják a birtokosok tulajdonát. Hazánkban kataszteri térkép a nevük.

2. Térképek szerkesztésére, melyek hadügyi czélokra valók. E képeken nem kivánunk annyi részletezést és akkora pontosságot, mint kataszteri mérésektől; feladatunk egyedül a hadvezénylet tájékoztatása. Ez okból a földfelület domborodottsága számozott izohipszákkal legyen bemutatva. Azonkivül ábrázoljuk a földfelület álló- és folyó vizeit, csatornáit, vizforrásait, kútjait, hidjait, vasutjait, táviróvonalait, városait, helységeit, majorjait, esetleg különálló épületeit, szóval mind azt kell e térképen kitüntetni, mi a tájékozásra vagy hadügyi műveletekre fontos. Nálunk táborkari térkép a nevük.

51. §. Országmérések mértéke.

Minden térkép főkelléke az átnézet. Ennek biztositása czéljából nem szabad a térkép mértékét a szükségesnél nagyobbra venni. Kataszteri mérésekre a kisebbitést 1 : 1000-től 1 : 5000-ig szokták alkalmazni. A Magyar- és Osztrák birodalom e nemű méréseit 1 : 2880-al készitik, azaz egy bécsi hüvelyk negyven bécsi öllel vétetik egyenlőnek. Francziaország, Belgium, Sveicz és Németország kataszteri térképeit 1 : 2500-dal szerkeszti.

Topographiai vagy táborkari térképek kisebbitése 1 : 1000000-tól 1 : 10000-ig vétetik rendszerint. A Magyar- és Osztrák birodalom régibb topographiai térképeit 1 : 28800-dal, azaz egy bécsi hüvelyk négyszáz bécsi ölnek véve, készitették. Mig ujabb fel-méréseink térképei 1 : 75000-del rajzoltattak. Ez utóbbi mérés a Magyar- és Osztrák birodalmat 666 lapon mutatja be, melyek laponkint 50 kron megszerezhetők. Vannak ezeken kivül még 1 : 25000-ben rajzolt térképeink is; ezek azonban csak hivataloknak kellően megokolt folyamodványokra adatnak ki. Francziaország és Németország 1 : 25000-dal, Sveicz 1 : 50000-dal lett legujabban lerajzolva.

Elvi szempontból egyezik mind a két czélu mérés, egyedüli különbségük a kataszteri mérések nagyobb mértéke és nagyobb részletességében tapasztalható. Ezzel okoljuk meg azt, hogy a következőkben csakis kataszteri mérésekről szólunk.

52. §. A háromszögelés alapelve.

Már 400—500 holdnál nagyobb földterületnek a sikeres mérése csakis az által biztositható, hogy a nagyból a kicsinyre, az általánosból a részletes mérésre térünk át. Az egyenlő oldalu háromszög ama mértani alak, melynek szögpontjai a legegyszerűbb és legpontosabb módon határozhatók meg a Föld felszinén, ez okból kiválasztunk a mérés czéljára a területnek nehány jeles fekvésü pontját, kijelölésük után egyenes vonalakkal háromszögekké kötjük azokat össze, mi módon az úgynevezett háromszögháló keletkezik, melynek szabatosan bemért szögpontjait részint mint kiinduló, részint mint ellenőrző pontokat a részletes mérésre felhasználván, feladatunkat a legbiztosabban foganatosithatjuk. Az eljárást a feladat fontossága s a terület kiterjedése után módositjuk. Ily szempontból megkülönböztetjük:

1. Az országmérést, mely több rendbeli háromszöghálónak háromszögtani felmérésén alapszik.

2. Kiterjedtebb, azaz két négyzetmértföldnél nagyobb bányászati mérést, mely az ország háromszögelésére támaszkodva, még egy másod- esetleg harmadrendü háromszögelést követel, hogy a részletes mérést sikerrel megejthessük.

3. Két négyzetmértföldnél kisebb területekre szoritkozó mérést, hol nehány háromszöggel, vagy kényszerűségből nehány főpoligonnal eredményünk pontossága is biztositható.

53. §. Országmérések alapelve.

Az elsőrangu háló szögpontjaival mérésünk számára kiinduló pontokat kell biztositani; ezek képezik mérésünk alapját. Ez okból szükséges, hogy azokkal az egész területet befödjük. Számuk ne legyen nagy, de fekvésük megfeleljen ama feltételeknek, melyek a lehető legszabatosabb bemérésüket biztositják és még azonkivül az alsóbbrangu pontoknak hozzákapcsolását minden irányban könnyitik. Hegyes vidéken e pontokat a legmagasabb csúcsokra fektetjük. Sík földön részükre 16—20 *m* magas toronyszerű faépitményeket emelünk, melyek tetejéről messze terjedő kilátást nyerünk. E pontok felosztásánál, a mennyire lehetséges, egyenlő oldalu háromszögeket iparkodunk alakitani. Az oldalak hossza 100—20 kilométer között szokott ingadozni. Kedvező területen 3—8 mértfölddel választjuk; kényszerűségből előfordulhatnak azonban 16—20 mértföldnyi oldalak is. Hogy ily hálóról példával is szolgáljunk, bemutatjuk Magyarország legujabb keltü, elsőrangu háromszögelésének egyik részét, l. 43. ábrát. Itt az *ABC*-vel elölt háromszög majdnem 16 mértföldnél hosszabb oldalakat mutat. Általában azt tapasztaljuk, hogy középhegységben és síkföldön kisebb, valamint szabályosabb háromszögek alakitása gyakrabban sikerül, mint magas hegyekben. Ezt látjuk a 43. ábrában Budapestről Pécsnek egészen Zimonyig terjedő hálóban. Ha Erdély hálóját összehasonlitjuk azzal, mely Budapest- és Selmeczbányától Grácz, Lincz és Brünnig elterjed, ebben sokkal több hosszú oldalt találunk, mint az előbb emlitett két hálórészben.

A másodrangu háló. E háromszögpontok feladata a több asztallapból álló háromszögelő osztályok meghatározása, mely czélból minden háromszögelő osztálynak területébe legalább három ily szögpont essék. Az ily czélu háromszögekkel lánczokat képezünk, melyeknek 4, esetleg 8 háromszögével a másodrangu pontokat egy-egy elsőrangu háromszögnek két végpontjához kötjük, l. 34. ábrát. A másodrangu háló oldalai 30—10 kilométerig mérnek.

A harmadrangu háló arra való, hogy a háromszögelő osztálynak a részletlapjait — asztallapokat — a másodrangu pontokhoz kösse. Oldalai 10—2 kilométerig választatnak.

A negyedrangu háló pontjai harmadrangu pontokhoz kapcsoltatnak. Oldaluk hosszúsága rendszerint csak nehány száz méterre terjed és feladatuk az egyes asztallapnak a részletes bemérését könnyiteni; azaz ennek kiinduló és ellenőrző pontokat szolgáltatni. Minden asztallap területében 15—30 ily pontot választunk, melyeket rendszerint előlmetszés útján úgy szoktunk meghatározni, hogy mindegyikét három megbizható háromszögpontból megirányozzuk; tehát a szükséges két metszőirányzaton kivül még ellenőrző metszetről is gondoskodunk.

Ötödrangu pontok alatt rendszerint a részletes felvétel poligonpontjait értjük.

Az első-, másod- és harmadrangu hálóban megmérünk minden egyes szöget megfelelően pontos theodolittal. Az elsőrangu oldalak közül rendszerint csak kettőt vagy hármat szoktunk megmérni; ezek az úgynevezett alapvonalak. Az alapvonalak egyikével kiszámitjuk a többi oldal hosszúságát, a megmért és kiigazitott szögadatokkal. A többi megmért vonal tehát csak ellenőrzésre való, miért is verificáló alapvonal a nevük. A háló kényelmes és pontos lerajzolására meghatározzuk valamely elsőrangu szögpontnak a déllőjét, rendszerint oly pont déllőjét, mely a felmért területnek közepe táján fekszik. Ez a normálpont, vagyis tengelyrendszerünk kezdőpontja; déllője az absczissatengely, kelet-nyugati iránya az ordinátatengely. E tengelyekre viszonyitunk minden bemért háromszögoldalt kiszámitott azimutszöge és végpontjainak kiszámitott rendszálai által. Hogy elvégre mérésünk fekvése a Földgömbön is meg legyen határozva, e czélból még nehány elsőrangu szögpontnak a földrajzi rendszálait kell ismerni. Ha tehát országunknak csillagvizsgálói vannak, akkor ezeket minden esetre elsőrangu pontokul használjuk. Ily pontból indulunk ki, ha a többi elsőrangu szögpontnak földrajzi rendszálait számitjuk.

54. §. A teendők sorrendje országméréseknél.

1. Az alapvonal megválasztása, állandó kijelölése és szabatos hosszmérése.
2. A többi elsőrangu szögpont megválasztása és kijelölése.
3. A szögek pontos mérése és esetleg a bemért szögadatok központositása.
4. A bemért szögadatokkal és az alapvonallal a többi oldalhosszúságok ideiglenes számitása.
5. A bemért szögadatok kiigazitása a legkisebb négyzetösszegek elmélete szerint.
6. Az oldalak végleges számitása a kiigazitott szögadatokkal.
7. Az azimutszögek és derékszögü gömbrendszálak számitása.
8. A földrajzi rendszálak számitása.
9. Az elsőrangu hálónak a megrajzolása és felosztása egyes háromszögelő osztályokra, esetleg egyes részlet vagy asztallapokra.

10. A másodrangu háló és szögpontjainak a megválasztása és kijelölése.

11. A másodrangu szögek mérése.

12. A másodrangu oldalhosszak számitása az elsőrangu oldalakból, e szögadatok kiigazitása, valamint ezen szögpontok rendszálszámitása is.

13. A másodrangu háló lerajzolása és osztályainak további felosztása egyes felvételi lapokra.

14. A részletes mérés előkészitő munkái.

15. A harmadrangu háló szögmérése theodolittal valamint rajzolás útján is.

16. Az asztallapok egyenkinti előkészitése; a rajzolás útján meghatározott pontok felrakása és a tájékozó irányzatok kijelölése által.

17. A részletes mérés megkezdése.

18. A déllő meghatározása.

55. §. Az alapvonal megválasztása.

Minthogy igen szabatos hosszmérések aránytalan több bajjal s költséggel járnak, mint a legpontosabb szögmérések, ez okból az elsőrangu háromszöghálóban rendszerint csak egy, két vagy legfeljebb nehány oldalt választunk ki, melyeknek hosszúságát közvetetlen mérés útján a legnagyobb pontossággal határozzuk meg. Ezen oldalak egyikéből és a megmért szögekből kiszámitjuk a többi oldal hosszúságát.

E kiinduló vonal pontossága e szerint mértékadó a többi oldal helyes hosszára is, mely tulajdonsága folytán alapvonal a neve. A többi alapvonal a mérés pontossági vizsgálására és ellenőrzésére való, miért is verifikáló alapvonalnak nevezzük. Az alapvonal messzeható befolyása a mérés eredményére szükségessé teszi, hogy arányos hosszúságára és czélszerű telepitésére a legnagyobb gond fordittassék, tudniillik ha az alapvonal hosszúsága az egész háló hosszanti kiterjedésének a $\frac{1}{20}$, huszad részével egyenlő és mi a háromszögpontoknak a fekvését a hosszegység $\frac{1}{2000}$ részéig biztosan akarjuk meghatározni, akkor alapvonalunk hosszmérése $1:(20 \times 2000) = \frac{1}{40000}$-ig legyen biztos. Abszolut hossza rendszerint 1-től 3 mértföldig szokott ingadozni. A terület, melyre azt telepitjük, lehetőleg sík és vizszintes legyen; hegyes vidéken azért vagy lapos, széles völgyekbe, vagy fensíkokra fektetjük. Végpontjainak olyan legyen a fekvésük, hogy ezekből a legközelebb és hozzá kapcsolandó elsőrangu háromszögoldalra két megfelelően alakitott háromszöggel lehessen áttérni; azaz a létrejövő szögek, a mennyire csak lehet, 30 foknál nagyobbak legyenek. Mind e fontos kellék biztositása végett a felmérendő területet első sorban beható tanulmányoknak kell alávetni, még mielőtt a szögpontokat véglegesen kijelöljük. A terület alakjáról, kiterjedéséről, valamint a neki megfelelő hálóról a legtökéletesebb fogalmat magas hegyek bejárása által szerezhetünk; a mennyiben ezek legjobb átnézetet nyujtanak. A többi szögpont felosztása iránt tehát ily pontokból a legrövidebb módon jöhetünk tisztába. A felosztást régibb térképbe vagy táborkari földabroszba szoktuk rajzolni, mely vázlatos rajz egyszersmind a háló pontosabb megrajzolásáig vezérképül szolgál.

Az alapvonal kapcsolása.

Tekintettel a megmért vonal és a belőle számitás utján leszármaztatott háromszögoldal kölcsönös fekvésére két főesetet különböztetünk meg. Ugyanis a megmért ab vonal a leszármaztatott AB vonalat vagy keresztezi, l. a 44. ábrát, vagy lehet irányuk körülbelül egyenlőközű, l. a 45. ábrát. Számitását foganatositjuk az első esetben igy:

$$Aa = \frac{ab \sin(3)}{\sin(2)}; \quad Ba = \frac{ab \sin(4)}{\sin(5)}$$

Ezekkel:

$$AB = \sqrt{Aa^2 + Ba^2 - 2Aa \,.\, Bb \cos(1+6)}$$

Ugyan eme oldalhosszúságnak második értékét találjuk $ABb\Delta$-ből:

$$Ab = \frac{ab \sin(1)}{\sin(2)}; \quad Bb = \frac{ab \sin(6)}{\sin(5)}$$

mely adatokkal:

$$AB = \sqrt{Ab^2 + Bb^2 - 2Ab \,.\, Bb \cos(3+4)}$$

A második esetben 45. ábra nyomán járunk el:

$$Aa = \frac{ab \sin(3)}{\sin(2)}; \quad Ab = \frac{ab \sin(1)}{\sin(2)}; \quad Bb = \frac{ab \sin(4)}{\sin(5)};$$

$$Ba = \frac{ab \sin (6)}{\sin (5)}$$

Ez adatokkal $AaB\Delta$-ből:

$$AB = \sqrt{Aa^2 + Ba^2 - 2Aa \,.\, Ba \cos (1-4)}$$

és $Bba\Delta$-ból:

$$AB = \sqrt{Bb^2 + Ab^2 - 2Ab \,.\, Bb \cos (6-3)}$$

Ha a leszármaztatott vonalnak e két rendbeli hosszúsága a hosszegységnek annyiad részéig összevág, a mekkoráig megszabott hibahatárunk ezt követeli, akkor a csatlakozás sikerültnek tekinthető, a mi pontos szögmérés és a szögadatoknak megfelelő kiigazitása mellett mindig el is érhető.

Az itt bemutatott eljárást ismételni is lehet, főkép akkor, ha rövidebb megmért vonalból hosszabb elsőrangu háromszögoldalra akarunk áttérni. Ez ajánlható, ha bányászati mérésnél a terület annyira hullámozott, hogy hosszabb alapvonalra megfelelő sík és vizszintes hely közelben nem található és országmérésnek valamely háromszögoldala nem áll rendelkezésünkre, vagy ha mérésünk kapcsolása az országmérés egyik háromszögoldalához nagyobb költséggel jár, mint rövidebb alapvonalnak közvetetlen mérése.

Spanyolország legujabb mérése alkalmával eljártak a 46. ábra szerint. Tudniillik az alapvonalnak 1-től 2-ig terjedő és 15 *km* hosszúsággal megmért részéből e vonalnak 9-től 10-ig terjedő ötszörös hosszát számitották ki.

A számitást úgy foganatositották, hogy 1—2-ből 3—4-re tértek át; 3—4-ből áttértek 5—6-ra, innen 7—8-ra és 9—10-re tettek át a számitással, melynek részeit, úgy mint a 44. ábrával bemutattuk, határozták meg.

Az alapvonal olcsóbb meghatározására még egy érdekes példára utalunk; tudniillik Poroszországnak 1820-ban végbevitt háromszögelése alkalmával bebizonyitotta Sverd német tanár azt, hogy a Speier és Oggersheim között elterülő és 20 *km* hosszú alapvonalat számitás útján épen azzal a pontossággal lehetett volna meghatározni, melyet a közvetetlen hosszmérés adott, ha egy kilométer hosszú ab vonalat mérnek és ezt a 47. ábra módján a meghatározandó AB vonal két végpontjához csupa egyenlő oldalu háromszögekkel kapcsolják.

56. §. A háló alakja.

Ez a felmérendő területnek az alakjától függ. Általában megkülönböztetünk teljes és lánczalaku hálót. A teljes hálóban az oldalhosszúságok számitásánál az *A B* alapvonalból kiindulva, több úton haladhatunk a hálóban végig, mig hozzá vissza nem térünk, l. 48. ábrában az 1-, 2- és 3-mal jelölt nyilak útjait. Lánczalaku hálóban az oldalhosszak számitásával, l. 49. ábrát, *A B* alapvonalból csak egy úton mehetünk végig. Onnan van, hogy lánczalaku hálóban a mérés sikerét csak úgy biztosithatjuk, ha két alapvonalat méretünk meg, melyeket rendszerint a háló két végéhez fűzünk.

57. §. Az alapvonal helye a háromszöghálóban.

Még teljes hálóban is ritka az az eset, hogy csak egy alapvonalat méretünk, mert a siker megitélésére legalább még egy ellenőrző alapvonalról szoktunk gondoskodni. Ha teljes hálóban csak egy alapvonalat választunk, akkor ezt legczélszerűbben a háló közepébe telepitjük. Oly esetben, hol két vagy több vonalat mérünk, ezeket a háló széleihez közel osztjuk el megfelelően. Igy tapasztaljuk ezt a Magyar- és Osztrák birodalom legujabb elsőrangu hálóban, l. 43. ábrát, hol az alapvonalak a vonalozott háromszögekkel lettek a hálóhoz kapcsolva. Ezt látjuk Serajevó, Spalató, Marburg, Linz, Eger, Josefstadt, Wr.-Neustadt, Tarnov, Czernovitz és Arad közelében.

58. §. Az alapvonal állandósitása.

Az alapvonalat oly módon kell kijelölni, hogy ezt nem csak a mérés tartama alatt, hanem bármikor uj mérésre lehessen használni. Ez okból végpontjai helyén nagy és súlyos faragott követ épittetünk a földbe, mely kövön a pont fekvését hegyes végü rézhengerke által jelöljük ki; ugyanis a kőbe lyukat furatunk s abba tesszük a hengert, hol kénnel vagy ólommal körülöntetjük. Ily végjelek fölé vagy csak magasabb gúlát állittatunk, vagy az ujabb kor méréseinek megfelelően emeletes, toronyalaku kőépitménynyel biztositjuk e nagyfontosságu vezérpontokat. Ekkor a torony bejáró ajtaját mindig az alapvonal második végpontja felé nyitjuk, hogy a hosszmérés alkalmával eme ajtón át a vonal végjeléig mérhessünk. A torony első emeletén felosztjuk az ablakokat úgy, hogy ezeken át minden az alapvonalhoz kapcsolandó végpont megirányozható legyen.

Az alapvonal végpontjainak egyszerűbb módon foganatositott kijelölését az 50. ábrában látjuk. *A* az alapfal, *G* a jelzőkő, *H* betonfalazat a jelzőkő körül, *c* kőoszlop, mely egyszersmind a theodolit felállitására szolgál, *f* fedő-kőtáblák, *d* ezüstözött rézgömb; ezzel könnyitjük az ily szögpontnak a megirányozását több mértföldnyi távolságról. Az ily pont fölé még 9—12 *m* magas háromlábu gúlát is állittatunk.

59. §. Mérőrudak.

Hosszegységül a felső méréstanban a perui toiset használjuk, vagyis ama $3\,{}^1/_2$ tois hosszú és fából készitett mérőrudakat, melyeket a francziák 1735-ben a perui fokmérés alkalmával az alapvonal mérésére használtak és mely rudakat még mai napig is a párisi állami levéltárban őriznek. A tois tudvalevő: 6 párisi láb = 72 párisi hüvelyk = 864 párisi vonal. A méter hosszúsága megállapittatott 443·236 párisi vonallal. Ezek nyomán 1 tois = 1·94903631 méter.* Országmérésre használt mérőrudakat ujabban 2 toisnyi hosszúsággal fémből vagy üvegből is készitenek. A fémrúd lehet iridiumot tartalmazó platinából, mint az egyes országok normál méterrúdjai. Lehet a fémrúd sárgarézből, vasból vagy aczélból is. A képviselendő hosszúságot kijelöltetjük ily mérőrúdon végvonásokkal vagy véglapjaival is. Az egyes országok normál méterje keresztmetszetü végvonásos mérték. Üvegből készitett rúdak — üvegcsövek — ugyancsak végvonásos mértékek. A vasból készitett rúdak ellenben nagyobbrészt véglapu mértékek.

Végvonásos mértékek előnye az, hogy használatuk által hosszúságuk nem változik, mert a mérésre mikroszkopot alkalmazunk.

1784-ben Roy angol tábornok, Angolország tengerpartjait úgy határozta meg, hogy az e czélu háromszöghálóban az alapvonalat üvegcsövekkel mérte. Cassimi Cesar franczia csillagász 1839-be vasrudakat használt Francziaország háromszögelése alkalmával.

* L. Cséti Földméréstanát 10—13. §§-ig, hol a métermérték kimeritően ismertetve van.

A Magyar- és Osztrák birodalom országmérésére 1810-ig farudakat használtak, 1810 óta vasból készitett rudakkal mérnek. E rudak Dalamber elvei szerint lettek szerkesztve; felszerelésüket az 51., 52., 53., 54. és 55. ábrával ismertetjük. 51. ábra mutatja a rudat használatra kész állapotban a valódi nagyságnak 15-öd részéig kisebbitve, 52., 53. és 54. ábra a rúdvégeken alkalmazott alkotórészeket 1 : 3-ig kisebbitve tünteti elénk, 55. ábra a szintező készüléket ábrázolja 1 : 5-ig kisebbitve.

Ily alapvonal hosszát mindig négy egyenlő rúddal mérjük egyszerre, melyek szerkezete egyenlő, úgy hogy ismertetésükre elég, ha egyiknek a leirásával foglalkozunk.

Rajzainkban a mérőrudat (etalont) *a*-val jelöltük; ez lágy vertvasból készült, keresztmetszete derékszögü parallelogramma, melynek egyik oldala 28 *mm*, másik oldala 7·5 *mm*. A rúd teljes hosszúsága egyik sík véglapjától második sík véglapjáig 20 Celsius-féle foknál 2 tois = 3·898 méter. E rúd kezelését könnyitették azáltal, hogy 14 *cm* magas és ép ily széles *A* fenyőgerendával alátámasztották, hol e rúd lapjával a 10 darab *b*-vel jelölt rézlapkákon nyugszik. E *b* rézlapok mindenike négy-négy csavarral van *A* gerendára erősitve. Igy biztositották a vasrúd szabad hosszanti kiterjedését, de hogy egyuttal fekvése rézlapkákon is biztositva legyen, átívezték *a* vasrudat minden *b* lapka helyén *c* rézpánttal. Úgy a mérőrúdnak, valamint kényesebb alkotórészeinek megvédésére alkalmazták *ff* védődeszkát. Ezt három pontban d_1 d_2 d_3 vaspánttal kötötték *A* gerendához, úgy hogy 60 *mm*-el magasabb legyen fekvése *a* mérőrúd felett.

A hosszmérés nagyfoku pontosságát azzal biztositották, hogy az első mérőrúdnak mindkét végén, a többi három rúdnak csakis egyik végén apró *i* noniussal felszerelt *G* mérőpálczát alkalmazták, l. 52., 53. és 54. ábrát. A kitolható *G* mérőpálcza *DD* réztáblán *FF* vezeték között van elhelyezve; feladata az, hogy hosszmérés alkalmával a vonal irányában egymás elé sorozott mérőrudaknak ama 1—2 *cm*-nyi közeit megmérhessük, melyeket az eredmény biztositása céljából az egyes mérőrudak között meg kell hagyni. E czélunk szükségessé teszi, hogy *G* pálcza a következő rúd végét mindig könnyedén érintse, miért is *G*-nek hátulsó végét *I*-nél felfelé görbitették és ott rúgóval felszerelt *H* vezető hengerkét megerősitették. E gyönge rúgó támaszkodik *K* vezetékre és kifelé szoritja *G* mérőpálczát, ha az *X* tengely körül fordítható M zárókart az által felszabaditjuk, hogy a h_1 furatba illő h csapot onnan kihúzzuk. Az edzett L aczéllapkával védjük G mérőpálczát kopás ellen. P az a górcső, melylyel G pálczának kitolását i noniuson a milliméternek 250-ed részeig biztosan leolvashatjuk.

A hőmérséklet kipuhatolására minden mérőrúdon hosszának első és utolsó negyedrészében egy-egy üvegből készitett Q hőmérő van megerősitve. Tudniillik a mérőrúdnak felső határlapjában félgömb alaku mélyedést véstek, hová kényesőt töltenek. Ez arra való, hogy a vasrúdra erősitett hőmérő, melynek gömbje a kényesőbe merül, a vasrúd hőmérsékletét gyorsabban és biztosabban felvehesse. A hőmérséklet megfigyelésére kivágatott ff védődeszkán hosszúkás nyilás minden hőmérő felett. Tudvalevő dolog, hogy a mérőrudat lehetőleg vizszintes fekvésben kell használni, hogy tehát esetleges apró eltéréséről tudomásunk legyen felszerelünk minden mérőrudat szintező készülékkel, l. 55. ábrát. RR az öntöttvasból készült alaplap, a két felfelé nyúló SS kezelő csapokkal. w a libella, mely az öt átövező v tartórúdon van megerősitve. Utóbbi v rúddal fordulhat ez vizszintes tengely körül t oszlopban; második v_2 végével nehezedik saját súlyánál fogva v csavarnak gömbalaku Y végére. v_1-nél látjuk a libellatartónak rövid fokívét, mely $\pm$ 5 foknyi beosztásra terjed és az u oszlopon állandósitott noniussal a libella dűlésszögét 10 szögmásodperczig olvastatja le. V csavar kettős csavar, azaz hossztengelye irányában ki van fúrva az igen apró hágásu V csavar felvételére, mig V-nek hengerfelületén jóval durvább csavarmenetekkel van ellátva. Igy biztositották e műszernek gyors és pontos beállitását e két csavarnak felváltott kezelése által.

E szintező készüléket helyezzük a mérőrúdra, mely czélból A gerendán e_1 és e_2 oszlopkák vannak megerősitve, l. 51. ábrát, melyek ff védődeszkának felső határlapjáig kiemelkednek. Ez oszlopkák mindenike függőleges furattal van ellátva, hová a szintező készüléknek lefelé nyúló q_1 q_2 csapjai tűzhetők.

A vasból készitett a mérőrudat tetszésünk szerint vagy az egyik, vagy a másik végéhez közel szilárd összefüggésbe hozhatjuk A gerendával, ha ezt a d_2 és d_3 vaspántok alatt megerősitett B kötőcsavarral leszoritjuk, l. 52. és 53. ábrát. Mérés alkalmával a mérőrudat A gerendával együtt lehetőleg vizszintes helyzetben emeltetjük és szállittatjuk a vonal irányában ujabb fekvésbe.

Ekkor négy ember kezeli, melyek e czélból C_1 valamint C_2 furaton egy-egy emelőrudat tolnak át és azokon ketten-ketten megemelik.

Hogy továbbá a mérőrudakat nemcsak a végpontban felállitott theodolittal, hanem bárhol az első lefektetett mérőrúdról is a vonal függőleges síkjába helyesen beigazithassuk, szükséges még az első mérőrudat az 56. ábrában bemutatott látócsővel felszerelni. Ez hasonlit a Starke-féle látócsöves vonalzók szerkezetéhez. Csőalaku *N* támasztóoszlopjával ráfűzzük a mérőrúd gerendáján megerősitett *m* kúpos csapra. A látócsőnek irányzótengelyét ekkor az által hozzuk egy függőleges síkba a mérőrúd hosszanti tengelyével, hogy amannak *v* karját és *b* rúgóját a μ pontban megerősitett igazitócsavarok közé szoritjuk, l. 51. ábrát.

Segitő eszközök e mérőrudak használatára.

51. ábrában vázoltuk a mérőrúd alkalmazását segitő készülékeivel együtt. Ez röviden úgy történik, hogy a vonal irányában töltés, esetleg bevágás alakjában a földfelületet szakadatlan vizszintes sík után egyengetjük és e vizszintes talajon a mérőrudakat következőleg lefektetjük.

Először lefektetünk a vonal irányában, kimért távolságokban minden rúd részére két α fapárnát, l. 51. ábrát. Ez 8 *cm* vastag, 45 *cm* széles és 50 *cm* hosszú tölgyfapadló, lefelé nyúló 6—8 vastüskével ellátva. Helyzetét biztositjuk az által, hogy nehezebb fasúlykolóval a föld szinéig leveretjük. E fapárnára állitjuk a lágyfából készitett, 18 *cm* magas β zsámolyt, l. 51. és 57. ábrát, melynek felső felületén 3 ólommal beöntött és négyzet alaku γ támasztólapja van.

A zsámolyra tétetik az 51. és 58. ábrában (δ)-val jelölt keresztalaku fémrész; ez három emelőcsavarral bir, melyekkel a rúd vizszintes fekvését biztositjuk. Az úgynevezett *Z* hidgerenda, l. 51. ábrát, 3·4 *m* hosszú, 25 *cm* magas és 15 *cm* széles fenyőgerenda. Könnyebb kezelhetősége czéljából ki van vágva oly módon, mint azt *Z*-nél vett keresztmetszete 59. ábrában, vagy a δ-nál vett keresztmetszete 60. ábrában ismerteti. A hidgerenda megvasalt végein súlyokat akasztunk, helyes fekvésének biztositására. A mérőrudakat nem fektetjük *A* gerendával e hidgerendákra, hanem két sárgarézből készitett *v* beállitó asztalkára, l. 51. ábra, melynek vizszintes csavarával, l. 61. ábrát, a mérőrudat az alapvonal irányára merőlegesen el lehet tolni, ha azt eme vonal függőleges síkjába pontosan be akarjuk vezetni.

A függőlegesitő, l. 62., 63., 64. ábrát. Ezzel beállitjuk az első vagy utolsó rudat a megmérendő vonalnak kezdő, esetleg végpontjára a legnagyobb szabatossággal még akkor is, ha kisebb szél fúj. A készüléket tárcsás *S* műszerállványra állitjuk, l. 62. ábra. Ennek fő része a méter hosszú, 2 *cm* átmérőjü és lehetőleg könnyü *K* sárgarézcső, alsó végén *r* aczélhegygyel, felső végén *Q* libellával felszerelve. *K* rúddal átvisszük a bemérendő pontot egyazon függőlegesben mélyebb vagy magasabb szintre. E czélnak megfelelően *K* rúd *HH* gyűrűkben fel és alá tolható; könnyü járása biztositva van az által, hogy *Q*-nál felakasztottuk hegedűhúrra, mely húrt *N* csigán át az *F* rézcsőben lelógó ólomsúly és az *m*-nél alkalmazott rúgó által ellensúlyoztunk. *F* rézcső és *G* tartó külön beállitó készülékre vannak erősitve, l. 63. ábrában e készüléknek *XX* szerinti metszetét; ugyanis *l* alaplapra van ez erősitve, azzal pedig más keresztbe állitott *h* lapon nyugszik úgy, hogy *E* és *D* csavarokkal két egymást merőlegesen metsző vizszintes vonal irányában eltolhassuk. E beállitó készülék erősittetett elvégre még az *R* emelőcsavarokkal ellátott *B* háromlábra, l. 62. és 64. ábrát, melynek *R* csavaraival *K* rúdnak függőlegességét biztositottuk, ha *Q* libellának a buborékja bevág.

A függőlegesitőnek kellékei:

1. Hogy *r* aczélhegy beessék *K* rúdnak hosszanti tengelyébe.

2. Hogy *Q* libellának buborékja bevágjon normálpontjára, ha *K* rudat hossztengelye körül 180 fokkal forditjuk.

60. §. A rúdhosszak meghatározása.

Az ily nagypontosságu hosszmérés csak úgy biztositható, ha a használt mérőrudaknak egyenkénti hosszát nagyobb szabatossággal ismerjük, mint a milyen vonalunk megszabott pontossága. Onnan van, hogy mindenek előtt az alkalmazandó mérőrudaknak hosszát 16 - 20 Celsius foknyi hőmérsékletnél több igen szabatos mérésből meghatározzuk.

Véglapu mérőrudaknak hosszhatározásaira érintő emelőket alkalmazunk, l. 65. ábrát. E készüléknek több *kg*-nyi súlyú *BC* vasállványa összefoglalja alkotó részeit és biztositja kényelmes felállitását. *DE* könyökemelő *p* és *M* végeken edzett aczélból készitett vizszintes élekkel felszerelve. *F* eme könyökemelőnek vizszintes forgástengelye, *G* ellensúlya, mely csavarmenetekkel ellátott emelőn szabatosan beállitható. A mérésre szolgáló emelő *IH* keret, *K* mutató és *pm* élek által van képviselve. *IH* keretben *no* aczéllemezek találnak helyet, egyik végük 60—70 foknyi szög alatt élet képez, *m* az állandósitott támasztó él; az élek keményre vannak edzve, *L* beosztott körív a hosszváltozások megfigyeléseire. A *p* és *m* éleknek egymás felé forditott függőleges határlapjait 1, 2 csavarokkal 0·25—0·2 *mm*-nyi távolságra lehet állitani, mi módon 200 *mm* hosszú mutatóval 800—1000-szeres nagyitás biztositható, szóval a tizedmilliméter ezredrésze még nagy kényelemmel leolvasható, sőt ennek tizedrésze még le is becsülhető.

Szükségünk van még a 66. ábrában bemutatott rúdvégjelzőre, ha a két tois hosszú rudaknak egyenkénti hosszait normálméterrel akarjuk összehasonlitani. Ezenkivül még vagy 10 drb. esztergályozott rézhenger is kell. A rúdvégjelzőnek *BC* tartója vasból készült; *C* alaplapja 16 *cm* széles, 18 *cm* hosszú, melylyel a komparátor asztalára fektetjük. Állását biztositjuk 6—8 *kg*-nyi súlyával. *DE* e készülék beállitócsavara, 0·5 *mm*-nyi hágással, 14—16 *cm* hosszú nyelű *EF* csavarkulcscsal.

A mérésre három darab érintő-emelő és egy rúdvégjelző szükséges; ezekkel szerkesztjük a komparátort, l. 67. ábrát. Ugyanis *A* és *C* két súlyos, faragott kő, kellő alapfalra, vagy négy méternyire egymástól elhelyezve. E kőhasábok közé fektetjük a simára gyalult, négy oldalu *BB* gerendát, melyet még két vagy három pontban támasztunk alá, úgy hogy felső határlapja vizszintes sikot, a komparátor asztalát képezze. *A* és *C* kőhasábokra állitunk egy-egy érintő-emelőt, úgy hogy ezeknek *M*-el jelölt alsó élei között egy 4 méter hosszú rúd férjen el, l. *D* és *E* emelős-készülékes vázlatos rajzait 67. ábrában. E kőhasábokon lefoglaltatjuk az emelős készülékeket két-két csavarral. Az ily módon létesitett komparátort használhatjuk most mérőrúdjaink összehasonlitására. A rudak mindenikét jelzőszámmal különböztetjük meg; ugyanis az 1-, 2-, 3- és 4-es szám festése által. Ezután fektetjük egymás után véglapjaikkal *D* és *E* emelős mérőkészülékek közé; ekkor gondot forditunk arra is, hogy az asztalon fekvő mérőrúdnak hosszanti tengelye összeessék az asztalon irónnal kijelölt komparátor tengelyével; azaz *D* és *E* emelős készülékek egyenes vonalu összekötőjével. Ezt elérve, megfigyeljük a mérőrúdnak két hőmérőjét és leolvassuk mind a két emelős készüléknek beosztott köríveit.

Ha eme adatokat minden mérőrúdon a jelzőszámmal együtt együtt feljegyeztük, meghatározzuk az érintő-emelők közti távolságot is a normálméterrel. E czélból lefektetünk BB gerendának egyik végéhez közel öt vagy hat rézhengerkét kellő felosztásban, tengelyükkel merőlegesen BB gerenda hossztengelyére, l. 67. ábrát. E hengerekre fektetjük a normálmétert; hossztengelyét ismét egyenlőközüen BB hossztengelyével. Folytatólag G_1 rúdvégjelzőt B gerendára állitjuk, csavarkájával toljuk most a hengereken fekvő normálmétert addig előre, mig D készüléknek mutatója körülbelül azt olvastatja le, mit a mérőrudak összehasonlitása alkalmával leolvastunk.

Eme olvasás és a hőmérséklet feljegyzése után eltávolitjuk a normálmétert első fekvéséből és meghatározzuk véglapjának a helyét. Tudniillik a harmadik érintő-emelőt B gerendára úgy állitjuk, hogy alsó vizszintes éle G_1-ben a rúdvégjelzőt érintse. E helyzetben leolvassuk eme készülék beosztott körén a mutató O_2 állását. O_2 számértéke jelöli a normálméter végső lapjának fekvését. Ezek megszerzése után egy méterrel előbbre tesszük a rúdvégjelzőt, azaz G_2-be állitjuk, hogy az eddigi eljárás folytatása által a második méterrudat is bemérjük. Ha a második méter kezdőlapja nem épen oda esik, hol az elsőnek a véglapja feküdt, akkor I készüléken most U_1-et olvasunk le, azaz ekkor $O_1 - U_1 = \pm \alpha$ a normálrúdnak a hosszához előjelével együtt kell hozzáadni. Ezt az eljárást folytatjuk az utolsó normálrúdnak a hosszúságáig. Igy a negyedik rudat két érintő-emelő közzé fektetjük azaz ezekkel mérjük be.

Jelöljük O_1 és O_5-el a két szélső D és E készüléken tett leolvasást; O_2 O_3 és O_4-el az átszállitott II és III emelős készüléken tett leolvasásokat, még pedig mielőtt G végjelzőt előre szállitottuk. Ez adatokkal találjuk T távolságot, mely ennek a megfigyelt hőmérsékletnél és végső jeleinek O_1 és O_5 olvasásokra megfelel igy:

$$T = 4m \pm \alpha \pm \beta \pm \gamma \qquad [236]$$

Feltéve, hogy m a normálméterrúdnak hosszúsága megfigyeléseink hőmérsékleténél; továbbá $\alpha\beta\gamma$ ama hosszrészeket jelenti, mennyivel kevesebbet vagy többet olvastunk le O_2 O_3 és O_4-nél, mikor a normálmétert már előbbre szállitottuk, mint a mozgó emelő készüléket.

61. §. Az alapvonal hosszmérése.

E helyen a legujabb országmérések egyikét ismertetjük, t. i. ama alapvonal mérését, melyet 1882-ben 10 *km*-nyire Serajevótól Ilidže fürdő közelében az okkupált terület háromszögelése alkalmából az előbb leirt mérőrudakkal foganatositottak.

Előkészületek. A végpontoknak gondos megválasztása és szabatos kijelölése után láthatóvá tétetett a délkeleti végpont 9·5 *m* magas gúla felállitása által; az északnyugati végpontra 12 *m* magas négylábu gúlát állitottak. Ezután kitűzték a vonalat részletesebben az által, hogy annak egyik végpontjába theodolitot állitottak és ezzel a másodikat megirányozták. A részletesebben kiczövekelt vonal mentén eltávolittatták az élő sövényeket, élő fákat vagy más keritéseket 5—6 méternyi szélességben. Ekkor megmérették a vonalat elejétől végig mérőszalaggal, hogy 100-tól 100 méternyi távolságokra az alapvonal függőleges síkjában 1 *m* hosszú és 16 *cm* vastag és számokkal jelzett faczölöpöket majdnem a föld szinéig verhessenek.

Minden 500 méter hosszú alrészének végpontjába kereszt-deszkás póznát állitottak. Az ily módon kijelölt vonal be lett most szintezve, ama töltés és földmunkáinak kiszámitására, mely a két végpontot 4 méter széles koronalappal szakadatlan vizszintes síkban köti össze. Az elkészitett töltés koronalapján kitűzték az az alapvonal függőleges síkját ujból és pedig úgy, hogy számozott jelzőkarói négy mérőrúd hosszú közökben, azaz 15·66 méternyi távolságokban legyenek leverve. Azonkivül felosztották a 4000 *m* hosszú vonalat tiz alrészre is. E czélból jelölésükre 0·4—0·45 *m* oldalméretű terméskövеket ástak a földműbe úgy, hogy a felső sík határlapja a földműnek vizszintes koronalapjába essék. E jelzőkövek határlapjába négyzetalaku mélyedést véstek 0·1 m^2-nyi területtel, ebbe ólmot öntöttek, melynek felületét kalapácscsal verték simára.

A mérés foganatositása.

1. Az alapvonal kiinduló pontjába a 62., 63., 64. ábrával ismertetett függélyző készüléket állitjuk.

2. Ugyan ekkor lefektetjük 6—8 emberrel α fapárnákat, l. 51. ábrát, a mérőszalaggal kimért távolságokra. Ha ezeket tüskéjükkel a földbe súlykoltattuk, akkor helyeztetjük ugyan-e személy-

zettel a β zsámolyokat, a δ-val jelölt háromcsavaru támasztókat és *Z* hidgerendákat öt mérőrúd részére. E munka vezetésével altisztet szoktak megbizni, kinek kötelessége arra is ügyelni, hogy *Z* hidgerendák ne csak vizszintesen haladjanak, de egyuttal függőleges középsikjuk az alapvonallal is egybeessék. E czélból a hidgerendákat libella és a legutolsó kitűzés jelei szerint szokták beigazitani.

3. Más négy munkással lefektetjük az 51. ábrában bemutatott mérőrudakat számjelzésük sorrendjében, tehát 1, 2, 3 és 4 rudat a kezdőponttól a végpont felé haladva. Az első számu rúdnak a kezdőlapjával megközelitjük ekkor az alapvonal kezdőpontjában álló *K* függélyző-rudat, l. 62. ábrát, vagy 2 *cm*-ig. Ily helyzetében beigazitjuk e mérőrúdnak hosszanti tengelyét az alapvonal függőleges középsikjába, mely czélra az e rúdon lévő látócsövet és az alapvonalnak két távolabb fekvő pontját használjuk. A mérőrúd oldalas félretolását ekkor *v v* beállitókkal végezzük. A többi mérőrúdnak az alapvonalba való beigazitására *n n* beigazitó tüskéket állittatjuk fel, hogy azokat az első rúdon lévő látócsővel megirányozhassuk. Az igy egymásután sorozott rúdvégek közötti távolságot rendszerint 1—2 *cm*-nyire szabjuk, hogy kitolható segitő mértékükkel meg lehessen mérni.

4. Ha a négy mérőrúd igy szabályosan van elhelyezve, akkor két megfigyelő az első, második és harmadik rúdnak az esetleges dűlésszögét méri meg, mire az 55. ábrában vázolt szintmérőt használják. Más két megfigyelő ugyan ekkor a függőlegesitő és az első rúdvég közötti távolságot, úgyszintén az 1-ső és 2-dik rúdnak, valamint a 2-dik és 3-dik rúdnak a távolságát méri a kitolható segédmértékkel. Ez utóbbi két megfigyelő egyuttal még az első és második rúdnak a hőmérsékletét is megfigyeli.

5. Ha két-két megfigyelő leolvasásuk és feljegyzésök összehasonlitása által arról győződött meg, hogy ezek megbizhatók, akkor előre szállittatják az 1-ső rudat, hogy a 4-dik rúd elé mint 5-dik rúd kerüljön. Ha ezt is a kellő óvatossággal végrehajtották, csak akkor figyelik meg a 3-dik és 4-dik rúd közötti közt, a rudak hőmérsékletét és a 4-dik rúdtengelynek dűlésszögét. Igy folytatják az eljárást a rudaknak egyenkénti előre szállitása mellett napi munkájok végpontjáig. Ez Szerajevóban az alapvonal tizedrészével esett össze, miért is ezeket előre kijelöltették. Ha a méréssel ily végpontba érkeztünk, átvesszük az utolsó rúdnak a

végét a függélyző készüléknél úgy, hogy aczélhegyét egyszerüen a lágy ólomlapba szoritjuk és még egy kis körrel körülfoglalva, munkanapunk keltjét is hozzáirjuk. Az ily hátrahagyott végjelet befödetjük 0·5 *m* magas földhalommal.

A legközelebbi munkanapon folytatjuk a hosszmérést e hátrahagyott végjelből úgy, mint ezt a kezdőpontból tettük. E hosszmérésnek összes személyzete 5 megfigyelőből és 14—16 begyakorolt közlegényből állott, mely mérésnek napi eredményét itt alább közöljük.

Augusztus 26-án az északnyugati kezdőponttól 26 rúdfektetéssel, azaz e négy rúdnak 26-szori lefektetése után a vonal első tizedrészét mérték és pedig reggeli 7 órától déli 1·5 óráig, tehát 5 $^1/_2$ óra alatt 400 *m* a mérés eredménye.

Augusztus 27-én ugyanezt a vonalrészt visszafelé mérték és pedig reggeli 5 $^1/_2$ órától 10 $^1/_2$ óráig, tehát már csak 5 órai időben.

Augusztus 29-én megmérték eme vonalnak második tizedrészét oda és vissza és pedig reggeli 5 órától déli 2 óráig.

Augusztus 30-án a 3-dik és 4-dik tizedrészét odamérték 5 órái időben.

Augusztus 31-én a 3-dik és 4-dik vonalrészt visszamérték, ugyancsak 5 órai időben.

A vonalnak további 6 tizedrészét megmérték egyszer oda és egyszer vissza, mely munka szeptember 1-től szeptember 9-ig folyt. Az 5 órai munka eredménye ekkor folyton 400 *m*-nek egyszeri mérése volt.

Szóval a 4000 *m* hosszú, 259 rúdfektetést követelő vonalnak oda és vissza eszközölt mérése 15 napig tartott. E mérésnek a téli hónapokban kiszámitott és a tenger szintjére redukált eredménye a következő hosszúságot adta:

$$4061{\cdot}3449 \text{ métert,}$$

mely hosszúságnak valószinü hibája 1 : 3820500 = ± 0·00106 *m*.

62. §. A vizszintes oldalhossz számitása.

Ha az előbb leirt rudakkal alapvonalat mérünk, úgy fektetjük a vonal függőleges sikjába, hogy mindeniknek a mellső végén alkalmazott segitő mérőpálcza, ha a következő rúdnak kezdőlapjáig kitoltuk, ezt vizszintes felezővonalában érintse. De minthogy e kitolható mértéknek felső határlapja átlagban $h = 10$ *mm* magasabban fekszik, mint az érintendő rúdvégnek felezővonala, igy mérőrúdjaink hosszanti tengelye nem fekhetik vizszintesen. Ha dűlésszöget, mely ez okból létrejön, i-vel jelöljük, K-val a mérőrúdnak esetleges hosszát a megfigyelt hőmérsékletnél, ε-val a segitő mérőpálczának kitolt hosszát átlagos értékével, akkor:

$$\operatorname{tang} i = \frac{h}{K + \varepsilon}$$

A leirt mérőrúdnak átlagos i szöge állandónak vehető; számértéke ez:

$$i = 12' + 40''$$

A mérőrúdnak még azonkivül is apró eltérése van a vizszintes iránytól, mit az 55. ábrában bemutatott szintezővel kell meghatározni. Hogy ezt tehessük, kell minden rúd részére először a szintező műszernek ama (δ_0) olvasását ismerni, melynél a libella tengelye egyenlőközü a mérőrúd hosszanti tengelyével, a mikor e szintező a rúdon áll; δ_0-t úgy találjuk, hogy a szintezőkészüléket $s\,s_1$ csapjaival a mérőrúdon lévő $r_1\,r$ csapok furataiba két 180 fokkal különböző helyzetbe dugjuk és libelláját mindannyiszor V csavarral bevágatván, körívén leolvasásokat veszünk. E két leolvasás számtani közepese adja δ_0-nak számértékét, mely a mérőrúd vizszintes tengelyállásának felel meg.

A mérőrúdnak esetleges δ dűlésszögét úgy találjuk most, ha minden szabályosan elhelyezett mérőrúdra a libellát bevágatjuk és körén a nonius állását δ_n-el leolvassuk.

Ekkor:

$$\delta = \delta_n - \delta_0$$

Az egyes mérőrúddal bemért vonalrésznek vizszintes v hosszát most az állandónak tekinthető i szöggel és a változó δ szöggel következőleg találjuk:

$$v = \frac{K}{\cos i} \times \cos\delta$$

Tekintetbe véve, hogy:

$$\cos\delta = 1 - 2\left(\sin\frac{\delta}{2}\right)^2$$

igy v amúgy is irható:

$$V = \frac{K}{\cos i} - \frac{2K\left(\sin\frac{\delta}{2}\right)^3}{\cos i}$$

Gyakorlati követeléseinknek megfelelhetünk még tökéletesen, ha egyenletünk levonandó tagjában $\cos i = 1$-nek irjuk, mely értékkel:

$$V = \frac{K}{\cos i} - 2K\left(\sin\frac{\delta}{2}\right)^2$$

Az alapvonalnak teljes vizszintes H hossza eme V részeknek összegeiből és még a rúdvégek között megmért ε hosszaknak az összegeiből található.

Mennyiségtani kifejezője ez:

[237] $$H = [V] + [\varepsilon]$$

63. §. Az alapvonal mérése kisebb kiterjedésü mérésekre.

A bányamérnök gyakori feladata 3—4 *km* hosszúra terjedő területeknek bemérése. Ha ily esetben a mérést bármely okból az országmérés hálójához nem kapcsolhatja, akkor kényszeritve van egy-két alapvonalat közvetetlenül megmérni. Feladatának megfelelhet rendszerint 500—200 *m* hosszú vonallal, melyet kifeszitett mérőzsinórral és 2 drb. 2 *m* hosszú mérőrúddal méret meg. Az eljárás rendszerint az, hogy az alapvonalat theodolit segitségével a végpontokból szabatosan kitűzi, azaz 25—30 *m*-nyi távolságokban 0·8—0·9 *m* hosszú, megvasalt mérőkarókat veret a földbe. Ezt úgy végezteti, hogy a karó feje oldalán elhelyezett fülkés csavart a theodolit függőleges pókszála mindig a közepét messe. Folytatólag a mérőzsinórt feszitteti ki karótól karóig. Ekkor arra ügyel, hogy a beérkező és tovább induló zsinórig mindig a karó fülkés csavaránál találkozzék. Eme zsinórszakaszoknak megméretjük egyenkénti h hosszúságát, fülkéscsavartól fülkéscsavarig, legalább két izben oda és vissza. Továbbá meghatározzuk a szintmérőműszerrel az egymásra következő fülkéscsavarok s szintkülönbségeit is.

Az egyes zsinórszakasznak vizszintes v hosszúságát előbbi adatokkal igy találjuk:

$$v = \sqrt{h^2 - s^2}$$

Ezt négyzettáblákkal gyorsan és kényelmesen számitjuk ki. Végtére összeadjuk a megmért alapvonalnak ily módon kiszámitott részeit az egész vonalhosszúság meghatározása céljából.

Két megfigyelő négy begyakorolt segéddel a közölt módon másfél órai időben 100 méter hosszú vonalat képes megmérni, ha minden mellékmunkát is beszámitunk.

64. §. Az alapvonalnak a tengerszintre való vetitése.

Az alapvonal két végpontja mindig csekély szintkülönbséget mutat, még akkor is, ha részére a legkedvezőbb területet kikerestük. Ez okból minden alapvonal ama gömblapnak köréül tekintendő, mely két végpontjának középmagasságát foglalja magában. Egy mérésnek több alapvonala rendszerint más és más gömblapnak a körive; hogy tehát egy mérésnek több alapvonalát összehasonlithassuk, de még abból a czélból is, hogy több országmérés adataiból egy egész világrésznek földabroszát állithassuk össze, szokássá vált minden országmérésnek alapvonalát ama gömblapra vetiteni, mely tengereink szintjét foglalja magában. Röviden szólva, minden alapvonalat számitásaink gömblapjára, azaz a tengerszintre redukáljuk.

Legyen a 68. ábrában BCD oly főmetszete Földünknek, mely BC alapvonalat magában zárja. r Földünk tengerszinti sugárhossza, melyet mindig $r = 6366738$ m-rel számitjuk. m_1 és m_2 az alapvonal, B és C végpontjának tengerszint feletti magassága. Ezekkel:

$$m = \frac{m_1 + m_2}{2}$$

mint alapvonalunk középmagassága. $R = r + m$ ama gömblapnak sugárhossza, melyben alapvonalunk elterül.

Ha folytatólag H alapvonalunknak a [237] egyenlet szerint kiszámitott hossza és b ennek a tengerszintre redukált hossza, igy utóbbit következő arányból találjuk:

$$\frac{b}{H} = \frac{r}{r + m}, \quad \text{innen}$$

$$b = H \frac{r}{r + m}$$

vagy ha e törtet tényleges osztás által sorba fejtjük, igy eredménye:

$$\frac{r}{r + m} = 1 - \frac{m}{r} + \frac{m^2}{r^2} - \frac{m^3}{r^3} + \frac{m^4}{r^4}$$

Tényezőink rendes számértékeivel $m : r$ mindig kisebb $1 : 9000$-nél, tehát $m^2 : r^2$ kisebb $0{\cdot}000\,00001$-nél. E tények alapján elhanyagolható $m : r$-nek minden magasabb hatványa.

Az alapvonal tengerszinti hosszúságát igy fejezzük ki:

[238] $$b = H\left(1 - \frac{m_1 + m_2}{2r}\right)$$

Miután minden háromszöghálóban a többi oldal hosszát az alapvonallal számitjuk ki, igy ezek is mind ama gömblapra találtatnak, mely gömblapra alapvonalukat vetitettük.

64. §. A többi elsőrangu szögpont megválasztása és kijelölése.

Az elsőrendü háló czélja a felmérendő területet lehetőleg egyszerű hálóval befödni, hogy teljesen megbizható pontjait a másodrangu hálónál mint kiinduló és kapcsoló pontokat használhassuk. Ez okból számra nézve kevés, de fekvésre nézve jelesül megválasztott pontokból álljon, melyek, a mennyire csak lehet, egyenlő oldalu háromszöget alakitsanak, a szögmérést minden tekintetben biztositsák és a másod- esetleg harmadrangu háló kapcsolását könnyű módon tegyék lehetővé. Gondos megválasztásuk czéljából a terület legnevezetesebb magaslatait járjuk be. Hol ez alkalommal jelzőgúlákat felállittatunk, a pont fekvését ugyan ekkor a magunkkal vitt táborkari földabroszba is berajzoljuk, hol mind ama pontokat egyenes vonalak segitségével összekötjük, melyek a háló alakitására kivánatosak vagy czélszerüek. Ha a háló további bejárásánál valamely pont hasznavehetetlennek vagy feles számunak mutatkozik, akkor a szögmérésnél kihagyjuk, vagy másodrangu szögpontnak használjuk.

A földfelületen állandósittatunk ezenkivül minden elsőrangu szögpontot úgy, hogy helyére jelzőkövet épitünk a földbe, felső vizszintes határlapjával vagy egy méternyire süllyesztjük a föld szine alá. Ez rendszerint koczka alaku faragott kő, 0·4—0·5 *m* oldalhosszúsággal; átlóit az észak-déli és kelet-nyugati irányba helyezvén, falaztatjuk körül. Felső lapjára háromszöget vésetünk, közel az északnak mutató sarkához, s oda még a jelzőszámát is vésetjük. A kijelölt pont ekkor rendszerint az átlók metszőpontjában fekszik; néha még furat által vagy más módon is láthatóvá tétetik.

Az ily nagyfontosságu pontnak négy biztositó jellel ismertetjük még a fekvését. Azaz négy kisebb faragott kővel foglaltatunk körül; ezeket 2—3 *m*-nyire a tulajdonképeni szögponttól ásatjuk a földbe úgy, hogy felső határlapjuk középpontjai, ha azokat egyenesekkel összekötjük, a kelet-nyugati és észak-déli vonalba essenek. A porosz kataszter ily pontok jelölésére öntöttvasból vagy égetett agyagból készitett csöveket használ; a pont jelölésére 10 *cm*-nyi belső átmérővel és 50 *cm* hosszúsággal; a négy biztosító pontra 3 *cm*-nyi belső átmérővel. Az agyagból készitett dréncső a legolcsóbb jel; elhelyezése is egyszerű, mert gödrét fúróval készithetjük, melybe 0·5 *m*-re a föld alá sülyesztjük.

Térképekben a háromszögelés pontjait háromszöggel körülfogott körrel, esetleg kettős körrel jelöljük. Elsőrangu pontoknak felemlitjük még a fekvőhelyét is feljegyzéseinkben; pl. Szitnya, Gerecse, Nagyszál stb. Azonkivül jelzőbetüt és még jelzőszámot is használunk és pedig az elsőrendü pontot E-vel, másodrendüt M-el, harmadrendüt H-val és a poligonpontot P-vel jelöljük; e betü alsó jobb oldalához irjuk a jelzőszámát. Igy E_{19} az elsőrangu hálónak 19-ik pontja, M_{32} a másodikrangu hálónak 32-ik pontja és P_{112} a poligonmérésünk 112-ik pontja lenne. Térképeinkben a jelzőbetü el is maradhat, ha a szögpont rangját egyszeri, kétszeri vagy háromszori aláhúzás által különböztetjük meg, vagy irhatjuk az elsőrangu pont jelzőszámát ultramarin-festékkel, a másodranguét czinóberrel, a harmadranguét sienával, a poligonpont számát chromsárgával.

66. §. A szögek mérése.

A szögmérést a lehető legnagyobb pontossággal kell foganatositanunk, mert ha szögeink a valóságot meg nem ütik, akkor háromszögeink eltorzulnak és be sem záródnak. Igaz ugyan, a hibaigazitással, ha ezt a legkisebb négyzetösszegek elmélete alapján végezzük, zárlatukat a valószinüség maximuma szerint hozzuk létre, de mind ennek daczára az egymáshoz fűzött pontok mégis némi eltolást mutatnak, mely eltolás nagy távolságokban nagyobb értékre is vergődik, úgy hogy e korlátozás felette fontos eredményeink jóságára. Onnan van, hogy az elsőrendü hálóban csakis a legjobb szögszorzó theodolitot alkalmazzuk, melynek limbusköre 25—30 *cm*-nyi átmérőjü, szögleolvasása pedig 3″-tól 1″-ig van biztositva. A műszert rendszerint kőoszlopra állitjuk föl, csak kivételesen faczölöpre. A tölgyfaczölöp ajánlhatóbb, mint a fenyőfából való. Másodrangu szögpontokon megfelelhetünk 16 *cm*-nyi átmérőjü limbuskörrel s 10″ szögleolvasással. Harmadrangu szögek meghatározására 12—14 *cm*-nyi limbuskör 15″ szögleolvasással tökéletesen kielégit. Másod- és harmadrangu pontokon a theodolitot háromlábu állványára állitjuk. A szögmérést majd az ismételt egyszerű, majd a szögszorzás módján foganatositjuk. Az eljárás rendszerint a vezető főmérnök által állapittatik meg.

Az ismételt egyszerű szögmérést az alhidáda-tengelynek teljes körforditása mellett alkalmazzuk leggyakrabban; és pedig oly módon, hogy a legélesebben látható szögpont irányzatából kiindulva, a műszert az alhidádatengelye körül balról jobbra addig forditjuk, mig minden az állásponthoz kapcsolandó szögpontot be nem mértünk és a kiinduló oldalba vissza nem érkeztünk. Magától érthető, hogy minden körjáratu szögmérésnél csak ama pontok mérhetők be bizonyos napi időben, melyek megvilágitása a kiszabott pontosságot biztositják. Minden irányzat bemérésénél a limbuskör valamennyi noniusát olvassuk le, a leolvasott adatokat feljegyezzük, még pedig világosan olvasható számokkal és tintával. Ha az adatokon netalán kiigazitás válnék szükségessé, akkor az első feljegyzést egyszerüen keresztűl húzzuk, az uj adatot pedig föléje irjuk, hogy a régi szám még olvasható legyen. Két irányzatnak a közbezárt szögét ez adatokból úgy kapjuk, hogy az olvasások különbzetét vonjuk.

Az ismételt egyszerü szögmérés jegyzőköngve.

Szögpont: Szitnya, 5. körmérés, a látócsőnek első fekvése mellett.
Megfigyelő: N. N. a 103. számu Starke-féle theodolittal.

A megirányzott szögpont		A limbuskör olvasása						Számtani közép			Jegyzék
		Nonius I			II	III	IV				
jele	neve	0	'	"	"	"	"	0	'	"	
C_7	Karancs . .	57	18	21	25	28	22	57	18	21·5	A levegő nyugodt és átlátszó, az ég felhős
B_5	Nagyszál . .	110	28	14	16	12	17	110	28	14·7	
D_9	Gerecse . . .	145	56	31	34	29	32	145	56	31·5	
C_7	Karancs . . .	57	18	25	28	20	24	57	18	24·5	

Az első körjáratu mérést befejezvén, bemérjük a másodikat; mely alkalomból a látócsövet áthajtjuk, hogy ugyancsak az előbbi kezdőirányból kiindulva, a műszer alhidádatengelyét most ellenkező irányba, tehát jobbról balra forditsuk. Ezzel szándékunk a műszer rugékonyságából eredő hibákat a mérésből kiküszöbölni. Minden szögpontban több ily mérést kell megejteni, két összetartozó — ellenforditásu — mérés után a limbuskört $\frac{360}{n}$ fokkal forditjuk tovább, ha (n) ama mérések száma, melyek az illető szögpontban foganatositandók. Poroszország legujabb országmérésénél ily módon minden elsőrangu szögből 60 sikerült adatot szereztek meg. Az elsőrangu hálóban sikerültnek tekinthető a szögmérés, ha számbeli értéke a bemért több rendbeli adatainak a számtani közepélől 3" - 4"-nél többel el nem tér. Oly adat, mely e feltételnek meg nem felel, uj mérés által pótolandó.

A szögszorzó mérésmód nagyobb fáradsággal jár; előnynyel főkép akkor alkalmazzuk, ha szögpontjaink fekvése, megvilágitása olyan, hogy bizonyos időben csak két szögpont látható élesen, azaz, hogy ezek a nap különböző óráiban csak egyenkint mérhetők be és ha műszerünk leolvasó hibája nagyobb, mint mérésünk megszabott hibahatára.

A szögmérés pontosságát a műszer szabályszerű alkalmazásán kivül még a következőkkel biztositjuk:

1. Hogy a megirányozott szögpont jele ezen pont függőlegesével egybeessék.

2. Hogy a jel a megirányozás alkalmával élesen legyen megvilágitva.

3. Hogy a szögmérésre csakis oly időt választunk, mikor a levegő egyensúlyi állapota megfelelő, azaz ha czélpontjaink képe nem rezeg.

67. §. A bemért szögadatok központositása.

A háromszögelésnél nem ritka az az eset, hogy valamely szög csúcspontjául tornyot is választunk, mely viszonyok közt az ily szög csúcspontjában a theodolittal fel nem állhatunk, hanem csak néhány méternyire oldalvást; minek folytán nem a kijelölt, hanem más kevéssel eltérő szöget mérünk be, melynek értékéből a kijelölt szöget kell kiszámitani, vagy más szóval, át kell térni a szögnek valódi csúcspontjára. E számitóműveletet nevezzük a szögadat központositásának. A feladat megoldásánál négy főesettel lehet dolgunk.

Legyen a 69. ábrában ABC a kijelölt háromszög, melynek C csúcspontjában a műszerrel fel nem állhatunk, akkor műszerünk I, II, III vagy IV pontban állhat.

1. *eset.* Jelölje S a műszer álláspontját, $CS = e$ a külpontosság vonalas értékét ω és φ a megmért két szöget, α meg β ama két hegyes szöget, melyet a bemért irányzatok a három-

szögnek a valódi oldalaival A és B pontokban képeznek; akkor, l. 70. ábrát, ACM és BSM háromszögekből következik:

$$C + \alpha = S + \beta \quad \text{föltéve, hogy}$$
$$S = \varphi - \omega \quad \text{igy:}$$
$$C = S - \alpha + \beta$$

A két α és β hegyesszögnek az értéke a sinus tétellel kifejezvén,

$$\sin \alpha = \frac{e \sin \omega}{b}$$
$$\sin \beta = \frac{e \sin \varphi}{a}$$

és tekintettel arra, hogy α valamint β is rendszerint csak néhány elsőperczet mérhet, irható:

$$\sin \alpha = \beta'' \sin 1''; \quad \sin \beta = \beta'' \sin 1''$$

mely értékek helyettesitése által:

$$\alpha'' = \frac{e \sin \omega}{b \sin 1''}; \quad \beta'' = \frac{e \sin \varphi}{a \sin 1''}$$

2. *eset.* Midőn a műszer S álláspontja C csúcspont előtt fekszik, l. 71. ábrát, akkor egyenletünk:

$$\alpha + C + \beta + 360 - S = 360, \text{ azaz:}$$
$$C = S - \alpha - \beta$$
$$\alpha'' = \frac{e \sin \omega}{b \sin 1''}; \quad \beta'' = \frac{e \sin (360 - \varphi)}{a \sin 1''}$$

3. *eset.* L. a 72. ábrát, midőn a műszer a szögnek C csúcspontjától baloldalt áll:

$$S + \alpha = \beta + C$$
$$C = S + \alpha - \beta \quad \text{és}$$
$$\alpha'' = \frac{e \sin (360 - \omega)}{b \sin 1''}; \quad \beta'' = \frac{e \sin (360 - \varphi)}{a \sin 1''}$$

4. *eset.* Ha S álláspont a szög C csúcspontja mögött fekszik, l. 73. ábrát:

$$\beta + \alpha + S + 360 - C = 360, \text{ tehát}$$
$$C = S + \alpha + \beta \quad \text{és}$$
$$\alpha = \frac{e \sin (360 - \omega)}{b \sin 1''}; \quad \beta'' = \frac{e \sin \varphi}{a \sin 1''}$$

E négy egyenletből világos, hogy az első eset egyenlete egész általánossággal érvényes. Szerinte:

$$C = S - \alpha + \beta$$

vagy ha e adatok helyett a megmért adatokat hozzuk kifejezésre:

$$C = \varphi - \omega - \frac{e \sin w}{b \sin 1''} + \frac{e \sin \varphi}{a \sin 1''}$$

A foganatositás szabálya.

A megválasztott S álláspontban felállunk, a műszer szabályszerű elhelyezése után, megirányozzuk a szögnek C csúcspontját, utána az A-val jelölt bal oldalu szögszárnak a végjelét, elvégre pedig a B-vel jelölt jobb oldalu szögszárat mérjük be. Igy megszereztük $\sphericalangle CSA = w$ és $\sphericalangle CSA = \varphi$. Ezeken kivül $CS = e$ megmérendő, és pedig, ha csak lehet közvetetlenül. A meghatározandó C szögnek a két a és b szárát, ha más megelőző mérésből nem ismerjük, lemérjük bármely tábornoki térképről is; minthogy hosszúsága e-vel szemben oly túlnyomó, hogy megközelitő értékükkel az eredményt még mindig jól kapjuk.

Példa: legyen a műszer olvasása:

$O_1 = 39^0\ 7'\ 30''$ midőn C pontra beállitottuk;
$O_2 = 118^0\ 9'\ 46''$ „ A „ „
$O_3 = 174^0\ 50'\ 42''$ „ B „ „

Igy:

$$w = O_2 - O_1 = 73^0\ 2'\ 16''$$
$$\varphi = O_3 - O_1 = 135^0\ 43'\ 12'' \text{ és}$$
$$S = \varphi - w = 56^0\ 40'\ 56''$$
$$e = 2{\cdot}5\ m;\ a = 1745\ m;\ b = 1051\ m.$$

$\alpha'' = -\dfrac{e \sin w}{b \sin 1''}$		$\beta'' = +\dfrac{e \sin \varphi}{a \sin 1''}$	
Adat	logarithmus	Adat	logarithmus
$e \sin w$	0·39794 9·99200	$e \sin \varphi$	0·39794 9·81395
	10·38994		10·24189
$b \sin 1''$	3·02160 4·68557 —	$a \sin 1''$	3·24169 4·68557 —
α	2·68280	β	2·31453
$-\alpha'' = 481{\cdot}7'' = 8' + 2''$		$+\beta = 206{\cdot}3'' = 3' + 26''$	

Ezekkel:

$$C = S - \alpha + \beta$$

$C = (56^0\ 40'\ 56'') - (8'\ 2'') + (3'\ 26'')$ lesz $C = 56^0\ 36'\ 20''$ mint a központositott szögnek az értéke.

68. §. Az oldalhosszúságok ideiglenes számitása.

Miután a legszabatosabb mérés is a megfigyelés elkerülhetetlen hibáival van terhelve, ez okból a szögadatokat az oldalhosszúságok pontos és végleges kiszámitása előtt oly kiigazitásnak kell alávetni, mely ezen adatok mértani összefüggésének megfelel. Elsőrangu háromszögeink rendes kiterjedései követelik azonban, hogy földünk gömbalakját tekintetbe vegyük, azaz hogy eme háromszögeket mint gömbháromszögeket kezeljük. Ha tehát a gömbháromszögnek a három oldalát a, b, c-vel, és ezen oldalakkal szemközt fekvő szögeket α, β, γ-val jelöljük, akkor e kielégitendő mennyiségtani feltételek egyike az, hogy minden háromszögnek a szögösszege:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180 + \varepsilon$$

hol ε a háromszögnek a gömbokozta szögfölössége. Értékét háromféle módon szoktuk kiszámitani.

$$\varepsilon = \frac{T}{r^2 \operatorname{tang} 1''}$$

ha $T = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, azaz a szóban forgó háromszögnek a területe, r földünk sugárhossza és $s = \frac{a+b+c}{2}$ a három oldalnak fél összegével egyenlő.

$$\varepsilon = \frac{a\,b \sin \gamma}{2 r^2 \operatorname{tang} 1''}$$

tehát két oldala és a közbezárt szögük által.

$$\varepsilon = \frac{a \sin \beta \sin \gamma}{2 r^2 \sin(\beta + \gamma) \operatorname{tang} 1''}$$

az alapvonal és a rajta fekvő két szöge által.

Ebből látjuk, hogy a gömbfölösség kiszámitására az egyes háromszögek oldalhosszúságait már megközelitőleg ismerni kell. Ez okból a megmért szögadatok számtani közepével és az alapvonallal a többi oldalt a sik háromszögmértan sinus tételével számitjuk ki, mintha csak sikbeli háromszögek lennének. A háromszögelemek rendszeres és czélszerű jelölése, nemkülönben a számitó műveletek táblázatokban való összeállitása által minden terjedelmesebb számitásnál nemcsak a sikert, de még könnyű ellenőrzését is biztositunk. Ez okból egyszerű példában azt az eljárást mutatjuk be, melyet jelenleg a poroszországi kataszternél alkalmaznak.

A 74. ábrában vázolt háromszögháló 9 háromszögből áll; PP_8 az alapvonala. Minden háromszögben a három egymásra következő oldal a, b, c-vel, a velük szemközt fekvő szöget α, β és γ-val jelöljük, mely betükhöz még az illető háromszögnek a jelzőszáma mint mutatószám iratik. A számitás kiinduló oldala minden háromszögben az (a) oldal, szemközt fekvő szöge α; a további oldal és szög megjelölésénél az óramutató mozgásirányát követjük. Az oldalak és szögek ilyszerű összhangzó jelölése feleslegessé teszi azt, hogy az oldalak jelzőbetüit a rajzba irjuk, mi már ez okból is kivánatos, mivel rendszerünk következtében minden átmeneti oldal úgy is két jelzőbetüvel bir.

Fejtegetéseink nyomán 74. ábrában:

$$PP_8 = a_1 \quad \text{az alapvonal}$$

$$P_1 P_8 = b_1 = \frac{a_1}{\sin \alpha_1} \sin \beta_1$$

$$PP_1 = c_1 = \frac{a_1}{\sin \alpha_1} \sin \gamma_1$$

és ez mint átmeneti oldal a második háromszögre egyszersmind a_2 is; tehát:

$$a_2 = c_1$$

$$P_1 P_2 = b_2 = \frac{a_1}{\sin \alpha_2} \sin \beta_1$$

$$PP_2 = c_2 = \frac{a_2}{\sin \alpha_2} \sin \gamma_2 \text{ és tovább.}$$

E képletekből kitünik, hogy minden háromszögben a más két oldal hosszát az által kapjuk, hogy a kiinduló oldalt a szemközt fekvő szög sinusával elosztjuk és e hányadost a szóban forgó oldal szemközt fekvő szögének a sinusával megszorozzuk.

A számitás egyszerüsitése céljából kiszámitjuk minden háromszögre ezen $m = \dfrac{a}{\sin \alpha}$ tényezőt, mi módon az oldalhosszak:

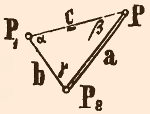
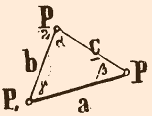
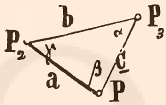
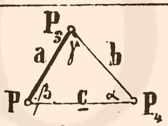
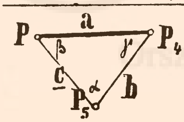
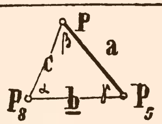
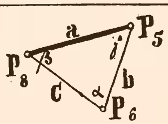
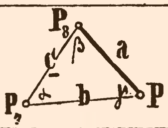
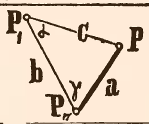
1-ső $\triangle$-ben $\begin{cases} a_1 & \text{a megmért alapvonal} \\ b_1 = m_1 \sin \beta_1 \\ c_1 = m_1 \sin \gamma_1 \end{cases}$

c_1 mint átmeneti oldal a_2-vel is egyenlő.

2-dik $\triangle$-ben $\begin{cases} m_2 = \dfrac{a_2}{\sin \alpha_2} \\ a_2 = c_1 \\ b_2 = m_2 \sin \beta_2 \\ c_2 = m_2 \sin \gamma_2 \end{cases}$

átmeneti oldal $= a_3$ és tovább.

Az oldalszámitás táblázatos foganatositása.

	Rajz	A megmért szögadatok számtani közepe				Logarithmus				Az oldal hossza méter
						$m = \frac{a}{\sin \alpha}$ és szögek		oldal		
		jel	°	′	″	jel	sinusa	jel		
1						m_1	4·47042			*a*) az alapvonal
		α	42	4	30	α	9·82614	a_1	4·29656	19795
		β	62	31	20	β	9·94801	b_1	4·41843	26208
		γ	75	24	9	γ	9·98574	c_1	4·45616	28587
2						m_2	4·58823			
		α	47	32	39	α	9·86793	a_2	4·45616	28587
		β	66	20	48	β	9 96190	b_2	4·55010	35489
		γ	66	6	32	γ	9·96110	c_2	4·54933	35427
3						m_3	4·55456			
		α	81	7	35	α	9·99477	a_3	4·54933	35427
		β	41	30	47	β	9·82137	b_3	4·37593	23764
		γ	57	21	40	γ	9·92535	c_3	4·47991	30193
4						m_4	4·55525			
		α	57	13	2	α	9·92466	a_4	4·47991	30193
		β	59	16	25	β	9·93430	b_4	4·48955	30871
		γ	63	30	32	γ	9·95182	c_4	4·50707	32141
5						m_5	4·57587			
		α	58	35	42	α	9·93120	a_5	4·50707	32141
		β	74	59	27	β	9·98493	b_5	4·56080	36375
		γ	46	24	50	γ	9·86994	c_5	4·43581	27278
6						m_6	4·44360			
		α	79	11	1	α	9·99221	a_6	4·43581	27278
		β	55	21	8	β	9·91522	b_6	4·35882	22846
		γ	45	27	47	γ	9·85297	c_6	4·29657	19795
7						m_7	4·57257			
		α	37	41	59	α	9·78625	a_7	4·35882	22846
		β	96	10	20	β	9·99747	b_7	4·57004	37157
		γ	46	7	40	γ	9 85787	c_7	4·43044	26042
8						m_8	4·52358			
		α	53	48	11	α	9·90686	a_8	4·43044	26942
		β	53	39	20	β	9·90605	b_8	4·42963	26892
		γ	73	32	23	γ	9·97952	c_8	4·50310	31850
9						m_9	4·52337			
		α	72	37	55	α	9·97973	a_9	4·50310	31850
		β	55	34	56	β	9·91643	b_9	4·43980	27530
		γ	51	47	9	γ	9·89525	c_9	4·41862	26219

Az átmeneti oldal jelzőbetüje alá van húzva a rajzban.

69. §. A bemért szögadatok kiigazitása.

Ismervén a háromszögek megközelitő oldalhosszúságát, kiszámithatjuk minden háromszögnek gömbfölösségét, mely czélokból az alábbi egyenletet használjuk:

$$\varepsilon = \frac{a\,b \sin\gamma}{2\,r^2 \operatorname{tang} 1''}$$

r-et földünk görbülő sugarát ily számitásokra 6·370289 m-el vesszük, $\log r = 6{\cdot}80416$-tal, $\log r^2 = 13{\cdot}60832$

$$\begin{aligned}\log 2 &= 0{\cdot}30103\\ \log \operatorname{tang} 1'' &= 4{\cdot}68557 - 10\\ \hline \log 2\,r^2 \operatorname{tang} 1'' &= 8{\cdot}59492\end{aligned}$$

A háromszög jelzőszáma	$n = \frac{1}{2r^2 \operatorname{tang} 1''}$ és a többi tényező		ε gömbfölösség $''$
	jele	logarithmusa	
1	n	1·40508 — 10	
	a_1	4·29656	
	b_1	4·41843	
	$\sin\gamma_1$	9·98571 — 10	1·037″
	ε_1	0·10581	
2	n	1·40408 — 10	
	a	4·45616	
	b	4·55010	
	$\sin\gamma$	9·96110 — 10	
	ε	0·37244	2.357″

E számbeli adatokból világos egyszersmind a gömbfölösség csekély értéke, úgy hogy a gyakorlatban minden háromszöget síknak tekintünk, feltéve hogy oldalhosszúsága 25000 m-nél kisebb.

A szögkiigazitás alapegyenletei.

Folytatólag ama egyenleteket állithatjuk fel, melyek a háló mértani alakját kifejezésre hozzák. Ezek háromfélék:

1. Egyenletek, melyek az oldalak kölcsönös összefüggését jellegezik, az úgynevezett oldalegyenletek.

2. Egyenletek, melyek a teljes szögpontok zárlatát fejezik ki; vagy röviden a teljes szögpontok egyenletei.

3. Az egyes háromszögekben a szögzárlatot biztositó egyenletek, vagy röviden a háromszögek egyenletei.

Az oldalegyenletekből annyit lehet felállitani, a hányféle úton az oldalszámitásnál a hálón végig mehetünk, tehát a 74. ábra hálójában kettőt.

Az oldalszámitást biztositó egyenleteket a 34. §. [154] egyenlete nyomán képezzük. A lehetséges két számitó útra ezeket találjuk:

$$[239] \quad \begin{cases} 1 = \dfrac{\sin\alpha_1 \sin\alpha_2 \sin\alpha_4 \sin\alpha_4 \sin\alpha_5 \sin\alpha_6}{\sin\gamma_1 \sin\gamma_2 \sin\gamma_3 \sin\gamma_4 \sin\gamma_5 \sin\gamma_6} \\ 1 = \dfrac{\sin\gamma_6 \sin\alpha_7 \sin\alpha_8 \sin\alpha_9 \sin\beta_1}{\sin\beta_6 \sin\gamma_7 \sin\gamma_8 \sin\gamma_9 \sin\alpha_1} \end{cases}$$

A két P és P_8 teljes szögpontra ismét egy-egy egyenletet kell kielégiteni; felirásuk a 34. §. [153] egyenlete nyomán alábbiakat adja:

$$[240] \quad \begin{aligned} \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 + \beta_5 + \beta_6 - 360^0 &= 0 \\ \alpha_6 + \beta_7 + \beta_8 + \beta_9 + \gamma_1 - 360^0 &= 0 \end{aligned}$$

A 34. §. [152] egyenlete nyomán a kilencz háromszög mindenikére a bezárt alakot csak igy biztosithatjuk:

$$[241] \quad \begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 - (180 + \varepsilon_1) = 0 \\ \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 - (180 + \varepsilon_2) = 0 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \alpha_9 + \beta_9 + \gamma_9 - (180 + \varepsilon_9) = 0 \end{cases}$$

Ha az elsorolt alapegyenletekbe a megfigyelt adatokat helyettesitjük, akkor tapasztaljuk, hogy nem a feltétel által megszabott, hanem más, elkerülhetetlen hibaforrásokból származó számot kapunk. Feladatunk e szerint abból áll, hogy e hibákat keletkezésük legnagyobb valószinüségének megfelelően igazitsuk ki; ez pedig szigorú mennyiségtani alapon csakis a legkisebb négyzetösszegek elmélete szerint foganatositható.

Folytatólag megemlitjük még a badeni főherczegségnek elsőrangu hálóját, l. 74. ábra. Ennél a pontok fekvőhelyei: P Oggersheim, P_1 Calamit, P_2 Donnersberg, P_3 Klobberg, P_4 Melibocus, P_5 Königsstuhl, P_6 St.-Michael, P_7 Langenkandel, P_8 Speier.

Háromszögeinek szögadatai a következők:

$$(1)\begin{cases}\alpha = 42^{0}\ \ 4'\ 30{\cdot}194''\\ \beta = 62^{0}\ 31'\ 20{\cdot}791''\\ \gamma = 75^{0}\ 24'\ \ 9{\cdot}727''\end{cases}$$

$$(2)\begin{cases}\alpha = 47^{0}\ 32'\ 39{\cdot}124''\\ \beta = 66^{0}\ 20'\ 48{\cdot}294''\\ \gamma = 60^{0}\ \ 6'\ 32{\cdot}936''\end{cases}$$

$$(3)\begin{cases}\alpha = 81^{0}\ \ 7'\ 33{\cdot}535''\\ \beta = 41^{0}\ 30'\ 47{\cdot}171''\\ \gamma = 57^{0}\ 21'\ 40{\cdot}298''\end{cases}$$

$$(4)\begin{cases}\alpha = 57^{0}\ 13'\ \ 2{\cdot}870''\\ \beta = 59^{0}\ 16'\ 25{\cdot}363''\\ \gamma = 63^{0}\ 30'\ 31{\cdot}054''\end{cases}$$

$$(5)\begin{cases}\alpha = 58^{0}\ 35'\ 42{\cdot}565''\\ \beta = 74^{0}\ 59'\ 26{\cdot}900''\\ \gamma = 46^{0}\ 24'\ 50{\cdot}850''\end{cases}$$

$$(6)\begin{cases}\alpha = 79^{0}\ 11'\ \ 1{\cdot}162''\\ \beta = 55^{0}\ 21'\ \ 8{\cdot}132''\\ \gamma = 45^{0}\ 27'\ 47{\cdot}758''\end{cases}$$

$$(7)\begin{cases}\alpha = 37^{0}\ 41'\ 59{\cdot}793''\\ \beta = 96^{0}\ 10'\ 20{\cdot}212''\\ \gamma = 46^{0}\ \ 7'\ 40{\cdot}660''\end{cases}$$

$$(8)\begin{cases}\alpha = 53^{0}\ 48'\ 11{\cdot}347''\\ \beta = 53^{0}\ 39'\ 29{\cdot}318''\\ \gamma = 72^{0}\ 32'\ 22{\cdot}104''\end{cases}$$

$$(9)\begin{cases}\alpha = 72^{0}\ 37'\ 55{\cdot}776''\\ \beta = 55^{0}\ 34'\ 56{\cdot}212''\\ \gamma = 51^{0}\ 47'\ \ 9{\cdot}632''\end{cases}$$

Ha ezután a [239], [240] és [241] egyenleteket az egyes adatok szerint részletesen külzelékeljük, mind ama szabályok betartása mellett, melyeket a hibaszámitás 34. §-ában ismertettünk, akkor összeállithatjuk az igy talált eredményt a 348. oldalon lévő táblázatban.

Háromszög	3			4			5			6			7			8			9			1			2		
szöge	α	β	γ	α	β	γ	α	β	γ	α	β	γ	α	β	γ	α	β	γ	α	β	γ	α	β	γ	α	β	γ
a	+3·29		−13 49	+13·56		10·49	+12·58		−20·04	+4·02		−20·72										+23·32		−5·48	+19.26		−9·03
b											+14·55	−20·72	−27·24		+20·24	−15·41		+6·62	−6.58		+16·58	+23·32	−10·95				
c		+1			+1			+1			+1												+1			+1	
d										+1				+1			+1			+1				+1			
e	+1	+1	+1																								
f				+1	+1	+1																					
g							+1	+1	+1																		
h										+1	+1	+1															
i													+1	+1	+1												
k																+1	+1	+1									
l																			+1	+1	+1						
m																						+1	+1	+1			
n																									+1	+1	−1

E tábla számértékeivel összeállithatjuk uj táblába a korellánsegyenleteknek együtthatóit igy:

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	k	l	m	n	Kiigazitandó hiba
a	+ 2530·76	+ 973·14		— 1·56	— 10·20	+ 3·07	— 7·19	— 16·70				+ 17·84	+ 9·93	— 116·35
b	+ 973·14	+ 3055·91	+ 3·60					— 6·17	— 7·00	— 8·79	+ 10·00	+ 12·37		+ 16·20
c		+ 3·60	+ 6·00		+ 1	+ 1	+ 1	+ 1				+ 1	+ 1	— 3·338
d	— 1·46			+ 5·00				+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1		— 3·369
e	— 10·20		+ 1		+ 3									— 0·792
f	+ 3·07		+ 1			+ 3								— 2·826
g	— 7·19		+ 1				+ 3							— 1·821
h	— 16·70	— 6·17	+ 1	+ 1				+ 3						— 4·073
i		— 7·00		+ 1					+ 3					— 0·885
k		— 8·79		+ 1						+ 3				+ 1·020
l		+ 10·00		+ 1							+ 3			— 0·124
m	+ 17·84	+ 12·37	+ 1	+ 1								+ 3		— 0·560
n	+ 9·93		+ 1										+ 3	— 1·994

A 13. korrelánsegyenlet feloldása által találjuk a 13. korrelánsnak számértékét:

$k_1 = +\ 0·069361$ $k_6 = +\ 0·8986$ $k_{11} = -\ 0·0674$
$k_2 = -\ 0·024536$ $k_7 = +\ 0·8009$ $k_{12} = +\ 0·1897$
$k_3 = -\ 0·0829$ $k_8 = +\ 1·5301$ $k_{13} = +\ 0·4627$
$k_4 = +\ 0·5714$ $k_9 = +\ 0·0473$
$k_5 = +\ 0·5274$ $k_{10} = -\ 0·6024$

Az egyes megfigyelések v kiigazitását az alábbi általános egyenlet szerint számitották ki:

$$v_n = a_n k_1 + b_n k_2 + c_n k_3 + \ldots . n_n k_{13}$$

Számértékeit bemutatjuk az alábbi táblázatban:

Kiigazitása	3	4	5	6	7	8	9	1	2
	háromszögben másodpercz								
α	+ 0·442	+ 1·840	+ 1·629	+ 2·379	+ 0·716	− 0·223	+ 0·094	+ 0·758	+ 1·799
β	+ 0·756	+ 0·814	+ 0·716	+ 1·089	+ 0·617	− 0·032	− 0·475	− 0·102	+ 0·379
γ	− 0·408	+ 0·171	− 0·589	+ 0·601	− 0·450	− 0·765	+ 0·503	− 0·098	− 0·184

Végtére ily módon kiigazitott szögadatoknak valószinű hibája:

$$\mu = \sqrt{\frac{[v^2]}{n}} = \sqrt{\frac{22{\cdot}2851}{13}} = 1{\cdot}307''$$

Szóval e példaszerű elsőrangu hálóban a megmért szög kiigazitása után is még mindig $1\,{}^1\!/_3$ szögmásodperczig bizonytalan.

70. §. Az oldalhosszúságok pontos és végleges számitása.

A kiigazitott szögadatokkal az oldal szabatos hossza több módon határozható meg. Itt azonban csakis a legegyszerűbb és ez okból a leghasználtabb eljárást mutatjuk be; t. i. a Legender-féle módot. Ez abból áll, hogy a gömbháromszögnek minden egyes kiigazitott szögét ezen háromszög gömbfölösségének a harmad részével kisebbitjük, és az igy redukált szöggel az oldalak hosszát a sik háromszögmértan sinus tételével számitjuk ki. Ha tehát a_n, b_n és c_n valamely gömbháromszög oldalai, α_n, β_n és γ_n az ezen oldalakkal szemközt fekvő szögei, ε_n a gömbfölösség; igy a gömbháromszög α^0_n, β^0_n és γ^0_n redukált szögei:

$$\alpha^0_n = \alpha^0_n - \frac{\varepsilon_n}{3}$$

$$\beta^0_n = \beta_n - \frac{\varepsilon_n}{3}$$

$$\gamma^0_n = \gamma_n - \frac{\varepsilon_n}{3}$$

Ezekkel pedig:

$$b_n = \frac{a_n}{\sin \alpha^0_n} \sin \gamma^0_n$$

$$c_n = \frac{a_n}{\sin \alpha_n^0} \sin \gamma_n^0$$

E redukált szögekkel a számitást e szerint csak úgy foganatosithatjuk, a mint azt az oldalhosszak megközelitő számitása alkalmával bemutattuk. Eltérés legfeljebb abban nyilvánul, hogy ez esetben hétszámjegyü logarithmusokat kell használni, valamint abban is, hogy a számitást, a hol csak lehet, a verificáló vonalig visszzük, és az utóbbinak kiszámitott hosszát megmért hosszával összehasonlitjuk; ha e két adat a kellő pontossággal egyezik, akkor nemcsak a számitás, de a mérés is sikerült.

71. §. A merőleges gömbrendszálak számitása.

A kiszámitott oldalhosszakkal meghatároztuk ugyan a háromszögpontok kölcsönös fekvését, de hogy a háló pontjait az asztallapokon könnyen és biztosan kirajzolhassuk, a hálót még merőleges tengelyrendszerre kell vonatkoztatni. Az összrendező síkok kezdőpontjául oly elsőrangu szögpontot választunk, mely a terület közepére esik, és mely erre nézve bizonyos jelentőséggel bir; pl. az ország fővárosában a csillagvizsgáló tornyot, vagy nyilvános kimagasló épületet. E kezdőpont a mérés normalpontja, l. a 75. ábrában N pontot.

Egyik összrendező síkul a normalpont $X_1 X$ délllőjét választjuk, másodikul pedig oly $INII$ síkot, mely a normalpont függőlegesét magában foglalván, egyszersmind merőleges a normalpont délllőjére. Rendszálaink ez esetben körívek; az ordinata oly legnagyobb körnek az ívhosszúsága, melynek síkja merőleges a normalpont délkörén és egyszersmind a Föld középpontját foglalja magában; l. az ábrában y és y_1 ordinatát. Az absczissák e körülmények közt a normalpont délllőjén méretnek meg, és pedig azon ív által, mely N normalponttól ama metszőpontig terjed, hol a szóban forgó pontnak délkeleti körive a fődéllőt keresztezi, l. a rajzban x absczissát. A háromszögoldal fekvését e számitás alkalmával legczélszerűbben a normalpont délllőjére, mint absczissatengelyre viszonyitjuk, ez tehát a normaldéllőn kivül fekvő pontokra nem azimut-, hanem tájékozó szög (Richtwinkel).

E rendszálak kifejezésére a gömbháromszög-méréstan egyenleteiből indulunk ki, melyeket azonban gyakorlati czéljainknak megfelelően átalakitunk. E többféle átalakitások között itt csak a Soldner-féle eljárást közöljük.

Legyen a 76. ábrában P számitásunk bármely pontja, honnan más, de háromszögoldal által hozzákapcsolt P_1 pontra akarunk áttérni, akkor e pontnak x absczissája, y ordinatája és γ tájékozó szöge ismertnek tekintendő. Ha tehát P_1-nek a rendszálait x_1 y_1-el, tájékozó szögét γ_1 jelöljük, úgy ezeket Soldner szerint következőleg találjuk.

Az ordináta számitása.

A gömbháromszögben [13] egyenlete szerint:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

Ha folytatólag a 76. ábrát a 77. ábrával összehasonlitjuk, felirhatjuk a, b, c és A adatok jelentőségét igy:

$$a = 90 - y_1\,; \quad c = h$$
$$b = 90 - y\,; \quad A = 90 - \gamma$$

Ezeket az idézett egyenletekbe helyettesitvén, lesz:

$$\sin y_1 = \sin y \cos h + \cos y \sin h \sin \gamma$$

Ha ezután y, y_1 és h-nak értékeit a sin és cos sorral a negyedik hatványig közeledve helyettesitjük, oly egyenletet nyerünk, melyben a megmért hosszúságok szerepelnek.

$$y_1 - \frac{y_1{}^3}{6} = \left(y - \frac{y^3}{6}\right)\left(1 - \frac{h^2}{2}\right) + \left(1 - \frac{y^2}{2}\right)\left(h - \frac{h^3}{6}\right) \sin \gamma$$

Háromszögoldalaink rendes kiterjedéseire kifejezhetjük h oldalunk megközelitett vetületét a két összrendezőtengelyre igy:

[242] $\qquad \Delta y = h \sin \gamma$ és $\Delta x = h \cos \gamma$-val.

Ez alapon $y_1 = y + \sin \gamma$ irható magasabb hatványai kifejezésére. Szóval egyenletünk átalakitott irásmódja ez:

$$y_1 - \frac{(y + h \sin \gamma)^3}{6} = \left(y - \frac{y^3}{6}\right)\left(1 - \frac{h^2}{3}\right) + \left(1 - \frac{y^2}{2}\right)$$
$$\left(h - \frac{h^3}{6}\right) \sin \gamma$$

Ezt az egyenletet feloldjuk most y_1 szerint, és szorzataiban elhagyjuk mind ama tagokat, melyekben a harmadik hatványnál magasabb rangu mennyiségek fordulnak elő. Az eredmény:

$$y_1 = y + h \sin \gamma - \frac{h^3 \sin \gamma \cos \gamma^2}{6} - \frac{y h^2 \cos \gamma^2}{2}$$

A [242] egyenlet segitségével egyszerűsithetjük fennebbi eredményt igy:

$$y_1 = y + \Delta y - \frac{\Delta x^2}{2}\left(y - \frac{\Delta y}{3}\right)$$

Emez eredményre meg kell jegyeznünk, hogy csak oly gömbre érvényes, melynek sugara a hosszegységgel egyenlő, mert a sin és cos sorok alkalmazása alkalmával minden mennyiséget a földgömbnek r sugár hosszúságával kellett volna elosztani. Ha ezt most utólagosan megtesszük és az igy talált eredményt r-rel egyszerűen azért osztjuk, hogy a Föld felületére térjünk vissza, igy általános érvényű végeredményünk ez:

[243] $$y_1 = y + \Delta y - \frac{\Delta x^2}{2 r^2}\left(y + \frac{\Delta y}{3}\right)$$

Az absczissák számitása.

Feladatunk megoldására a gömbháromszög-mértan 12-dik egyenletéből indulunk ki:

$$\sin C = \frac{\sin c}{\sin a} \sin A$$

A 76. és 77. ábra összehasonlitása által áttérünk mérésünk adataira:

$$c = h; \qquad C = w = \operatorname{arc} \Delta x$$
$$a = 90 - y_1; \quad A = 90 - \gamma$$

Ezeket helyettesitvén:

$$\sin w = \frac{\sin h}{\cos y_1} \cos \gamma$$

A sin és cos sor alkalmazása nyomán felirhatjuk úgy mint az ordinátát:

$$w - \frac{w^3}{6} = \frac{\left(h - \frac{h^3}{6}\right)}{\left(1 - \frac{y_1^{\,2}}{2}\right)} \cos \gamma$$

Folytatólag tekintetbe vesszük azt, hogy w szögnek az íve $x_1 - x$ absczisszák különbzetével egyenlő; ezt pedig w^3 hatványa helyett $\Delta x = h \cos \gamma$-val fogjuk kifejezni.

$$x_1 - x - \frac{(h \cos \gamma)^3}{6} = \left(h - \frac{h^3}{6}\right) : \left(1 - \frac{y_1^{\,2}}{2}\right) \cos \gamma$$

$1 : \left(1 - \frac{y_1^{\,2}}{2}\right)$ helyettesithető $1 + \frac{y^2}{2}$ által, ha az osztatban a negyedrangu hatványokat elhanyagoljuk. E helyettesitést végrehajtván:

$$x_1 = x + h \cos\gamma - \frac{h^3 \cos\gamma \sin\gamma^2}{6} + \frac{y_1{}^2 h \cos\gamma}{2}$$

Vagy ha [242] egyenlettel Δy és Δx-re térünk át:

$$x_1 = x + \Delta x + \frac{\Delta x}{2}\left(y_1{}^2 - \frac{\Delta y^2}{3}\right)$$

Ezt ismét a földgömbön elterülő rendszál kifejezésére átalakitva, lesz:

[244] $$x_1 = x + \Delta x + \frac{\Delta x}{2r^2}\left(y_1{}^2 - \frac{\Delta y^2}{3}\right)$$

A háló tájékozására meg kell még mutatni, mikép számitható ki valamely oldalnak ismert és ennek kezdőpontjára érvényes γ tájékozó szögéből ugyan eme oldal második végpontjában érvényes γ_1 tájékozó szöge.

A 75. ábrából látjuk, hogy y_1, h, y és Δx ivek gömbnégyszöget alakitanak, melynek szögösszege $360 + \varepsilon$, ha ε-val eme négyszögnek szögfölösségét jelöljük. Ennek tekintetbe vétele mellett felirhatjuk az egyenletet:

$$360 + \varepsilon = 90 + 90 + 90 + \gamma + 270 - \gamma_1$$

Innen:

$$\gamma_1 = 180 + \gamma - \varepsilon$$

A gömbalak okozta szögfölösséget [47] szerint igy fejezzük ki:

$$\varepsilon = \frac{T}{r^2 \operatorname{tang} 1''}$$

Ha ezt a területet trapéznak tekinthetjük, kifejezhetjük 76. ábránk szerint igy:

$$T = \left(y + \frac{\Delta y}{2}\right)\Delta x$$

Ezzel pedig tájékozó szögünk:

[245] $$\gamma_1 = 180 + \gamma - \frac{\Delta x}{r^2 \operatorname{tang} 1''}\left(y + \frac{\Delta y}{2}\right)$$

A [243], [244] és [245] egyenletekben kifejezzük az utolsó zárójelbe foglalt taggal azt a kiigazitást, melyet gömbrendszálak követelnek. Ezek eltünnek, ha $r = \infty$ nagynak tekinthető, azaz ha mérésünk területét még siknak tekinthetjük. Ekkor:

$$\left\{\begin{aligned} y_1 &= y + \Delta y \\ x_1 &= x + \Delta x \\ \gamma_1 &= \gamma + 180^0 \end{aligned}\right.$$

72. §. A földrajzi rendszálak számitása.

Hogy elsőrangu szögpontjaink kölcsönös fekvésein kivül még fekvésük a földgömbön is meg legyen határozva, ezen czélból földrajzi rendszálait kell ismernünk, mire rendszerint a normalpont megválasztásánál már tekintettel vagyunk; a mennyiben normalpontul az ország csillagvizsgálóját a legtöbb esetben választjuk, melynek földrajzi szélessége, hosszúsága számos, igen pontos megfigyelésből ismeretes. E szerint a normalpontnak az ismert földrajzi rendszálaiból a többi szögpont rendszálait számitás útján származtatjuk le. A számitást Bessel módja szerint következőleg ejtjük meg.

Legyen a 78. ábra nyomán N a normalpont, φ_0 földrajzi szélessége, λ_0 földrajzi hosszúsága, EP a normalpont délllője Földünk P északi sarkpontjával, EE_1 az egyenlitő egyik része, $NP_1 = h$ ama oldal hosszúsága, mely a kiinduló pontot a szóban forgó ponthoz köti, α_0 ez oldal ismert azimutszöge — a kiinduló pontban megmérve — míg ellenben α_1 az oldal kiszámitandó azimutszöge, melyet végpontjának a délllőjével közbezár.

Számitásaink czéljából kiindulunk a gömbháromszög-mértan 12., 13. és 14. egyenletcsoportjából, melyeknek első egyenletét felirjuk.

$$\sin a \sin B = \sin A \sin b$$

$$\sin a \cos B = \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A$$

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

A bemért adatok helyettesitése czéljából összehasonlitjuk most a 78. ábrát a 79. ábrával; ekkor:

$$\begin{array}{ll} a = 90 - \varphi_1 & A = \alpha \\ b = h & B = \mu \\ c = 90 - \varphi_0 & C = \beta \end{array}$$

Utóbbi értékekkel lesz:

$$\cos \varphi_1 \sin \mu = \sin \alpha \sin h$$

$$\cos \varphi_1 \cos \mu = \cos h \cos \varphi_0 -- \sin h \sin \varphi_0 \cos \alpha$$

$$\sin \varphi_1 = \cos h \sin \varphi_1 + \sin h \cos \varphi_0 \cos \alpha$$

Bessel helyettesit:

$$\sin h \cos \alpha = m \sin S$$

$$\cos h = m \cos S\text{-el.}$$

Igy ered:

$$\cos \varphi_1 \sin \mu = \sin \alpha \frac{\sin S}{\cos \alpha}$$

$$\cos \varphi_1 \cos \mu = m \cos S \cos \varphi_0 - m \sin S \sin \varphi_0$$
$$\sin \varphi_1 = m \cos S \sin \varphi_0 + m \sin S \cos \varphi_0$$

Rövidebben irva:

$$\cos \varphi_1 \sin \mu = m \sin S \operatorname{tang} \alpha$$
$$\cos \varphi_4 \cos \mu = m \cos (S + \varphi_0)$$
$$\sin \varphi_1 = m \sin (S + \varphi_0)$$

Elvégre az első és második egyenlet osztata:

[246] $$\operatorname{tang} \mu = \frac{\operatorname{tang} \alpha \sin S}{\cos (S + \varphi_0)}$$

A harmadik és második egyenlet osztata:

[247] $$\operatorname{tang} \varphi_1 = \operatorname{tang} (S + \varphi_0) \cos \mu$$

Ezek után alkalmazzuk még a sinus tételt α és β szögekre:

$$\frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{\sin (90 - \varphi_0)}{\sin (90 - \varphi_1)} = \frac{\cos \varphi_0}{\cos \varphi_1}$$

Ebből:

[248] $$\sin \beta = \frac{\sin \alpha \cos \varphi_0}{\cos \varphi_1}$$

A számitást ezekkel igy foganatositjuk. Mindenek előtt kifejezzük h oldalnak megfelelő központi szögét, Földünk $r = 6370{,}291$ méternyi sugárhosszúsággal és $\rho'' = 206{,}265$ redukáló tényezővel igy:

[249] $$h'' = \frac{h \times 206265}{6370291}$$

Továbbá kiszámitjuk $\operatorname{tang} S = \operatorname{tang} h \cos \alpha$ [246] szerint:

$$\operatorname{tang} \mu = \frac{\operatorname{tang} \alpha \sin S}{\cos (\varphi_0 + S)}$$

[247] alapján:

$$\operatorname{tang} \varphi_1 = \operatorname{tang} (\varphi_0 + S) \cos \mu$$

[248] egyenlettel:

$$\sin \beta = \frac{\sin \alpha \cos \varphi_0}{\cos \varphi_1}$$

Eredményünk φ_1 a [247] egyenlettel:

$$\lambda_1 = \lambda_0 \pm \mu$$

mely egyenletben (+) vagy (—) veendő, a mint P_1 pont N-től keletibb vagy nyugatibb fekvésü.

$$\alpha_1 = 360 - \beta$$

Minden további szögpontra az eljárás ismétlése által térünk át.

73. §. Az elsőrangu hálónak megrajzolása és felosztása egyes háromszögelő osztályokra, esetleg egyes részletlapokra.

Kiterjedtebb mérésnek a térképét néha csak több ezer asztallapon, részletlapon lehet lerajzolni. Az elsőrangu háromszögelés befejezésével ez okból a háló átnézeti képét kell mindenek előtt megrajzolni, mely czélokra rendszerint nagy kisebbítést alkalmazunk; pl. 1 : 50000, 1 : 1000000, esetleg 1 : 2000000 is. A pontokat a kiszámitott rendszálakkal rajzoljuk az átnézeti térképbe. Munkánk felülvizsgálása végett megmérjük a háromszögoldalok hosszát; ha minden oldal kiszámitott értékével e rajzban egyezik, akkor a háló átnézeti térképe sikerültnek tekinthető. Eltérések esetén a hibát ki kell puhatolni s kiigazitani.

Az átnézeti képen kijelöljük ezután a másodrangu háromszögelés osztályait, azaz a terület egyes négyzetmértföldeit, sőt kisebb országok méréseinél közvetetlenül az asztallapokat jelöljük ki. E vonalrendszert, melylyel a területet ily módon felosztjuk, rajzhálónak vagy asztalhálónak nevezzük. A háló oldalai szabadon választhatók úgy hosszúságra, valamint irányukra is. Tekintettel a háló alkalmazott oldalaira két hálót különböztetünk meg:

1. A gömbtrapezokból alakitott hálót.
2. A derékszögü paralellogrammákból alakitott hálot.

A gömbtrapezos háló megfelel a kúpvetületnek; rajzlapjaink szélvonalai délkörök és egyenlőközü körök, l. 80. ábrát.

Ily laphálót alkalmaztak Poroszország legujabb mérése alkalmával, valamint a Magyar- és Osztrák birodalom legujabb keltü, 1 : 75000 kisebbitéssel rajzolt részletes katonai földabroszára is. Poroszországban a lapok kelet-nyugati oldala tiz szögpercznyi kiterjedéssel lett megszabva. E beosztással a négyzet foknyi terület $6 \times 10 = 60$ részletlappal lett befödve. A lap fekvése felirásával lett felismertetve; úgy hogy középpontjának földrajzi rendszálait irták reá.

A Magyar- és Osztrák birodalom emlitett földabroszát úgy osztották fel részletlapokra, hogy kelet-nyugati kiterjedése 30 szögperczet, dél-északi irányban 15 szögperczet födjön be, szóval a négyzetfok $2 \times 4 = 8$ lap által legyen bemutatva. A területnek ily módon foganatositott felosztása könnyiti a pontoknak berajzolását földrajzi rendszálaikkal; mig ellenben merőleges gömbrendszálak alkalmazására a derékszögü parallelogramma biztosit nagyobb kényelmet.

A derékszögü parallelogrammás hálót alkalmazták birodalmunk régibb térképeire, Bajorország kataszteri felmérésére és más kisebb országok méréseire. A lap fekvését ekkor alapfelirásában úgy ismertetik, hogy először azt a síknegyedet emlitik, melyben a lap fekszik, l. 81. ábrában a vonalozott lapot. Ennek felirása lenne, ha a P_8-al jelölt normalpontot magában foglaló tengelyek szerint ismertetjük, dél, nyugat. X_3 és Y_2, mert X tengely szerint haladva a harmadik, és Y tengely szerint haladva a második lapsorban fekszik.

Még szembetűnőbb a felosztásnak azon módja, ha valamely háromszögelőpontnak, melynek gömbrendszálait már kiszámitottuk, a megfelelő asztallapját akarjuk felkeresni, hogy azt e lapon kitüntessük. Legyen eljárásunk bemutatására E_{21} pontnak méterekben kifejezett két összrendezője $X = + 23491$; $Y = (-) 37815$. A síknegyedet felismerjük az összrendezők előjeleiből; tudniillik a $(+X)$ és $(-Y)$ tengely határolja az északnyugati negyedet. E lap felirása lesz tehát É.-Ny. Ha folytatólag tudni akarjuk, hogy hány lapsorral kell az X és Y tengely irányában haladni, mig pontunk lapját elértük, akkor a lapnak oldalhosszával kell ezt az útat elosztani. Legyen lapunk alakja négyzet, $h = 2000$ méter hosszú oldallal, akkor:

$$\frac{X}{h} = \frac{23491}{2000} = 11; \quad \frac{Y}{h} = \frac{37815}{2000} = 18$$

ama lapok száma, melyek lapunkig elterülnek, miért is mindeniket egygyel még nagyobbitani kell, hogy a keresett mutatószámot találjuk. Szóval X_{12}, Y_{19} lapunk más két jelzőbetüje. Lapunk teljes leirása lesz: É.-Ny. X_{12}, Y_{19}

Ha most a szabályosan körülkeritett részletlapot kikerestük, belerajzoljuk E_{21} pontot a lap szélvonalaira viszonyitott rendszálaival. Jelöljük ez utóbbiakat ς és η-val; számértéküket most úgy találjuk, ha X-ból és Y-ból azt a hosszúságot levonjuk, mely részletlapunk tengelyül használt szélvonalainak felel meg. Esetünkben:

$$+\varsigma = 23491 - 11 \times 2000 = 1491\ m$$

$$-\eta = -(37815 - 18 \times 2000) = -1815\ m$$

A berajzolásnál tehát déltől északnak, azaz alulról fölfelé felmérjük ς-t 1491 méterrel; utána η-át keletről nyugat felé, azaz jobb oldalu szélvonalától bal oldalu szélvonala felé haladva 1815 métert mérünk, mert az előjel (—).

74. §. A másodrangu háló szögpontjainak megválasztása és kijelölése.

Kataszterünk régibb eljárása szerint az elsőrangu hálópontokat oly közelre vették, hogy minden négyzetmértföld területébe három ily elsőrangu szögpont esett, akkor a másodrangu hálónak feladata volt az egyes asztallapokat három-három pontja által egymással, valamint a négyzetmértföldnyi háromszögelő osztályhoz kötni.

Jelenleg azonban az elsőrangu háromszöget oly nagyra veszik, l. 43. ábrát, hogy egy nagyobb háromszöggel 4—5 négyzet miriamétert, vagy 7—10 négyzetmértföldet fődnek be. Világos, hogy a mostani felosztásnál minden háromszögelő osztályba nem eshetik elsőrangu szögpont; miért is az ujabb kor méréseinél a másodrangu hálóval a háromszögelő osztályokat egymással még az elsőrangu pontokhoz kapcsolják. A másodrangu pontokat most oly felosztással választják, hogy minden négyzetmértföldre három ily szögpont essék. E szabály betartásáról meggyőződünk az átnézeti térképen, ha abban minden megválasztott pontot berajzolunk.

Azaz ha a másodrangu pontokat mind kijelöltük, bemérjük ezeket előmetszés útján mérőasztal segitségével, melynek lapjára a felvételi osztályokat, esetleg egyes részletlapokat és a kiinduló pontokul használandó elsőrangu pontokat előbb reá rajzoltuk.

Igy eljárva, biztosithatunk minden kimutatott lap részére legalább három ilyen másodrangu pontot. Eme háromszögek oldalhosszúsága 5—12 kilométer között szokott változni. Háromszögei tehát síkoknak tekinthetők, de szögeit mindenesetre theodolittal kell meghatározni.

A szögpontok kijelölésére 6—10 *m* hosszú keresztdeszkás szálfát, 2 *m* hosszú és 0·3 *mm* széles keresztbe szegezett deszkákkal használunk. Ezeket bemeszeltetjük és nagy fekete számokkal iratjuk e pontok jelzőszámát mind a négy deszkára, hogy bemérésük alkalmával a jelzőszámot minden oldalról láthassuk, és igy e pontokat össze ne téveszthessük.

E jelek könnyű eltávolitása céljából, ha pontjukba műszert kell felállitani, hossszúkás faládát, deszkatokot ásatunk a földbe, és pedig úgy, hogy a beleállitott rúd függőleges helyzete négy ékkel legyen biztositható.

E deszkatoktól 2—3 méternyire 0·3 *cm* belső átmérőjü, 0·5 *m* égetett agyagcsövet helyeztetünk még eme pont déli, keleti, északi és nyugati irányvonalába, azaz itt fúróval függőleges lyukat furatunk a földbe és lesüllyesztjük 0·5 *m*-nyire a föld szine alá. Minden pontnak fekvését és jelölésmódját leirjuk a mérés jegyzőkönyvébe.

75. §. A másodrangu háló szögmérése.

A mint már emlitettük, nem követelünk e szögek mérésénél oly nagy szabatosságot, mint az elsőrangu hálóban. Ez okból a szöget ez esetben kevesebb mérésből származtathatjuk le, s az egyes mérés hasznavehető, ha ez a több izben megejtett mérés számtani közepétől 10 másodpercznél kevesebbel tér el. Mérésmódul a szögszorzást itt gyakrabban alkalmazzuk mint elsőrangu hálóban. Ha esetleg a műszerrel valamely szög csúcspontjában fel nem állhatunk, hanem azon kivül, akkor a szögeredmény központositása czéljából úgy a helyes csúcspont, valamint a megirányozott szögpontok fekvéséről is vázlatos rajzot készitünk a jegyzőkönyvbe, melyben minden fontos adat be legyen jegyezve, hogy félreértés elő ne állhasson.

76. §. Az oldalhosszak számitása a másodrangu hálóban.

Minthogy több másodrangu szögpontot az elsőrangu hálónak egy-egy oldalával rendszerint lánczalaku háló által kapcsolunk, igy e helyen azt az eljárást kell bemutatni, melynek segitségével a másodrangu oldalak hosszát az elsőrangu oldal hosszából meghatározzuk.

Legyen a 34. ábrában $E_{101} - E_{100}$ az elsőrangu hálónak valamely oldala, mely — mondjuk hat másodrangu háromszöggel álljon összefüggésben, akkor eljárásunk a következő:

A másodrangu hálónak a szabadon választott kiinduló $E_{100} - M_1 = a_1$ oldalának a hosszát egyelőre a hosszegységgel vesszük egyenlőnek. E fölvett hosszúságával meg a már megelőzőleg kiigazitott szögértékekkel a többi oldal hosszát számitjuk ki, a sík háromszögmértsn sinus tételét alkalmazván. Folytatólag a másodrendü hálónak külső oldalait, melyek folytonos poligont alkotnak, ugyancsak az elsőrangu hálónak a tengelyrendszerére vetitvén, a merőleges η és σ rendszálakat származtatjuk le. Ezekkel pedig eme poligon záróvonalának $h = \sqrt{\eta^2 + \sigma^2}$ hosszát az elsőrangu oldalnak a valódi H hosszával hasonlitjuk össze; tudniillik:

$$1 : a_1 = h : H \text{ ebből } a_1 = \frac{H}{h}$$

Ily módon a $\frac{H}{h}$ redukáló tényezőt nyertük, melylyel a másodrangu poligonnak az előbbi módon kiszámitott oldalait rendre szorozni kell, hogy elvégre eme poligonoldalaknak a valódi hoszszát találjuk, sőt egyúttal még a másodrangu szögpontoknak a valódi rendszálait is kiszámithatjuk, ha az előbbi számitás logarithmusaihoz e $\left(\frac{H}{h}\right)$ redukáló tényezőnek a logarithmusát hozzáadjuk.

E számitás foganatositását az alábbi példában adjuk, hol a porosz kataszter által alkalmazott eljárást használván, minden háromszögben az oldalakat a, b, c-vel, az ezekkel szemközt fekvő szöget α, β, γ-val jelöljük, mely betükhöz még az illető háromszögnek a sorszáma is iratik. Minden háromszögben (a) betüvel a számitás kiinduló, vagy esetleg átmeneti oldalát jelöljük, a többi oldal jelével pedig az óramutató járása irányát követjük.

Ez esetben az elsőrangu háromszögnek a $E_{101} - E_{100} = H = 2864{\cdot}90\,m$-nyi oldalhossza van adva, valamint végpontjainak rendszálai:

A pont jele	y	x
E_{101}	+ 5229·82	— 25987·44
E_{100}	+ 6152·43	— 28689·74
$E_{101} - E_{100}$	— 922·61	+ 2712·32

$$H = \sqrt{(y_{101} - y_{100})^2 + (x_{101} - x_{100})^2} = 2864{\cdot}90 \text{ és } \log H = 3{\cdot}45712.$$

$$\operatorname{tang} \alpha_{100}^{101} = \frac{-\,922{\cdot}61}{+\,2712{\cdot}31}$$

A tört előjelei mutatják, hogy (H) oldal a negyedik síknegyedben fekszik, tehát azimutja:

$$\alpha_{100}^{101} = 341^0\ 12'\ 50''$$

mint tovább megmért adatok még ismeretes:

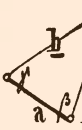
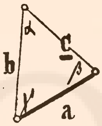
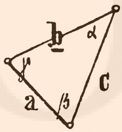
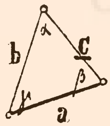
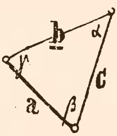
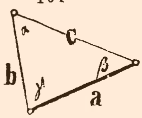
$$\varphi_1 = 48^0\ 22'\ 36''$$

$$\varphi_2 = 23^0\ 45'\ 12''$$

A hálónak bemért szögadatait ki kell igazitani, mielőtt eme számitásra használjuk. A követendő eljárást ismertettük a [164] és [165] egyenlettel.

A számitás végrehajtását a 365. és 366. oldalon adjuk.

Az oldalhosszúságok számitása.

A háromszög jelzőszáma	R a j z	jel	Megmért szög °	′	″	Kiigazitás ″	Kiigazitott szög °	′	″	Logarithmus: $m = \frac{a}{\sin\alpha}$ és sinus	jel	$a = m \sin\alpha$, $b = m \sin\beta$, $c = m \sin\gamma$
										m=0·04385		
1	 E_{100}	α	64	41	8	+15	64	41	23	9 95617	a	0·00000
		β	56	28	30	+12	56	28	43	9 92100	b	9·96483
		γ	58	49	44	+11	58	49	55	9 93226	c	9·97612
			hiba —38				180	—	—			
										m=9 97342		1. △-ből b
2		α	78	38	49	−17	78	38	32	9 99141	a	9 96843
		β	48	16	49	−14	48	16	34	9 87295	b	9 84637
		γ	53	5	12	−18	53	4	54	9 90281	c	9 87623
			hiba +49				180	—	—			
										m=0·01695		2. △-ből c
3		α	46	19	5	+15	46	19	20	9 85928	a	9 87623
		β	72	16	10	+14	72	16	24	9 97888	b	9·99583
		γ	61	24	5	+11	61	24	16	9·94351	c	9 96046
			hiba —40				180	—	—			
										m=0·03619		3. △-ből b
4		α	65	40	51	+ 2	65	40	53	9 95964	a	9 99583
		β	50	52	12	+ 5	50	52	17	9 88971	b	9 92590
		γ	63	26	49	+ 1	63	26	50	9 95159	c	9 98778
			hiba − 8				180	—	—			
										m=0·04405		4. △-ből c
5		α	61	27	42	— 6	61	27	36	9·94373	a	9 98778
		β	42	7	19	— 7	42	7	12	9 82652	b	9 87057
		γ	76	25	22	−10	76	75	12	9·98769	c	0·03?74
			hiba +23				180	—	—			
	E_{101}									m=0·01228		5. △-ből b
6		α	45	10	58	+14	46	11	12	9 85829	a	9 87057
		β	81	51	2	+17	81	51	19	9·99560	b	0·00788
		γ	51	57	15	+14	51	57	29	9 89628	c	9·90856
			hiba —45				180	—	—			

Ez ideiglenes számitást befejezvén, kiszámitjuk az azimutszögeket, nemkülönben a külső háromszögoldalak vetületeit is, még pedig mind a két úton, mely esetünkben a következő: t. i. E_{100}, M_2, M_4, M_5 és E_{101}-ig, valamint E_{101}, M_5, M_4, M_2 E_{100}-ig.

A poligon számitása.

A számitás sorszáma	a poligonoldal kiinduló pontja	mely háromszögből	a szög jele	megmért szög			kiigazitás	kiigazitott szög			azimutszög $\alpha_n = \alpha_{n-1} + A_n \pm 180$			sin α_n / O_n oldal / cos α_n	O_n sin α_n / O_n cos α_n	$\triangle\eta$ ±	$\triangle\xi$ ±
	Az azimutszög számitása													*Logarithmus*		*Szám*	
		szükséges adat		0	'	"	"	0	'	"	0	'	"				
	100		α_{100}^{101}								161	12	50				
	100		φ_2	23	45	12	+ 3	23	45	15	− 4	58	5	8·93752	8·91364	+ 0·08197	
														9·97612			
														9.99837	9·97449		+ 0 94295
	2	1	α	64	41	8	+15	64	41	23				9·24848	9 20894	+ 0·16179	
		2	β	48	16	48	−14	48	16	34	10	12	26	9·96046			
		3	β	72	16	10	+14	72	16	24				9·99307	9·95353		+ 0·89852
	4	3	α	46	19	5	+15	46	19	20				9·70520	9·73694	− 0·54569	
1		4	β	50	52	12	+12	50	52	17	329	31	15	0·03174			
		5	β	42	7	19	− 7	42	7	12				0·93541	9 96715		+ 0·92715
	6	5	α	61	27	42	− 6	61	27	36				9·96455	9·87311	− 0·74663	
		6	β	81	51	2	− 17	81	51	19	292	50	10	9·90856			
														9·58894	9·49750		+ 0·31441
	101		φ_1	48	22	36	+ 4	48	22	40	161	42	50	Összeg		− 1·04856	+ 3·08303
		Összeg		701	12	4	+46	701	12	15							
		fp	hiba		−	46											
	101		α_{101}^{100}					+360			341	12	50			+ 0 36455	
	101	φ_1						− 48	22	40				9·55388	9·56176		
			α					+ 46	11	12	159	1	22	0 00788			
								357	48	32				9·97022	9·97810		− 0·95082
	5	6	γ					51	57	21				9·08079	9·00669	+ 0·10155	
		5	γ					76	25	12	173	4	56	9·92590			
		4	α					65	40	53				9·99683	9·92273		− 0·83700
	3	4	γ					63	26	50				9 45528	9 30163	− 0·20029	
2		3	γ					61	24	16	196	34	34	9·84637			
		2	α					78	38	32				9 98157	9 82794		− 0·67288
	1	2	γ					53	3	54				9·89360	9·89360	+ 0·78270	
		1	γ					58	49	55	128	29	23	0 00000			
														9·79405	9·79405		− 0·62237
	100	1	β					+ 56	28	42				Összeg		+ 1·04851	− 3·08307
		−	φ_2					− 23	45	12	341	12	30	a számtani közép 1 és 2 összegéből		1·04854	3·08305
								32	43	30							
							Összeg	1241	12	30							

A másodrangu szögpontok rendszálszámitása.

A számitás sorszáma	A poligonoldal kiinduló pontja	Logarithmus: O_n sin α_n, a_1, O_n cos α_n	Logarithmus: $\triangle y_n$, $\triangle x_n$	Vetület (száma): az ordinátatengelyre $\triangle y$ +	Vetület (száma): az ordinátatengelyre $\triangle y$ −	Vetület (száma): az absczissatengelyre $\triangle x$ +	Vetület (száma): az absczissatengelyre $\triangle x$ −	Rendszál: $y_n = y_{n-1} + \triangle y$ ±	Rendszál: $y_n = y_{n-1} + \triangle y$ méter	Rendszál: $x_n = x_{n-1} + \triangle x$ ±	Rendszál: $x_n = x_{n-1} + \triangle x$ méter
1	100	8·31364	1·85801	72·11				+	6152·43		
		2·94437									
		9·97449	2·91886			829·68				−	28699·75
	2	9·20894	2·15331	142·34				+	6224·5[illegible]		
		2·94437									
		9·95353	2·89790			790·50				−	27870·18
	4	9·73694	2·68131		480·08			+	6366·83		
		2·94437									
		9·96715	2·91152			815·68				−	27079·69
	6	9·87311	2·81748		656·87			+	5886·72		
		2·94437									
		9·49750	2·44187			276·61				−	26264·04
	101		Összeg	214·45	1136·95	2712·37		+	5229·8[illegible]	−	25987·43
					992·50						
		Az elsőrangu vonal			992·61	2712·37					
		szerint hiba			+ 0·11	+ 0·06					
2	101	9·56176	2·50613	320·72							
		2·94437									
		9·97810	3·92247				836·50	+	5229·82	−	25987·44
	5	9·00669	1·95106	89·34							
		2·94437									
		9·92273	2·86710				736·38	+	5550·58	−	26823·91
	3	9·30163	2·24502		176·20			+	5639·96		
		2·94437									
		9·82794	2·77231				591·99			−	27560·26
	1	9·89360	2·83797	688·60				+	5463·79		
		2·94437									
		9·79405	2·73842				547·55			−	28152·23
	100		Összeg	1008·66	176·20		2712·42	+	6154·43	−	28690·75
				922·46							
		Valódi hossza		922·61			2712·31				
		hiba		− 0·15			− 0·11				

Tehát $h = \sqrt{(1\cdot04854)^2 + (3\cdot08305)^2} = 3\cdot25648$ és

$$
\begin{aligned}
+ \log H &= 3\cdot45712 \\
- \log h &= 0\cdot51275 \\
\hline
\log a_1 &= 2\cdot94437,
\end{aligned}
$$

mely logarithmus úgy a másodrangu oldalaknak, valamint vetületeiknek a logarithmusához adandó, hogy ez adatoknak valódi logarithmusait találjuk. Tekintettel arra, hogy a másodrangu poligonnak az oldalait úgy sem kell ismerni, ha szögpontjainak a rendszálait birjuk, igy mindjárt ez utóbbiak számitására térünk át, mely számitás foganatositását a 364. oldalon láthatjuk.

A szögadatok kiigazitása.

Ha a hibaszámitásnak módját a 34. ábra E_{100}—E_{101}-ig terjedő háló részére a [164] és [165] egyenlet szerint alkalmazzuk, és a hibáknak alábbi értékeit helyettesitjük:

$$h_1 = -38'',\ h_2 = +49'',\ h_3 = -40'',\ h_4 = -8'',\ h_5 = +23'',$$
$$h_6 = -45'' \text{ és } h_p = -46''$$

A [166] és [168] egyenlet nyomán:

$3(1) + (p) - 38 = 0$	$(1) = -\frac{1}{3}(p) + 12'67$
$3(2) + (p) + 49 = 0$	$(2) = -\frac{1}{3}(p) - 16'33$
$3(3) + 2(p) - 40 = 0$	$2(3) = -\frac{4}{3}(p) + 26'67$
$3(4) + (p) - 8 = 0$	$(4) = -\frac{1}{3}(p) + 2'67$
$3(5) + 2(p) + 23 = 0$	$2(5) = -\frac{4}{3}(p) - 15'23$
$3(6) + (p) - 45 = 0$	$(6) = -\frac{1}{3}(p) - 15'00$
	Összeg $= -4(p) + 25'35''$

Az ábrának a jobb oldalu poligon hibaegyenlete pedig:

$$10(p) + (1) + (2) + 2(3) + (4) + 2(5) + (6) - 46'' = 0$$

ha ebbe az előbbi összeget helyettesitjük:

$$10(p) - 4(p) + 25'\,35'' - 46'' = 0$$

Eredménye:

$$(p) = +3'\,44''$$

Ezzel tehát:

$$(1) = -\frac{1}{3}\,3'44 + 12'67 = +11'\,5''$$

$$(2) = -\frac{1}{3}\,3'44 - 16'33 = -17'\,5''$$

$$(3) = -\frac{2}{3}\,3'44 + \frac{40}{3} = +11'\,0''$$

$$(4) = -\frac{1}{3}\,3'44 + 2'67 = +1'\,5''$$

$$(5) = -\frac{2}{3}\,3'44 - 7'67 = -10'\,0''$$

$$(6) = -\frac{1}{3}\,3'44 + 15 = +13'\,9''$$

Végtére az egyes háromszögekben a szögek egyenkénti kiigazitását következőkép eszközöljük:

α_1	kiigazitása	$(1) + (p)$	$= +11'5 + 3'44$	$= +15''$
β_1	"	(1)	$= +11'5$	$= +12''$
γ_1	"	(1)	$= +11'5$	$= +11''$
α_2	"	(2)	$= -17'5$	$= -17''$
β_2	"	$(2) + (p)$	$= -17'5 + 3'44$	$= -14''$
γ_2	"	(2)	$= -17'5$	$= -18''$
α_3	"	$(3) + (p)$	$= +11'0 + 3'44$	$= +15''$
β_3	"	$(3) + (p)$	$= +11'0 + 3'44$	$= +14''$
γ_3	"	(3)	$= +11'0$	$= +11''$
α_4	"	(4)	$= +1'5$	$= +2''$
β_4	"	$(4) + (p)$	$= +1'5 + 3'44$	$= +5''$
γ_4	"	(4)	$= +1'5$	$= +1''$
α_5	"	$(5) + (p)$	$= -10'0 + 3'44$	$= -6''$
β_5	"	$(5) + (p)$	$= -10'0 + 3'14$	$= -7''$
γ_5	"	(5)	$= -10'0$	$= -10''$
α_6	"	(6)	$= +13'9$	$= +14''$
β_6	"	$(6) + (p)$	$= +13'9 + 3'44$	$= +17''$
γ_6	"	(6)	$= +13'9$	$= +14''$
φ_1	"	(p)	$= +3'44$	$= +3''$
φ_2	"	(p)	$= +3'44$	$= +4''$

Az igy talált kiigazitásokat használtuk a 362. oldalon bemutatott táblákban az oldalhosszúságok számitására.

77. §. A másodrangu háló lerajzolása és osztályainak további felosztása egyes felvételi lapokra.

Az elsőrangu háló fejtegetéseinél emlitettük, hogy ma az elsőrangu oldalak hossza már csak nehány négyzetmértföldig terjedő méréseknél oly rövidséggel választható, hogy minden négyzetmértföldnyi területre egy-egy háromszög essék. Az ujabb kor országméréseinél az elsőrangu oldal azonban akkora, hogy a másodrangu háromszögnek az a feladata, mi ezelőtt az elsőrangu hálóé volt; tudniillik hogy a négyzetmértföldnyi háromszögelő osztályokat három pontja által meghatározza és ezeket az elsőrangu pontokhoz kapcsolván, kölcsönösen összekösse.

E szerint a másodrangu szögpontok kiszámitott rendszálaival e pontokat a már négyzetmértföldnyi felvételi osztályokra felosztott átnézeti lapra rajzoljuk, l. a 82. ábrában P_2 m és n pontokat. E rajzban meggyőződünk a másodrangu pontok czélszerü felosztásáról. Ha esetleg valamely osztályban három pontot nem kaptunk, a hiányzó pontot utólagos méréssel kapcsoljuk oda; ekkor rendszerint a Pothenot-féle eljárást alkalmazván, a rendszálakat számitás útján határozzuk meg.

Az átnézeti lapot ily módon elkészitvén, megrajzoljuk minden háromszögelő osztálynak a részletes lapját. Benne nemcsak a másodrangu pontokat kell kimutatni, hanem az egyes asztallapokra eszközölt felosztást is. Kataszterünk eljárása ez: a háromszögelő osztály részletlapját 1 bécsi hüvelyk 200 bécsi öllel rajzolják, igy a 4000 öl hosszú négyzetoldal $4000:200 = 20$ bécsi hüvelyk által lesz képviselve. E mértékkel megszerkesztik a már előre papirral beragasztott asztaltáblán a megfelelő négyzetet. Felső jobb oldalu sarkában felirással látjuk el; ezzel helyét az osztályok csoportjában jellegezik, l. a 83. ábrát $2\,I$ felirással. Folytatólag a beléje tartozó másodrangu pontokat mutatják ki, még pedig az által, hogy a szélvonalaira viszonyitott összrendezőit eme vonalakra tényleg rámérik, úgy a mint ezt az elsőrangu hálónak a lerajzolásánál tettük.

Az asztallapok kihasitása czéljából ekkor az osztály mindkét kelet-nyugati szélvonalát négy, dél-északi szélvonalait öt egyenlő részre kell beosztani. Ezen osztópontok megfelelő és szabatos összeköttetése által kijelöltük a háromszögelő osztálynak a $4 \times 5 = 20$ asztallapját vagy felvételi osztályát, l. a 83. ábrát. Az egyes asztallapok megkülönböztetése végett a felső kelet-nyugati szélvonalra *a*, *b*, *c*, *d* betüket irunk, és pedig keletről nyugat felé haladva; továbbá az egymás alatt fekvő lapsorok balkezü szélvonalához felülről lefelé haladva, *e*, *f*, *g*, *h* és *i* betüt irjuk. Ily módon a $2I$ háromszögelő osztálynak *b*, *h* jelzésü asztallapja az lenne, mely a 83. ábrában vonalozva van.

78. §. A Pothenot-féle feladat alkalmazása.

Ha a másodrangu háromszögelést befejeztük és ekkor még nehány másodrangu pontot utólagosan kell meghatározni, akkor minden pontot három meghatározott ponthoz úgy kapcsolunk, hogy a theodolitot eme utólagosan választott pontban felállitjuk és innen mind a három pontot megirányozzuk. Szóval úgy járunk el, mint ezt a 84. ábra vázolja, hol A, B, C az ismert három szögpont, a, b, c eme háromszögnek három oldala, β és γ b és c oldalak azimutja, $X_1 Y_1$ A pontnak, $X_2 Y_2$ B pontnak, $X_3 Y_3$ C pontnak már kiszámitott összrendezői. D az ujonnan bemért szögpont, melynek meghatározására φ és φ_1 szöget mértük meg.

Hansen útmutatása szerint eljárunk legczélszerűbben igy: D pontnak meghatározására ismernünk kell ennek $X_d Y_d$ összrendezőit. Ezeket a 84. ábra adataival igy fejezzük ki:

$$X_d = X_1 - d \cos \Delta$$
$$Y_d = Y_1 + d \sin \Delta$$

Tekintve azt, hogy $\Delta = 180 - \delta$, igy pótolható $\cos \Delta =$ $= - \cos \delta$ és $\sin \Delta = \sin \delta$-val. Szóval:

$$X_d = X_1 + d \cos \delta$$
$$Y_d = Y_1 + d \sin \delta$$

összrendezőink legközvetetlenebb és általános kifejezője, mely ki is számitható, ha ismert adatainkkal d és δ-át kifejeztük.

A BD háromszögből következik a sinus tételt alkalmazván:

$$[250] \qquad \frac{d}{c} = \frac{\sin m}{\sin \varphi_1}$$

Hasonló módon következik ACD háromszögből:

$$[251] \qquad \frac{d}{b} = \frac{\sin n}{\sin \varphi}$$

Ha [250] egyenletet [251]-el elosztjuk:

$$\frac{b}{c} = \frac{\sin \varphi \sin m}{\sin \varphi_1 \sin n}$$

Ebből:

$$\frac{\sin m}{\sin n} = \frac{b \sin \varphi_1}{c \sin \varphi}$$

Ezt az értéket tang μ-vel jelöljük. Azaz:

[252] $$\operatorname{tang} \mu = \frac{b \sin \varphi_1}{c \sin \varphi} = \frac{\sin m}{\sin n}$$

Folytatólag kifejezzük δ szöget, mely egyelőre még m és n szögekben mintegy elrejtve van.

Ábránk nyomán:

$$m = 180 - [\varphi_1 + (\delta - \beta)] = 180 - [\delta - (\beta - \varphi_1)]$$
$$n = 180 - [\varphi + (\delta - \gamma)] = 180 - [\delta - (\gamma - \varphi)]$$

Ezek alapján:

$$\sin m = \sin [\delta - (\beta - \varphi_1)]$$
$$\sin n = \sin [\delta - (\gamma - \varphi)]$$

Ha rövidebb irás biztositására

$$\beta - \varphi_1 = \varepsilon_1 ; \quad \gamma - \varphi = \varepsilon$$

irjuk, igy:

$$\sin m = \sin (\delta - \varepsilon_1)$$
$$\sin n = \sin (\delta - \varepsilon)$$

Ezekkel:

[253] $$\operatorname{tang} \mu = \frac{\sin (\delta - \varepsilon_1)}{\sin (\delta - \varepsilon)}$$

[253] egyenlet segitségével a következőket fejezzük ki:

$$\frac{1 + \operatorname{tang} \mu}{1 - \operatorname{tang} \mu} = \frac{\sin (\delta - \varepsilon) + \sin (\delta - \varepsilon_1)}{\sin (\delta - \varepsilon) - \sin (\delta - \varepsilon_1)}$$

Fönnebbi egyenlet bal oldala annyi, mint tang $(45^0 + \mu)$; az egyenlet jobb oldalát szorzattá lehet változtatni. Ezt végrehajtván, lesz:

$$\operatorname{tang} (45^0 + \mu) = \operatorname{tang} \left(\delta - \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon}{2} \right) \operatorname{cotg} \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon}{2}$$

Vagy ha még

[254] $$\operatorname{tang} \sigma = \operatorname{tang} \left(\delta - \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon}{2} \right)$$

irjuk akkor:

[255] $$\operatorname{tang} \sigma = \operatorname{tang} (45^0 + \mu) \operatorname{tang} \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon}{2}$$

[254]-ből:

[256] $$\delta = \sigma + \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon}{2}$$

[250] és [251]-ből:

$$d = \frac{c \sin m}{\sin \varphi_1} = \frac{b \sin n}{\sin \varphi}$$

Vagy $\sin m$ és $\sin n$ határozott értékével:

[257] $$d = \frac{c \sin (\delta - \varepsilon_1)}{\sin \varphi_1} = \frac{b \sin (\delta - \varepsilon)}{\sin \varphi}$$

A Pothenot-féle eset alkalmazhatóságára tapasztaljuk [252] egyenletből:

$$\text{tang}\, \mu = \frac{\sin (\delta - \varepsilon_1)}{\sin (\delta - \varepsilon)}$$

hogy D pont ezzel meg nem határozható, ha $m = n$-el, mert ekkor

$$\varphi_1 + \delta - \beta = \varphi + \delta - \gamma$$

kellene állani, ez maga után vonja, hogy $\varphi_1 - \beta = \varphi - \gamma$, azaz $\varepsilon_1 = \varepsilon$-val; de ezzel

$$\text{tang}\, \mu = \frac{\sin (\delta - \varepsilon_1)}{\sin (\delta - \varepsilon)} = 1 = \text{tang}\, 45^0$$

Ekkor azonban

$$\text{tang}\, \sigma = \text{tang}\, (45^0 + 45^0)\, \text{tang}\, \frac{0}{2}$$

Azaz:

$$\text{tang}\, \sigma = \infty \times 0$$

vagyis határozatlan.

Szóval feladatunk ekkor hátulmetszettel meg nem határozható. D pont biztos meghatározására úgy választandó, hogy az adott háromszögben a szemközt fekvő, l. 84. ábrában, B szög és a megmérendő φ szög, ha összeadjuk, 20—30 fokkal kisebb vagy nagyobb legyen 180 foknál. Maga φ szög pedig 60 foktól 130 fokig mérjen éles metszet biztositására.

A 84. ábrából azt is látjuk, hogy m csak akkor lehet egyenlő n-el, ha A, B, C és D pont egy körvonalban fekszik.

A számitás foganatositása.

Először kiszámitjuk

$$\beta - \varphi_1 = \varepsilon_1\,; \quad \gamma - \varphi = \varepsilon\,;$$

folytatólag

$$\text{tang}\, \mu = \frac{b \sin \varphi_1}{c \sin \varphi}$$

utána

$$\text{tang}\,\sigma = \text{tang}\,(45^0 + \mu)\,\text{tang}\,\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon}{2}$$

nnen

$$\delta = \sigma + \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon}{2}$$

[257] egyenletből:

$$d = \frac{c \sin(\delta - \varepsilon_1)}{\sin \varphi_1} = \frac{b \sin(\delta - \varepsilon)}{\sin \varphi}$$

A végeredmény pedig:

$$X_d = X_1 + d \cos \delta$$
$$Y_d = Y_1 + d \sin \delta$$

79. §. A Hansen-féle feladat alkalmazása.

Ily hiányzó másodrangu szögpontoknak utólagos kapcsolása alkalmával előfordulhat az az eset is, hogy két ismert ponthoz két ismeretlent kell hátulmetszettel hozzákötni.

A követendő eljárást 85. ábrával ismertetjük. Legyen A és B a két ismert szögpont, akkor X_a, X_b és Y_a, Y_b valamint β szög és b oldalhosszúság ismeretes. A kapcsolás czéljából bemérjük D szögpontban φ_1 és φ szöget. C pontban ψ_1 és ψ szöget mérjük meg. C és D pontok meghatározói ezek:

$$X_c = X_a + c \cos \gamma$$
$$Y_c = Y_a + c \sin \gamma$$
$$Y_d = Y_a + d \sin \delta$$
$$X_d = X_a + d \cos \delta$$

Szóval c, d oldalakat, meg γ és δ szögeket kell kiszámitani. Ábránk nyomán felirható a sin tétel segitségével ABC, ABD és ACD háromszögekre az alábbi egyenlet.

[258] $$c \sin \psi = b \sin p$$

[259] $$d \sin \varphi = b \sin q$$

[260] $$c \sin \psi_1 = d \sin \varphi_1$$

ACD háromszögnek szögeire:

[261] $$\delta - \gamma = 180 - (\psi_1 + \varphi_1)$$

ACB háromszögben:

$$p = 180 - [\psi + (\beta - \gamma)]$$

ABD háromszögben:

$$q = 180 - [\varphi + (\delta - \beta)]$$

Ezek alapján:

[262] $$\begin{cases} \sin p = \sin [\psi + (\beta - \gamma)] \\ \sin q = \sin [\varphi + (\delta - \beta)] \end{cases}$$

A [261] egyenlet szerint ismerjük

$$\delta - \gamma = 180 - (\psi_1 + \varphi_1)$$

Jelöljük rövidség kedvéért:

[263] $$\delta - \gamma = 2\,\Delta\text{-val},$$

és a még ismeretlen

[264] $$\delta + \gamma = 2\,\varepsilon\text{-val.}$$

Ezekkel:

[264] $$\begin{cases} \delta = \Delta + \varepsilon \\ \gamma = \varepsilon - \Delta \end{cases}$$

Hogy γ és δ szöget a [262] egyenletből kibontsuk, alábbi helyettesitést alkalmazzuk:

$$\begin{array}{r} \varphi - \beta + \Delta = \eta \\ + \delta = \Delta + \varepsilon \\ \hline \end{array}$$

[265] $$\varphi - \beta + \delta = \eta + \varepsilon \quad \text{és}$$

$$\begin{array}{r} \psi + \beta + \Delta = \varsigma \\ - \gamma = \Delta - \varepsilon \\ \hline \end{array}$$

[266] $$\psi + \beta - \gamma = \varsigma - \varepsilon$$

A [262], [265] és [266] egyenletek segitségével felirhatjuk [258], [259] és [260] egyenletet igy:

[267] $$c \sin \psi = b \sin (\varsigma - \varepsilon)$$

[268] $$d \sin \varphi = b \sin (\eta + \varepsilon)$$

[269] $$c \sin \psi_1 = d \sin \varphi_1$$

Ezután elosztjuk [267] egyenletet [268] egyenlettel:

[270] $$\frac{c \sin \psi}{d \sin \varphi} = \frac{\sin (\varsigma - \varepsilon)}{\sin (\eta + \varepsilon)}$$

[269] egyenlet igy is irható:

$$\frac{c}{d} = \frac{\sin \varphi_1}{\sin \psi_1}$$

Ha eme értéket [270]-be irjuk, lesz:

[271] $$\frac{\sin \varphi_1 \sin \psi}{\sin \psi_1 \sin \varphi} = \frac{\sin (\varsigma - \varepsilon)}{\sin (\eta + \varepsilon)}$$

Mely értéket ismét tang μ-vel jelölve:

[272] $$\operatorname{tang} \mu = \frac{\sin (\varsigma - \varepsilon)}{\sin (\eta + \varepsilon)}$$

Ez utóbbi egyenlettel alakitjuk:

$$\frac{1 + \operatorname{tang} \mu}{1 - \operatorname{tang} \mu} = \frac{\sin(\eta + \varepsilon) + \sin(\varsigma - \varepsilon)}{\sin(\eta + \varepsilon) - \sin(\varsigma - \varepsilon)}$$

Eredményünk bal oldala ismét $\operatorname{tang}(45 + \mu)$; jobb oldalát átalakitjuk szorzattá és felirjuk igy:

[273] $$\operatorname{tang}(45^0 + \mu) = \operatorname{tang} \frac{\varsigma + \eta}{2} \operatorname{cotg}\left(\varepsilon - \frac{\varsigma - \eta}{2}\right)$$

Jelöljük még:

[274] $$\varepsilon - \frac{\varsigma - \eta}{2} = w$$

A számitás foganatositása.

Először kiszámitjuk Δ értéket, ez [261] és [263] egyenlet nyomán:

$$\Delta = 90 - \frac{\psi_1 + \varphi_1}{2}$$

Folytatólag [265] és [266] szerint:

$$\eta = \varphi - \beta + \Delta$$
$$\varsigma = \psi + \beta + \Delta$$

[271] egyenlet nyomán:

$$\operatorname{tang} \mu = \frac{\sin \varphi_1 \sin \psi}{\sin \psi_1 \sin \varphi}$$

[273] egyenlettel:

$$\operatorname{tang} w = \operatorname{cotg}(45^0 + \mu) \operatorname{tang} \frac{\eta + \varsigma}{2}$$

[274] szerint:

$$\varepsilon = w + \frac{\varsigma - \eta}{2}$$

[264] alapján:

$$\delta = \varepsilon + \Delta$$
$$\gamma = \varepsilon - \Delta$$

[267] egyenletből:

$$c = \frac{b \sin(\varsigma - \varepsilon)}{\sin \psi}$$

[268] egyenlettel:

$$d = \frac{b \sin(\eta + \varepsilon)}{\sin \varphi}$$

Ezekkel pedig mind a két pont rendszála:

$$X_c = X_a + c \cos \gamma$$
$$Y_c = Y_a + c \sin \gamma$$
$$X_d = X_a + d \cos \delta$$
$$Y_d = Y_a + d \sin \delta$$

Feladatunk meg nem oldható hátulmetszettel, ha mind a négy pont egy körvonalban fekszik. Ennek elkerülése czéljából C és D pont úgy választandó, hogy $\varphi + \psi$ szögek 60 fokkal kisebb vagy 120 fokkal nagyobb legyen 180 foknál, valamint hogy egyenkénti értékük 60 foktól 150 fokig mérjen.

80. §. A harmadrangú háló.

Eme háló feladata a másodrangu szögpontoknál még közelebb fekvő vezérpontokat meghatározni, hogy felvételi lapjaink mindenikére három-három kiinduló pontot biztositsunk. A hálópontok czélszerű felosztása és a szögek mérése alkalmával a másodrangu hálóban ismertetett szabályokat és eljárásokat követjük. E hálónak egyedüli különbsége az, hogy itt két-két másodrangu pontot kevesebb, legfeljebb négy háromszögből alakitott lánczczal kötünk össze. A szögmérés megszabott pontossága is rendszerint kisebb, tudniillik itt megelégszünk minden szögnek négy izben megmért szögadatával. A mérést sikerültnek tekintjük, ha minden háromszögben a belső szögek összege $\pm$ 15 szögmásodperczig a 180 fokot eléri. A szögmérésre kisebb theodolitot használunk, rendszerint 16 *cm*-es limbuskörrel. A szögpontot is egyszerűbb módon jelöljük ki. A műszer felállitására vas- vagy agyagcsövet süllyesztünk a földbe a szögpont helyén; ebbe tűzzük a keresztdeszkás jelzőpóznát. Ennek rúdja rendszerint 5 - 7 *m* hosszú és 7—10 *cm* vastag. Keresztdeszkája 1·4 *m* hosszú és 0·25 *m* széles. Deszkáit bemeszelhetjük és reáirjuk a jelzőszámot fekete festékkel.

A megmért szögadatok kiigazitását, az oldalhosszak számitását, az összrendezők számitását és a szögpontoknak az asztallapokra való rajzolását ép úgy végezzük, mint a hogy ezt a másodrangu hálóban ismertettük.

81. §. Tájékozó irányzatok kitüntetése.

Ha valamely részletlapnak terepviszonyai annyira mostohák, hogy a részére meghatározott harmadrangu pontok egyikéből a másodikat látni nem lehet, vagy ha területében csak egy pontot sikerült meghatározni, ekkor az ily asztallap részére egy, esetleg két tájékozó irányt kell kitüntetni, melynek segitségével mérőasztalunknak megadhatjuk a helyes állást, midőn ezzel a részletes mérést megkezdjük.

Feladatunk ismertetésére bemutatjuk a 83. ábrával vázolt *21* felvételi osztálynak, *cf*-el és *cg*-vel jelölt részletlapját, l. a 86. ábrát. Itt az legyen feladatunk, hogy ama *Ph* irányzatot *21cg* jelü lapon kitüntessük, mely ennek egyedüli *h* háromszögelő pontjából a szomszédos lapnak *P* pontját köti össze. Ezt rendszerint úgy foganatositjuk, hogy a szóban forgó irányzatnak *d* metszéspontját ama szélvonalban tüntetjük ki, melyben e két lap összefügg.

Röviden szólva *rd* hosszúságot *h*, *r* és *P* pontoknak a már előbb kiszámitott összrendezőivel, a 86. ábrában kimutatott két *htd* és *hUP* derékszögü háromszöggel határozzuk meg. Ugyanis e háromszögek hasonlósága alapján irható:

$$td : UP = ht : hU$$

Innen:

$$td = \frac{UP \times ht}{hU}$$

Ha folytatólag $X_1 Y_1 h$ pontnak, $X_2 Y_2 r$ pontnak és $X_3 Y_3 P$ pontnak két-két vizszintes rendszála, akkor helyettesitésük által:

$$td = \frac{(Y_3 - Y_1)(X_2 - X_1)}{X_3 - X_1}$$

és mert

$$rd = rt + td, \text{ igy}$$

$$rd = (Y_2 - Y_1) + \frac{(Y_3 - Y_1)(X_2 - X_1)}{X_3 - X_1}$$

82. §. A negyedrangu háló.

Részletes méréseink könnyitése és gyorsitása céljából meghatározunk még minden asztallap területében negyedrangu vezérpontokat is, rendszerint 15-öt, vagy néha 30-at. Kijelölésük még egyszerűbb, mint a harmadrangu pontoké. Bemérésük céljából minden negyedrangu pontot a legközelebb fekvő két harmadrangu ponttal, azaz oly előlmetszettel határozzuk meg, — és pedig oly esetben, hol nagyobb szabatosságot követelünk, a szöget theodolittal mérjük. Igy eljárva, negyedrangu pontjaink csak közvetve függnek össze. A szögmérés sikerültnek tekinthető, ha egy háromszögben a 180 fokot $\pm$ 30 szögmásodperczig megközeliti. A hibákat szétosztjuk ekkor mind a három szögadatra egyformán.

Kisebb pontossággal, de kevesebb munkával meghatározhatjuk a negyedrangu szögpontokat rajzolás útján is. Ez esetben elengedhetetlen feltételünk minden negyedrangu pontot három harmadrangu pontból bemetszeni; azaz legalább még egy ellenőrző metszettel fekvését igazolni. A szabályszerüen kikészitett asztallapot átadjuk most annak a mérnöknek, a ki a részletes mérést foganatositja. Ez mindenek előtt még több segitő pontot jelöl ki, melyek mérésére mint további kiinduló és ellenőrző pontok szolgálhatnak. A részletes mérést legczélszerűbben az asztallap szögletpontjaiból vagy határvonalaiból inditja meg, még pedig rendszerint a terület legnehezebb részéből, a honnan a lap közepe felé haladunk. A munkát ez alkalommal egyes a természet által megszabott területenkint, dűlőnkint végezzük. Az alkalmazandó eljárást a mérnök saját belátása szerint választja és biztositja, azaz majd a sarkpontokkal, majd az alapvonalból, majd összrendezőkkel, majd poligonokkal méri be részletpontjait, azonképen, a mint ez esetrőlesetre czélszerűbbnek bizonyul.

Oly mérésnél, melynek területe két négyzetmértföldnél nem sokkal nagyobb, legalább két rendbeli háromszöghálóra van szükségünk.

1. Hálóra, melylyel az asztallapok összefüggését biztositjuk.

2. Oly hálóra, melynek pontjaival emez asztallapok részletes felmérését könnyitjük.

Elsőre a kataszteri mérésnek harmad- és negyedrangu pontjait szoktuk alkalmazni. Vagy kitűzzük a hálót külön és czéljainknak megfelelőbben, mely esetben még alapvonalát is kell mérni. A szögmérés módját megszabjuk ekkor a kivánt pontosságnak megfelelően.

Oly esetben, hol a terület egy négyzetmértföldnél is kisebb, hol tehát a felvétel rajza nehány asztallapon is elfér; czélunk egy hálóval is biztositható, melyet még azonkivül a lehető legegyszerűbb módon be szoktunk mérni.

A részletes mérés további utasitásai szerzőnek „Erdészeti földméréstan"-ában tárgyaltatnak behatóbban.

ÖTÖDIK SZAKASZ.

A földrajzi rendszálak közvetetlen meghatározásai.

83. §. Főpontok, főirányok és viszonyitó síkok.

Az égboltozat gömbalakunak tünik elé Földünk bármely pontjából; onnan van, hogy éggömbről szólunk. Földünk minden pontjából megfigyelhetünk továbbá két főirányt; tudniillik Földünk PP_1 forgástengelyét és z álláspontunknak ZZ_1 függőleges irányát, l. 87. ábrát. A függőlegest rendszerint érzékeny libellával határozzuk meg, és felső Z vége a tetőpont vagy zenitpont, alsó Z_1 vége a talppont vagy nadirpont.

Földünk forgástengelye az az egyenes vonal, mely körül látszat szerint a csillagos ég egyszer fordul naponta. E főirányban megkülönböztetjük a két sarkpontot; úgymint az éggömb északi felének P északi, és a déli éggömb P_2 déli sarkát. E két pont fekvése szerint határozzuk meg más pontnak, esetleg vonalnak északi és déli helyzetét.

A z földi pontnak déllője az a S, Z, P, S_2, Z_2, P_2 sík, mely e pontnak ZZ_2 függőleges irányát és Földünk PP_2 forgástengelyét foglalja magában.

ZZ_2 függőlegesnek a Z pontban képzelt merőleges síkja képviseli Z pontnak látszólagos horizonját, mig Z pontnak valódi horizonja az előbbivel egyenlőközü, de Földünk középpontját is foglalja magában.

Ha Földünk PP_2 forgástengelyét e vizszintes síkok egyikére vetitjük, találjuk a delelővonalat, l. 87. ábrában S és S_2 összekötőjét. Eme vonallal kitüntetjük térképeinken az észak-déli irányt, az északi és déli sark fekvése szerint. Ha ugyan-e vizszintes síkban merőlegest képzelünk SS_2-re, akkor ez a kelet-nyugati iránya Z földi pontnak.

Az egyenlitő az a QQ_2 sík, mely Földünk PP_2 forgástengelyén merőlegesen áll és még Földünk középpontját is magában foglalja.

$\varepsilon\varepsilon_2$ az ekliptika, vagyis az a sík, mely a Nap és Földünk közzéppontját összekötő sugara által létre jön, ha Földünk évi útját tekintetbe vesszük; rövidebben szólva, a Nap látszólagos évi útja, ha Földünk tengelyforgását tekintetbe nem vesszük. X égitestnek magassági köre az a kör, mely megfigyelésünk Z álláspontjának ZZ_2 függőleges irányán kivül még X égitestet is magában zárja, l. Z, Z, d körívet 87. ábrában. Első magassági kör a neve akkor, ha ez álláspontunk kelet-nyugati irányát is követi.

X égitestnek mXP körive határozza declinatiója körét; jellemzője, hogy Földünk PP_2 forgástengelyét és X égitestet foglalja magában.

Egyenlőközü kör.

Földünk tengelyforgása következtében minden állócsillag látszólag körvonalban mozog, mely körnek sikja merőleges Földünk forgástengelyére; ily kört nevezünk egyenlőközü körnek. Az egyenlőközüek legnagyobbika a sarkponttól 90 foknyira fekszik; ez Földünket két egyenlő részre osztja, miért is egyenlitőnek — aequatornak — nevezzük.

84. §. Égi testek összrendezői.

A csillagász, a földmérő, valamint a tengerész is álláspontjainak földrajzi rendszálait égitestek megfigyeléseivel határozza, mely czélból emez égitestnek látszólagos helyzetét sarkponti összrendezőkkel, az éggömbön állandónak képzelt viszonyitó síkokra vonatkoztatja. Szóval gömbháromszögek segitségével számitja ki a meghatározandó mennyiségeket; e háromszögeket majd a szóban forgó adat, majd más döntő körülménynek változásával másképen alakitja.

Számitásaink kiinduló pontja.

Tengelyrendszerünk kezdőpontjául alkalmazhatjuk a Föld középpontját vagy a Nap középpontját is. Ily alapon megkülönböztetjük a földközponti — geocentrikus — és a napközponti vagy heliocentrikus tengelyrendszert. Igaz, hogy megfigyeléseinket eme kezdőpontokban nem tehetjük, de egyszerű kiigazitással minden adat ama értékre hozható, mely neki a kezdőpontban megejtett megfigyelésnek felelne meg.

85. §. A földközponti vagy geocentrikus tengelyrendszerek.

A horizonra viszonyitott összrendezők.

Helyszini adatok meghatározására, vagy akkor is, ha a megfigyelést theodolittal kell megejteni, alapsíkul álláspontunknak vizszintes síkját, azaz műszerünk vizszíntes limbuskörét választjuk; harmadik irányul szolgál ez esetben műszerünk függőlegesen álló alhidádatengelye, l. 88. ábrában SS_2 vizszintes kört, melynek csak egyik felét megrajzoltuk. Továbbá ZZ_2 álláspontunk függőleges iránya. Legyen PP_2 Földünk forgástengelye, akkor a rajzsíkban fekvő $SZP\ S_2 Z_2 P_2$ kör álláspontunk délllője, mint ZZ_2 és PP_2 főirányoknak közös síkja. Valamely X égitest pillanatnyi helyzetét most úgy határozzuk meg, hogy Földünk C pontjából X égitestet megirányozván, XC irányzat által vagy dX magassági szöget, vagy XZ tetőponti távolságot leolvassuk műszerünk magassági körén. Magassági szöget akkor, ha körünk noniusa a vizszintes síkra volt beállitva, mig beállitásával a függőleges irányba, tetőponti távolságokat biztositunk. A második gömbrendszál XC irányzatunk α azimutszöge; ezt műszerünk limbuskörén olvassuk le közvetetlenül, ha beosztásának nullás pontjával előbb álláspontunk délllőjébe helyeztük.

Összrendezőink tehát: $dX = m$ a magassági szög, vagy $ZX = s$ a tetőponti távolság; ha az egyiket ismerjük, kiszámitható a második, mert $m + s = 90^0$.

A magassági szöget nulla foktól 90 fokig (+) vagy (—) előjellel számitjuk, azonképen a mint XC irányunk a vizszintes sik fölé vagy alá hajlott. A tetőponti távolságot a tetőponttól a talppontig 0 foktól 180 fokig szakadatlanul és előjel nélkül számitjuk.

A csillagász a vizszintes sikban fekvő α azimutszöget a delelő vonalnak déli végétől nyugatnak, 0 foktól 360 fokig számitja; mig a bányász számitásánál északtól kiindulva keletnek halad.

86. §. Az egyenlitőre viszonyitott összrendezők.

Általános adatokra, melyek Földünk bármely pontjára érvényesek, alapsikul az egyenlitőt használjuk; harmadik tengelyünk ekkor Földünk forgástengelye. A csillagász eme rendszálak közvetetlen megfigyeléseire az úgynevezett aequatorialis műszert alkalmazza. Ez a theodolittól annyiban különbözik, hogy ennek alhidádatengelye, ha szabály szerint felállitottuk, egyenlőközü Földünk forgástengelyével, s igy a limbusköre az egyenlitő síkjával egyenlőközü. Ha ez esetben a Föld C középpontjában képzelt műszerrel X égitestet megirányozzuk, l. 89. ábrát, úgy az a kör, mely PP_2 forgástengelyt és X égitestet magában foglalja, a declinatiós kör; benne mérjük azt a két rendszálat, melylyel X égitestnek az egyenlitő sikja feletti állását meghatározzuk.

Ugyanis $GX = \delta$ az égitest declinátiója, $PX = p$ az égitest sarkponti távolsága, $\delta + p = 90$ fokkal. A declinátiót 0 foktól 90 fokig számitjuk; előjele $(+)$, ha az égitest az ég északi félgömbén van, $(-)$ az előjel a déli félgömb égi testjeire.

A második rendszálat az egyenlitőben mérjük; síkban viszonyitó irányul azt a CY egyenest használjuk, mely Földünk középpontját a Nap középpontjával akkor köti össze, mikor Napunk a tavaszpontban áll.

A tavaszpont szabatosan meghatározható; a Nap akkor áll e pontban, mikor látszólágos évi útjában a déli félgömbről az északi félgömbre átlépvén, éppen az egyenlitőbe érkezett. Ez a pillanat egyszersmind csillagászati időszámitásaink kezdőpillanata. Az igy választott CY kezdőiránytól számitjuk eme rendszálat CX irányzatunknak az egyenlitőre vetitett GC sugárig, vagyis kifejezője YCG szögnek az íve, melyet az égitest egyenes felkeltének vagy rectascensiójának nevezzük. Jelölésére a csillagászati naplóban AR betüket használunk. A rectascensió mérésére az egyenlitőt 360 fokra, de még ezenkivül 24 órára is osztjuk. Ennek nyomán:

$$24 \text{ óra} = 360 \text{ fok.}$$

Az idő és a szögmérték további alrészeire következik ebből az alábbi viszony:

$$[275] \qquad \begin{cases} 1 \text{ óra} & = 15'' \\ 1 \text{ percz} & = 15'' \\ 1 \text{ másodpercz} & = 15'' \end{cases}$$

Ezekkel bemutattuk az idő és szögmérték közötti viszonyt, úgy hogy áttérhetünk szögmértékből időmértékre és viszont, ha a számadatot 15-el elosztjuk vagy 15-el szorozzuk.

Példa. Mekkora idő felel meg $113^0\ 16'\ 39''$-nyi szögnek?

$114^0 : 15 = 7 + \frac{8}{15}$ óra; utóbbi $\frac{8}{15}$ órát kell most perczekben kifejezni; ezt úgy érjük el, ha még 60-al szorozzuk; de minthogy 60 : 15 = 4, igy 8-at csak 4-el kell szorozni. A perczek száma lesz tehát:

$$8 \times 4 = 32 \quad \text{p. hozzáadva}$$
$$16 : 15 = 1 \frac{1}{15} \quad \text{p.}$$
$$\text{tehát összesen} \quad 33 \text{ p. és } \frac{1}{15} \text{ percz.}$$

Ha $\frac{1}{15}$ perczet ismét 4-el szorozzuk, kapjuk a másodperczeket; igy ezek:

$$1 \times 4 = 4 \quad \text{továbbá}$$
$$39'' : 15 = 2{\cdot}6$$
$$\text{összesen} \quad 6{\cdot}6 \text{ másodpercz.}$$

Szóval:

$$113^0 + 16' + 39'' = 7 \text{ óra} + 33 \text{ p.} + 6{\cdot}6 \text{ mp.}$$

A rectascensió mértékéül tehát majd szögmértéket, majd időmértéket alkalmazunk, a mint ez adataink czéljainak inkább megfelel. Mind a kettőt a tavaszponttól szakadatlanul és ellentétes irányban számitjuk az azimutszöggel, l. 89. ábrában a nyil irányát.

87. §. A napközponti vagy heliocentrikus tengelyrendszer.

Kezdőpontja a Nap, alapsíkja Földünk látszólagos útja, vagyis az ekliptika, l. 90. ábrában félig kirajzolt $\varepsilon \varepsilon_2$ körét. Harmadik viszonyitó tengelye ama egyenes, mely az ekliptika két $F F_2$ sarkpontját foglalja magában. Egyik rendszálával kifejezzük az égitestnek távolságát az alapsíktól, l. $NX = \beta$ ívet. Ez az X égitestnek *égi szélessége,* melyet β-val jelölve, alapsíkjára hasonló módon, mint a földrajzi szélességet mind a két félgömbön 0 foktól 90 fokig (+) és (—) előjellel megkülönböztetve számitjuk.

Második rendszála X égi testnek égi hosszúsága. Ezt az ekliptikában Υ tavaszponttól X-nek szélességi köréig mérjük, tehát ugyancsak a rectascensió irányát követjük itt is. Mértékül a körnek 0 foktól 360 fokig terjedő szögosztását használjuk.

Az égitestek égi szélességét és égi hosszúságát csak geocentrikus összrendezőkből számithatjuk ki. A földmérő rendes feladataira nem használja.

88. §. A tengelyrendszerek és az összrendezők mennyiségtani összefüggése.

A 87. ábrában XZP háromszög segitségével bemutattuk azokat az adatokat, melyekkel a horizonra viszonyitott rendszálakból az egyenlitőre viszonyitott rendszálakra térünk át.

Mindenek előtt ismertetjük a déllősikban megfigyelhető fontos adatokat, melyeket itt úgy mint a következő tárgyalásokban is a szokásos jelzőbetüvel fogunk jelölni.

[276] $$XZ = s = 90 - m$$

az égitest tetőponti távolsága, vagyis magassági szögének kiegészitő értéke 90 fokra.

[277] $$XP = 90 - \delta = p$$

az égitest sarktávolsága, vagyis δ declinatiójának kiegészitő szöge 90 fokra.

[278] $$ZP = \psi = 90 - \varphi$$

álláspontunk sarktetőponti távolsága, vagy ama pont földrajzi szélességének pótló szöge 90 fokra.

Gyakran XZP háromszögnek alábbi két szögével van még dolgunk. A szög:

$$XZP = 180 - \alpha$$

ez a megfigyelt égitest α azimutszögének kiegészitő szöge 180 fokra. A szög:

$$ZPX = \tau$$

az úgynevezett időszög, vagyis annak az időnek kifejezője, mely eltelik, mig X égi testünk a déllősik és mostani magassági köre közti utat megteszi.

89. §. Égi testek látszólagos útja és pályafutásuk nevezetes pontjai.

Ha állócsillagot látszólagos útjában megfigyelünk, tapasztaljuk, hogy körvonalban mozog, l. 91. ábrában 1, 2, 3, 4 kört, síkja merőleges Földünk PP_2 forgástengelyére, úgy hogy valamennyi állócsillag körpályája egyenlőközü, miért is azt mondjuk, hogy egyenlőközü körökben mozognak. Vannak csillagok, melyek $bP = p = 90 - \delta$ sarktávolsága kisebb, mint $PZ = \psi$, azaz megfigyelő pontunk sarktetőponti távolsága. Ezek tehát mindig SS_2 horizonunk felett mozognak és ez okból mindig megfigyelhetők. Megkülönböztetésükre sarkkörüli csillagoknak nevezzük.

Vannak oly csillagok is, melyek $P1 = p$ sarktávolsága nagyobb, mint álláspontunk $PZ = \psi$ sarktető távolsága. Ezek pályafutása csak 4, 1, 2 részében látható. Minden égitest pályafutásában két pont nevezetes, ugyanis ama két pillanat, mikor déllőnk síkján átvonulnak. Az 1-el jelölt pontban a felső, a 3-al jelölt pontban az alsó culminatiót figyelhetjük meg; azaz ama pillanatot, mikor horizonunkra viszonyitva a legmagasabb és legmélyebb állást elfoglalta. Oly égitestnek, melynek p sarktávolsága nagyobb álláspontunk ψ sarktetőponti távolságánál, megfigyelhetjük még két nevezetes pontját. Tudniillik 4 a felszállás és 2 a leszállás pontja; az elsőt Ω-al, a másikát ℧-al jelöljük. Égitesteink akkor állanak e két pontban, ha m magassági szögük annyi, mint nulla.

A mérnökre nézve még igen fontos sarkkörüli csillagnak a digressiója is. Ezzel biztosithatjuk a déllőnek legszabatosabb meghatározását még kisebb — azaz olcsóbb — theodolittal is. T. i. oly csillagnak körpályájához érintő magassági kört lehet fektetni, l. 91. ábrában ZPr derékszögü gömbháromszöget. Ép ily fekvésü állócsillagon két digressió figyelhető meg; a keleti és nyugati digressió, mely pillanatban a csillag a legnagyobb keleti és nyugati azimutszöget mutatja. Megfigyelése theodolittal rendkivül kényelmes, mert a csillag ekkor függőleges pókszálunkon nehány másodperczig vonul a látócsőben.

A Nap látszólagos mozgása.

Földünk kétféle mozgást végez. 1. Egyenlő sebességü fordulatokat végez saját forgástengelye körül, melyek a nap és éj szakadatlan egymásra való következését eredményezik. 2. Körüljárja Földünk évenkint egyszer a napot. E körútja következtében a Nap Földünket kerüli meg látszólag, és pedig ellenkező irányban, mint ezt Földünk végzi, tehát nyugatról dél felé, azaz Földünk tengelyfordultával egyazon irányban.

Földünk forgástengelye nem áll merőlegesen az ekliptika síkján, hanem ez amazzal $66\,^1/_2$ foknyi szöget képez, úgy hogy mm_2 ekliptika és a Föld $\varepsilon\varepsilon_2$ egyenlitője, l. 92. ábrát, $23\,^1/_2$ fokkal tér el egymástól. Ennek kifolyása Földünknek annyira változó megvilágitása, a négy évszak, úgy mint ezt 92. ábrában 1, 2, 3 és 4 pontban bemutattuk. Tudniillik ha Földünk 1 pontban áll, akkor van a tavasz kezdete márczius 21-én, ekkor mozog az N

pontban álló Nap látszólag EE_2 egyenlitőben Földünk tengelyforgása következtében. E pillanattól fogva felemelkedik a Nap folyton az északi félgömbre, azaz $+\delta$ szakadatlanul nagyobbodik. mig ez 2 pontban a legmagasabb bc egyenlőközüben látszik járni. Ez a nyári Napforduló, vagyis az északi félgömbön a nyár kezdete junius hó 21-én. A nyári Napfordulótól kisebbedik a Nap $+\delta$ declinatiója az ekliptika 3-al jelölt pontjáig, hol $\delta = 0^0$; azaz a Nap látszólag $\varepsilon\varepsilon_2$ egyenlitőben jár ismét, mikor az északi félgömbön az ősz kezdődik. Emez őszi pontba érkezik Földünk szeptember hó 21-én. Innen leszáll a Nap látszólag a déli félgömbre, azaz declinatiója (—) jelü lesz. Legnagyobb értékét az ekliptikának 4-el jelölt pontjában éri el; ekkor a Nap látszólag fg körben jár, az úgynevezett téli fordulóban, deczember hó 22-én; ekkor van a tél kezdete. A téli fordulótól kezdve kisebbedik a Nap (—) jelü declinatiója 1-el jelölt tavaszpontig, hol $\delta = 0$ fok.

A Napnak, a Holdnak, naprendszerünk többi bolygóinak, valamint a szabad szemmel látható állócsillagoknak az egyenlitőre viszonyitott rendszálait csillagászati naplókban találjuk, melyeket csillagászaink a tengerész és a földmérő szükségeinek megfelelően minden évre külön-külön kötetben adnak ki. E naplók sorából a „Berliner Astronomisches Jahrbuch“ az, mely minálunk leginkább használtatik. Minden berlini naplóban magyarázva van a rendszáljegyzék szerkezete, miért is további fejtegetéseinkben, valamint az ezekkel bemutatott számbeli példákban eme napló összrendezőit egyszerüen idézzük.

Itt legfeljebb azt kell még megjegyeznünk, hogy mind ez összrendezők ama időpillanatra értendők, mikor az égitest a berlini délllőben áll, tehát Berlinnek felső culminatiója pillanatára.

90. §. Megfigyelt adataink kiigazitása.

1. Kiigazitás a Nap látszólagos sugárhosszával.

A Napnak mindig középpontját kellene bemérni, de minthogy látszólagos átmérője igen nagy, évi átlaga 32 első szögpercz, igy középpontját csak tetemes becslési hibával lehetne megközeliteni. Ez a körülmény kényszerit bennünket arra, hogy megfigyelése alkalmával a Nap szélét látócsövünk egyik pókszálával érintessük. Magassági állásának meghatározása czéljából vagy a felső, vagy az alsó szélét érintetjük a vizszintes pókszállal, l. 93. ábrát. Azimutszögek vagy időmegfigyelésekre a függőleges pókszállal érintetjük a Nap keleti vagy nyugati szélét, l. 94. ábrát. Eljárásunk szükségessé teszi, hogy megfigyelésünk adatait a Nap látszólagos ρ sugárhosszával kiigazitsuk, azaz ρ hozzáadása vagy levonása által középpontjára térjünk át.

A csillagászati napló ismerteti a Napnak egyenlitői összrendezőit az évnek minden napjára. Ugyan itt találjuk a Napnak látszólagos ρ sugárhosszát is minden napi értékével felsorolva. Napi számértéke változik a szerint, a mint Földünk közelebb vagy távolabb áll a Naphoz.

ρ-nak évi minimuma	15′ 45″
„ „ maximuma	16′ 18″
ρ-nak évi átlaga	16′

vagy 960 szögmásodpercz. Megközelitő számitásoknál ezzel az értékkel is vehetjük.

2. A magassági szögnek kiigazitása a fénytörés okozta szögváltozással.

Mig égitestnek fénysugara látócsövünkbe érkezik, áthalad azon a légburkolaton is, mely Földünket körülveszi. E légrétegek sűrűsége nagyobbodik úgy, a mint közelebb és közelebb fekszenek Földünk felületéhez. Innen ered az, hogy a fénysugár emez útjában törést szenved álláspontunk függőlegese felé. Szóval a fénysugár nem egyenes, hanem görbevonalu úton érkezik hozzánk. A fénysugár emez irányváltozásának refractió a neve; irányváltoztató befolyását a 95. ábrával vázoltuk. Legyen F Földünknek B álláspontot és a megfigyelt X égitestet magában foglaló főmetszete, akkor ZB álláspontunk függőleges iránya, Bv vizszintes síkja. A fénysugár, mely X-től B-be érkezik, fel nem fogható látócsövünkkel a szakadozott vonallal kijelölt BX egyenes összekötő irányában, hanem csakis ama görbe vonalban, melynek BY az érintője, úgy hogy mi az égitestet Y-ban látjuk, holott ez X-ben áll. Ha tehát a megmért magassági szöget m-el jelöljük, M-el a valódi értékét, η-val a refractiót vagy a fénytörés okozta szögváltozást, akkor ábránk szerint:

[279] $$M = m - \eta$$

Szóval a refractió η szögértéke levonandó a megmért m magassági szögből, hogy valódi M értékét találjuk. A bányamérnök feladatait és a rendelkezésére álló műszereket tekintve, feleslegesnek tartjuk itt a fénytörés törvényeit mennyiségtanilag behatóbban ismertetni, a mennyiben méréseink kiigazitására a refractió középértékével tökéletesen megfelelhetünk.

I. A refractió középértéke.

m	0′	5′	10′	15′	20′	25′	30′	35′	40′	45′	50′	55′
°	′ ″	′ ″	′ ″	′ ″	′ ″	′ ″	′ ″	′ ″	′ ″	′ ″	′ ″	′ ″
0	34 54	33 51	32 49	31 50	30 52	29 57	29 3	28 12	27 23	26 35	25 50	25 6
1	24 25	23 45	23 7	22 30	21 56	21 23	20 51	20 21	19 52	19 24	18 58	18 33
2	18 7	17 45	17 23	17 1	16 41	16 20	16 1	15 42	15 23	15 5	14 48	14 31
3	14 15	13 59	13 44	13 29	13 15	13 1	12 48	12 36	12 24	12 12	12 1	11 50
4	11 39	11 28	11 18	11 8	10 59	10 49	10 40	10 30	10 21	10 12	10 3	9 55
5	9 47	9 39	9 31	9 23	9 16	9 9	9 2	8 55	8 48	8 54	8 36	8 29
6	8 23	8 17	8 12	8 6	8 0	7 55	7 49	7 44	7 39	7 34	7 29	7 24
7	7 20	7 15	7 11	7 6	7 2	6 57	6 53	6 49	6 45	6 42	6 37	6 33
8	6 30	6 26	6 22	6 18	6 15	6 12	6 8	6 5	6 2	5 59	5 55	5 52
9	5 49	5 46	5 43	5 40	5 38	5 35	5 32	5 29	5 26	5 24	5 21	5 19
10	5 16	5 14	5 11	5 9	5 6	5 4	5 2	4 59	4 57	4 55	4 53	4 51
11	4 49	4 46	4 44	4 42	4 40	4 38	4 36	4 34	4 32	4 30	4 29	4 27
12	4 25	4 23	4 21	4 20	4 18	4 16	4 15	4 13	4 11	4 10	4 8	4 7
13	4 5	4 3	4 2	4 0	3 59	3 57	3 56	3 54	3 53	3 52	3 50	3 49
14	3 47	3 46	3 45	3 43	3 42	3 41	3 39	3 38	3 37	3 36	3 35	3 33
15	8 32	3 31	3 80	3 29	3 27	3 26	3 25	3 24	3 23	3 22	8 21	3 20
16	3 19	3 18	3 16	3 15	3 14	3 13	3 12	3 11	3 10	3 9	3 8	3 7
17	3 7	3 6	3 5	3 4	3 3	3 2	3 1	3 0	2 59	2 58	2 57	2 57
18	2 56	2 55	2 54	2 53	2 52	2 52	2 51	2 50	2 49	2 48	2 48	2 47
19	2 46	2 45	2 45	2 44	2 43	2 42	2 42	2 41	2 40	2 39	2 39	2 38
20	2 37	2 37	2 36	2 35	2 35	2 34	2 33	2 33	2 32	2 31	2 31	2 30
21	2 29	2 29	2 28	2 27	2 27	2 26	2 26	2 25	2 24	2 24	2 23	2 22
22	2 22	2 21	2 21	2 20	2 20	2 19	2 18	2 18	2 17	2 17	2 16	2 16
23	2 15	2 15	2 14	3 14	2 13	2 13	2 12	2 11	2 11	2 10	2 10	2 9
24	2 9	2 8	2 8	2 7	2 7	2 7	2 6	2 6	2 5	2 5	2 4	2 4

m	0′	10′	20′	30′	40′	50′	m	0′	10′	20′	30′	40′	50′
°	′ ″	′ ″	′ ″	′ ″	′ ″	′ ″	°	′ ″	′ ″	′ ″	′ ″	′ ″	′ ″
25	2 3	2 2	2 1	2 0	2 0	1 59	40	1 9	1 8	1 8	1 8	1 7	1 7
26	1 58	1 57	1 56	1 55	1 54	1 54	41	1 6	1 6	1 6	1 5	1 5	1 4
27	1 53	1 52	1 51	1 50	1 50	1 49	42	1 4	1 4	1 3	1 3	1 3	1 2
28	1 48	1 47	1 47	1 46	1 45	1 45	43	1 2	1 1	1 1	1 1	1 0	1 0
29	1 44	1 43	1 42	1 42	1 41	1 40	44	1 0	59	59	59	58	58
30	1 40	1 39	1 38	1 38	1 37	1 36	45	58	57	57	57	56	56
31	1 36	1 35	1 35	1 34	1 33	1 33	46	56	55	55	55	54	54
32	1 32	1 32	1 31	1 30	1 30	1 29	47	54	54	54	53	53	52
33	1 29	1 28	1 27	1 27	1 26	1 26	48	52	52	51	51	51	50
34	1 25	1 25	1 24	1 24	1 23	1 23	49	50	50	50	49	49	49
35	1 22	1 22	1 21	1 21	1 20	1 20	50	48	48	48	48	47	47
36	1 19	1 19	1 18	1 18	1 17	1 17	51	47	46	46	46	46	45
37	1 16	1 16	1 16	1 15	1 15	1 14	52	45	45	45	44	44	44
38	1 14	1 13	1 13	1 12	1 12	1 12	53	43	43	43	43	42	42
39	1 11	1 11	1 10	1 10	1 10	1 9	54	42	42	41	41	41	41

m	0°	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°
°	″	″	″	″	″	″	″	″	″	″
50	48	47	45	43	42	40	39	37	36	35
60	33	32	31	29	28	27	26	25	23	22
70	21	20	19	18	17	15	14	13	12	11
80	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

A 386. oldali I. tábla a levegőnek + 9·3 Celsius-féle foknyi hőmérsékletére a légsúlymérőnek 751·5 *mm*-nyi állására van kiszámitva. Ha a levegő hőmérséklete más, akkor η refractió középértékét az alábbi II. táblából vett szögadattal kell változtatni, mig a III tábla a barometeri változások okozta kiigazitásokat foglalja magában.

II. A refractió kiigazitása, ha a hőmérséklet változott

Levegő hőm.	Megmért magassági szög																			
	0°	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°	10°	12°	15°	20°	25°	30°	40°	50°	60°	70°
C°	' "	' "	' "	' "	' "	"	'	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"
	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
− 10	4 31	2 39	1 45	1 17	1 0	48	40	35	30	27	24	20	16	12	9	7	5	4	2	1
− 9	4 16	2 30	1 40	1 13	56	46	38	33	28	35	23	19	15	11	8	7	5	3	2	1
− 8	4 2	2 22	1 34	1 8	55	43	36	31	27	24	21	18	14	10	8	6	4	3	2	1
− 7	3 47	2 13	1 28	1 4	50	40	34	29	25	22	20	17	13	10	8	6	4	3	2	1
− 6	3 32	2 4	1 22	1 0	47	38	32	27	23	21	19	16	12	9	7	6	4	3	2	1
	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
− 5	3 17	1 55	1 17	56	43	35	29	25	22	19	17	14	11	9	7	5	4	3	2	1
− 4	3 2	1 47	1 11	52	40	33	27	23	20	18	16	13	11	8	6	5	3	2	2	1
− 3	2 48	1 39	1 5	48	37	30	25	21	19	17	15	12	10	7	6	4	3	2	2	1
− 2	2 33	1 30	1 0	44	34	27	23	20	17	15	14	11	9	7	5	4	3	2	1	1
− 1	2 19	1 22	54	39	31	25	21	18	15	14	12	10	8	6	5	4	3	2	1	1
	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
0	2 4	1 13	49	35	28	22	19	16	14	12	11	9	7	6	4	3	2	2	1	1
+ 1	1 51	1 5	43	32	25	20	17	14	12	11	10	8	6	5	4	3	2	2	1	1
+ 2	1 37	57	38	28	22	17	16	12	11	10	9	7	6	4	3	3	2	1	1	0
+ 3	1 23	49	33	24	18	15	14	11	9	8	7	6	5	4	3	2	2	1	1	0
+ 4	1 10	41	27	20	15	13	11	9	8	7	6	5	4	3	2	2	1	1	1	0
	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
+ 5	56	33	22	16	12	10	8	7	6	6	5	4	3	2	2	1	1	1	0	0
+ 6	43	25	17	12	10	8	6	6	5	4	4	3	2	2	1	1	1	1	0	0
+ 7	30	18	12	9	7	5	5	4	3	3	3	2	2	1	1	1	1	0	0	0
+ 8	17	10	7	5	4	3	3	2	2	2	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0
+ 9	4	2	2	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
+ 10	9	5	3	3	2	2	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
+ 11	21	13	8	6	5	4	3	3	3	2	2	2	1	1	1	1	0	0	0	0
+ 12	34	20	13	10	8	6	5	4	4	3	3	3	2	1	1	1	1	0	0	0
+ 13	46	27	18	13	10	9	7	6	5	5	4	4	3	2	2	1	1	1	0	0
+ 14	58	35	23	17	13	11	9	8	7	6	5	4	4	2	2	2	1	1	0	0
	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
+ 15	1 10	42	28	20	16	13	11	9	8	7	7	5	4	3	2	2	1	1	1	0
+ 16	1 23	49	33	24	19	15	13	11	10	8	8	6	5	4	3	2	1	1	1	0
+ 17	1 34	56	37	27	21	17	14	12	11	10	9	7	6	4	3	3	2	1	1	1
+ 18	1 46	1 3	42	31	24	20	16	14	12	11	10	8	6	5	4	3	2	1	1	1
+ 19	1 58	1 10	47	34	27	22	18	16	14	12	11	9	7	5	4	3	2	1	1	1
	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
+ 20	2 10	1 17	52	38	29	24	20	17	15	13	12	10	8	6	4	4	2	2	1	1
+ 21	2 21	1 24	56	41	32	26	22	19	17	14	13	11	9	6	5	4	3	2	1	1
+ 22	2 32	1 31	1 1	44	35	28	23	20	18	16	14	12	9	7	5	4	3	2	1	1
+ 23	2 44	1 38	1 5	48	37	30	25	22	19	17	15	12	10	7	6	5	3	2	1	1
+ 24	2 55	1 44	1 10	51	40	32	27	23	20	18	16	13	11	8	6	5	3	2	2	1
	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
+ 25	3 6	1 51	1 14	54	42	34	29	25	22	19	17	14	11	8	6	5	4	2	2	1
+ 26	3 17	1 58	1 19	58	45	36	30	26	23	20	18	15	12	9	7	6	4	3	2	1
+ 27	3 28	2 4	1 23	1 1	47	38	32	28	24	21	19	16	13	9	7	6	4	3	2	1
+ 28	3 38	2 10	1 27	1 4	50	40	34	29	26	23	20	17	13	10	8	6	4	3	2	1
+ 29	3 49	2 17	1 32	1 7	52	43	36	31	27	24	21	18	14	10	8	6	4	3	2	1
	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
+ 30	4 0	2 24	1 36	1 10	55	45	37	32	28	25	22	18	15	11	8	7	5	3	2	1
+ 31	4 10	2 30	1 40	1 13	57	47	39	33	29	26	23	19	15	11	9	7	5	3	2	1
+ 32	4 21	2 36	1 45	1 17	1 0	49	41	35	31	27	24	20	16	12	9	7	5	4	2	2
+ 33	4 31	2 42	1 49	1 20	1 2	51	42	36	32	28	25	21	17	12	10	8	5	4	2	2
+ 34	4 41	2 48	1 53	1 23	1 5	52	44	38	33	29	26	22	17	13	10	8	5	4	3	2
+ 35	4 52	2 55	1 57	1 26	1 7	54	46	39	34	30	27	23	18	13	10	8	6	4	3	1
	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

III. *A refractió kiigazitása, ha a légsúlya változott.*

Bar.	Megmért magassági szög																		
	0°	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°	10°	12°	15°	20°	30°	40°	50°	60°	70°
mm	′ ″	′ ″	′ ″	′ ″	″	″	″	″	″	″	″	″	″	″	″	″	″	″	″
	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
780	1 27	56	43	33	27	22	19	17	15	13	12	10	8	6	4	8	2	1	1
778	1 21	55	41	31	25	21	18	16	14	12	11	9	7	5	3	2	1	1	1
776	1 15	51	37	28	23	19	17	14	13	11	10	9	7	5	3	2	1	1	1
774	1 9	47	34	26	21	18	15	13	12	10	9	8	6	5	3	2	1	1	1
772	1 3	42	31	24	19	16	14	12	11	9	9	7	6	4	3	2	1	1	1
	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
770	57	38	28	21	17	15	12	11	10	9	8	6	5	5	2	2	1	1	1
768	51	34	25	19	16	13	11	10	9	8	7	6	5	3	2	1	1	1	0
766	45	30	22	17	14	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	1	1	0
764	39	26	19	14	12	10	8	7	7	6	5	4	3	2	2	1	1	1	0
762	32	22	16	12	10	8	7	6	6	5	4	4	3	2	1	1	1	0	0
	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
760	26	18	13	10	8	7	6	5	4	4	4	3	2	2	1	1	1	0	0
758	20	13	10	7	6	5	4	4	3	3	3	2	2	2	1	0	0	0	0
756	14	9	7	5	4	4	3	3	2	2	2	2	1	1	1	0	0	0	0
754	8	5	4	3	2	2	2	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
752	2	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−
750	5	3	2	2	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
748	11	7	5	4	3	3	2	2	2	2	1	1	1	1	0	0	0	0	0
746	17	11	8	6	5	4	4	3	3	3	2	2	2	1	1	0	0	0	0
744	23	15	11	9	7	6	5	4	4	3	3	3	2	2	1	1	0	0	0
742	29	20	14	11	9	7	6	6	5	4	4	3	3	2	1	1	1	0	0
	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−
740	35	24	17	13	11	9	8	7	6	5	5	4	3	2	2	1	1	0	0
738	42	28	20	16	13	11	9	8	7	6	6	5	4	3	2	1	1	1	0
736	48	32	23	18	15	12	10	9	8	7	7	5	4	3	2	1	1	1	0
634	54	36	26	20	17	14	12	10	9	8	7	6	5	4	2	2	1	1	0
732	1 0	40	29	23	19	15	13	12	10	9	8	7	5	4	3	2	1	1	0
	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−
730	1 6	44	32	25	20	17	14	13	11	10	9	8	6	4	3	2	1	1	1
728	1 12	48	35	27	22	19	16	14	12	11	10	8	7	5	3	2	1	1	1
726	1 18	53	38	30	24	20	17	15	13	12	11	9	7	5	3	2	2	1	1
724	1 25	57	41	32	26	22	19	16	14	13	12	10	8	6	4	2	2	1	1
722	1 31	1 1	44	34	28	23	20	17	15	14	12	10	8	6	4	3	2	1	1
	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−
720	1 37	1 5	47	37	30	25	21	19	16	15	13	11	9	7	4	3	2	1	1
718	1 43	1 9	50	39	32	26	23	20	17	16	14	12	9	7	4	3	2	1	1
716	1 49	1 13	53	41	34	28	24	21	18	17	15	12	10	7	5	3	2	2	1
714	1 55	1 17	56	44	36	30	25	22	20	18	16	13	11	8	5	3	2	2	1
712	2 1	1 21	59	46	37	31	27	23	21	18	17	14	11	8	5	4	3	2	1
	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−
710	2 7	1 25	1 2	48	39	33	28	24	22	19	18	15	12	9	5	4	3	2	1
108	2 14	1 30	1 5	51	41	34	29	26	23	20	18	15	12	9	6	4	3	2	1
706	2 20	1 34	1 8	53	43	36	31	27	24	21	19	16	13	9	6	4	3	2	1
704	2 26	1 38	1 11	55	45	38	32	28	25	22	20	17	13	10	6	4	3	2	1
702	2 32	1 42	1 14	58	47	39	33	29	26	23	21	17	14	10	7	4	3	2	1
	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−
700	2 38	1 46	1 17	1 0	49	41	35	30	27	24	22	18	14	11	7	5	3	2	1
698	2 44	1 50	1 20	1 2	51	42	36	31	28	25	23	19	15	11	7	5	3	2	1
696	2 50	1 54	1 23	1 5	52	44	37	33	29	26	23	20	16	12	7	5	3	2	1
694	2 56	1 58	1 26	1 7	54	45	39	34	30	27	24	20	16	12	8	5	4	2	2
692	3 8	2 2	1 29	1 9	56	47	40	35	31	28	25	21	17	12	8	5	4	3	2
690	3 2	2 6	1 32	1 11	58	49	41	36	32	29	26	22	17	13	8	6	4	3	2
	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−

Példa. $m = 3^0\,19'\,30''$ a megfigyelt magassági szög, $b =$ $= 716$ *mm* a barometer állása, $t = +\,22\ C^0$, akkor a fénytörés okozta szögváltozást igy találjuk:

Az I. tábla nyomán $\eta =$ 1′ 18″
II. tábla szerint a kiigazitás — 4″
III. „ „ „ — 5″
A kiigazitott $\eta =$ 1′ 9″

Ezzel a kiigazitott magassági szög [279] egyenlet szerint:

$$M = (36^0 + 19' + 30'') - (1' + 9'')$$

$$M = 36^0\ 18'\ 21''$$

A bemutatott példából tapasztalható egyszersmind az is, hogy a refractiónak utóbbi kiigazitása oly esetben el is maradhat, hol műszerünk magassági köre a magassági szöget legalább 10″-ig pontosan le nem olvastatja.

3. A megfigyelt magassági szögnek a kiigazitása az úgynevezett magassági látóköz miatt.

Ha bolygónak vagy a Napnak magassági szögét megfigyeltük, ki kell ezt még igazitani, hogy ama értékre hozzuk, mely ezt tengelyrendszerünk kezdőpontjára viszonyitja, azaz mely a Föld középpontjában tett megfigyelésnek megfelel.

Legyen a 96. ábrában F Földünknek oly főmetszete, mely B álláspontot és a megfigyelt X égitestet magában zárja; m a megfigyelt magassági szög, β pedig ama magassági szög, mely X égitestnek Földünk C középpontjában megfelelne. Ha C pontban egyenlőközü vonalat húzunk BX-hez, akkor XCn szög annyi, mint BCX szög, vagyis az az X szög, mely Földünk BC sugárhosszának megfelelne, ha ezt X égitestből megtekinthetnők. E szög neveztetik az égitest magassági látóközének — magassági parallaxisának. Ezt az X-el jelölt szöget kell a megfigyelt m magassági szöghez adni, hogy emezt a Föld középpontjában megfelelő β értékével találjuk.

$$\beta = m + X$$

A Nap magassági X parallaxisát a megfigyelt m magassági szöggel másodperczekben kifejezve, igy találjuk:

[280] $$X = 8{\cdot}9''\cos m$$

Ezekkel következik az alábbi tábla.

A Nap magassági parallaxisa.

Fok M	0°	10°	20°	30°	40°	45°	50°	55°	60°	65°
X''	9	9	8·5	7·7	6·8	6·3	5·7	5·1	4·4	3·7

A Napon megfigyelt m magassági szögnek teljesen kiigazitott M értékét ezek nyomán igy kell kiszámitani:

[281] $$M = m \pm \rho'' - \eta'' + X''$$

A Nap látszólagos ρ sugara (+) vagy (—) előjellel veendő, a mint alsó vagy felső szélét érintettük látócsövünk vizszintes pókszálával.

Állócsillagaink távolsága mitőlünk oly nagy, hogy azokra $X = 0$. Onnan van, hogy állócsillagnak megfigyelt magassági m szögét csak a refractióval kell kiigazitani, azaz helyesen:

[282] $$M = m - \eta''$$

91. §. Időmérték.

Földünk egyenlő sebességü tengelyforgása, mely az állócsillagokon megfigyelhető, az időnek legtermészetesebb s legegyszerűbb mérését biztositja. Az időt háromféleképen számitjuk: tudniillik csillagidő szerint, a valódi napidő szerint és a polgári életben a középidő szerint.

Az az idő, mely egyazon állócsillagnak két egymásra következő felső culminatiója között lefoly, egy nap csillagidőben vagy egy csillagnap. A csillagnapot 24 egyenlő részre osztjuk, ezek órák csillagidőben; az órát továbbá 60 perczczel, a perczet 60 másodperczczel számitjuk.

Polgári életünkben az időt a Nap culminatiói után számitjuk. Azt az időszakot nevezzük valódi napnak, mely a Napnak két egymásra megfigyelhető felső culminatiója között folyt le. A nap kezdőpillanata a felső culminatiónak pillanata.

Ekkor van nulla-óra valódi napidő szerint. Más időpillanatban a valódi nap után számitott idő, a napnak időmértékben kifejezett τ időszögével egyenlő, l. 87. ábra ZPX háromszögében τ időszöget.

Földünknek a 88. §-ban ismertetett kettős mozgása folytán a Nap látszólagos mozgása annyira változó, hogy nem lehetne órát késziteni, mely valódi napidőt mindig helyesen mutatna. Innen van, hogy az időt a polgári életben egy képzelt Nap után számitjuk, melyet az egyenlitőbe helyezvén, egyenlő sebességgel körbe járatunk. Az ily módon számitott időt nevezzük középidőnek. A középidő a valódi napidővel évente csak négyszer esik össze; tudniillik április 15, junius 14, augusztus 31 és deczember 23-án. E két időszámitás további különbsége az, hogy a polgári-vagy középnapot e képzelt Nap alsó culminatiójától kétszer 12 órával számitjuk; mig ellenben a valódi napidő a Nap tényleges felső culminatiójának pillanatától szakadatlanul 24 órával vétetik számitásba. Ezekből beláthatjuk, hogy a csillagidő szerinti számitás a legegyszerűbb. Szerinte valamely földi pontban 2 vagy 3 óra csillagidő van, mikor Földünk más pontjában nulla-órát számitunk, ha az utóbbi pont déllőjének 2 vagy 3 óra csillagidővel nyugatibb fekvése, mint az előbbi ponté. A csillagidő szerinti számitás igen alkalmas csillagászati megfigyelések összehasonlitására, de a polgári életben nem felelne meg, a mennyiben a csillagidő szerinti dél naponta más-más napi időszakra esnék. Például junius 21-én déli 12 óra csillagidő estéli 6 órára esik; szeptember 21-én a csillagidő szerinti dél éjfélre esik; elvégre deczember 22-én reggeli 6 órára, még pedig a jövő nap keltére.

Időszámitásunk kezdőpillanata az a pillanat, melyben a Nap a tavasz kezdetén az egyenlitőt átkeli. A csillagászati év az az időszak, mely lefoly, mig a valódi Nap a tavaszpontból kiindulva, ismét oda visszatér. Ez időszakban megfigyelhetünk minden állócsillagon 366·24222 felső culminatiót, vagy röviden ennyi csillagnapot; holott a Napon ez időszakban csak 365·24222 felső culminatiót észlelhetünk. Utóbbi időszámitás szerint egy tengelyfordulat látszólag elvész. E tünemény onnan áll elő, hogy Földünk ezen időszakban a Napot egyszer körüljárja, még pedig Földünk tengelyforgásával egyazon irányban, mi módon egy tengelyfordulatot felfejt, mely tengelyfordulat a körül nem futott állócsillagokon megfigyelhető.

Ez adatok nyomán a csillagászati év 365 napot, 5 órát, 48 perczet és 47·8091 másodperczet valódi napidőben számlál. Ha továbbá J_{cs} a csillagidő, J_n a napidő jelzője, akkor eme két időszámitás aránya a fönnebbi culminatiók számával:

$$\frac{J_{cs}}{J_n} = \frac{365{\cdot}24222}{366{\cdot}24222}$$

Innen következik:

$$[283] \quad \begin{cases} 1 \text{ közönséges nap} = 1{\cdot}0027379 \text{ csillagnap} \\ 1 \text{ köz. nap} = 24 \text{ óra} + (3 \text{ p.} + 56{\cdot}555 \text{ mp.})\, J_{cs} \end{cases}$$

$$[284] \quad \begin{cases} 1 \text{ cs.-nap} = 24 \text{ óra} - (3 \text{ p.} + 56{\cdot}909 \text{ mp.}) \text{ köz. nap} \\ 1 \text{ cs.-nap} = 23 \text{ óra} + 56 \text{ p.} + 4{\cdot}091 \text{ mp. köz. nap} \end{cases}$$

Azaz, ha megközelitve beszélünk, mondhatjuk, hogy a csillagnap 3 percz + 57 másodpercz, tehát majdnem 4 első időperczczel rövidebb, mint a középnap.

Alkalmazás. A [283] és [284] egyenlet akkor szükséges, ha az égitünemény megfigyelésének a pillanata csillagidőben ismeretes és mi ezt középidőben akarjuk tudni, vagy viszont.

Ki középidőt találjuk ezek alapján, ha a t órával kifejezett időből 9·825 t másodperczet levonunk, tehát igy:

[285] $$Ki = t - 9{\cdot}825\, t \text{ másodpercz.}$$

Valamely állócsillag culminálásának a pillanata ismeretes 6 óra, 19 percz, 17 másodpercz csillagidővel, mennyi ez középidőben?

A csillagidő-órákban $t = 6{\cdot}321 = 6$ óra 19 p., 17 mp.

6·321 × 9·825 = 62·1 mp. levonandó 1 p., 2·1 mp.,

Középidő = 6 óra, 18 p., 14·9 mp.

Ha a középidő t órával van adva, akkor *ci* csillagidő igy fejezhető ki:

[286] $$ci = t + 9{\cdot}856\, t \text{ másodpercz.}$$

Fönnebbi példára alkalmazva:

$t = 6{\cdot}304$ óra	6	18	14·9
6·304 × 9·856 = 62·08 hozzáadandó		1	2·1
Csillagidőben =	6	19	17

A valódi és a középnap közötti viszony.

A valódi nap kezdőpillanata a Napnak tényleges felső culminátiója. Jelölésére a csillagászati naplókban W_t használjuk. A középidő szerinti dél az a pillanat, melyben a helyesen járó óra 12 órát mutat. A középidőt M_t-vel jelöljük. E két időszámitás négyszer esik össze egy évben; legnagyobb eltérésük ± 16 időpercz, és pedig február és november közepe táján. E két időszámitásnak naponkénti különbzete időegyenleg (Zeitgleichung) nevezeten van a csillagászati naplóban bejegyezve. Jelölésére $\pm g$ használunk. A mennyiségtani összefüggés ez:

[287] $$\pm g = M_t - W_t$$

Innen:

[288] $$M_t = W_t \pm g$$

A [286] egyenlet nyomán találjuk valamely napon a megfigyelt Napnak culminátiópillanatját középidőben kifejezve, ha 12 órához g időegyenleget ama előjellel és számértékkel adjuk, melylyel a csillagászati naplóban megfigyelésünk napjára bejegyezve találtuk. Ugyancsak [286]-ból következik:

[289] $$W_t = M_t - (\pm g)$$

[287] egyenlet szerint kiszámithatjuk a megfigyelésnek középidőben feljegyzett M_t idejéből ennek W_t valódi napidejét, ha a naplóból vett g időegyenleget az ott feljegyezett előjelével együtt levonásba hozzuk.

92. §. Időhatározások.

Minden megfigyelésünk jó órát követel. Legczélszerübb a zseb-chronometer, melynek ketyegése fél másodperczeket jelez, melyek kényelmesen számlálhatók a megfigyelés foganatositása közben is, úgy hogy megfigyelésünk pillanatát fél másodperczig biztosan ismerjük. Ily chronometer hiányában megelégszünk egyenletes járásu zsebórával is, ha másodperczes mutatója van, és ha ezt helyes járására hosszabb időszakon át megvizsgáltuk. Hátránya a közönséges zsebórának, hogy minden másodperczben négyet sőt ötöt is kettyen, mit megfigyelés közben megszámlálni nem lehet. Igy a másodperczeket közvetetlenül le kell olvasni, midőn megfigyelésünk a látócsőben véget ért. Szemünk ekkor rendszerint kevéssé fáradt, onnan van, hogy az órát ha rátekintünk, nem látjuk azonnal. A leolvasott idő ez okból fél, sőt teljes másodperczczel is hibás lehet; kivéve ha segéd olvassa le az időt.

Óráink vizsgálására, nevezetesen a helyi időnek pontos meghatározására megfigyelhetjük a Napot vagy valamely álló csillagot is; ezeket megfigyelhetjük a déllőben, ha culminálnak, vagy a déllőn kivül is, tehát bármily magassági körben. A culminátió biztositja az időnek legegyszerübb meghatározását.

93. §. Időhatározás a Nap megfigyelt culminátiója után.

A theodolitot felállitjuk szilárd állványra, esetleg déllőoszlopra, hol szabályszerü elhelyezése után látócsövének irányzó síkját álláspontunk déllőjébe hozzuk. Itt megkötjük limbustengelyét, a műszer oculárlencséje elé még rendszerint üvegprizmát szoktunk tenni, hogy a megfigyelést kényelmes testtartással megejthessük. Ez üvegprizma elé tesszük végtére a sötétitő üveget, ujabban turmalinlemezkét, hogy a Nap szemünket erősen ne sértse.

A látócsőben megfigyeljük ekkor a Napnak nyugati és keleti érintkezését a függőleges ab pókszállal, l. 1 és 2 a 97. ábrában. A Nap átmenete az ábrában kijelölt nyil irányában látható, mert látócsöveink a képet forditva mutatják. Mind a két érintés pillanatában leolvassuk a megvizsgálandó órán az időt. Legyen ez t_1 és t_2; ekkor találtatik a culminátiónak T ideje, vagyis ez az idő, mikor a Nap középpontja állott a délllőben, így:

[290] $$T = \frac{t_1 + t_2}{2}$$

Folytatólag kikeressük a csillagászati naplóból g időegyenleget, mely megfigyelésünk napján érvényes.

Óránk jól jár, ha:

[291] $$T = 12 + g\text{-vel}$$

késik vagy siet, ha kisebb vagy nagyobb $12 + g$-nél.

Időmeghatározásainkat fokozhatjuk, ha műszerünk oculárcsövét a rendes pókszálon kivül még több függőleges pókszállal felszereltetjük; azaz a középső függőleges pókszálnak jobb- és baloldalán kifeszittetünk rendszerint még két vagy három függőleges pókszálat. Igy összesen öt, esetleg hét függőleges pókszálon lehet a Napnak belső és külső érintését megfigyelni. E pókszálak kölcsönös távolságát két-két időperczre szoktuk szabni. A culminátió pillanatát ekkor 10—14 megfigyelésből számitjuk ki, és minthogy a megfigyeléseknek egyik része nagyitó, második része kisebbitő hibával van megterhelve, így számtani közepesükben e hibák legnagyobb része megsemmisül, felmaradó részüket pedig osztás által szállitjuk le.

94. §. Időhatározás a déllőn kivül megfigyelt Nap segitségével.

Ha álláspontunk déllőjét még nem ismerjük, vagy akkor is, ha az órát csak reggel, esetleg este vizsgálhatjuk, megfigyeljük a Nap m magassági állását bármely magassági körben és feljegyezzük t időt, melyet óránk mutatott a megfigyelés pillanatában.

Ha ugyanekkor még a theodolit limbusköreit is leolvassuk, igy képesek vagyunk a megfigyelt adatokkal a déllőt is meghatározni; azaz álláspontunknak egyik kijelölt és bemért oldalának α azimutszögét is kiszámitani.

Megfigyelésünket bemutattuk az utolsó esetben 98. ábrával. Z a theodolit álláspontja, ZC valamely kijelölt iránya, pl. mely Z pontból C templomtoronynak vezet. ED a delelő vonalnak északi és déli vége. N a megirányzott Nap, melynek keleti szélét érintettük látócsövünk függőleges pókszálával.

Ily esetben megirányozzuk az állandósitott C pontot és leolvassuk műszerünk helyzetét O_1-el a limbuskörön. Folytatólag a Napot figyeljük még. Ily czélból érintetjük a Nap egyik szélét a vizszintes, másikát a függőleges pókszállal. Ezt úgy biztositjuk, hogy a Nap tárcsáját a látócsőben pókszálainkkal a 99. ábrában 1-el bemutatott módon beállitjuk, feltéve, hogy ez látócsövünkben a és b nyil irányában mozog. Ekkor szakadatlan érintésben tartjuk a Nap tárcsáját a függőleges pókszállal az alhidáda tengely óvatos forgatása mellett, s ezt addig folytatjuk, míg a Nap anynyira föl nem emelkedik, hogy a vizszintes pókszál is érintésbe lépett; l. úgy mint 99. ábra 2. szerint.

E pillanatban leolvassuk óránkon t az időt, először a másodperczeket, utána a perczeket és órákat. Ha feljegyeztük, leolvassuk m a magassági szöget, végtére pedig GZ irányzatnak O_2 fekvését a limbuskörön olvassuk le.

A megfigyelt adatokkal kiszámitjuk ezután az időt és ZN irányzatnak α_2^N azimutszögét a 87. ábra XZP gömb háromszögéből. Tudniillik a 100. ábra gömb háromszögéből következik A és B szög a 26. egyenletcsoport tételeivel így:

$$\operatorname{tang}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s \sin(s-a)}}$$

$$\operatorname{tang}\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-c)}{\sin s \sin(s-b)}}$$

A 87. és 100. ábrák összehasonlitása nyomán következik: $B = \tau$ megfigyelésünk időszöge; $A = 180 - \alpha_N^Z$ mint ZN irányzatnak azimutszöge; $a = 90 - \delta$; $b = 90 - m$ és $c = 90 - \varphi = \psi$. Ha továbbá $S = \frac{\psi + \delta + m}{2}$ jelölünk és ezzel $s = \frac{a+b+c}{2}$ valamint $s-a$, $s-b$ és $s-c$ tényezőket kifejezünk, akkor $(+)$ jelü δ-át feltételezve, egyenleteink ezt az alakot nyerik:

$$[292] \qquad \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\cos S \sin(S-\delta)}{\cos(S-\psi)\sin(S-m)}}$$

$$[293] \qquad \operatorname{tang}\frac{\tau}{2} = \sqrt{\frac{\cos S \sin(S-m)}{\cos(S-\psi)\sin(S-\delta)}}$$

Ha a megfigyelést a téli félévben tettük, akkor δ-át $(-)$ előjellel kell eme egyenletekbe helyettesiteni.

Alkalmazását számpéldában ismertetjük.

Déllő- és időhatározás 1893. évi május hó 27-én délután Kisiblyén a háromszöghálónak B pontjában. Legelőször bemértük a hávomszöghálónak AB oldalát; a limbuskör leolvasása adott ekkor $O_1 = 0^0\, 0'\, 0''$, mert igy be lett állitva.

A Nap megfigyelése adott a használt zsebórán $t = 5$ óra, 42 percz, 44 másodpercz délután; ez megfigyelésünk idejének pillanata.

Utána leolvastuk a magassági körön a Nap felső szélének megfigyelt magasságát $m_1 = 18^0\, 26'\, 20''$. Végül leolvastuk a limbuskört, midőn függőleges pókszálunk a Nap keleti szélét érintette: $O_2 = 185^0\, 59'\, 16''$.

A magassági szög kiigazitása [281] egyenlet szerint.

A megmért szög:	$m =$	$18^0\, 26'\, 20''$
A csillagászati naplóból:	$\rho = -$	$15'\, 48''$
A refractió csakis 1 tábla szerint:	$\eta = -$	$2'\, 52''$
		$18^0\, 06'\, 40''$
A Nap parallaxisa	$X = +$	$8''$
Kiigazitott magassági szög	$m =$	$18^0\ 7'\, 48''$

A Nap declinátiója megfigyelésünk pillanatában.

A csillagászati naplóból találtuk a Nap declinátióját a berlini délkörben $\delta_{27} = +21^0\, 21'\, 48''$, május 28-án $\delta_{28} = +21^0\, 32'\, 29''$, különbzet $9'\, 41'' = 581''$ a változás 24 óra alatt. Innen változása $O\delta$ óránként $581 : 24 = 24{\cdot}208''$ $p\delta$, perczenként $24{\cdot}208 : 60 =$ $= 0{\cdot}4034''$. Megfigyelésünk pillanata valódi napidőben [289] egyenlet szerint:

	$t =$	5 óra, 42 p., 44 mp.,
a naplóból	$-(-g) = +$	3 p., 3 mp.
		5 óra, 45 p., 47 mp.

azaz 5 óra, 45·78 percz.

A declinátió változott eme számok szerint:

5 óra alatt	$24{\cdot}208 \times 5$	$= 121{\cdot}04$
45·78 percz alatt	$0{\cdot}4034 \times 45{\cdot}78$	$= 18{\cdot}47$
	Összesen	$139{\cdot}5'' = 2'\, 19{\cdot}5''$

A declinátió volt május 27-én, mikor a Nap a berlini déllőn állott: $21^0\ 22'\ 48{\cdot}1''$

A selmeczi déllő 22·1 perczczel keletnek fekszik Berlintől, ez okból a Nap declinátiója Selmeczen kisebb $22{\cdot}1 \times 0{\cdot}4034 = -$ $8{\cdot}9''$

δ a selmeczi déllőben: $21^0\ 22'\ 39{\cdot}2''$

δ változása a megfigyelésig $+$ $2'\ 19{\cdot}5''$

δ a megfigyelés pillanatában: $\delta = 21^0\ 24'\ 58{\cdot}7''$

Kisiblyének földrajzi szélességét tábornoki földabroszból mértük le.

$$\varphi = 48^0\ 27'\ 34, \text{ innen } \psi = 90 - \varphi$$

Számitásunk adatai ezek:

$$\begin{aligned}
\psi &= 41^0\ 32'\ 36''\\
\delta &= 21^0\ 24'\ 59''\\
m &= 18^0\ \ 7'\ 48''\\
\hline
2S &= 81^0\ \ 5'\ 23''\\
S &= 40^0\ 31'\ 41{\cdot}5''\\
S-\psi &= -\ 0^0\ 59'\ 54{\cdot}5''\\
S-\delta &= 19^0\ \ 7'\ 42{\cdot}5''\\
S-m &= 22^0\ 24'\ 53{\cdot}5''
\end{aligned}$$

Az időszög számitása [292] egyenlet szerint.

Logarithmus:

$$\begin{array}{rlrl}
\cos S = & 9{\cdot}88072 & \sin(S-m) = & 9{\cdot}58101\\
& 33 & & 266\\
\hline
& 9{\cdot}880752 & & 9{\cdot}581276\\
\cos(S-\psi) = & 9{\cdot}99993 & \sin(S-\delta) = & 9{\cdot}51520\\
\hline
& 9{\cdot}880823 & & 20\\
\hline
& +\,0{\cdot}065876 & & 0{\cdot}065876\\
& (1{\cdot}946699 - 2) : 2 & &\\
\tan\frac{\tau}{2} = & 9{\cdot}973349 & &\\
& 20 & &\\
\hline
& 14{\cdot}9 & &
\end{array}$$

A szögre áttérve:

$$\frac{\tau}{2} = 43^0\ 14'\ 36''$$

$$\tau = 86^0\ 29'\ 12''$$

Ha ezt 15-el elosztjuk, találjuk időben kifejezett értékét

$$t = 5 \text{ óra } 45 \text{ p. } 57 \text{ mp.}$$

A használt óra mutatott valódi napidőben 5 óra 45 p. 47 mp.

A használt óra késik 10 mp.

Ha folytatólag a délllő számitása czéljából ugyanezt a megfigyelést használjuk, el is hanyagolható óránknak eme hibája. Mert 10 másodpercz = 0·16 percz időre változik a Nap declinátiója 0·16 × 0·4034 = 0·1″-el. Csak 1″-nél nagyobb változást kell δ-ban először kiigazitani, mielőtt α-át számitanánk.

A délllő számitása [293] egyenlet szerint.

Ez esetben már csak az előbbi logarithmusokkal talált két főösszeget kell egymásból levonni. Tudniillik:

$$\begin{array}{r} 9\cdot880823 \\ 0\cdot065876 \\ \hline \log \operatorname{cotg} \frac{{}^{2}\alpha}{2} = 9\cdot814947 \end{array}$$

Innen gyökvonás által:

$$\log \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2} = 9\cdot907473$$

A felkeresett szög:

$$\frac{\alpha}{2} = 51^{0}\ 3'\ 28''$$

Teljes értéke:

$$\alpha_z^n = 102^{0}\ 6'\ 56''$$

A 98. ábra szerint:

$$\alpha_z^n + 180 = \rho + O_2 - O + \alpha_z^c$$

Innen:

$$\alpha_z^c = \alpha_z^n + 180 - (\rho + O_2 - O_1)$$

Számokban:

$$\begin{aligned} \alpha_z^n &= 102^{0}\ \ 6'\ 56'' \\ 180 &= 180^{0} \\ \text{Összeg} &= 282^{0}\ \ 6'\ 56'' \\ O_2 - O_1 &= 185^{0}\ 59'\ 15'' \\ \rho &= \qquad 15'\ 48'' \\ \alpha_z^c &= \ \ 95^{0}\ 51'\ 53'' \end{aligned}$$

Ezzel a délllő *BA* oldal segitségével bármikor kijelölhető.

Jegyzet. Eredményünk pontossága a magassági szögnek helyes értékétől függ. A legjobb eredmény tehát úgy biztositható, ha a napot abban a magassági körben mérjük be, melyben magassági szöge a leggyorsabban változik. Változásának maximuma az első magassági körben áll elő.

Szóval, ha a Napot közel az első magassági körhöz theodolittal bemérjük, melynek magassági köre legalább 10″ szögmásodperczig biztosan leolvasható, akkor időhatározásaink egy időmásodperczig, déllő határozásaink 20 szögmásodperczig ütik meg a valóságot.

95. §. Időszámitás állócsillagok megfigyelése czéljából.

A bányamérnök csillagászati megfigyeléseit csakis a leglevő bányatheodolittal végzi. E műszerek tárgylencséje alig nagyobb 25—30 *mm* átmérőnél. A felfogott sugárkéve ily látócsővel oly csekély, hogy 4 rangú csillag nem látható, ha látócsövünk pókszálát kellően megvilágitjuk. Onnan van, ha megfigyeléseinkre elsőrangú csillagot nem választhatunk, legalább másodrangú, esetleg 2·5 rangút választunk. A harmadrangú már nehezen figyelhető meg; igen fárasztó a szemre nézve. Ez a körülmény, valamint az is, hogy megfigyeléseinket a tervezett időben foganatosithassuk teszik szükségessé, hogy a megfigyelendő csillagot már nappal a csillagászati naplóból kiválasztjuk. Szóval, ki kell számitanunk e tekintetbe vett csillagok culminátiói vagy digressiói pillanatait és csak ha ezek munkatervünkbe illenek, választjuk a csillagot megfigyeléseink tárgyává.

Az állócsillag culminátió-ideje.

A csillagnap tartama közel négy időperczczel rövidebb mint a polgári nap, l. 284. egyenletet. E tény következménye, hogy a csillagos ég állócsillagaival látszólag gyorsabban fordul Földünk körül mint a Nap; azaz ezek megelőzik a Napot tengelyfordulatonként majdnem egy foknyi körmozdulattal. Az állócsillagoknak a tavaszpontra viszonyitott és csillagidőben kifejezett távolsága rectas-censio néven van a naplóba bejegyezve Hasonlókép találjuk e naplóban a középnapnak távolságát a tavaszponttól is, mely adatnak csillagidőben kifejezett értékét a csillagidővel (Sternzeit-tal) czimezett rovatban van feljegyezve. E fontos rendszálak összefüggését bemutatjuk még 101. ábrával.

Ezzel ábrázoltuk b, f, d, g egyenlitőnek és b, c, d, e ekliptikának a vetületeit, úgy a mint ezeket a Föld forgástengelyének végtelen távolságban fekvő P sarkpontjából láthatnók.

Legyen X valamely állócsillag, mely látszólag egyenlőközű körben mozog; továbbá b az egyenlitőben fekvő tavaszpont, c a Nap nyári fordulópontja, d az őszpont, e a Nap téli fordulópontja. A csillagász az ekliptikának e négy pontján a rajzban ismertetett jelekkel tünteti fel. Nevezetes rendszálaink most ezek: $b\,s$ ív a csillag rectascensiója, melynek rovatát a naplóban $A\,R$-el jelölik. Az ív b-től m-ig a középnapnak távolsága a tavaszi ponttól, a csillagászati naplóban csillagidő czimen van bejegyezve. Az ív $b\,n$ a valódi Nap távolsága a tavaszponttól és feljegyzései a csillagászati naplóban a Nap rectascensiója czimén találhatók. Mindez ívek csillagidőben a berlini déllőre vannak felsorolva.

Jelöljük 101. ábrának $b\,m$ ívét $c\,i$-vel, $b\,s$ ívét $A\,R$-el és $m\,s$ ívét τ-val, így egyenletünk ez:

[294] $$\pm\,\tau = c\,i - A\,R$$

Szóval: τ szög kifejezi csillagidőben azt az időt, melylyel a számitásba vett állócsillag hamarább vagy később culminál, mint e középnap. Számértékét úgy találjuk megfigyelésünk déllőjére kifejezve, ha a csillagászati naplóból megfigyelésünk napjára a középnapnak csillagidővel jelölt rovatából $c\,i$ rendszálat kijegyezzük. Folytatólag kiigazitjuk álláspontunk déllőjére, azaz a csillagidőt változtatjuk annyival, a mennyi álláspontunk földrajzi hosszúságuaknak megfelel.

A napló déllőjének és álláspontunk földrajzi hosszkülömbségét földabroszból mérhetjük e czélra. E kiigazitott adatból levonjuk most a tekintetbe vett állócsillagnak $A\,R$ rectascensióját ugyancsak megfigyelésünk napjára a csillagnaplóból véve.

E különbözet kifejezi csillagidőben azt, hogy a csillag menynyivel culminál hamarább vagy később, mint a Nap; a szerint, a mint eredményünk előjele (+) vagy (—).

τ szögnek idejét átváltoztatjuk most középidőre 285 egyenlettel. Tovább kifejezzük a naplóból vett időegyenleggel a Nap felső culminátióját középidőben és megfigyelésünk napjára. Ebből levonjuk τ szöget előjele tekintetbe vételével, az eredmény kifejezi a csillag culminátiópillanatát megfigyelésünk napján és középidőben.

Példa. Hány órakor culminál 1893. deczember 29-ikén, Selmeczbányán, ε ursae major, 2-od rangu állócsillag?

1893. deczember 29-re a csillagidő a berlini naplóban, $ci =$ $= 18$ óra 32 percz 30 másodpercz. A nap rectascensiója változik aznap időperczenkéńt 0·181 időmásodperczczel. Selmecz fekszik Berlintől 22·1 perczczel keletnek, igy kisebbedik a csillagidő a selmeczi déllőre $0·181 \times 22·1 = 4$ másodpercz.

Szóval a csillagidő Selmeczen	18 óra 32 p. 26 mp.
ε ursae major rectascensiója	12 „ 49 „ 22 „
Különbözet $+ \tau =$	6 óra 3 p. 4 mp.
Csillagidőben v. 6·052 órára a 285. egyenlet szerint levonandó $6·052 \times 9·83 =$	59·5 „ — „ 59·5 „
$+ \tau$ középidőben	5 óra 2 p. 4·5 mp.
A középnap culminál . . .	12 órakor
ebből $+ \tau$ levonandó . .	6 óra 57 p. 4·5. mp.
ε állócsillag culminál . . .	5 óra 57 p. 55·5 mp.

reggel középidőben.

A digressió pillanata.

Legyen 102. ábrában Z álláspontunk függőleges iránya, mely a theodolit alhidádatengelyével esik össze; P a földforgástengely sarkpontja, CKN állócsillagnak köralakú pályája. Ekkor következik ábránkból, hogy Z álláspontból NKC kört addig lehet magassági körökkel érinteni, mig körének $PK = 90 - \delta$ sugara kisebb $PZ = \psi = 90 - \varphi$-nél, azaz mig $\varphi < \delta$. Szóval, álláspontunk φ földrajzi szélessége kisebb legyen az állócsillag δ declinátiójánál.

Ez esetben $ZPK = t$ időszöget kell kiszámitani, hogy megtudhassuk K keleti és N nyugati digressiónak időkülömbözetét a culminátió idejétől.

PKZ derékszögü gömbháromszögre találtuk:

[295] $$\cos t = \frac{\text{tang}\,(90 - \delta)}{\text{tang}\,(80 - \varphi)} = \frac{\text{tang}\,\varphi}{\text{tang}\,\delta}$$

Példa. Mikor digredál: β cassiopeja 2·1 rangu állócsillag 1893. október 1-én Selmeczbányán?

A berlini csillagászati naplóban találjuk a csillagidőt október 1-én 12 óra 41 percz 37·3 mpercz. A csillagidő változik e napon időperczenként $236 : (24 \times 60) = 0·164$ mp.-el; a selmeczi déllő fekszik 22·1 időperczczel keletnek, így 0·164 × 22·1 = 3·6 mp. levonandó.

A csillagidő október 1-én a selmeczi déllőre értve	12 óra 41 p. 33·7 mp.
β cassiopeja rectascensiója	— „ 3 „ 31·4 „
τ időszög csillagidőben	12 óra 28 p. 02·3 mp.
12·633 × 9·83 = 123·8 mp. levonandó	— „ 2 „ 3·8 „
+ τ időszög középidőben	12 óra 35 p. 58·5 mp.

Ha eme τ időszöget a középidő szerinti déltől, azaz 12 órából levonjuk, marad — 35 percz 58·5 mpercz. Szóval β cassiopeja csillag 0 óra 35 percz 58·5 mpercz délután áll a selmeczi déllőben.

Folytatólag kiszámitjuk [295] egyenlettel:

$$\cos t = \text{tang}\ \varphi : \text{tang}\ \delta\text{-val}$$

és $\varphi = 48^0\ 26'\ 24{\cdot}6''$ Selmecz földrajzi szélességével és β cassipejának $\delta = 58^0\ 33'\ 55''$ declinatiójával, melyet ismét a csillagászati naplóból vettünk igy:

$$\log \text{tang}\ \varphi = 0{\cdot}052278$$
$$\log \text{tang}\ \delta = 0{\cdot}213796$$
$$\log \cos t = 9{\cdot}838482 \quad \text{ebből:}$$

$t = 46^0\ 25'$ vagy	3 óra 5 p. 40 mp.
Ebből levonandó a kiigazitás, hogy csillagidőből középidőt nyerjünk 3·094 × 9·83 = —	30·3 mp.
	3 óra 5 p. 9·7 mp.

középidővel a culminátió előtt vagy később degredál, ez az állócsillag 1893. október 1-én. Vagy határozottabban szólva, a keleti digressió délelőtt 9 óra, 30 percz, 48·8 másodperczkor figyelhető meg, mig a nyugati digressió délutáni 3 óra, 41 percz, 8·2 másodpercz középidőkor fog beállani.

Ha meggondoljuk, hogy október 1-én a Nap ½ 6 órakor nyugszik le, igy belátjuk β cassiopeja ez időben digressiókra meg nem figyelhető.

A felkelés és lenyugvás pillanatának számitása.

A tekintetbe vett állócsillagnak kiszámitjuk először a kérdésben forgó napra a culminátió pillanatát. Továbbá felirjuk a 13. csoport második egyenletét, mely ez:

$$\cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B$$

Ezután összehasonlitjuk 87. ábrát 100. ábrával, innen:

$$b = 90 - m;\ c = 90 - \varphi;\ a = 90 - \delta;\ B = t$$

az időszög.

Ezeket helyettesitvén:

$$\sin m = \sin \delta \sin \varphi + \cos \delta \cos \varphi \cos t$$

Ha az állócsillag a horizonban áll, akkor $m = 0$ a magassága. Ezzel:

$$0 = \sin \delta \sin \varphi + \cos \delta \cos \varphi \cos \tau$$

Innen:

[296] $$\cos \tau = - \operatorname{tang} \varphi \operatorname{tang} \delta$$

[296] egyenlet átalakitás útján igy is irható:

[297] $$\operatorname{tang} \frac{\tau^2}{2} = \sqrt{\frac{\cos(\varphi - \delta)}{\cos(\varphi + \delta)}}$$

Folytatólag kiszámitjuk τ időszöget álláspontunk φ földrajzi szélességével és az állócsillag δ declinátiójával.

Ezzel megtaláltuk azt az időszöget, melylyel lenyugvása később és felkelése hamarább fog beállani, mint a culminátió.

96. §. A földrajzi szélesség meghatározása.

Műszerünk álláspontjának földrajzi szélességét három módon szoktuk meghatározni.

1. A megfigyelt Nap vagy megfigyelt állócsillagnak magassági szögéből.

2. Megfigyelt állócsillagok azimutszögéből.

3. Időmegfigyelések alapján, midőn állócsillagok átkelését az első magassági körben megfigyeljük.

Az első eljárást inkább csak hozzávető adat megszerzésére használjuk, mert bányászati theodolitjaink beszerzésénél a fősúlyt vizszintes szögek pontos mérésére fektetjük. Onnan van, hogy magassági körük csak 8—10 *cm* átmérővel és 60, esetleg 20 szögmásodpercznyi leolvasással készül. Ily műszerrel nem biztositható pontosabb eredmény a megmért magassági szöggel. A legkényelmesebb megfigyelést biztosithatjuk a második eljárással. Pontossága akkora, mekkorát műszerünk limbusköre nyujthat; tehát biztositva van méréseink megkivánt jósága, sőt kiválóbb óra sem kell eme megfigyelésekre.

A harmadik eljárás Besseltől származik; ezzel biztositható a legpontosabb eredmény. Mérésünk sikere ugyanis független a magassági szögtől, rendkivüli pontos óra sem kell, de a megfigyelések nem oly kényelmesek, mint a csillagdigressiók megfigyelése.

97. §. A földrajzi szélesség meghatározása megfigyelt magassági szögekkel.

1. A Nap megfigyelt culminátióiból.

Legyen m a Napnak megfigyelt és kiigazitott magassági szöge, l. 103. ábrát, hol megfigyeléseink mennyiségtani elemeit az eddig alkalmazott betükkel felismertettük.

Ábránkból következik (+) jelü declinátióra, azaz a nyári félévre:

$$\varphi + (m - \delta) = 90$$

Innen:

[298] $$\varphi = 90 - (m - \delta)$$

δ-át a csillagászati naplóból vesszük.

Feltéve, hogy m_1 megmért szöggel a Nap alsó szélét érintettük a vizszintes pókszállal, akkor kiigazitása ez:

[299] $$m = m_1 + \rho - \eta$$

Hol ρ a Nap látszólagos sugara, η a refractió kiigazitása.

2. Állócsillagok megfigyelt culminátiójából.

Ha a választott csillag δ declinátiója nagyobb, mint álláspontunk φ földrajzi szélessége, l. 104. ábrát, akkor a csillag mind a két culminátiója megfigyelhető.

Legyen m_f a csillagnak kiigazitott magassági szöge, melyet b-ben, azaz felső culminátiójában megfigyeltünk; m_a ugyan-e csillagnak magassága az alsó culminátiójára, akkor 104. ábra nyomán:

$$\varphi = m_a + p \text{ vagy } \varphi = m_f - p;\ p = 90 - \delta$$

Ezzel:

[300] $$\varphi = m_a + (90 - \delta) = m_f - (90 - \delta)$$

A megfigyelt csillag δ declinátióját a csillagászati naplóból vesszük; magassági szöge pedig csakis η refractióval kisebbitendő.

98. §. A földrajzi szélesség és a délIő együttes meghatározása megfigyelt csillagdigressiókból.

1. A sarkcsillag megfigyelt keleti és nyugati digressiójából.

Legyen 102. ábrában Z álláspontunk függőleges iránya, hol műszerünk alhidádatengelye áll; BZ az állandósitott irányzat két végpontja; P az éggömb északi sarka; CKN a sarkcsillag — α ursae minoris — körpályája; $PZ = \psi = 90 - \varphi$ álláspontunk sarktető távolsága; PK a sarkcsillag, $p = 90 - \delta$ sarktávolsága; $PZK = A$ szög a sarkcsillag legnagyobb azimutja, mikor digredál, $ZPK = t$ a digressió időszöge. Mérésünk feladata ez esetben csak annyi, hogy Z pontban még nappal felállunk és ZB viszonyitó irányzatot bemérünk; legyen O_b a limbus olvasása. Utóbbi adat feljegyzése után bevárjuk, mig a [295] egyenlettel kiszámitott digressió pillanata közeledik, hogy érintetlen limbuskörrel, tehát csakis az alhidáda és a vizszintes tengely forditása mellett látócsövünk függőleges pókszálával a sarkcsillagot megirányozzuk. Ez alkalommal az alhidádatengelyt csak addig forgatjuk, mig A azimutszög megszünik nagyobbodni. Ezt onnan ismerjük fel, hogy a csillag több időmásodperczen át csakis a függőleges pókszálon halad végig. Ekkor leolvassuk műszerünk limbuskörén O_1 helyzetet, mely a keleti digressiónak felel meg. Folytatólag bevárjuk a csillag N nyugati digressióját, hol ugyancsak igy eljárván, O_2 olvasunk le.

Az állócsillag köralaku pályája eredményezi, hogy PKZ és PNZ két összevágó derékszögü gömbháromszög. Innen következik $A = \frac{O_2 - O_1}{2}$ vagyis az, hogy álláspontunk ZP déllősikja O_2 és O_1 olvasások szögének felező függőleges síkja. A déllőnek megfelelő O_d limbusolvasás lesz:

[301] $$O_d = \frac{O_2 + O_1}{2}$$

Továbbá az állandósitott ZB irányzatnak α_z^b azimutszöge:

[302] $$\alpha_z^b = O_b - \frac{O_2 + O_1}{2}$$

Ha O_b esetleg kisebb $\frac{O_2 + O_1}{2}$-nél, akkor 360 fokot kell hozzáadni. A földrajzi szélességet ezután KPZ derékszögű gömbháromszögből számitjuk. A [20] egyenlet nyomán irható:

$$\sin A = \frac{\sin(90 - \delta)}{\sin(90 - \varphi)} = \frac{\cos\delta}{\cos\varphi}.$$

Innen:

$$\cos\varphi = \frac{\cos\delta}{\sin A} \qquad [303]$$

A sarkcsillag δ declinátióját a csillagászati naplóból vesszük, $A = \frac{O_2 - O_1}{2}$ mérésünkből ismeretes.

A fejtegetett eljárásnak nagy hátránya, hogy csak ritkán alkalmazható. T. i. ha a sarkcsillag t digressió időszögét Selmecznek $\varphi = 48^0\ 26'\ 25''$ földrajzi szélességére $\cos t = \operatorname{tang}\varphi : \operatorname{tang}\delta$-vel kiszámitjuk, azt találjuk, hogy e két megfigyelés $2t$ időköze 11 óra, 46 percz, 40 másodpercz középidőt tesz. Az egyik digressió ezért rendszerint már nappali időre esik, azaz meg nem figyelhető. Ezzel magyarázható, hogy a bányamérnök a következő eljárást szivesebben alkalmazza.

2. Két vagy több állócsillag megfigyelt digressiójából.

Az eljárást két állócsillaggal ismertetjük. Legyen 105. ábrában ismét Z műszerünk álláspontja, P az égboltozat északi sarka, C_1 az egyik, C_2 a második állócsillag, melyek declinátiója δ_1 és δ_2. Jelölje továbbá A_1 és A_2 azt a két azimutszöget, mely e két csillagdigressiónak megfelel; O_b, O_1 és O_2 a limbuskörön tett leolvasást akkor, mikor látócsövünk irányzótengelye ZB, ZC és ZC_2 függőleges síkokban állott.

Ezeket előrebocsátva, következik ábránkban PC_1Z és PC_2Z derékszögű gömbháromszögekre:

$$\sin A_1 = \frac{\sin(90 - \delta_1)}{\sin(90 - \varphi)} = \frac{\cos\delta_1}{\cos\varphi} \qquad [304]$$

$$\sin A_2 = \frac{\cos\delta_2}{\cos\varphi} \qquad [305]$$

E két egyenlet osztata:

$$\frac{\sin A_1}{\sin A_2} = \frac{\cos\delta_1}{\cos\delta_2}$$

Ebből:

[306] $$\sin A_1 = \frac{\cos \delta_1}{\cos \delta_2} \sin A_2$$

Továbbá 105. ábrából:

$$O_2 - O_1 = A_1 + A_2 = w$$

Innen:

[307] $$A_1 = w - A_2$$

Ennek sinusa:

$$\sin A_1 = \sin w \cos A_2 - \cos w \sin A_2$$

[306] egyenlet helyettesitése által:

$$\frac{\cos \delta_1}{\cos \delta_2} \sin A_2 = \sin w \cos A_2 - \cos w \sin A_2$$

Ebből:

[308] $$\text{tang}\, A_2 = \frac{\sin w \cos \delta_2}{\cos \delta_1 + \cos w \cos \delta_2}$$

Ekkor [307] egyenlettel:

[309] $$A_1 = w - A_2$$

A déllőnek megfelelő O_d olvasása a limbuskörön következik az ábra nyomán:

[310] $$O_d = O_1 + A_1 = O_2 - A_2$$

Az állandósitott BZ viszonyitó vonalnak α_z^b azimutja:

[311] $$\alpha_z^b = O_b - O_d$$

A földrajzi szélesség [304] és [305] egyenletekből:

[312] $$\varphi = \frac{\cos \delta_1}{\sin A_1} = \frac{\cos \delta_2}{\sin A_2}$$

A megfigyelés foganatositását már a megelőző esettel ismertetvén, még csak a csillagok megválasztására van megjegyzésünk. Megfigyeléseinkre a csillagászati naplóból csakis oly állócsillag választható, melynek δ declinátiója nagyobb, mint álláspontunk φ földrajzi szélessége, φ a mi czéljainkra bármily földabroszon lemérhető. A választott csillag 2-od vagy 2·5 rangú legyen, hogy látócsöveinkben a kellően kivilágitott pókszálakkal együtt is láthassuk. Kényelem szempontjából oly csillagokat szoktunk választani, melyek digressiója 20—30 perczny időközökben bekövetkezik, hogy 1·5—2 óra munkával 4—5 csillagnak a digressióját figyelhessük meg.

99. §. A földrajzi szélesség meghatározása időmegfigyelésekből.

Bessel utasitása szerint találjuk álláspontunknak földrajzi szélességét a legpontosabban, ha oly állócsillagnak keleti és nyugati átkelését az első magassági körben megfigyeljük, mely rövid időközben megy végbe.

Legyen feladatunk ismertetésére 106. és 107. ábrában P az éggömb északi sarkpontja, Z műszerünk folytatott alhidádatengelyének egyik pontja, a tetőpont; mn a megválasztott állócsillag egyenlőközü köre. Ábránkból következik, hogy az állócsillag az első magassági kört, vagyis Z álláspontunknak keletről nyugatra haladó függőleges síkját csak az esetben lépheti át, ha $Em = \delta$ declinátiója kisebb, mint álláspontunk $EZ = \varphi$ földrajzi szélessége. Ebből következik a megfigyelendő csillagra mint szabály: A csillag declinátiója kisebb legyen, mint álláspontunk földrajzi szélessége. Nagyságra 2-od vagy 2·5-ed rangú legyen, hogy rendes műszereinkkel megfigyelhessük. Mind a két átkelés a tervbe vett időben és rövid időközzel legyen megfigyelhető.

A megfigyelés és az eredmény számítása.

A müszert felállitjuk a megválasztott álláspontba, hol a már megelőzőleg meghatározott délló segitségével a látócső irányzótengelyét a kelet-nyugati sík irányába helyezzük. Ha ekkor az előbb kiszámitott első átkelés ideje következik, állitjuk a műszert a magassági szögre, melyet ismét már előre kiszámitottunk. Igy megfigyeljük először a keleti átkelést 107. ábra szerint C pontban, utána a nyugati átkelést C_2 pontban. E két átkelésnek óránkról leolvasott t_1 és t_2 idejével kiszámithatjuk a PKZ derékszögü gömbháromszögnek τ-val jelölt szögét. Ugyanis mint $(t_2 - t_1) : 2$ időnek mértéke szögmértékben igy irható fel:

[313] $$\tau = 15 \times \frac{t_2 - t_1}{2}$$

Ugyan-e gömbháromszög alapján álljon ez az egyenlet is:

$$\cos \tau = \frac{\text{tang}\,(90 - \varphi)}{\text{tang}\,(90 - \delta)} = \frac{\text{tang}\,\delta}{\text{tang}\,\varphi}$$

Innen:

[314] $$\text{tang}\,\varphi = \frac{\text{tang}\,\delta}{\cos \tau}$$

Szóval a [313] egyenlettel kiszámitott τ-val és a csillagászati naplóból vett δ-val kiszámitjuk [314] egyenlettel a földrajzi szélességet. Eljárásunk pontosságát megitélhetjük, ha [314] egyenletet φ és τ szerint külzelékeljük.

Tudniillik:

$$\frac{d\varphi}{\cos\varphi^2} = -\frac{\operatorname{tang}\delta}{\cos\tau^2}\sin\tau\, d\tau$$

Ez az eredeti egyenlettel elosztva és $d\varphi$ szerint feloldva, lesz:

$$d\varphi = \frac{1}{2}\sin 2\varphi \,.\, \operatorname{tang}\tau\, d\tau \qquad [315]$$

A földrajzi szélesség $d\varphi$ hibája egyenes arányban nől az időszög tangensével. A csillagot ez okból úgy választjuk, hogy τ kicsiny legyen. Lássuk eme hiba értékét Selmeczen, hol $\varphi = 48^0\, 26'\, 25''$ és ha $\tau = 1$ óra $= 15^0$, időmegfigyelésünk esetleges hibája:

$$d\tau = 1 \text{ másodpercz} = 15''$$

Ekkor [315] egyenlet szerint:

$$d\varphi = 0{\cdot}24767\, d\tau = 0{\cdot}000017 = \text{arc } 3''$$

Ebből tapasztaljuk, hogy φ még mindig 3''-ig megbizható, ha megfigyelt alaptényezőnk, azaz τ időszög 15''-el hibás volt. Ha tehát oly csillagot választunk, melynek τ szöge csak félóra, vagy még ennél is kevesebb, akkor φ minden nehézség nélkül 1''-ig pontosan meghatározható.

100. §. A földrajzi hosszúság meghatározása.

Ha ismerjük az időket, melyeket Földünk két pontjában, és pedig mindenikben saját déllője szerint ugyanabban a pillanatban számitunk, akkor emez idők különbzete a két déllő földrajzi hosszkülönbségének mértéke. E pontok közül az fekszik keletnek, a melyiknek időszámitása nagyobb.

Viszonyitó déllőül eddig három déllőt használtak, úgymint Ferro, Greenwich és Páris déllőit. Legujabban a földirók nemzetközi értekezletén azt határozták, hogy a jövőben csakis a London melletti greenwichi csillagvizsgáló főműszerén keresztül haladó déllő használtassék kiinduló déllőül a földrajzi hosszúságok kifejezésére. Jelölésére rendszerint λ betűt alkalmaznak. Számértékét úgy szög-, valamint időmértékkel fejezzük ki; azaz a kezdő déllőtől nulla foktól 180 fokig, vagy nulla órától 12 óráig haladunk keletnek (—) előjellel, nyugatnak (+) előjellel.

E helyen ismertetjük még nehány fővárosnak és hazai intézetnek földrajzi rendszálait, melyeket számitásainkra használhatunk.

A hely neve	φ földrajzi szélesség			λ földrajzi hosszúság Berlintől + nyugat, — kelet			
	°	′	″	±	óra	p.	mp.
Bécs (uj csillagvizsgáló)	48	13	55	—	0	11	46 7
Berlin	52	30	17	—	0	0	0
Budapest (műegyetem)	47	29	38	—	0	53	12 2
Ferró	—	—	—	+	2	04	14
Greenwich	51	28	38	+	0	53	35
Herény (Gothárd vizsgálója).	47	45	47	—	0	12	50
Kalocsa (érseki vizsgáló)	46	31	41	—	0	22	21
Kis-Kartal (br. Podmaniczky)	47	41	55	—	0	24	37
Ó-Gyalla (uj vizsgáló).	47	52	27	—	0	19	11
Páris (nemzeti vizsgáló).	48	50	11	+	0	44	14
Selmeczbánya	48	26	25	—	0	22	5
A zónaidőszámitás déllője	—	—	—	—	0	06	25

Hosszhatározásokra oly tüneményeket figyelünk meg, melyek Földünk minden pontjából ugyanazon pillanatban láthatók. Ily tünemény a Holdfogyatkozás, a Napfogyatkozás, a Jupiter elfödése saját bolygói által, vagy állócsillagnak elfödése Holdunk által.

A földrajzi hosszhatározás holdfogyatkozás megfigyelése által csak megközelitő adatot nyujthat, mert Földünknek a Holdra vetett árnyéka nem mutat élesen határolt széleket, úgy hogy ily forrásu meghatározásaink hibája egy időperczre, azaz 15 szögperczre becsülhető.

A Jupiter négy holdján biztos az elfödés megitélése 10—20 időmásodperczig, a szerint, a mint látócsövünk nagyit.

A földrajzi hosszhatározás a távirό segitségével.

A legegyszerűbb és legpontosabb eljárások egyike az úgynevezett amerikai módszer, melyet Charles Walker és William Bond az amerikai tengerpartok felmérése alkalmával használt legelőször. Feltétele az, hogy a szóban forgó két pont távíróval legyen összekötve. Az eljárás alapelve ez:

Mind a két pont déllőiben már előre megállapitott állócsillagoknak culminátióit figyeljük meg; ezeknek időpillanatait feljegyezzük ismét mind a két pontban. Ezt úgy biztositjuk, hogy megfigyelésünket a távolabbi állomásra sürgönyözzük, mit csengőjellel, vagy nagyobb pontosság biztositására a chronograf segitségével teszünk. A megfigyelésre szükséges tehát minden állomáson a déllőben felállitott theodoliton kivül: egy chronograf, egy jeladó készülék, egy relée a helyi áram működtetésére és a szükséges elemek. Pontosan járó ingás órát, mely másodperczeket lengjen csak, az egyik állomáson csatolunk az áramkörbe, igy csak egy időmérővel van dolgunk.

A chronograf 20 *cm* átmérőjü, 60 *cm* hosszú henger, melyet pontosan járó óraművel tengelye körül lassan forgatunk. E henger fölött két jelzőtű, esetleg jelzőtoll úgy van elhelyezve, hogy kölcsönös távolságuk megtartása mellett, egyenlőközüen a chronograf forgástengelyével, lassú, de egyenlő sebességgel mozdittassanak. Tudniillik a chronograf forgástengelyén fogaskerék van megerősitve, mely más fogazott kereket hajt; ennek tengelye mindvégig csavarmenetekkel bir, és igy a jelzőtollakat folyton eltolja. Ha tehát a chronograf hengerére papirt feszitünk és óraművét meginditjuk, akkor mind a két jelzőtoll két egyközü csavarvonalat rajzolna a papirhengerre, ha a tollak a hengert szakadatlanul érintenék. Az érintés azonban csak a jelzendő pillanatban történik az áram megszakitása által, mely a jelzőtollat azonnal ismét visszahúzza.

Készülékeink használata röviden ez: mind a két chronografnak egyik jelzőtollát összekötjük az áramvezetékkel úgy, hogy óránk mindeniknek papirlapjára a másodperczeket 10—10 *mm*-nyire fekvő pontokkal feljegyezze, l. 108. ábrában mn pontsort. A két chronograf második jelzőtollát pedig úgy hozzuk összeköttetésbe mind a két megfigyelőnek a jeltadó készülékével, hogy emezekkel minden adott jel a chronografnak adassék át.

Igy jeleztetik mind a két chronografra megfigyelésünk kezdő- és végső pillanata, mely rendszerint kerek számú első perczczel esik össze, l. α-ban a több ponttal adott jelet. Hasonlólag jeleztetik minden állócsillag culminátiója, melyet megfigyeltünk, l. β-ban az ily czélu pontot. A megfigyelés kezdő- és végső jeleihez irjuk az órát és a perczek számát, mig a csillagátmenet jeléhez csakis a csillag jelzőbetüjét irjuk. A síkba kiteritett papiroslapon lemérhetjük végtére megfigyeléseink idejét a másodpercznek századrészeig.

Legyen a 109. ábrában B és C a chronograf lefejtett papirapjának egy-egy része, melyen $\Delta\lambda$ földrajzi hosszkülönbség meghatározása czéljából T_1 és T_2 időközöket rájeleztünk. Ha feltesszük, hogy B a kaleti és C a nyugati megfigyelő állomás eredménye, akkor ezt igy magyarázhatjuk:

Jelöltessék 1-el az átment B déllőben, melynek jele C chronografon nem a megfelelő 2 pontba fog esni, hanem i-vel hátrább; azaz 3 pontba, mert az elektromos áramnak is idő kell, mig C déllőbe érkezik. Ha folytatólag ugyanez a csillag C déllőbe érkezik, feljegyezzük C chronografon 4 pontba; de ez a jel most B chronografra ismét i-vel érkezik később, mig az utat odáig megteszi; jele tehát nem a neki megelőző 5 pontba, hanem 6 pontba fog esni. Szóval az időjelek a keleti B pontban i-vel távolabbra, C pontban i-vel közelebbre esnek. Ennek kifejezője ez:

$$T_1 = \Delta\lambda + i$$
$$T_2 = \Delta\lambda - i$$

Innen $\Delta\lambda$ a földrajzi hosszkülönbség:

[316] $$\Delta\lambda = \frac{T_1 + T_2}{2}$$

Az elektromos jelzés áramlásának áram i ideje:

[317] $$i = \frac{T_1 - T_2}{2}$$

Látjuk tehát, hogy eme módszerrel még az elektromos áram sebességét is megtudhatjuk. A legnagyobb szabatosság biztositására, mely e módon elérhető, még több igen csekély hibaforrásnak a tényezőit kell számitásba venni. Tudniillik eltekintve attól, hogy 8—10 csillagnak átkeléseit legalább is négy izben megfigyeltessünk, kell még tekintetbe venni: a használt óra legparányibb hibáit; mind a két állomáson a használt theodolit irányzósíkjának netaláni eltérését a déllő síkjától; továbbá a két megfigyelőnek személyi megfigyelő hibáját is. De minthogy mind e tényezők feladataink szabta rendes hibahatárát még el nem érik, utasitjuk ezek tárgyában az olvasót vagy dr. Jos. Herr, vagy dr. F. Brünnow műveire „Lehrbuch der sphärischen Astronomie".

101. §. Földünk alakjának és nagyságának meghatározása.

Newton bebizonyitotta a természettan igazolt tételeivel, hogy Földünk alakja nem lehet gömb, hanem hogy sarkpontjaiban lelapulással kell birnia; azaz csak ellipsis lehet a geoid déllő szerinti metszete. Nagyságát ekkor csak úgy lehetett meghatározni, hogy földfelületünkön legalább két, alakra nézve lehetőleg különböző, déllőívet mértek meg, és e két mérés adataiból számitották a déllő nagyságát.

A számitás egyenletei.

Legyen a Földünknek az egyenlitőben mért hosszabb féltengelye, b a Föld forgástengelyében fekvő rövidebb féltengelye az ellipsisnek, akkor középponti egyenlete:

[318] $$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$$

Ez igy is irható:

[319] $$\frac{X^2}{a^2}\left(1 + \frac{Y^2}{X^2}\,\frac{a^2}{b^2}\right) = 1$$

φ a földrajzi szélesség kifejezésére külzelékeljük [318]-dik egyenletet:

[320] $$-\operatorname{cotg}\varphi = \frac{dY}{dX} = -\frac{b^2}{a^2}\,\frac{X}{Y}$$

Ha [320]-at [319]-be helyettesitjük:

[321] $$\frac{X^2}{a^2}\left(1 + \operatorname{tang}\varphi^2\,\frac{b^2}{a^2}\right) = 1$$

Földünk ε számtani külpontossága továbbá igy fejezhető ki:

[322] $$\varepsilon = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$$

Innen:

[323] $$\frac{b^2}{a^2} = 1 - \varepsilon^2$$

[323] egyenletet [321]-be helyettesitve és X szerint feloldva:

[324] $$X = \frac{a\cos\varphi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2\sin\varphi^2}}$$

[324] egyenlet helyettesitése mellett kiszámitjuk Y értékét [320] egyenletből:

[325] $$Y = \frac{a\sin\varphi\,(1 - \varepsilon^2)}{\sqrt{1 - \varepsilon^2\sin\varphi^2}}$$

Kifejezhető még a déllőív görbületi sugara, ha ρ-val jelöljük igy:

[326] $$\rho = \frac{1}{\sin\varphi}\cdot\frac{dX}{d\varphi}$$

Folytatólag kiszámitjuk $\frac{dX}{d\varphi}$ értékét [324] egyenletből és helyettesitjük [326]-ban ezzel:

[327] $$\rho = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{\sqrt{(1-\varepsilon^2 \sin\varphi^2)^3}}$$

A mérés feladata.

Pontos háromszögeléssel megmérjük oly földi vonalnak G hosszúságát, melynek két végpontja egyazon déllőben fekszik és azonkivül közel még a Föld egyik sarkához. Eme vonal mindkét végpontjában meghatározzuk a földrajzi szélességet is, hogy utóbbi adatokkal a megmért déllőív középpontjának φ földrajzi szélességét e két adat számtani közepeséből kiszámithassuk. Ezekkel kifejezhető G déllőív hosszúsága [327] egyenlet segitségével igy:

[328] $$G = \frac{\pi a(1-\varepsilon^2)}{180\sqrt{(1-\varepsilon^2 \sin\varphi^2)^3}}$$

A második megmérendő déllőívet közel az egyenlitőhöz választjuk. Legyen G_1 a háromszögeléssel meghatározott hosszúság, és φ_1 az ív középpontjára talált földrajzi szélesség. Kifejezése ekkor úgy mint az imént:

[329] $$G_1 = \frac{\pi a(1-\varepsilon^2)}{180\sqrt{1-\varepsilon^2 \sin\varphi_1{}^2)^3}}$$

[328] és [329] egyenlet osztatában eltünik a földgömbtengely; igy ε kiszámitására használható:

[330] $$\varepsilon^2 = \frac{1-\left(\frac{G}{G_1}\right)^{\frac{3}{2}}}{\sin\varphi_1{}^2 - \left(\frac{G}{G_1}\right)^{\frac{3}{2}}\sin\varphi^2}$$

Folytatólag [329]-ből:

[331] $$a = \frac{180\, G_1\sqrt{(1-\varepsilon^2 \sin\varphi_1{}^2)^3}}{\pi(1-\varepsilon^2)}$$

[323] egyenletből:

$$b = a\sqrt{1-\varepsilon^2}$$

Ezekkel Földünk p lelapulása:

[332] $$p = \frac{a-b}{a} = \frac{1}{a:(a-b)}$$

A franczia kormány által tétetett ily czélu mérés 1735-ben, melynek egyik déllőívét a lappok földjén, másodikát Peruban választották.

A perui fokmérés eredménye.

Földrajzi szélessége a két végpontnak:

Tarquinak $- 3^0\ 4'\ 32{\cdot}068''$

Cotchesquinek $+ 0^0\ 2'\ 31{\cdot}387''$

Ezek számtani középese mint a bemért ív középpontjának földrajzi szélessége $\varphi = - 1^0\ 31'\ 0{\cdot}34''$ ét az ív hosszúsága:

$$G = 56734{\cdot}01 \text{ tois.}$$

A lappföldi mérés.

A két végpontnak földrajzi szélessége:

Malöru $+ 65^0\ 31'\ 30{\cdot}265''$

Pachtawara $+ 67^0\ 8'\ 49{\cdot}830''$

Innen a bemért ív középpontjának földrajzi szélessége:

$$\varphi_1 = 66^0\ 20'\ 10{\cdot}05''$$

A bemért ívnek hosszúsága:

$$G_1 = 57196{\cdot}15 \text{ tois.}$$

Emez adatokkal ered az előbb közölt egyenletekkel:

$$\varepsilon^2 = 0{\cdot}0064351$$

$$a = 3271651 \text{ tois.}$$

A Föld lelapulása:

$$p = \frac{1}{310{\cdot}29}$$

Bessel felhasználta e mérésen kivül még kilencz sikerült fokmérés eredményét, melyek alapján Földünknek legvalóbbszinü méreteit, úgy mint ezeket e tankönyv bevezetésében ismertettük, leszármaztatta.

Sajtóhibák.

24.	lapon	3.	sorban	vizsálás	helyett:	vizsgálás
27.	»	20.	»	$G f v$	»	$G f r$
30.	»	10.	»	$V O V$	»	$v o v$
41.	»	31.	»	meglehető	»	meglehetős
64.	»	23.	»	0·00025	»	0·0012
64.	»	28.	»	0·00006	»	0·0009
64.	»	90.	»	6	»	90 *mm*
66.	»	30.	»	pontjában	»	középpontjában
70.	»	9.	»	0·1 *m*	»	0·1 *mm*
91.	»	10.	»	bemutattuk	»	a 84., 85. old. bemutattuk
92.	»	1.	»	rovatban	»	rovatba
94.	»	10.	»	*n* végpont	»	*a* végpont
99.	»	1.	»	átható	»	látható
101.	»	18.	»	Δh leolvasható	»	Δh leolvasása
102.	»	30.	»	feszitőket	»	feszitőket veretünk
104.	»	6.	»	iuk	»	juk
105.	»	26.	»	ε	»	ε_1
105.	»	30.	»	legvalóbbszinü	»	legvalóbbszinü értékét
113.	»	9.	»	hosszat	»	hossza
122.	»	14.	»	$DE - b$	»	$DE = b$
131.	»	1.	»	Rajzpapiros.	»	48. §. Rajzpapiros.
132.	»	3.	»	hogy ez	»	hogy a poligon
134.	»	16.	»	a 19. ábra	»	a 19. tábla
136.	»	9.	»	egyerű	»	egyszerű
138.	»	2.	»	üvegek	»	üregek
151.	»	7.	»	ideglenes	»	viszonyitó
152.	»	3.	»	$\text{tang } w - \frac{B}{A}$	»	$\text{tang } w = \frac{B}{A}$
152.	»	6.	»	$(Z_1X_2 - Z_2X_1)_2$	»	$(Z_1X_2 - Z_2X_1)^2$
152.	»	12.	»	ábrában	»	ábra
152.	»	23.	»	$\text{tang } \alpha -$	»	$\text{tang } \alpha =$
155.	»	10.	»	$\sqrt{r^2\left(\frac{r}{2}\right)^2}$	»	$\sqrt{r^2 - \left(\frac{r}{2}\right)^2}$
156.	»	4.	»	186. tábla	»	186. ábra
157.	»	2.	»	Alapeszme.	»	67. §. Alapeszme.
169.	»	11.	»	felszinének	»	felszinén

179.	lapon	27.	sorban	$X_2 - Y_3$	helyett:	$X_2 - X_3$
179.	»	28.	»	$X_2 \quad X_3$	»	$X_2 - X_3$
180.	»	10.	»	[ ]	»	[86]
181.	»	29.	»	oly síknak	»	ama síknak
190.	»	28.	»	$v - m$	»	$v = m$
191.	»	21.	»	a telep síkjában	»	az elvető síkjában
200.	»	5.	»	Ha *A*, *B*, *C* *ABC*-vel	»	Ha *ABC*-vel
205.	»	3.	»	*B* és *C*	»	*B* és *C* szög
212.	»	3.	»	szögfölösszeg	»	szögfölösség
218.	»	32.	»	fokkálónak	»	fokhálónak
220.	»	35.	»	e Földgömb	»	a Földgömb
226.	»	22.	»	horizontja	»	horizonja
231.	»	1.	»	kitüntetjük	»	kitűzetjük
235.	»	21.	»	$R \cos \varphi_1 (n_0)$	»	$R (n_0)$
235	»	22.	»	$R \cos \varphi_2 (n_0)$	»	$R (n_0)$
243.	»	10.	»	*C*-vel	»	*e*-vel
243.	»	22.	»	$\int e^{-h^2 v^2}$	»	$\int e^{-h^2 v^2} dv$
246.	»	6.	»	megfigyelisek	»	megfigyelések
247.	»	24.	»	$\sqrt{\frac{h}{[w^2]}}$	»	$\sqrt{\frac{n}{[w^2]}}$
252.	»	21.	»	$h : h^2_n$	»	$h^2 : h^2_n$
274.	»	35.	»	3,	»	0,
275.	»	24.	»	$\frac{\pm 1}{\sin \delta_n}$	»	$\frac{\pm 1}{\sin \alpha_n}$
277.	»	12.	»	$C a b$	»	$C a B$
279.	»	*c d*	rovatb.	180	»	360
304.	lapon	9.	sorban	47. §.	»	46. §.
307.	»	17.	»	$\varepsilon_1 = W_{mm} \quad W_4$	»	$\varepsilon_1 = W_{mm} - W_1$
307.	»	22.	»	oldalakka	»	oldalakkal
314.	»	1.	»	minden egy	»	mindenik
317.	»	14.	»	elölt	»	jelölt
328.	»	30.	»	emelős-készülékes	»	emelős készülék
329.	»	5.	»	mérőrúdon a jelzőszámmal együtt	»	mérőrúdnak a jelzőszámmal
336.	»	5.	»	64. §.	»	65. §.
352.	»	23.	»	$Y_1 = Y + \sin \gamma$	»	$Y_1 = Y + h \sin \gamma$
371.	»	3.	»	nnen	»	Innen
372.	»	33.	»	$\sin (\varsigma \quad \varepsilon)$	»	$\sin (\varsigma - \varepsilon)$
375.	»	6.	»	jelolt	»	jelölt
375.	»	31.	»	oly előmetszettel	»	elölmetszettel
380.	»	13.	»	; síkban	»	; eme síkban
380.	»	31.	»	15″	»	15°
380.	»	32.	»	15″	»	15⊤
391.	»	16.	»	cslllagászati	»	csillagászati
392.	»	37.	»	[286]	»	[288]

393.	lapon	2.	sorban	[286]	helyett:	[288]
393.	»	4.	»	[287]	»	[289]
396.	»	18.	»	06'	»	07'
396.	»	23.	»	21'	»	22'
399.	»	12.	»	leglevő	»	meglévő
399.	»	23.	»	e tekintetbe	»	a tekintetbe
401.	»	4.	»	32. p. 30 mp.	»	52 p. 26 mp.
401.	»	8.	»	32 percz	»	52 percz
401.	»	14.	»	5 óra	»	6 óra
401.	»	16.	»	57 percz	»	2 percz
402.	»	6.	»	28 percz	»	38 percz